NEUE
THEORIE DER REIBUNG

VON

N. PETROFF,

KAISERL. RUSS. GENERAL-MAJOR DES GENIE-CORPS;
PROFESSOR AN DER MILITÄR-INGENIEUR-AKADEMIE UND AM TECHNOLOGISCHEN INSTITUTE
ZU ST. PETERSBURG.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS AUS DEM RUSSISCHEN

ÜBERSETZT VON

L. WURZEL,

KAIS. RUSS. COLLEGIENRATH; INGENIEUR DES MINISTERIUMS DER VERKEHRSMITTEL.

VON DER KAIS. RUSS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU ST. PETERSBURG MIT DEM LOMONOSOWPREISE GEKRÖNTE SCHRIFT.

NEUE

THEORIE DER REIBUNG

VON

N. PETROFF,

KAISERL. RUSS. GENERAL-MAJOR DES GENIE-CORPS;
PROFESSOR AN DER MILITÄR-INGENIEUR-AKADEMIE UND AM TECHNOLOGISCHEN INSTITUTE
ZU ST. PETERSBURG.

MIT GENEHMIGUNG DES VERFASSERS AUS DEM RUSSISCHEN

ÜBERSETZT VON

L. WURZEL,

KAIS. RUSS. COLLEGIENRATH; INGENIEUR DES MINISTERIUMS DER VERKEHRSMITTEL.

VON DER KAIS. RUSS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU ST. PETERSBURG MIT DEM LOMONOSOWPREISE GEKRÖNTE SCHRIFT.

HAMBURG UND LEIPZIG,

VERLAG VON LEOPOLD VOSS.

1887.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorrede des Uebersetzers.

Bis in die neueste Zeit mangelte es uns zur Lösung der den Reibungswiderstand betreffenden Fragen noch an jeglicher Grundlage. Die Techniker erwarben einerseits auf der Schulbank volles Zutrauen zu den Coulomb'schen Gesetzen, sie glaubten an ihre wissenschaftliche Stichhaltigkeit und waren der Ueberzeugung, dass der Reibungscoefficient eine abstracte und constante Zahl sei, welche weder von der Geschwindigkeit, noch von Temperatur oder dem Flächeninhalte der Auflagerflächen sich reibender Körper abhinge und dass der Gesammtwiderstand der Reibung das Product dieser constanten Zahl mit dem constanten Normaldrucke sei u. s. w. Andererseits bewies ihnen die alltägliche Erfahrung die Unrichtigkeit dieser Gesetze.

Wir sehen merkwürdige Widersprüche: der Techniker fühlt (wenn es gestattet ist sich dieses Ausdruckes zu bedienen), dass Coulomb's Gesetze kein Zutrauen verdienen, mit einem Worte — dass sie unrichtig sind, und trotzdem greift derselbe, sobald er den Reibungswiderstand eines gewissen Maschinentheiles zu berechnen hat, entschlossen nach dem Ingenieurtaschenbuche, schlägt den entsprechenden Reibungscoefficienten nach, multiplicirt denselben mit dem Normaldrucke und glaubt mit vollen Ernst die Frage wissenschaftlich gelöst zu haben.

Gelehrte Ingenieure und Mathematiker haben schon öfters die Aufmerksamkeit auf diesen auffallenden Widerspruch zwischen den thatsächlichen Beobachtungen und den als Gesetz geltenden Thesen von Coulomb gerichtet. Amerikanische, englische, belgische, französische und deutsche Gelehrte fingen nun an, die einschlägigen Fragen zu studiren, und Woodburry gelang es sogar auf die Idee zu kommen, dass die Erscheinungen des Reibungswiderstandes in geschmierten Maschinentheilen mit den Erscheinungen des Ausfliessens von Flüssigkeiten aus dünnen Oeffnungen verglichen werden könnten und dass die den Reibungswiderstand geschmierter Maschinen betreffenden Fragen deshalb mit Hülfe der Hydrodynamik gelöst werden müssten. Die zahlreichen Arbeiten der Gelehrten sind leider höchst unvollständig, sie besitzen keinen gemeinschaftlichen Zusammenhang, sind auf keinen festen Grundsätzen basirt und scheinen einander leider oft genug zu widersprechen. Deshalb dürfen wir wohl mit Recht die Behauptung aufstellen, dass namentlich die Versuche der hervorragendsten Gelehrten, wie Thurston, Hirn, Kirchweger und anderer, anstatt die technische Lösung der Fragen über die Reibung zu geben, das Zutrauen der Techniker zu dem Nutzen der einschlägigen Versuche nur beeinträchtigt haben, denn dem Praktiker schien zu oft Widersprüche nicht nur zwischen den Reibungscoefficienten, welche von verschiedenen Schriftstellern angegeben wurden, sondern auch zwischen den Zahlenresultaten und den Schlussfolgerungen, welche ein und derselbe Gelehrte aus diesen Zahlen machte, zu finden.

Der grosse Verdienst des russischen Gelehrten, dessen „Theorie der Reibung" wir der Aufmerksamkeit unserer deutschen Fachgenossen unterbreiten, besteht darin, dass er, ohne sich bei unbestimmten Andeutungen aufzuhalten, weit früher als der Engländer Beauchamps-Tower und noch vor dem Amerikaner Woodburry die Frage über die Reibung geschmierter Maschinentheile in's Gebiet der Hydrodynamik einführte, die theoretische Lösung derselben entschlossen ergriff, das gegenseitige Verhältniss zwischen der Grösse des Reibungswiderstandes und den denselben bedingenden Elementen fand, und endlich eine einfache mathematische Formel, als Ausdruck der Abhängigkeit des Reibungswiderstandes von der Belastung, der Geschwindigkeit, der Grösse der Berührungsfläche und von den Eigenschaften des Schmiermittels aufstellte.

Professor N. P. Petroff verglich ferner seine theoretischen Resultate mit den Versuchen von Hirn, Kirchweger, Böckelberg und Thurston und bewies, dass diese Versuche seine Formel bestätigen und einander in keiner Weise widersprechen.

Um nun in wenigen Worten zu zeigen, welche grosse Umwälzung die Petroff'sche Theorie in der Lehre von der Reibung hervorbringt, sei es uns gestattet, an dieser Stelle einige Schlussfolgerungen derselben mitzutheilen. Und zwar:

a) Sind die Maschinentheile gut aneinander geschliffen, reichlich geschmiert und der Druck nicht übermässig, berühren sich die Metalltheile unmittelbar nicht, so ist der Reibungswiderstand das Resultat der inneren Reibung der Schmierschicht, und folglich wird jede Ursache, welche die innere Reibung dieser Schicht modificirt, auch den Reibungswiderstand des Maschinentheiles verändern.

b) Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Reibung der Maschinentheile der Grösse der Berührungsfläche der sich reibenden Theile proportional.

c) Der Reibungswiderstand ist der relativen Geschwindigkeit der sich reibenden Flächen proportional.

d) Der Reibungswiderstand steht in umgekehrtem Verhältnisse zur Dicke der Schmierschicht, und daraus erhellt unmittelbar, dass jede Ursache, welche die Dicke der Schmierschicht modificirt, auch den Reibungswiderstand verändert.

e) Die Dicke der Schmierschicht ist bei reichlicher Schmierung der Quadratwurzel aus dem relativen Normaldrucke proportional.

f) Als Folge der zwei letzten Sätze steht also der Reibungswiderstand in directem Verhältnisse zur Quadratwurzel aus der normalen Gesammtbelastung der Reibungsfläche.

g) Wird die Form der Reibungsflächen durch die Belastung umgestaltet, so verändert sich die Dicke der Schmierschicht, und in Folge dessen der Reibungscoefficient.

Der Verfasser erstattete der Versammlung von Vertretern der russischen Eisenbahnverwaltungen einen ausführlichen Bericht über die Prüfung verschiedener Schmiermittel.

Aus demselben ersehen wir, dass Professor Petroff umfangreiche Versuche zur Prüfung seiner Theorie angestellt hat, und dass dieselbe sich glänzend bewährt hat.

Diese Versuche wurden mit der inneren Reibung verschiedener Schmiermittel und mit der Reibung in Maschinen gemacht, und bin ich gegenwärtig schon im Besitze dieser werthvollen Arbeit.

Das vorliegende Werk zeichnet sich durch die Kühnheit und Neuheit der richtigen Anschauungsweise des Verfassers, durch seine Klarstellung der Frage und durch die höchst belehrenden Betrachtungen, welche zu einem sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Beziehung wichtigen und zugleich sehr einfachen Resultate führen.

Die Kais. Russ. Akademie der Wissenschaften in Petersburg hat dieses Werk nach seinem wahren Werthe gewürdigt und den Verfasser mit dem Lomonosowpreise gekrönt. Derselbe wird laut Statuten „für gelehrte, in Russland angestellte Forschungen und Entdeckungen im Gebiete der Physik, Chemie und Mineralogie ertheilt, und zwar nur in dem Falle, wenn dieselben die Wissenschaft wesentlich bereichern oder zu besonders wichtiger und neuer praktischer Anwendung führen.

Wir hoffen mit Recht, dass unsere deutschen Fachgenossen das Werk des russischen Gelehrten nach Verdienst würdigen werden und ersuchen den geneigten Leser dem Uebersetzer, als Ausländer gegenüber etwaige sprachliche Uncorrectheiten nachsehen zu wollen.

Weiter oben erwähnten wir einer neuen und sehr umfangreichen Arbeit desselben Verfassers. Darin wird durch eine Combination der Theorie mit den Erfahrungsresultaten ein äusserst einfaches praktisches Verfahren demonstrirt, welches erstens die Schmierfähigkeit eines beliebigen Oeles leicht bestimmen lässt und zweitens in vielen Fällen ermöglicht die Schmiere derartig zu wählen, dass die Betriebskosten für Schmierung und Brennstoff so gering als möglich ausfallen.

Falls nun das vorliegende Buch, welches für die richtige Auffassung des neuen Werkes unentbehrlich ist, bei den deutschen Lesern günstige Aufnahme findet, so werden wir nicht ermangeln, sofort auch die neue Arbeit von Professor Petroff in deutscher Sprache zu veröffentlichen.

Warschau, im Mai 1886.

L. Wurzel.

Inhalt.

Einleitung.

Bekanntlich hat in den letzten zehn Jahren die Naphthaindustrie in Russland einen ausserordentlichen Aufschwung genommen, wenngleich diejenigen Fabriken, welche früher rohe Naphtha zu Petroleum verarbeiteten, anfangs im Zweifel waren, da das russische Rohmaterial weniger Petroleum liefert, als das amerikanische: indem aus letzterem 70% Petroleum gewonnen wird, wohingegen das russische blos 30% ergiebt und 70% Rückstand als Abfälle übriglässt. Letzterer Umstand nöthigte die russischen Petroleumfabrikanten unausgesetzt dazu auf Mittel zu sinnen, ihre Abfälle zu verwerthen. Man kam auf diese Weise darauf, die Abfälle zu Schmiermitteln zu verarbeiten, und dieselben neben den Pflanzenölen in den Handel zu bringen; fast gleichzeitig kamen die durch die trockene Destillation des Holzes gewonnenen Schmiermittel auf. Alle diese neueren Schmieröle erwiesen sich im Allgemeinen bedeutend billiger als die Pflanzenöle und animalischen Fette, wennschon die Eigenschaften der verschiedenen Mineralöle und Holzdestillationsproducte, bei den grossen Preisdifferenzen, natürlicher Weise, sehr verschiedene waren: die einen waren durchsichtig, etwas gelblich, dem Aussehen nach dem Pflanzenöle ähnlich, konnten sogar farblos klar wie Wasser gewonnen werden, andere waren dunkel, und viele beinahe schwarz; ebenso waren die Consistenz und die scheinbare Schmierfähigkeit auch äusserst verschiedene. Da die Techniker an die älteren Pflanzenöle gewöhnt waren, so würden die neueren Mineralschmieröle, obschon dieselben, abgesehen von ihrer Billigkeit, noch manche andere unverkennbare Vorzüge besitzen, wohl unbeachtet geblieben, wenn nicht doch der geringe Preis dieser Oele, besonders aber der des schwarzen Oeles, welcher nur ein Drittel bis ein Viertel des Preises der Pflanzenöle beträgt, und daher die

Möglichkeit bietet bedeutende, in die Tausende von Rubeln gehende Ersparnisse an Schmiermaterial zu erzielen, doch Veranlassung gegeben die neuen Schmiermittel zu versuchen. Diese Versuche fielen im Grossen und Ganzen recht günstig für unser Mineralöl aus: man erkannte, dass dasselbe sich sehr wohl als Schmiermaterial verwenden lasse, wenngleich seine Verwendung zuweilen Schwierigkeiten biete, welche z. B. in einem zu often Warmlaufen der geschmierten Theile besteht. Da die Ursache dieser Nachtheile bisher noch nicht recht aufgeklärt ist, so erscheint es von Wichtigkeit für die Praxis und im Interesse unserer inländischen Naphthaindustrie diesen Umstand aufzuklären. —

Man schmiert bekanntlich die Maschinentheile um die schädliche Arbeit der Reibung zu verringern. Die älteren Versuche zeigen nun, dass verschiedene Schmiermaterialien diesem Zwecke nicht in gleichem Maasse entsprechen, dass je nach den besonderen Umständen, unter welchen das Schmieren stattfindet, die Reibung eine verschiedene ist, und kann die letztere in dem einen Falle $1^1/_2$, 2, ja 8 und 10 Mal grösser, als in einem anderen Falle sein. Es ist daher einleuchtend, dass wenn eine unverhältnissmässig grosse Arbeit der Reibung hervorgerufen wird, unter Umständen, die durch das verwendete billige Oel erzielten sehr bedeutenden Ersparnisse an Schmiermaterial die Mehrkosten, welche an Brennstoffverbrauch erwachsen, doch nicht decken. — Russland giebt für Brennmaterial zum Betriebe seiner Maschinen Millionen Rubel aus, und kann also bei einem mangelhaften Schmieren sehr leicht ein Mehrverbrauch von Brennmaterial von 5%—10% dem Lande riesige Summen kosten.

Aus diesem Grunde ist seit Jahren das Bestreben der Techniker darauf gerichtet, wirklich gute Schmiermittel ausfindig zu machen und ist dies eine Veranlassung zu den nachfolgenden Mittheilungen gewesen in der Hoffnung damit dem Fortschritte der Technik auf diesem Gebiete nach besten Kräften zu dienen. —

Es unterliegt keinem Zweifel, dass bei Anwendung eines und desselben Schmiermateriales der Reibungswiderstand, je nach den Verhältnissen, unter denen das Schmieren stattfindet, z. B. je nach der Art und Weise des Zufliessens des Schmieröles, ein verschiedener sein kann. Es erscheint mir daher unumgänglich nothwendig zu sein den Einfluss eines jeden Umstandes, welcher auf den Reibungswiderstand einwirken kann, einzeln und genau zu erforschen.

Bekanntlich ist unter den Technikern die Meinung eine sehr verbreitete, dass die Achszapfen möglichst schwach zu construiren seien, damit die von den Angriffspunkten der Reibungswiderstände zurückgelegten Wege, und somit die Arbeit der Reibung selbst kleiner ausfalle. Im Verlaufe unserer Untersuchung werden wir jedoch sehen, dass diese Ansicht keineswegs absolut richtig ist; ungeachtet dessen, dass der Schein für ihre Richtigkeit spricht, kann sie gegenwärtig nicht ein Mal für die Fälle als unwiderlegbar bezeichnet werden, wo die Zapfenlängen gross genug gehalten worden sind, um das Auspressen der Schmiere zu verhindern, denn einzelne Versuche deuten darauf hin, dass die Zapfenstärke nur bis zu einer gewissen Grenze mit Vortheil verkleinert werden darf, dass aber weiter hinaus die Zapfen zu biegsam werden, und in Folge dessen der Reibungswiderstand bedeutend stärker wächst, als die Wege der Angriffspunkte der Reibung kürzer werden; es ergiebt sich als Resultat keine Verkleinerung der schädlichen Arbeit — im Gegentheil — eine Vergrösserung derselben. Es erweist sich somit eine gründliche Erforschung der angedeuteten Fragen als eines der dringendsten Bedürfnisse der Technik und des Ingenieurwesens im Allgemeinen. —

Zur Lösung sämmtlicher Fragen über Reibung genügt es die richtige Abhängigkeit des Reibungscoefficienten sowohl von den Eigenschaften des Schmiermaterials, als auch von anderen Umständen, welche auf diesen Coefficienten von Einfluss sind, zu ermitteln. Eine gründliche Lösung dieser Frage bietet leider ausserordentliche Schwierigkeiten. Diese Behauptung könnte zum mindesten sonderbar scheinen, wenn man an die zahlreichen über Reibungswiderstände mit Maschinentheilen gemachten Versuche denkt; dennoch ist sie richtig, weil alle bis jetzt vorgenommenen Versuche dieser Art Resultate gleichzeitiger summarischer Einwirkungen verschiedener Ursachen darstellen, von welchen jede einzelne Wirkung das Endresultat eines Versuches, d. h. den gesuchten Reibungscoefficienten, bedeutend modificieren kann. So lange davon abgesehen wird, die Wirkung eines bestimmten einzelnen Umstandes aus der Gesammtwirkung aller Umstände auszuscheiden, so lange können die Versuchsresultate immerhin praktisch nützliche sein, indem dieselben die vorwiegend erscheinenden Reibungsgrössen angeben; wird aber nach dem individuellen Einflusse eines einzelnen bestimmten Umstandes gefragt, so bieten die alten Versuche, auch die von

Thurston ein völlig unzureichendes Material; unsere Absicht geht deshalb dahin, die individuellen Wirkungen dieser Umstände, besonders aber die der Eigenschaften der Schmieröle, auf die Reibung zu untersuchen. In dieser Weise ist aber die Frage nur dann zu lösen, wenn es gelingt Mittel zu finden erst die einzelnen Elemente, welche Einfluss auf den gesuchten Coefficienten haben, zu ermitteln, oder mit anderen Worten, wenn alle unabhängigen Veränderlichen von welchem die zu untersuchende Function abhängig ist, gefunden werden und die Abhängigkeit dieser Function von jeder einzelnen unabhängigen Veränderlichen ermittelt worden ist. Wir betonen hier den Ausdruck: jede einzelne Veränderliche, weil es kein Mittel giebt die Ausscheidung der Einflusselemente zu umgehen; untersuchen wir nämlich den Einfluss einer beliebigen Unabhängigen und lassen dabei die Wirkung einer anderen, welche sich unabhängig von unserer Willkür verändert, ganz ausser Acht, so erhalten wir Veränderungen der Function, welche einem Complexe mehrerer Variabeln entspricht. Setzen wir aber voraus, dass sich nur die einzige Variable verändert, welche wir ins Auge gefasst haben, so schreiben wir damit dieser Variablen eine Wirkung zu, welche sie gar nicht hat, und können auf diese Weise zu ganz unrichtigen Schlüssen gelangen. —

Nun kann eine allseitige Erforschung unserer Aufgabe nur auf Grund umfangreicher und gut eingerichteter Versuche vorgenommen werden. Es wird deshalb unser Bestreben darauf gerichtet sein, die dem heutigen Stande der Frage entsprechenden Hauptbedingungen solcher Versuche aufzustellen und die Frage über den Einfluss der Eigenschaften der schmierenden Flüssigkeit auf den Reibungscoefficienten speciell zu untersuchen. Ebenso wird auch der Einfluss anderer Elemente, soweit es der Stand der Wissenschaft ermöglicht, ermittelt werden. Der Einfluss der schmierenden Flüssigkeit hängt wesentlich ab von der inneren Reibung der Flüssigkeit selbst und von ihrer äusseren Reibung mit starren Körpern, und deshalb erfordert die Lösung der Frage über die Wirkung der Schmieröle auf den Reibungscoefficienten die Kenntniss der feststehenden Gesetze der inneren Reibung der Flüssigkeiten, d. h. der Reibung der Theile der Flüssigkeiten untereinander und der äusseren Reibung der Flüssigkeiten mit starren Körpern an ihren gegenseitigen Berührungsflächen. Ueber diese Gesetze sind leider die Ansichten der Physiker sehr getheilt. Eine dieser Ansichten muss allgemein, als zutreffend, anerkannt, die andere aber, als unrichtige, verworfen werden. Die richtige Wahl zwischen den beiden bestehenden Ansichten ist für uns von grosser Wichtigkeit, indem das für richtig angenommene Gesetz uns als Basis für unsere Untersuchungen dienen soll. Ist hingegen die richtige Wahl des Reibungsgesetzes nicht getroffen, so kann auch an die Lösung der Frage über den Einfluss der Eigenschaften der flüssigen Schmieröle auf die Reibung der Maschinentheile nicht herangetreten werden. Es giebt nur ein Mittel, um mit voller Ueberzeugung das eine der bestehenden Reibungsgesetze als richtig, das andere aber als falsch zu bezeichnen. Dieses Mittel besteht darin, dass man alle jene charakteristischen Versuche und Forschungen, welche die Physiker zu widersprechenden Schlussfolgerungen über die Reibungsgesetze geführt haben, prüft; dies ist zwar kein leichter, indess ein unvermeidlicher Weg, welcher ohne Rücksicht auf Zeit und Mühe gemacht werden muss. Diese Untersuchung umfasst einen bedeutenden Theil der vorliegenden Schrift, und obschon sie eigentlich mehr ins Gebiet der Physik, als in das der Technik gehört, so schien es uns doch passend sie hier zu entwickeln, um demjenigen Leser, welcher ein ernstes Interesse an der technischen Seite dieser Frage nimmt, das mühsame Nachsuchen und Studiren des weit und breit zerstreuten und für die gründliche Lösung der Frage unentbehrlichen Materials zu ersparen. Diese Einleitung zu dem eigentlichen Gegenstande der Schrift, wir meinen — die Untersuchung der bis heute gemachten Versuche — schien uns um so mehr gerechtfertigt, gewissermassen geboten, da der gegenwärtige Stand der Ingenieurwissenschaft und der Technik überhaupt, für die Lösung vieler Fragen rein physikalische Forschungsmethoden erheischt, und sich sogar allgemein behaupten lässt, dass mit dem Fortschritte im Gebiete der Technik immer mehr Fragen auftauchen werden, deren Lösung die strengste wissenschaftliche Erforschung bedingen. Dass diese Bemerkung eine begründete ist, ersieht man am besten beim Studium der Electrotechnik. —

Wenden wir uns nun an unsere Hauptfrage. Bei der Bewegung einer beliebigen Maschine entsteht erstens eine relative Bewegung der inneren Theilchen der Schmiere untereinander, zweitens — eine Bewegung der Theilchen der Schmiere auf den starren Maschinentheilen und drittens eine gegenseitige Bewegung der sich etwa direct, ohne Dazwischentreten von Schmiere, berührenden Maschinentheile.

Eine jede dieser drei relativen Bewegungen verursacht Reibung: die relative Bewegung der inneren Theilchen der flüssigen Schmiere — die innere Reibung derselben, die Bewegung der Schmiere auf den starren Maschinentheilen — die äussere Reibung der flüssigen Schmiere und die relative Bewegung der ungeschmierten starren Maschinentheile — die Reibung ungeschmierter starrer Körper. Im Allgemeinen treten bei Bewegungen der Maschinen alle drei vorgenannten Reibungen zu gleicher Zeit auf, in der Regel ist jedoch die Bewegung der Maschinentheile eine derartige, dass eine unmittelbare Berührung der ungeschmierten Flächen nicht vorkommt, eine Reibung ungeschmierter starrer Körper also nicht stattfindet. —

Der Reibungswiderstand wird an der bekannten Thatsache erkannt, dass von zwei, mit verschiedenen Geschwindigkeiten in beliebiger Richtung parallel zu ihrer Berührungsfläche bewegten Körpern, der sich schneller bewegende die Geschwindigkeit des andern beschleunigt, und umgekehrt — der letztere die Bewegung des ersteren verzögert. Die Reibung, eines der mächtigsten Mittel, vermöge deren die Natur sichtbare Bewegungen in calorische umwandelt und allmählig eine Art von Energie in eine andere umleitet, lässt sich überall und jederzeit bemerken; sie übt ihre Wirkung in den mannigfaltigsten Naturerscheinungen aus und erregt das Interesse der Gelehrten in den verschiedensten Wissenschaften: Der Sternkundige, der Physiker, der Physiologe wie der Techniker, alle können ohne die Kenntniss der Reibungsgesetze nicht fortkommen. Durch Vermittelung der Reibung kann die Arbeit oder lebendige Kraft sichtbarer Bewegungen in Wärme oder Electricität umgewandelt werden. Zur Zeit, als der Mond sich noch in einem glühenden, flüssigen Zustand befand, bewirkte seine Gravitation zur Sonne und besonders zur Erde die Fluth im glühend flüssigen Ocean des Mondes; dadurch entstand Reibung, welche, die Rotationsbewegung des Mondes allmählig verzögernd, bewirkt hat, dass uns heute immer eine und dieselbe Seite unseres Satelliten zugewendet ist. In gleicher Weise wirkt die Gravitation der Erde zur Sonne und zum Monde: diese Himmelskörper ziehen einen Theil unseres Weltmeeres an sich und verursachen die Fluth; die dadurch entstehende Reibung verlängert, obschon sehr wenig, die Dauer des Tages, indem sie die Rotationsbewegung der Erde um ihre Achse verzögert. Dieselbe Ursache, d. h. die Reibung, vermindert in Flüssen, Kanälen und

Rohrleitungen zehn- und hundertfach die Geschwindigkeit der Strömungen im Vergleich zu derjenigen Geschwindigkeit, die das Wasser haben würde, wäre keine Reibung vorhanden, und das Wasser einzig und allein der Wirkung der Schwere unterworfen. Die Geschwindigkeit der Blutströmung in unseren Adern entspricht bei Weitem nicht dem Drucke, welchen das Herz auf das Blut ausübt; hier tritt die Muskelkraft des Herzens an die Stelle der Schwere, welche das Wasser in den Leitungen fortbewegt. Die Motoren in Werken, in Fabriken, in Dampfschiffen und die Locomotiven wenden einen sehr beträchtlichen Theil ihrer Arbeit einzig und allein dazu auf, um Wärme durch Reibung zu erzeugen. Es lässt sich behaupten, es giebt auf Erden keine Bewegung ohne Reibung, und doch, so wichtig auch die Bedeutung dieser Kraft ist, sowohl für die Naturerscheinungen, als auch für die durch den menschlichen Willen erzeugten Bewegungen und so lange schon diese Kraft erkannt ist, so giebt es doch bis jetzt noch keine genaue, nicht einmal eine annähernde Kenntnis der Natur der Reibungskraft; blos für Gase gelang es auf Grund der kinetischen Theorie derselben eine ziemlich klare Vorstellung über die Schema der Erscheinungen, welche man innere Reibung der Gase nennt, zu gewinnen.[1] Die neuesten Arbeiten von Hirn[2] geben jedoch Grund die Richtigkeit dieser Schema zu bezweifeln. Die vorliegende Schrift hat aber nur die Reibung starrer und flüssiger Körper mit Bezug auf die Maschinen zum Gegenstande, weshalb wir keine Veranlassung haben auf die Reibung der Gase näher einzugehen.

---

[1] Oskar Emil Meyer. Kinetische Theorie der Gase 1877, §§ 64—68.

[2] Zeitschrift des russischen physikalisch-chemischen Vereins. Журналъ русскаго физико-химическаго общ. Bd. XIV, Hft. 3, S. 42 des zweiten Abschnittes.

Reibung starrer Körper.

Die Anhänger von Coulomb behaupten, die Reibung entstehe durch das gegenseitige Ineinandergreifen der unmerklichen Vorsprünge an den Berührungsflächen der sich reibenden Körper, wobei zu gleicher Zeit auch die moleculare gegenseitige Anziehungskraft der Körper mitwirke; andere Physiker sind der Meinung, man könne die Anziehungskraft ganz ausser Acht lassen.[1]

Obschon die Forschungen und Versuche über die Reibung noch aus der Zeit Descartes' und seiner Schule datiren und obschon unter der grossen Zahl der Gelehrten, welche diese Fragen studirt haben, Namen wie Newton, Mariotte, Coulomb und andere hervorragen, so sind doch bis heute noch keine Resultate aufgefunden worden, welche zur Aufstellung fester Gesetze für die Reibung starrer Körper dienen könnten. —

Gegenwärtig werden von den meisten Physikern die drei bekannten, von Coulomb aufgestellten und von Morin[2] bestätigten Reibungsgesetze angenommen, nämlich:

1) Die Reibung ist proportional dem normalen Drucke, mit Ausnahme, wie Morin bemerkt, der sehr seltenen Fälle, wo ein zu starker Druck die sich reibenden Körper an ihren Berührungsflächen, so zu sagen zerstört.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche der sich reibenden Körper.

3) Die Reibung ist unabhängig von der relativen Geschwindigkeit der Bewegungen der sich reibenden Körper.

Ausserdem wird angenommen, dass die Reibung von den Eigenschaften der sich reibenden Materialien und von dem Zustande der

---

[1] Introduction à la mécanique industrielle. Poncelet. Troisième édition § 347.

[2] A. Morin. Expériences sur le tirage des voitures.

Berührungsflächen abhängig ist. In letzterer Beziehung ist nur das Eine bekannt, dass die Reibung eine um so geringere wird, je glatter die Berührungsflächen sind. —

Die neuesten Versuche, namentlich die von Poiret und Bochet[1] haben die Thatsache bestätigt, dass den verschiedenen Materialien und verschiedenen Zuständen der Berührungsflächen, der sich reibenden Körper auch verschiedene Reibungswiderstände entsprechen und haben erwiesen, dass der Einfluss dieser Elemente ein höchst unbestimmter ist. Diese Versuche zeigten auch, dass gewisse Umstände, welche sich der Beobachtung zu entziehen scheinen, die Grösse der Reibung ganz beträchtlich ändern können.[2] Die Figur 4 auf Tafel II der Abhandlung von Bochet überzeugt uns, dass, bei scheinbar ganz identischen Verhältnissen, Reibungscoefficienten 0,22 und 0,5 und die dazwischenliegenden sich vorfinden. —

Diese Unbestimmtheit, welche daher rührt, dass man alle nöthigen Umstände, welche die Erscheinung vollständig bestimmen müssen, nicht ordentlich zu combiniren versteht, entzieht uns an und für sich jede Möglichkeit genaue Gesetze der Reibung zu finden und bindet uns an gewisse mehr oder minder ungenaue Annäherungen. Ungeachtet dessen glaubt Bochet, auf Grund von Versuchen, welche mit dem geringen Grade von Genauigkeit, welchen die oben angeführten Verhältnisse gestatten, gemacht worden sind, behaupten zu dürfen, dass das erste Coulomb'sche Gesetz ziemlich richtig anzunehmen sei.[3] Das zweite Coulomb'sche Gesetz erscheint noch bedeutend ungenauer.[4] Es scheint nämlich, dass bei sehr kleinem Drucke (wie es auch Coulomb beobachtete), sowie bei sehr hohem (wie Morin beobachtete) der Reibungscoefficient grösser als bei mittlerem Drucke ist. Der dem kleinsten Reibungscoefficienten entsprechende Druck pro Quadrateinheit der Berührungsfläche ist von vielen Umständen abhängig. Endlich wird das dritte Coulomb'sche Gesetz nicht ein Mal mit der oben angeführten schwachen Genauigkeit bestätigt. Bochet[5], und später Galton[6] haben durch ihre Versuche unwiderleglich bewiesen,

---

[1] Bochet. Sur le frottement de glissement.

[2] Ibid. S. 48 u. folg.

[3] Ibid. S. 87.

[4] Ibidem. S. 86.

[5] Ibidem. S. 88.

[6] Engineering 1878. August 23, S. 153.

dass mit dem Wachsen der Geschwindigkeit die Reibung abnimmt. Für die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten f von der Geschwindigkeit v giebt Bochet mittelst zweier Reibungscoefficienten k und γ, von denen der erstere der Geschwindigkeit 0 und der letztere einer sehr grossen Geschwindigkeit entspricht, folgenden Ausdruck:

$$f = \frac{k - \gamma}{1 + av} + \gamma,$$

worin a eine bestimmte, der zur Abmessung der Geschwindigkeit angenommenen Längeneinheit entsprechende Zahl bezeichnet. Die von Galton gefundenen Reibungscoefficienten erwiesen sich bedeutend kleiner als die von Bochet. Erwägt man, dass auch bei diesen Versuchen jene noch unermittelten Ursachen thätig waren, welche bei Versuchen von Bochet (in scheinbar identischen Verhältnissen) die Grösse des Reibungscoefficienten in so beträchtlichen Grenzen als 0,22 und 0,5 veränderlich machten, so erscheint der Unterschied der Resultate von Galton und Bochet sehr erklärlich. —

Auf Grund des über Reibung starrer Körper Gesagten lässt sich behaupten:

1) dass die Reibung annähernd dem Normaldrucke proportional ist,

2) dass die Reibung in gewissem Grade von der Grösse des pro Quadrateinheit der Berührungsfläche ausgeübten Druckes abhängig ist und dass sie bei sehr geringem, wie auch bei sehr grossem Drucke grösser, als bei einem gewissen mittleren Drucke ist,

3) dass die Reibung mit zunehmender Geschwindigkeit abnimmt,

4) dass die Reibung von den Eigenschaften der sich reibenden Körper abhängig ist,

5) dass sie von dem Zustande der sich reibenden Oberflächen abhängig ist und um so geringer wird, je glatter die Flächen sind,

6) dass die Reibung von gewissen bis jetzt noch unermittelten Ursachen in beträchtlichem Masse abhängig ist.

Es muss weiter hervorgehoben werden, dass der Einfluss der Temperatur noch gar nicht untersucht wurde und dass noch keine Versuche bekannt sind, um die Abhängigkeit der Reibung von den Elasticitätserscheinungen zu ermitteln, obgleich scheinbar, ohne Vorhandensein solcher Abhängigkeit, Reibung keine Wärme erzeugen kann.

Reibung von Flüssigkeiten.

Die Beobachtungen der Wasserströmungen in Flüssen, Canälen und Rohrleitungen, der Ausflüsse von Flüssigkeiten aus verschiedenen Oeffnungen, der Bewegungen starrer Körper in Wasser, der Wärmeerzeugung durch Bewegung starrer Körper in Flüssigkeiten und anderer Erscheinungen beweisen, dass gegenseitige Bewegungen der Flüssigkeiten unter einander oder mit starren Körpern mit Reibung verbunden sind. Alte und allbekannte Versuche mit Wasserleitungen beweisen sogar, dass die Reibung der Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit der Strömung wächst; das Aufstellen der Gesetze dieser Reibung bietet aber bis heute grosse Schwierigkeiten. Die Schwierigkeit der Aufgabe: Gesetze der inneren und äusseren Reibung der Flüssigkeiten aufzustellen, besteht darin, dass es keine Mittel giebt die relativen Bewegungen der sich reibenden Flüssigkeitstheilchen, so wenig als auch die Grösse der Reibung im gegebenen Puncte der Flüssigkeit zu messen. In einzelnen Fällen, wie z. B. bei den Versuchen von Coulomb, kann man zwar die Gesammtwirkung der Reibungskräfte einer gewissen flüssigen Masse unmittelbar messen, die relativen Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen bleiben aber der Beobachtung entzogen. Ueber das Verhalten der Reibung zur relativen Geschwindigkeit oder über das Gesetz, nach welchem sich die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen in den verschiedenen Punkten ändern, lassen sich nothwendiger Weise blos Annahmen — Hypothesen aufstellen. —

Die ersten Gesetze der Reibung in Flüssigkeiten wurden von Newton aufgestellt, dieselben lauten:

1) Die Reibung ist der Geschwindigkeit der relativen Bewegung proportional.

2) Die Reibung ist der Berührungsfläche, längs welcher die relative Bewegung stattfindet, proportional.

3) Die Reibung hängt von den Eigenschaften der Flüssigkeit ab.

4) Die Reibung ist vom Drucke unabhängig.

Ueber die Wirkung der Temperatur spricht Newton nicht, dieselbe wurde erst später von Dubuat, Gerstner, Girard und insbesondere von Poiseuille nachgewiesen, wobei es sich zeigte, dass

5) bei Erhöhung der Temperatur die Reibung abnimmt.

Die Versuche von Plateau zeigten endlich, dass

6) die Reibung mit der Entfernung von der Oberfläche der Flüssigkeit sich ändert. Für gewisse Flüssigkeiten, bezw. Glycerin, gesättigte Soda- und Salpeterlösungen ist die Reibung an der Oberfläche grösser als tiefer nach der Mitte der Flüssigkeit hin; bei anderen Flüssigkeiten, z. B. Weingeist, Terpentin, Olivenöl ist die Reibung an der Oberfläche kleiner als nach der Mitte der Flüssigkeit hin. —

Das zweite und das dritte Newton'sche Gesetz wird von Physikern und Hydraulikern allgemein anerkannt, das erste aber (s. oben), obschon von der Mehrheit angenommen, doch von mancher Seite — bestritten.

Die Prüfung dieser scheinbar so einfachen Hypothese bietet grosse Schwierigkeiten, weil die relative Geschwindigkeit bei den Versuchen unbekannt bleibt, und sogar eine Berechnung dieser Geschwindigkeit so schwierig ist, dass ein gelehrter Mathematiker, wie es Navier war (der erste, der im Jahre 1822, beinahe 150 Jahre nach dem Erscheinen des Werkes von Newton, die Art und Weise der Einführung der Reibung in die Gleichung der Bewegung einer Flüssigkeit zeigte), sich genöthigt sah Newton's Hypothese etwas zu modificiren.

Navier[1], und später Poisson[2], schrieben die Reibung flüssiger Körper miteinander oder mit starren Körpern der Aenderung der Grössen der zwischen den Flüssigkeitstheilchen wirkenden Abstossungskräften zu. Diese Gelehrten sind der Meinung, dass eine relative Bewegung der Wasserschichten eine Annäherung der schnell bewegten Schichten an die langsam bewegten Schichten bewirke. Diese Annäherung muss die Abstossungskräfte vergrössern, die Geschwindigkeit der schnell bewegten Theilchen vermindern und diejenige der langsam bewegten beschleunigen. —

Gegenwärtig lassen die Physiker und Hydrauliker das Vorhandensein von Abstossungskräften in Flüssigkeiten, als den Grundprincipien der mechanischen Wärmetheorie widersprechend, folglich als unmöglich, nicht zu. Diese Unmöglichkeit lässt sich kurz auf folgende Weise erklären. Die Abstossungskraft muss zunächst für Gase angenommen werden. Wenn aber derartige Kräfte in den Gasen wirken, so würde bei deren Expansion, wenn äussere Kräfte

[1] Mémoires de l'institut de France. Bd. VI.

[2] Journal de l'Ecole Polytechnique. Bd. XIII, Hft. XX.

keine Arbeit ausüben, dieses materielle System nur von solchen Kräften angegriffen, welche positive Arbeit erzeugen, die lebendige Kraft des Systems also vergrössern, was sich, bei Nichtvorhandensein einer sichtbaren Bewegung des Gases durch eine Temperaturerhöhung äussern würde. In oben gedachten Umständen von Joule mit Gasen angestellten Versuche haben aber keine Temperaturerhöhungen ergeben, und ist daher die Hypothese von Abstossungskräften in Flüssigkeiten damit widerlegt. Deshalb glauben Saint-Venant, Kleitz, Helmholtz, Kirchhoff, Meyer und Andere, dass Molecularbewegungen in Flüssigkeiten, ähnlich wie in festen Körpern, bei deren Formveränderungen, elastische Kräfte erzeugen. Der einzige Unterschied in diesen Erscheinungen besteht darin, dass in festen Körpern die elastischen Kräfte den relativen Bewegungen, hingegen in bewegten Flüssigkeiten, nach Newton's Hypothese, den relativen Geschwindigkeiten verschiedener Theile eines unendlich kleinen Flüssigkeitselementes proportional angenommen werden. Elastische Kräfte dieser Art, welche sich in Flüssigkeitsströmen vor ihrer Trennung entwickeln, werden Cohäsionskräfte der Flüssigkeiten genannt. Der Einfluss der Cohäsion auf die Bewegung der Flüssigkeiten lässt sich, wie es z. B. Kirchhoff gezeigt hat,[1] durch Differentialgleichungen ausdrücken, welche sich von den Navier'schen gar nicht unterscheiden. —

Zur Untersuchung der Wirkung der Eigenschaften von Schmieren auf die Reibung geschmierter Maschinentheile ist die Anwendung jener Gleichungen unumgänglich nothwendig. Diesen Gleichungen liegt aber die erste Newton'sche Hypothese, welche von vielen Physikern bestritten wird, zu Grunde. Deshalb ist es nöthig zu prüfen, inwiefern ihre Anwendung gerechtfertigt ist. Eine bestimmte Hypothese lässt sich blos durch Vergleichung von Versuchsresultaten mit analytischen oder gewöhnlichen logischen, auf Grund der Hypothese gemachten Schlussfolgerungen prüfen; nur dann, wenn keine Thatsache irgendwie den gefundenen Schlussfolgerungen widerspricht, darf die Hypothese neuen Forschungen zu Grunde gelegt werden. Wir wollen also die bis jetzt durch Versuche gewonnenen Thatsachen, alle ohne Ausnahme recapituliren und untersuchen, inwiefern jede der einzelnen Thatsachen die Newton'sche Hypothese bestätigt oder sie widerlegt.

[1] Vorlesungen über Mathematische Physik. 24. Vorlesung S. 370.

Alle bis jetzt gemachten Versuche, welche Thatsachen zur Prüfung der in Frage gestellten Newton'schen Hypothese bieten können, beziehen sich auf Wasserströmungen in Leitungsröhren und Canälen und auf Bewegungen starrer Körper in Wasser.

Wendet man sich aber zu den Beobachtungen und Forschungen über Reibung flüssiger Körper und fasst dabei alle von Physikern oder Hydraulikern gemachten Versuche, ohne Ausnahme, ins Auge und untersucht, dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft entsprechend, ob und in wie fern denn Newton's Hypothese zur Erforschung neuer Fragen brauchbar ist, so sieht man (wir wollen dies noch beweisen), dass es bis jetzt noch keine Thatsache giebt, welche mit dieser Hypothese im Widerspruche stehen würde. Diese Hypothese lautet, dass die Reibung der Flüssigkeiten der ersten Potenz der Geschwindigkeit der relativen Bewegung proportional ist.

Um keinen einzigen Umstand, welcher die gegebene Frage auf die eine oder die andere Weise beleuchten könnte, ausser Acht zu lassen, wollen wir mit den allerältesten Andeutungen beginnen und Schritt vor Schritt bis zu den in neuester Zeit angestellten Versuchen und Forschungen gelangen.

Versuche und Forschungen zur Ermittelung der Reibungsgesetze in Flüssigkeiten.

Gegen das Ende des XV Jahrhunderts, ganz zu Anfang des Wiederaufblühens der Künste und Wissenschaften, nach deren langem Darniederliegen während des Mittelalters, leitete Michel-Angelo Buonarotti, einer der grössten Genies, welche gelebt, unter anderen Arbeiten, auch den Bau vieler Canäle und anderer hydrotechnischer Werke. Diese Arbeiten gaben ihm Veranlassung die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen zu studiren. Er bestimmte die Strömungsgeschwindigkeiten mittelst Doppelschwimmer und fand selbstverständlich einen Unterschied in den Strömungsgeschwindigkeiten an der Oberfläche und in der Tiefe der Wasserläufe, woraus zu entnehmen ist, dass Michel-Angelo die Thatsache bekannt war, dass die Bewegung einer Flüssigkeit mit

Reibung verbunden ist. Ist diese Annahme richtig, so darf man diesen Zeitpunkt doch blos als den Anfang der Erkenntniss von dem Vorhandensein der Reibung in Flüssigkeiten, nicht aber als den Anfang der Erforschungen dieser Erscheinung bezeichnen. Obgleich nun Descartes (v. 1590 bis 1650)[1] auch Kenntniss von einer Reibung zwischen zwei übereinander sich bewegenden Flüssigkeitsschichten hatte, so zeigte sich das Streben die Reibungskraft und deren Wirkung auf die Bewegung der Flüssigkeiten zu ermitteln erst zu Ende des XVII Jahrhunderts. Damals erschienen beinahe gleichzeitig in England und Italien zwei Werke, in welchen dieser Gegenstand behandelt wird. Newton erörterte denselben im zweiten Buche seiner berühmten 1687 erschienenen Phylosphiae naturalis principia mathematica und Guillelmini, ein italienischer Professor der Medicin und Mathematik an der Universität zu Padua, suchte in einem, unter dem Titel Della natura di fiumi 1697 erschienenen Werke, die Wirkung der Reibung der Flüssigkeit an den Wandungen eines Canals zu ermitteln.[2]

Die späteren Hydrauliker, Physiker und Mathematiker hielten sich sehr lange an die Lehre von den Flüssigkeiten, welche Newton in seiner Bestimmung des Begriffes der Flüssigkeiten in folgender Weise ausgedrückt hat:

Flüssigkeit wird ein jeder Körper genannt, dessen Theilchen der Einwirkung jedweder Kraft nachgeben und dabei leicht übereinander bewegt werden können.[3] Zwischen den Flüssigkeitstheilchen selbst findet also, dieser Definition zufolge, keine Reibung statt, und doch spricht Newton in demselben Werke die Ansicht aus, dass die Bewegung einer Flüssigkeit mit Reibung verbunden ist, ja er bestimmt sogar die Abhängigkeit dieser Reibung von der relativen Geschwindigkeit, indem er sagt, dass der Widerstand, welchen „eine nicht vollkommene Glätte der Flüssigkeitstheilchen, bei verschiedenen Geschwindigkeiten und bei gleichen anderen Umständen verursacht, der relativen Geschwindigkeit proportional ist.“[4] Alle Physiker und Hydrauliker, welche diesen Principien folgten, gaben zu, dass bei der Bewegung von Flüssig-

---

[1] Rapport par Mm. Combes, Serret, Bonnet, Phillips et Saint-Venant. Comptes rendus T. LXVIII. S. 582.

[2] Bossut. Traité d'hydrodynamique, t. 2.

[3] Mathematische Principien der Naturlehre. Wolfers. S. 282, § 26.

[4] Philosoph. nat. princ. LII. Sect. IX. § 73.

keiten Reibung nur zwischen der Flüssigkeit und den sie umgebenden festen Körpern thätig sei.

Unter dem Einflusse dieser Ansichten stellte Couplet 1732 an den Wasserleitungen zu Versailles zahlreiche Versuche an mit Röhren von verschiedenen Durchmessern, gewann aber daraus nur wenige praktische Regeln, welche die Hypothese von Newton, dass nämlich der Reibungswiderstand der Flüssigkeit der ersten Potenz der relativen Geschwindigkeit proportional sei, weder zu bestätigen, noch zu widerlegen vermochten. Später (nach Angabe von Girard[1], im Jahre 1775) setzte Chezy die erste Gleichung für eine gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen auf. Er berücksichtigte dabei die Reibung des Wassers an den Wänden des Canals, setzte aber voraus, dass die Flüssigkeitstheilchen sich ohne gegenseitige Reibung übereinander bewegen.

Die Gleichung von Chery ist folgende:

$$Qh = apv^2,$$

worin

Q — den Querschnittsinhalt des Wasserkörpers bezeichnet,
h — das Gefälle pro Längeneinheit des Canals,
p — den bespülten Perimetertheil des Canalquerschnittes,
v — die mittlere Stromgeschwindigkeit im Canale,
a — einen constanten Coefficienten.

Die Versuche von Chezy zeigten, dass a wirklich constant ist, und gaben die Möglichkeit diesen Coefficienten zu berechnen. In den Jahren 1779 und 1786 erschienen Dubuat's Principes d'hydrolique, welche eine bedeutende Zusammenstellung der Resultate von Versuchen mit Wasserströmungen in Röhrenleitungen und Canälen enthalten. Die späteren Forscher haben diese Resultate ziemlich ausgenutzt, Dubuat selbst aber haben sie nur zur Aufstellung einer empirischen logarithmischen Formel gedient.

In das nämliche Complex von Schriften gehört auch das Werk des seiner Zeit bekannten Hydraulikers Bossut, Traité d'hydrodynamique. Auf S. 143 des 2. Bandes dieses Werkes finden wir die Bewegung des Wassers in Rohrleitungen durch Chezy's Gleichung ausgedrückt.

Wir sehen also, dass alle Versuche mit Wasserbewegungen in Leitungsröhren und in offenen Canälen, welche bis an den Anfang

[1] Mémoires de l'Institut de France 1813, 1814, 1815, S. 550, 551.

des laufenden Jahrhunderts gemacht worden sind, Newton's Voraussetzung nicht bestätigten, dass die Reibung zwischen Wasser und festen Körpern der ersten Potenz der Stromgeschwindigkeit proportional ist. Die Versuche von Chezy und Bossut gaben Veranlassung zu der Meinung, dass die Reibung dem Inhalte der Berührungsfläche und dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, und nach den Forschungen von Hagen und nach den Beobachtungen von Couplet, Bossut und Dubuat erwies es sich, dass die Reibung zwischen Wasser und festen Körpern nicht der zweiten Potenz, sondern der Potenz 1,75, und bei grösseren Röhrenlängen einer noch kleineren Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Wir werden uns später überzeugen, dass alle diese Forschungen und Versuche nur scheinbar Newton's Hypothese widerlegen, dass sie, im Grunde genommen, nicht ein Mal gestatten dieselbe zu prüfen, dass sie kein Material weder zur Unterstützung noch zur Widerlegung dieser Hypothese bieten. Wir hielten es aber für nöthig ihrer zu erwähnen, um der Vermuthung, dass sie ausser Acht gelassen worden seien, nicht Raum zu geben. —

Zu Ende des vorigen Jahrhunderts äussert Coulomb neue Ansichten: er erwähnt, dass Newton zur Berechnung des Luftwiderstandes einer in der Luft schwingenden Kugel an einer gewissen Stelle seines Werkes die Voraussetzung ausspricht, dass dieser Widerstand, von verschiedenen Potenzen der Geschwindigkeit abhängig, durch die Formel[1]

$$a v^2 + b v^{3/2} + c v$$

ausgedrückt werden kann, dass aber an einer anderen Stelle desselben Werkes Newton diesen Widerstand mit der Formel

$$a v^2 + b$$

ausgedrückt; dass andererseits auch Bernulli die nämliche Abhängigkeit zwischen Widerstand und Geschwindigkeit angenommen habe und dass Sgravesand der Meinung gewesen sei, dass der Widerstand durch die Summe der Glieder, welche die Geschwindigkeit in erster und in zweiter Potenz enthalten, also durch die Formel

$$a v^2 + b v,$$

in welcher a, b und c drei Constante und v die Geschwindigkeit bezeichnen, auszudrücken sei. Dieses veranlasst Coulomb zu der

[1] Philos. nat. princ. math. Lib. II. Nr. 40.

Behauptung,[1] dass bei einer Geschwindigkeit von 0,2—0,3 Meter und darüber der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, dass aber bei bedeutend kleineren Geschwindigkeiten, z. B. bei 0,001 Meter der Widerstand bloss durch die Glieder mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit ausgedrückt wird, d. h. durch diejenigen Glieder, welche bei grossen Geschwindigkeiten in Vergleich zu den Gliedern, welche die zweite Potenz enthalten, verschwindend klein erscheinen.

Coulomb schreibt den vollen Widerstand der Flüssigkeit zweien Ursachen zu: den Stössen und der Cohäsion, und meint, dass die Formel, welche den Widerstand ausdrücken soll, zwei Glieder enthalten muss: das eine, welches dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und von den Stössen abhängig ist, und das zweite, welches der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional und von der Cohäsion abhängig ist. Er meint weiter, dass bei grossen Geschwindigkeiten die Stösse und bei kleinen die Cohäsion die vorwiegende Wirkung ausüben. Zur Ermittelung der Wirkung der Cohäsion stellte Coulomb mit seiner Torsionswaage eine Reihe von Versuchen an, wobei eine runde flache Scheibe in der untersuchten Flüssigkeit um die geometrische Achse gedreht wurde. Die Geschwindigkeiten waren dabei sehr gering, etwa 0,001 Meter pro Sekunde. Die sehr kleinen Glieder mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit glaubte Coulomb in der Widerstandsformel vernachlässigen zu dürfen und bestimmte auf diese Weise die Cohäsionswirkung für Wasser und für das damals gebräuchliche Brennöl. —

Da die Einfachheit des Apparates von Coulomb zu neuen Versuchen sehr verlockend ist und da nicht alle von Coulomb gewonnenen Resultate als richtige bezeichnet werden können, so schien es uns zweckmässig hier, bei der Behandlung der Frage über die Cohäsion der Flüssigkeiten und über die Wirkung dieser Cohäsion auf die Reibung, jene von Coulomb erreichten Resultate sowohl als auch die Ursachen ihrer Unrichtigkeit etwas näher ins Auge zu fassen und ihre Erklärung zu suchen.

Die Versuche haben Coulomb zu folgenden Schlüssen geführt:

1) Wird ein Quadratmeter Oberfläche in der Richtung der Fläche selbst mit einer Geschwindigkeit von 0,01 Meter bewegt, so entsteht dabei ein Widerstand von 0,703 Grammen.[2]

---

[1] Mémoires de l'Institut de France, Bd. III, S. 246.

[2] Ibidem, S. 282.

2) Bei Temperaturveränderungen von 10 bis 16° Reaumur werden keine Veränderungen der Cohäsion bemerkt.[1]

3) Bei 16° Reaumur ist die Cohäsion des raffinirten Brennöls 17,5 Mal grösser als diejenige des Wassers, bei höheren Temperaturen wird dieselbe bedeutend geringer.

4) Die Grösse des auf die Flüssigkeit ausgeübten Druckes ist auf die Cohäsion von keinem Einflusse. Der Reibungswiderstand, welchen Coulomb bei seinen Versuchen für Wasser gefunden hat, und welchen er als einen von der Cohäsion herrührenden Widerstand betrachtet hatte, stimmt aber mit den neueren und unbedingt viel genaueren Versuchsresultaten nicht überein, und liegt es auf der Hand, dass Irrthümer in diesem Widerspruche auf Seiten Coulomb's Forschungen sind. — Coulomb hatte nämlich bei seinen Versuchen mit dem vollen Widerstande zu thun und sollte daher die Formel

$$a v^2 + b v$$

anwenden; statt dessen bediente er sich der Formel

$$b v,$$

wie wenn er nur ein einziges, nicht aber alle Glieder des Widerstandes vor sich hätte; er musste also, indem er das Glied $a v^2$ vernachlässigte, für b einen etwas grösseren Werth erhalten, als derjenige ist, welcher bei der Anwendung der genauen und den Verhältnissen entsprechenden Formel resultiren würde. Man sollte daher glauben, dass die späteren, weit genaueren Forschungen zeigen würden, dass bei einer Geschwindigkeit von 1 Centimeter pro Secunde die Cohäsion pro Quadratmeter der Oberfläche weniger als 0,703 Gramm betragen werde, es erwies sich aber das Gegentheil: Poiseuille hat nämlich Versuche angestellt, welche einerseits von der Französischen Akademie und andererseits von Jacobson glänzend bekräftigt wurden. Aus diesen Versuchen folgt, dass bei einer Temperatur von 16° R. oder 20° C. die Cohäsion oder die Reibung des Wassers 1,027 Gramm beträgt (weiter unten). Demnach erweist sich die Cohäsion des Wassers eine circa $1^1/_2$ Mal grössere als diejenige, welche Coulomb gefunden hat, keineswegs aber als eine geringere. — Noch einen grösseren Coefficienten der inneren Reibung für Wasser ergaben die Versuche von O. E. Meyer[2],

[1] Mémoires de l'Institut de France, Bd. III, S. 32.

[2] O. E. Meyer. Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. Poggend. Annal. Bd. 113. 1861. S. 400.

der sich auch der Torsionswage von Coulomb bedient hatte. Seinen Beobachtungen zufolge soll das Brunnenwasser bei einer Temperatur von 19° C. einen Reibungscoefficienten 1,172 Gramm besitzen. Dieser beträchtliche Unterschied entstand dadurch, dass bei den Versuchen von Coulomb zugleich mit der Scheibe auch das Wasser mitbewegt wurde und dass die Geschwindigkeiten der relativen Bewegung der Scheibe und der anliegenden Wasserschichte so wie diejenige der relativen Bewegungen einer Unzahl feiner übereinander gelagerter Wasserschichten bedeutend geringere waren, als die Geschwindigkeit der Scheibe, welche Coulomb in die Rechnung eingeführt hatte; deshalb entsprach also die von Coulomb versuchsweise gefundene Reibung oder Cohäsion der Geschwindigkeit der Scheibe nicht, sie entsprach vielmehr einer geringeren Geschwindigkeit, welche eben in die Formel

$$b\,v$$

einzusetzen war. Hätte nun Coulomb eine richtige Geschwindigkeit seiner Berechnung zu Grunde gelegt, so hätte er auch einen grösseren Werth für b ermittelt. Um nun die wirkliche Geschwindigkeit der relativen Bewegung des Wassers zu finden, muss vorher das Gesetz bekannt sein, wonach die Bewegung der Scheibe diejenige des Wassers nach sich zieht; dieses Gesetz ist aber sogar den gegenwärtigen Physikern nicht völlig bekannt, obgleich O. E. Meyer eine sehr annähernde Lösung der Frage für sehr kleine Geschwindigkeiten bereits gefunden hat; Coulomb konnte also das ihm unbekannte Gesetz nicht anwenden.

Coulomb hat zwar durch seinen Bericht die Cohäsionskraft nicht bestimmt, er hat aber die Aufmerksamkeit der Gelehrten und Physiker auf die Cohäsion hingewiesen und Diejenigen veranlasst, welche sich später mit den Fragen aus dem Gebiete der Hydraulik beschäftigten, von Newton's Hypothese abzuweichen und den Reibungswiderstand der Flüssigkeiten durch die zweigliederige Formel

$$a\,v^2 + b\,v$$

auszudrücken.

Diese Formel wird auch bis heute zur Lösung verschiedener Fragen über Wasserströmungen in Wasserleitungen angewandt.

Das Vorhandensein der Cohäsion zwischen den Flüssigkeitstheilchen ist eine schon lange anerkannte Thatsache, welche Mariotte und Pitot durch Versuche damit bewiesen haben, dass verschiedene Schichten eines Wasserstromes verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. — Ungeachtet dessen behaupten die Anhänger von Coulomb in Bezug auf die Geschwindigkeit, welche in die obige Gleichung einzusetzen ist, dass alle Theilchen eines Wasserstromes eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit besitzen und dass die Cohäsion (oder vielmehr die Adhäsion) bloss zwischen den Wassertheilchen und der Rohrleitung wirkt.

Auf diese Weise wird in die Formel statt v eine mittlere Geschwindigkeit eingesetzt.

Coulomb's Versuche können also gegenwärtig zur Prüfung der Newton'schen Hypothese nicht dienen; dieselben werden nur dann verwendbar werden, wenn das Gesetz der Bewegung der Flüssigkeit, welche die Scheibe umgiebt, bekannt sein wird, wenn also die relativen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen in der Mitte der Flüssigkeit und an der Oberfläche der Scheibe, wie es von O. E. Meyer gemacht wurde, gefunden sein werden. —

Girard, ein Zeitgenosse von Coulomb, der erste, welcher die Unrichtigkeit in der Ermittelung der in die Formel einzusetzenden Geschwindigkeit bemerkt hatte, äussert sich darüber in folgender Weise: „Die Forschungen von Prony, in welchen der Flüssigkeitswiderstand in Röhren und Canälen durch Coulomb's Formel

$$a v^2 + b v$$

ausgedrückt wird, entsprechen zwar vollkommen den Anforderungen der Technik, jedoch muss bemerkt werden, dass die Grössen der Coefficienten a und b nicht genau bestimmt sind, denn sie waren in der Voraussetzung ermittelt worden, dass alle Wassertheilchen sich gleichzeitig mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit bewegen. Bekanntlich besitzen aber die inneren Strömungen eine grössere Geschwindigkeit als die äusseren; dies hängt offenbar von der Cohäsion der Flüssigkeit ab. Zur genauen Ermittelung der Grössen a und b müsste die Geschwindigkeit des Wassers mit Bezug auf diejenige der benässenden Schicht in Betracht gezogen werden, nicht aber die mittlere Geschwindigkeit."[1] Der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit der inneren und der äusseren Schichten ist natürlich um so geringer, je kleiner der Röhrendurchmesser ist, so dass bei unendlich kleinen Röhrendurchmessern die mittlere Geschwindigkeit des Stromes seiner relativen Geschwindigkeit in

---

[1] Mémoires de l'Institut de France 1813, 1814, 1815, S. 257.

Bezug auf die Bewegung der benässenden Schicht gleich ist; folglich müssen diejenigen Versuche, bei welchen es sich um die Ermittelung der Coefficienten a und b handelt, mit Röhren von möglichst kleinen Durchmessern vorgenommen werden und deshalb machte Girard seine Versuche mit kupfernen Röhren von kleinen Durchmessern. —

Girard verwendete zweierlei Röhren: die einen von 2,96 Millimeter, die andern von 1,83 Millimeter Durchmesser. Jedes einzelne Rohr war 200 Millimeter lang, und konnte man aus solchen Röhren 200—2200 Millimeter lange Leitungen machen.

Während der Versuche wurde eine derartige Bewegung der Flüssigkeit untersucht, welche als eine gleichmässige angenommen werden konnte, d. h. eine solche, bei welcher die motorische Kraft mit dem Widerstande im Gleichgewichte war.

Wenn durch ein Rohr, welches den Durchmesser d und die Länge l hat, eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v strömt, so ist die treibende Kraft gleich

$$\frac{\pi d^2}{4} h_1.$$

Hierin ist h_1 der Druck pro Quadrateinheit des Röhrenquerschnittes an der Zuflussöffnung.

Die eine der Widerstandskräfte ist gleich

$$\frac{\pi d^2}{4} h_2,$$

worin h_2 den Druck pro Quadrateinheit des Röhrenquerschnittes an der Ausflussöffnung ausdrückt.

Die andere Widerstandskraft ist einerseits (nach der zweiten und nach der dritten Newton'schen Hypothese) proportional dem Inhalte $\pi d l$ der Berührungsfläche, in welcher der Wasserkörper die benässende Wasserschicht berührt und andererseits, nach der Voraussetzung von Coulomb, dem Binome $a v^2 + b v$.

Der zweite Widerstand ist also gleich

$$\pi d l (a v^2 + b v).$$

Angewandt auf diese Bewegung, giebt nun das Gesetz der lebendigen Kräfte folgende Gleichung:

$$\frac{\pi d^2}{4} h_1 = \frac{\pi d^2}{4} h_2 + \pi d l (a v^2 + b v).$$

Setzt man in diese Gleichung statt der Druckkräfte an den

Enden der Leitung die Differenz dieser Grössen ein und bezeichnet:

$$h = h_1 - h_2,$$

so erhält man nach gehöriger Elimination die Gleichung

$$\frac{d\,h}{4\,l} = a\,v^2 + b\,v. —$$

Girard gewann aus seinen Versuchen ein ziemlich reiches Material, welches ihn zu folgenden Schlüssen führte:[1]

1) Das Gesetz der Bewegung des Wassers in Röhren hängt von der Länge der Röhren ab: es ist für kurze und für lange Röhren ein verschiedenes.

2) Wenn die Röhrenlänge l eine bestimmte Grenze übersteigt, so wechselt der Druck h mit der Geschwindigkeit v derartig, dass das Verhältniss $\frac{d\,h}{4\,l\,v}$ constant bleibt. Da nun nach voriger Gleichung

$$\frac{d\,h}{4\,l\,v} = a\,v + b,$$

so enthält also bei einer genügend grossen Röhrenlänge der zweite Theil der Gleichung kein Glied, welches von der Geschwindigkeit abhängt, es ist folglich

$$a = o$$

und

$$\frac{d\,h}{4\,l\,v} = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Dieses höchst wichtige von Girard gefundene Resultat, welches durch alle späteren Versuche bestätigt wurde, bietet den wesentlichen Theil des unter dem Namen Hagen-Poiseuille bekannten Gesetzes. Der Unterschied zwischen dem Gesetze von Hagen-Poiseuille und der Gleichung (I) so wie die Ursache dieses Unterschiedes werden weiter unten erklärt werden.

3) Die kürzeste Röhrenlänge l, bei welcher die Bewegung des Wassers nach dem durch Gleichung (I) ausgedrückten Gesetze stattfindet, ist um so grösser, je beträchtlicher der Röhrendurchmesser d und der Druck h sind.

4) Wenn das in einzelnen Versuchen durch die Röhren fliessende Wasser verschiedene Temperaturen besitzt, wobei aber die Gleichung (I) besteht, so wird unter sonst gleichen Umständen

[1] Mémoires à la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France 1813, 1814, 1815, S. 296 bis 298.

warmes Wasser in grösserer Quantität als kälteres durchfliessen,[1] wobei sich die bei 0° und 86° C. durchfliessenden Wassermengen wie 1:4 verhalten. Dieses Verhältniss unterscheidet sich ziemlich stark von demjenigen, welches Poiseuille gefunden hatte, was sich leicht auf folgende Weise erklären lässt: Girard erwärmte das Wasser in Gefässen, welche den russischen Theemaschinen — Samowaren — ähnlich waren und liess es dann durch Röhren fliessen, welche gegen Abkühlung nicht geschützt waren; bei den Versuchen von Poiseuille hingegen konnte keine Abkühlung des Wassers stattfinden; ausserdem hatten die von Girard benutzten Röhren grössere Durchmesser als diejenigen von Poiseuille. Die Wirkung der Temperatur in Röhren von grösseren Durchmessern ist aber eine geringere als diejenige bei dünnen Röhren (siehe weiter ad 10).

5) Bei kurzen Röhren, für welche die Gleichung (I) nicht besteht, ist die Wirkung der Temperatur auf die Menge des durchfliessenden Wassers eine bedeutend schwächere, so dass bei den Temperaturen 0° und 87° die bezüglichen Wassermengen sich wie 5 zu 6 verhalten.

6) Der Coefficient b der Gleichung (I) verändert sich in einer gewissen Abhängigkeit vom Röhrendurchmesser. Girard hat zwar diese Abhängigkeit nicht genau angegeben, indessen, wenn man nach seinen Tabellen das Verhältniss der aus Versuchen mit zwei Röhrensystemen erhaltenen Coefficienten b bestimmt, so erweist sich dasselbe circa 1,3 gleich, wobei das Verhältniss der Röhrendurchmesser $\frac{2,96}{1,83}$ oder 1,62 gleich ist.

Dieses Verhältniss zwischen den Zahlen b und den entsprechenden Röhrendurchmessern wird jedoch weder durch die Versuche von Hagen und Poiseuille mit Röhren von kleineren Durchmessern als die Röhren von Girard, noch durch die Versuche von Jacobson mit Röhren von grösseren Durchmessern bestätigt. Alle diese Versuche zeigen, dass, wenn die Röhrendurchmesser grösser werden, der Coefficient b nicht grösser, sondern im Gegentheil

[1] Der Einfluss der Temperatur auf das Durchfliessen des Wassers durch Röhren wurde zuerst von Dubuat (Principes d'hydraulique par M. le Chevalier Dubuat, Bd. 2, S. 9, Ausg. 1816) bemerkt. Derselbe sagt, dass das Wasser um so langsamer fliesst, je näher seine Temperatur dem Gefrierpunkte ist. Später wurde die Wirkung der Temperatur von Gerstner (Poggend. Annal. Bd. V, S. 160) beobachtet.

kleiner wird und sich umgekehrt proportional zum Durchmesser verhält. Wir sehen also, dass die Versuche von Girard die genaue Grösse des Coefficienten b für die Gleichung (I) nicht lieferten; es kam wahrscheinlich daher, weil das Wasser bei Girard's Versuchen nicht die geradlinige, wie vorausgesetzt, der Röhrenlänge parallele, sondern eine unbekannte krummlinige Bewegung hatte. Helmholtz schreibt diese Abweichung von der geradlinigen Richtung einer Verunreinigung der Röhrenwandungen durch die längere Einwirkung des Wassers auf Kupfer zu.[1] Bei genauerer Untersuchung der Tabellen von Girard kann aber diese Voraussetzung keineswegs als eine richtige bezeichnet werden, und sucht deshalb Jacobson den Widerspruch zwischen Girard's Versuchen und denjenigen von Poiseuille so wie auch den seinigen auf eine andere Weise zu erklären; er meint,[2] dass der Ableitungsweise der die Grösse b bestimmenden Gleichung (I) zufolge diejenige Grösse h in diese Gleichung einzusetzen sei, welche dem im Röhrenanfange wirkenden Drucke entspricht. Girard beobachtete aber diesen Druck nicht, nahm vielmehr an, dass dieser Druck demjenigen gleiche, welchen er im Gefässe im Niveau des Oeffnungsmittelpunktes ermittelte, und dies war nicht ganz richtig, denn Jacobson fand bei seinen Versuchen, dass der Druck innerhalb der Röhre am Anfange derselben bedeutend schneller fällt (von der Oeffnung ab) als in anderen Theilen derselben, dabei soll die Verminderung des Druckes in weiten Röhren eine beträchtlichere als in dünneren sein.[3] Jacobson's Erklärung ist auch nicht wohl annehmbar, denn das richtige Verhältniss für die den Röhrendurchmessern 2,96 und 1,83 Millim. entsprechenden Grössen b könnte nur dann ermittelt werden, wenn der von Girard in Betracht gezogene Druck für 2,96 Millim. weite Röhren mindestens das Doppelte des wirklichen Druckes betragen hätte. Jacobson's Versuche lassen zwar vermuthen, dass der Druck in der Mündung der Röhren von Girard ein bedeutend geringerer war als derjenige im Gefässe, jedoch

---

[1] H. Helmholtz und G. v. Piotrowski. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. — Sitzungsberichte d. k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. XL, S. 686 v. 12. April 1860. — Oder Wissenschaftliche Abhandlungen von Helmholtz. I. Bd. S. 220.

[2] Jacobson. Reichert's und Dubois-Reymond's Archive, 1860, S. 99.

[3] Jacobson. Reichert's und Dubois-Reymond's Archive 1860.

war bei den Versuchen, welche Jacobson mit 2,224 Millim. weiten Röhren gemacht hatte, kein einziger Fall, wo das Verhältniss des Druckes in der Röhrenmündung und im Gefässe 1,197 überstiegen hätte. Sogar bei 8,05 Millim. weiten Röhren war das grösste Verhältniss gleich 1,372. Unserer Ansicht nach liegt die Ursache der Unrichtigkeit der Resultate in den mangelhaften Verbindungen der Röhren untereinander und mit dem Gefässe. Eventuelle Vorsprünge an diesen Stellen könnten manche Schwankungen in der Bewegung der Flüssigkeit hervorrufen.

7) Die den verschiedenen Durchmessern und den verschiedenen Temperaturen entsprechenden verschiedenen Grössen von b unterscheiden sich von einander um so weniger, je höher die Temperaturen sind.

8) Die einer Temperaturdifferenz von einem Grade entsprechenden Veränderungen von b sind um so grösser, je niedriger die Temperatur ist.

9) Die Wirkung der Temperatur auf die ausfliessende Wassermenge äussert sich um so regelmässiger, je kleiner der Röhrendurchmesser ist.

10) Die Temperaturwirkung verschwindet bei Röhren von grossen Durchmessern und in Canälen. —

Der Fehler in der Ermittelung des Coefficienten b, welcher in Folge einer oder mehrerer der oben erwähnten Ursachen entstand, brachte Girard auf den Gedanken, dass an den Röhrenwandungen eine gewisse Flüssigkeitsschicht, welche an der Bewegung nicht Theil nimmt, haften bleibt. Bei dieser Annahme würde d in Gleichung (I) nicht mehr den Röhrendurchmesser, sondern den Durchmesser des bewegten Wasserkörpers bedeuten. Bezeichnet man also den Röhrendurchmesser mit d_1 und die Stärke der unbeweglich an den Wandungen haftenden Schicht mit e, so ist

$$d_1 = d + 2\,e \text{ und } d = d_1 - 2\,e.$$

Es würde sich also für ein gewisses System von Röhren die Gleichung (I) in

$$\frac{d_1\,h}{4\,l\,v} = b_1 + 2\,e_1\,\frac{h}{4\,l\,v},$$

und für ein anderes in

$$\frac{d_2\,h}{4\,l\,v} = b_2 + 2\,e_2\,\frac{h}{4\,lv}$$

verändern.

Durch Versuche werden die Werthe aller in diesen Gleichungen enthaltenen Grössen gefunden, ausser e_1 und e_2; man kann also die letzteren aus diesen Gleichungen bestimmen. Zur Bestimmung dieser Grössen giebt Girard Formeln,[1] aus welchen erwiesen wird,

dass bei Röhrendurchmessern von		2,96 Mm.	1,83 Mm.
und bei einer Temperatur von	$0^0 .. e =$	0,6 „	0,3 „
„ „ „ „ „	$100^0 .. e =$	0,000009 „	0,00016 „

Das Vorhandensein einer unbeweglichen Schicht wurde auch von Hagen,[2] der ihre Stärke auf 0,013 Millim. geschätzt hatte, angenommen, wir werden aber später sehen, dass diese Voraussetzung eine nicht annehmbare ist. —

Girard's Beobachtungen sind zwar in gewissem Sinne unvollständige, sie haben aber doch ein nicht zu bezweifelndes und höchst wichtiges Resultat geliefert (Gleichung I), sie bewiesen nämlich im Gegensatze zu der Annahme von Coulomb, dass der Bewegungswiderstand der Flüssigkeiten durch eine der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportionale Formel ausgedrückt wird, und zwar nicht nur bei Geschwindigkeiten von 0,001 oder 0,2 und 0,3 Meter, sondern auch bei weit grösseren Geschwindigkeiten von 0,687 Meter.[3] Dies alles zeigt, dass wenn die anderen Beobachter, welche die Bewegung des Wassers in weiten Röhrenleitungen bei gleichen und sogar bei kleineren Geschwindigkeiten studirten, den Bewegungswiderstand des Wassers durch die Gleichung

$$a v^2 + b v$$

ausdrücken mussten, so war es deshalb, weil die Bewegung der Flüssigkeiten in weiten Röhren nicht in gleicher Weise wie in dünnen stattfindet. In dünnen und genügend langen Röhren kann die Bewegung wohl als eine geradlinige angenommen werden, und darauf beruhte auch die Ableitung der Gleichung (I); in weiten Röhren dagegen bewegt sich die Flüssigkeit keineswegs, ja nicht einmal annähernd, geradlinig, so dass die Gleichung (I) in diesem Falle nicht anwendbar ist und die Formel $a v^2 + b v$ den Bewegungswiderstand nicht mehr ausdrückt. Bei diesen complicirten Bewegungen ist diese Formel ein Ausdruck für das summarische Resultat der Cohäsion oder Reibungswirkung und derjenigen unnützen Verlängerungen der Wege, welche die Wassertheilchen zurücklegen, indem

[1] Mémoires de l'Institut de France. 1813, 1814, 1815, S. 276.
[2] Kgl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1854, S. 55.
[3] Mémoires de l'Institut de France. 1813, 1814, 1815, Blatt VII.

sie sich in krummen Linien statt in geraden bewegen. — Auf diese Weise haben Girard's Versuche die Physiker veranlasst auf Newton's Hypothese zurückzugehen. —

Girard's Versuche waren zu ihrer Zeit unstreitig höchst wichtig, doch konnten sie diesem Gelehrten keine Antwort auf seine Fragen geben. Er wusste, dass die um die Rohrachse gelagerten Wassertheilchen eine grössere Geschwindigkeit haben als diejenigen, welche an den Wandungen liegen, dass dieser Geschwindigkeitsunterschied das Resultat der Adhäsion zwischen den Wassertheilchen und den Rohrwandungen und der gegenseitigen Cohäsion der Wassertheilchen aneinander ist; er wusste auch, dass zur Bestimmung des Coefficienten b nicht die mittlere, sondern die relative Geschwindigkeit massgebend ist; dessen ungeachtet enthält seine Formel, wie auch bei seinen Vorgängern, nur die mittlere Geschwindigkeit. Girard hat zwar absichtlich, um die Geschwindigkeitsdifferenzen so klein als möglich zu halten, Röhren von kleinen Durchmessern angewandt, er hat aber damit das Ziel nicht erreicht, denn bei einer mittleren Geschwindigkeit von 0,687 Meter kann der grösste Geschwindigkeitsunterschied wahrscheinlich ungefähr 1,36 Meter betragen. Bedenkt man nun, dass dieser sehr bedeutende Geschwindigkeitsunterschied Wasserstrahlen entsprach, welche weniger als 1,5 Millim. von einander entfernt waren, so gelangt man zu der sehr wahrscheinlichen Vermuthung, dass auch die relativen Geschwindigkeiten beträchtlich waren.

Girard wusste recht wohl, dass seine Kenntnisse und seine Beobachtungen ungenügend waren um den Coefficienten b zu ermitteln. Er war nämlich ebenso wie Coulomb der Ansicht, dass der Coefficient b von der Cohäsion der Wassermolecüle abhängig ist und dass diese Cohäsion nur bei relativen Bewegungen zum Vorschein kommt, so wie dass die Beobachtungen des Ausfliessens des Wassers aus Röhren zur Ermittelung der Cohäsionskraft nicht dienen können, so lange das Gesetz der relativen Bewegungen aller Stromtheile unbekannt ist. Wir behaupten, dass Girard dies alles wusste, denn er sagt,[1] dass diejenigen Physiker und Mathematiker, welche der Lehre von Newton folgten, der Ansicht waren, dass Flüssigkeiten derartige Körper sind, welche einer jeden beliebigen Kraft nachgeben und bei Einwirkung derselben sich be-

[1] Mémoires de l'Institut de France. 1813, 1814, 1815, S. 314.

wegen; und sagt dann weiter,[1] dass die Bewegung der Molecüle einer flüssigen Masse keine gemeinschaftliche ist, dass vielmehr diese Molecüle übereinander gleiten und dabei den Cohäsionswiderstand überwältigen. Um also in die Fragen der Hydrodynamik die Cohäsion einführen zu können, muss man vorher sowohl die Grösse dieser Kraft, als auch ihre Wirkungsweise ermitteln. Ist letzteres nicht geschehen, so erhält man nur ungenaue Resultate. Girard kannte aber die Grösse und die Wirkungsweise der Cohäsion in Flüssigkeiten nicht und war deshalb nicht im Stande die Frage zu lösen.

Um die relative Bewegung der Wassertheilchen zu ermitteln, müssen entweder directe Versuche angestellt werden, oder man muss vorher die Grösse der Cohäsion oder wenigstens das Charakteristische derselben und aller anderen auf die Wassertheilchen einwirkenden Kräfte auszudrücken verstehen und dann das Gesetz der relativen Bewegungen analytisch auf Grund der allgemeinen Gleichungen der Hydrodynamik ableiten. Den früher, so wie auch in der letzten Zeit behufs Ermittelung der Bewegungsgesetze des Wassers angestellten Versuchen standen stets unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen. Galilei versichert,[2] dass die Entdeckung der Bewegungsgesetze der Himmelskörper ihm weniger Schwierigkeiten machte, als die Forschungen der Bewegungen des Wassers, ungeachtet, dass die Himmelskörper unermesslich weit von uns entfernt sind, das Wasser hingegen vor unseren Augen fliesst.

Früher noch als Girard haben andere Gelehrte, z. B. Pitot, Mariotte und Woltman, den Geschwindigkeitsunterschied verschiedener Theile eines Wasserstromes grösserer Dimensionen beobachtet. Ihre Beobachtungen beziehen sich aber auf Flüsse und Canäle, und in solchen Wasserläufen findet die Bewegung der Flüssigkeit unter ganz anderen Umständen als in dünnen und langen Röhren statt. Deshalb konnte Girard aus diesen Forschungen keine genauen Angaben für das Gesetz der relativen Bewegungen der von ihm beobachteten Strömungen ziehen, um so weniger, als die Resultate, welche von seinen Vorgängern gefunden worden sind, einander höchst widersprechende waren. — Eytelwein[3] behauptet,

---

[1] Mémoires de l'Institut de France. 1813, 1814, 1815, S. 315.

[2] Rühlmann. Hydromechanik, 2. Auflage 1880, S. 338.

[3] Eytelwein. Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. 2. Auflage, S. 171.

dass auf Grund dieser Versuche kein allgemeiner Schluss gezogen werden kann. Wir sehen also, dass Girard das Gesetz der relativen Strombewegungen auf Grund der Versuche seiner Vorgänger unmöglich ableiten konnte.

Theoretisch, also aus den Gleichungen der Hydrodynamik, konnte Girard dieses Gesetz auch nicht ableiten, weil die grössten Mathematiker nur bis zu den Euler'schen Gleichungen gelangten, und dieselben enthalten die Cohäsion nicht. Der Mangel an theoretischen Untersuchungen veranlasst auch mich bisweilen der definitiven Entscheidung der Frage mich zu enthalten: ob Girard's Versuche Newton's Hypothese bestätigen oder dieselbe widerlegen; ich will diese Lücke in den theoretischen Forschungen später ausfüllen, nachdem wir mit den Untersuchungen von Navier, welcher die ersten Schritte in dieser Richtung gemacht hat, bekannt geworden sind.[1] —

Navier's Untersuchungen mussten nothwendiger Weise auf irgend einer Hypothese über die Eigenschaften oder das Charakteristische der Cohäsionskraft in Flüssigkeiten beruhen. Er ging nun von der Voraussetzung aus, dass die Flüssigkeiten uncomprimirbare Körper seien, deren Molecüle sich beinahe frei übereinander bewegen können und dass ihre gegenseitige Abstossungskraft mit der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich einander nähern oder von einander entfernen, proportional wechselt.[2]

Von dieser Voraussetzung ausgehend, fand Navier zur Bestimmung der Bewegung verschiedener Wassertheilchen Differentialgleichungen mit partiellen Differentialen zweiter Ordnung und, indem er noch einige Voraussetzungen über die Form der Bewegung machte, bekam er aus seinen Gleichungen Endresultate für einige specielle Fälle, darunter auch für den Beharrungszustand der Wasserbewegung in horizontalen, dünnen, runden Röhren.[3] —

Navier's allgemeine Gleichungen sind später auch von anderen Gelehrten auf verschiedene Weisen gefunden worden.[4] Der Zweck unserer Schrift erfordert aber nicht, dass wir uns bei Navier's allgemeinen Gleichungen aufhalten. Das Gleiten der Theil-

---

[1] Mémoires de l'Institut de France, Bd. VI (1822).

[2] Ibidem, S. 391.

[3] Ibidem, S. 431.

[4] Poisson. Journal de l'Ecole Polytechnique, Heft XX. Bresse. Cours de mécanique appliquée 1868, S. 31 u. 32.

chen eines Wasserstromes bei eingetretenem Beharrungszustande der Bewegung in einem wagerechten, dünnen und runden Rohre lässt sich viel einfacher ermitteln, wenn man alle die zur Integration der Navier'schen Gleichungen nöthigen Hypothesen bei der Aufstellung der Differentialgleichungen von vorne herein in die Rechnung einführt. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate unterscheiden sich durch nichts von Navier's Resultaten, und man kommt dabei viel einfacher und schneller zum Ziele. Wir wollen also zur Aufstellung der Gleichung der Wasserbewegung in wagerechten, dünnen, runden Röhren bei eingetretenem Beharrungszustande folgende Voraussetzungen annehmen:

1) Alle Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in geraden Linien parallel zur Röhrenachse;

2) für alle gleich weit von der Röhrenachse entfernten und in einem und demselben Querschnitte gelegenen Flüssigkeitstheilchen sind die Bewegungsumstände gleich; mit anderen Worten: alle Theilchen eines unendlich dünnen, mit der Röhrenachse concentrischen Ringes bewegen sich gleich schnell. Flüssigkeitstheilchen, welche einen anderen concentrischen Ring bilden, aber von kleinerem Durchmesser, werden auch eine gemeinschaftliche, der vorhergehenden aber ungleiche Geschwindigkeit haben. Alle Ringe von gleichen Durchmessern bewegen sich mit gleichen Geschwindigkeiten und bilden so zu sagen cylindrische Schichten. Cylindrische Schichten von kleineren Durchmessern bewegen sich schneller die Schichten von grösseren Durchmessern. Die grösste Geschwindigkeit entwickelt sich an der Röhrenachse und die kleinste — an den Röhrenwandungen. Dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen mit der Entfernung von den Wandungen nach der Achse zu wächst, war schon von lange her und von Vielen bemerkt worden,[1] Ducleaux hat es aber durch ein sehr einfaches Experiment bewiesen:[2] er füllte nämlich die Kugel und einen Theil der Röhre eines Thermometerglases mit gefärbtem Weingeiste und goss darauf in die Röhre ungefärbten Weingeist. Die Trennungsfläche zwischen dem gefärbten und dem ungefärbten Weingeiste erweist sich flach. Erwärmt man die Thermometerkugel an einer

---

[1] Unter Anderen hat Stephan bemerkt, dass sich die Wassertheilchen in Paraboloiden lagern. Wiener Sitzungsbericht, Jahrgang 1861.

[2] Ducleaux. Ecoulement de divers liquides au travers des éspaces capillaires. Annales de Chimue et de Physique, Bd. XXV. (1872).

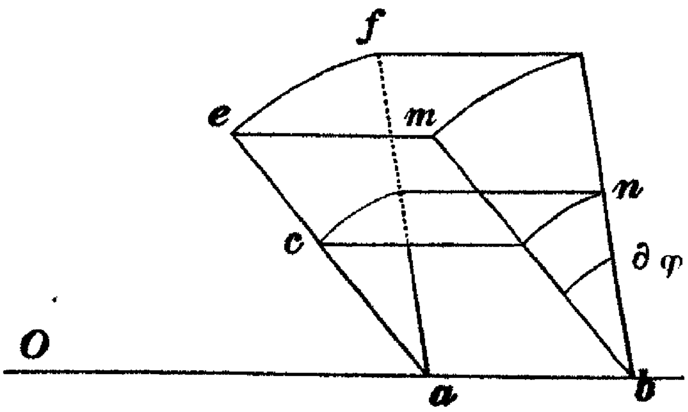
Spiritusflamme, so steigt der gefärbte Weingeist im Thermometerrohre, hebt dabei die ungefärbte Flüssigkeit und, indem die Bewegung der Flüssigkeiten vor sich geht, verliert die Trennungsfläche ihre flache Gestalt und wird in der Mitte, nach oben zu, convex.

3) Der hydrodynamische Druck ist in allen Punkten eines jeden Querschnittes derselbe. Eigentlich ist diese Voraussetzung eine unmittelbare Folge der vorhergehenden, der zufolge sich alle Flüssigkeitstheilchen geradlinig parallel zur Röhrenachse bewegen; man könnte sie aber auch streng beweisen, wenn man alle Gleichungen von Navier schreibt. Man findet einen solchen Beweis z. B. bei Kirchhoff.[1] Wir wollen dies als eine Voraussetzung annehmen einzig und allein, um die Ableitung der nothwendigen Gleichung möglichst zu vereinfachen.

4) Die Bewegung jeder cylindrischen Flüssigkeitsschicht wird von der umhüllenden Flüssigkeit verzögert und von der umhüllten beschleunigt. In Bezug auf diese verzögernde und beschleunigende Wirkung gilt Newton's Hypothese, dass nämlich die Kräfte proportional den Oberflächen sind, in welchen sie wirken, proportional der relativen Geschwindigkeit der angrenzenden Schichten und unabhängig von dem auf die Flüssigkeit wirkendem Drucke.

Auf Grund dieser Voraussetzungen lässt sich die Gleichung, welche die Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung eines jeden Flüssigkeitstheilchens in einer dünnen Röhre bestimmt, leicht ableiten. Zu dem Behufe denke man sich den Flüssigkeitskörper durch zwei unendlich nahe aneinander gelegene zur Röhrenachse senkrechte Flächen zerschnitten. Diese Flächen schneiden die Röhrenachse in den Punkten a und b. Man denke sich ferner zwischen diesen Flächen einen Ring, welcher von aussen und von innen von zwei cylindrischen Flächen, deren Achse ab mit der Röhrenachse zusammenfällt, begrenzt ist. Der innere Cylinder möge mit dem Radius $r = ac$ und der äussere mit dem

Fig. 1.



[1] Dr. Gustav Kirchhoff. Vorlesungen über Mathematische Physik, 1876. Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Radius $r + \partial r = ae$ beschrieben sein. Endlich setzen wir voraus, dass zwei durch die Achse ab gehende und einen unendlich kleinen Winkel $\partial \varphi$ bildende Flächen be und fb das zu betrachtende Element abschliessen. Ein jedes solcher Elemente bewegt sich gleichförmig in einer der Röhrenachse parallelen Linie; folglich gleichen sich alle auf dasselbe wirkenden Kräfte gegenseitig aus, und muss also die Summe der Projectionen auf die Richtung der Röhrenachse der das Flüssigkeitselement angreifenden Kräfte gleich 0 sein.

Die Röhrenachse sei die x-Achse

$$Oa = x \text{ und } ab = \partial x.$$

Das Flüssigkeitselement wird von folgenden Kräften angegriffen: 1) vom hydrodynamischen Drucke, welcher auf das Flüssigkeitselement von allen Seiten einwirkt, 2) von der Reibung oder Cohäsion, welche sich während der Bewegung in den Begrenzungsflächen des Elementes entwickelt und parallel zu denselben wirkt.

Bezeichnet man den pro Flächeneinheit auf die Molecüle der Fläche aef wirkenden hydrodynamischen Druck mit p, so wird derselbe, bezogen auf die Grenzfläche cf, deren Inhalt gleich $r \partial r \partial \varphi$ ist, durch das Produkt

$$p r \partial r \partial \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

ausgedrückt.

Dieser Druck wirkt in der Bewegungsrichtung von a nach b, welche wir als die positive annehmen wollen. Der Grenzfläche $b\,m\,n$, welche von der Fläche aef um ∂x entfernt ist, entspricht der als Function von x, bis auf die unendlich kleinen erster Ordnung genau, ausgedrückte hydrodynamische Druck pro Quadrateinheit

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \partial x.$$

Bezogen auf den Inhalt $r \partial r \partial \varphi$ des Flächenelementes mn, beträgt der Druck in der Richtung von b nach a

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \partial x\right) r \partial r \partial \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

Parallel zur x-Achse wirken auf das Flüssigkeitselement noch diejenigen Kräfte, welche bei der Bewegung sich in den Grenzflächen cm, fn, cn, mf entwickeln. Die ersten zwei Flächenelemente trennen das ausgesonderte Flüssigkeitselement vom übrigen Theile des Ringes; da sich das Element relativ zum Ringe nicht bewegt, so findet keine relative Bewegung der sich in diesen Flächen berührenden Flüssigkeitstheilchen statt, und das Flächenelement cm behält ausserdem seine relative Lage zum Flächenelemente fn. Daraus folgt, dass sich in den Flächen cm und fn keine ihnen parallelen Kräfte entwickeln.

Mit den Flächen cn und mf verhält es sich dagegen anders: dieselben können bei der Bewegung ihre relativen Lagen nicht beibehalten, denn die Geschwindigkeit in c ist derjenigen in e nicht gleich. Bezeichnet man die Geschwindigkeit in einem um r von der Achse entfernten Punkte c mit u, so wird in einem anderen, um $r + \partial r$ von der Achse entfernten Punkte e die Geschwindigkeit sich von u um eine Grösse unterscheiden, welche durch eine Summe von unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnungen ausgedrückt wird. Begnügt man sich mit einer Genauigkeit bis auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung, so kann die Geschwindigkeit in e durch $u + \frac{\partial u}{\partial r} \partial r$ ausgedrückt werden.

Dieser Geschwindigkeitsunterschied wird durch Cohäsions- oder Reibungskräfte bewirkt: je grösser die in den Grenzflächen des Flüssigkeitselementes wirkenden Kräfte sind, desto mehr werden sie die Form des Elementes ändern; die Formveränderung ist dabei der relativen Geschwindigkeit der Grenzflächen cn und fm direct und ihrer Entfernung ∂r umgekehrt proportional. Die Reibungskraft in der Fläche cn wird also direct proportional der Grösse $\frac{\partial u}{\partial r} \partial r$ und umgekehrt proportional ∂r wachsen. Die Reibungskraft in der Fläche cn, welche von der Röhrenachse um r entfernt ist und in welcher die Geschwindigkeit gleich u ist, ist also dem Quotienten

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial r} \partial r}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{(C)}$$

proportional.

So wird gegenwärtig die Hypothese von Newton über die Gleichheit der Verhältnisse der Reibungskraft und der relativen Geschwindigkeit verstanden.

Ist in einem um r von der Achse entfernten Punkte die Reibungskraft dem Quotienten $\frac{\partial u}{\partial r}$ proportional, so ist in Punkten, welche in anderen Entfernungen von der Achse liegen, die Reibungskraft anderen Grössen proportional. Bekanntlich ergiebt sich diese Grösse für die Entfernung $r + \partial r$ mit einer Rechnungsgenauigkeit bis auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung zu

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\partial r} \partial \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \partial r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D)}$$

Zur Ermittelung der Reibungskräfte, welche in den Flächen cn und fm wirken, genügt es nun die Ausdrücke C und D mit den entsprechenden Flächenelementen und mit der einheitlichen Reibungskraft zu multipliciren (d. h. mit derjenigen Reibung, welche sich bei einer der Einheit gleichen Geschwindigkeit in einer der Einheit gleichen Fläche entwickelt). Wir wollen diese einheitliche Reibung mit μ bezeichnen.

Der Flächeninhalt cn ist gleich $r \partial \varphi \partial x$, und derjenige von fm gleich $(r + \partial r) \partial \varphi \partial x$.

Die obigen Ausdrücke erlauben nun für die in den Flächenelementen cn und fm wirkenden Cohäsions- oder Reibungskräfte die respectiven Formeln, nämlich

für cn
$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} r \partial \varphi \partial x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

und für fm
$$\mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\partial r} \partial \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \partial r \right] (r + \partial r) \partial \varphi \partial x \quad \ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

zu schreiben.

Bei der Bewegung werden die der Achse näher gelegenen Schichten die Bewegung unseres Flüssigkeitselementes beschleunigen, d. h. sie werden in der als positiv angenommenen Richtung von a nach b, wirken; es muss also die in der Fläche cn angreifende Kraft positiv sein. Die weiter als unser Flüssigkeitselement von der Achse entfernt gelegenen Flüssigkeitstheilchen werden seine Bewegung verzögern, d. h. die in fm angreifende Kraft wird in der Richtung von b nach a hin wirken, sie muss also durch eine negative Zahl ausgedrückt werden. — Die absolute Grösse der ersten dieser Kräfte ist durch die Formel (E) und die zweite durch die Formel (F) ausgedrückt. In Formel (E) sind die Grössen μ, r, $\partial \varphi$, ∂x positiv, und was die Geschwindigkeit anbelangt, so wurde vorausgesetzt, dass sie sich mit dem Wachsen von r vermindert, folglich ist $\frac{\partial u}{\partial r}$ bei allen Werthen von r negativ.

Wir sehen also, dass die beiden Formeln (E) und (F) negative Zahlen geben, dass also die in fm wirkende Kraft direct durch die Formel (F) ausgedrückt wird, dass aber in Formel (E), damit dieselbe die in cn wirkende Kraft ausdrücke, das Vorzeichen umgeändert werden muss.

Wir haben also gefunden, dass parallel zur Röhrenachse auf das Flüssigkeitselement cn (Fig. 1) folgende Kräfte wirken:

$$p\,r\,\partial\varphi\,\partial r, \qquad -\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\partial x\right)r\,\partial\varphi\,\partial r$$

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial r}r\,\partial\varphi\,\partial x \quad \text{und} \quad \mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\partial r\right](r+\partial r)\,\partial\varphi\,\partial x$$

Bei der Gleichförmigkeit der Bewegung muss, wie bereits gesagt wurde, die Summe aller dieser Kräfte gleich 0 sein, wir bekommen also die Gleichung

$$p\,r\,\partial\varphi\,\partial r-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\partial x\right)r\,\partial\varphi\,\partial r-\mu\frac{\partial u}{\partial r}r\,\partial\varphi\,\partial x$$
$$+\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\partial r\right](r+\partial r)\,\partial\varphi\,\partial x=0.$$

Berücksichtigt man nach gehöriger Elimination nur die unendlich kleinen Glieder bis zur dritten Ordnung inclusive, so ist

$$-\frac{\partial p}{\partial x}r\,\partial x\,\partial\varphi\,\partial r+\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]\partial x\,\partial\varphi\,\partial r=0.$$

Der gemeinschaftliche Factor $\partial x\,\partial\varphi\,\partial r$ wird niemals 0 sein, und ausserdem ist

$$\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}+C\right)}{\partial r}$$

Wird also der Factor $\partial x\,\partial\varphi\,\partial r$ eliminirt, so kann man schreiben

$$r\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}+C\right)}{\partial r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Oben haben wir bereits bemerkt, dass der hydrodynamische Druck von r unabhängig ist. Seine Abhängigkeit von x kann auf Grund zahlreicher und unzweifelhafter Versuche durch die Gleichung

$$p=A-Bx$$

ausgedrückt werden, wobei A und B constante Grössen sind. In Folge dessen kann der Gleichung (1) die Form

$$B\,r\,\partial r=-\mu\,\partial\left(r\frac{\partial u}{\partial r}+C\right)$$

gegeben werden.

Wird diese Gleichung in den Grenzen $r=0$ und $r=r$ und in der Voraussetzung, dass μ constant ist, integrirt, so erhält man

$$\frac{Br^2}{2} = \mu\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0} - \mu\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r}.$$

Wenn $r = 0$ ist, so ist $\frac{\partial u}{\partial r}$ nicht unendlich gross, folglich ist, wenn $r = 0$ das Product $r\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ und die letzte Gleichung nimmt die Form an:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{B}{2\mu}r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist der Ausdruck für die relative Geschwindigkeit in Abhängigkeit von den hydrodynamischen Druckveränderungen, vom Röhrendurchmesser und von der inneren Reibung, welche bei einer der Einheit gleichen relativen Geschwindigkeit in einer Flächeneinheit entsteht. Die Gleichung (2) kann jedoch weder zur Bestimmung der Unbekannten μ, noch zur Prüfung der Hypothese von Newton dienen.

Bezeichnet man die den Radien $r = 0$ und $r = r$ entsprechenden Geschwindigkeiten mit u_0 und u, und integrirt alsdann die Gleichung (2), so wird

$$u = u_0 - \frac{B}{4\mu}r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Grösse u_0 wird bestimmt durch diejenigen Bedingungen, welche an der Berührungsfläche des Wasserkörpers mit dem Rohre erfüllt werden müssen.

Wäre fm die Berührungsfläche des Wassertheilchens en (Fig. 1) mit einer Röhre, deren Halbmesser gleich ϱ ist, so würden die Flächeninhalte der Seitenflächen cf und mn gleich

$$\varrho\,\partial\varphi\,\partial r,$$

die Fläche cn — gleich

$$(\varrho - \partial r)\,\partial\varphi\,\partial x$$

und die Fläche fm — gleich

$$\varrho\,\partial\varphi\,\partial x.$$

Die in den Seitenflächen cf und mn angreifenden Kräfte wären gleich

$$p\varrho\,\partial\varphi\,\partial r \text{ und } -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\partial x\right)\varrho\,\partial\varphi\,\partial r.$$

Um die in der Fläche cn angreifende Kraft zu bestimmen, hat man in Formel (E) $(\varrho - \partial r)$ statt r einzusetzen; dann ist, mit Rücksicht auf die Wirkungsrichtung der in $c\,n$ angreifenden Kraft,

$$- \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho} (\varrho - \partial r)\, \partial \varphi\, \partial x.$$

Zur Ermittelung der in $f\,m$ wirkenden Kraft müsste man die Stromgeschwindigkeit längs der Rohrwandungen, welche wir mit U_ϱ bezeichnen wollen, mit dem Reibungscoefficienten zwischen der Flüssigkeit und der Wandung multipliciren.

Bezeichnen wir nun die Reibungskraft der Flüssigkeit mit dem Rohre bei einer der Einheit gleichen Berührungsfläche und bei einer der Einheit gleichen Geschwindigkeit mit λ und berücksichtigen dabei, dass die zwischen der Röhre und dem Wassertheilchen wirkende Reibung eine der Bewegung entgegengesetzte Richtung hat, so ist für die in $f\,m$ wirkende Kraft der Ausdruck der folgende:

$$- \lambda\, U_\varrho\, \varrho\, \partial \varphi\, \partial x.$$

Bei einer gleichförmigen Bewegung heben sich die obigen vier Kräfte gegenseitig auf, es ergiebt sich also:

$$p\,\varrho\,\partial\varphi\,\partial r - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\partial x\right)\varrho\,\partial\varphi\,\partial r - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho}(\varrho - \partial r)\partial\varphi\,\partial x -$$
$$- \lambda\, U_\varrho\, \varrho\, \partial\varphi\, \partial x = 0.$$

Diejenigen Glieder zweiter Ordnung, welche sich nicht eliminiren lassen, geben nun die Gleichung

$$- \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho} - \lambda\, U_\varrho = 0$$

oder

$$U_\varrho = - \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho}$$

Setzt man nun in der Gleichung (3) ϱ anstatt r und das rechte Glied der letzten Gleichung anstatt u ein, so ist

$$- \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = u_0 - \frac{B}{4\mu}\varrho^2.$$

Endlich, da nach Gleichung (2)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=\varrho} = - \frac{B}{2\mu}\varrho,$$

so ist

$$u_0 = \frac{B}{4\mu}\left(\varrho + \frac{2\mu}{\lambda}\right)\varrho.$$

Es lässt sich also statt der Gleichung (3) die Gleichung

$$u = \frac{B}{4\mu}\left(\varrho^2 + \frac{2\mu}{\lambda}\varrho - r^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

aufstellen.

Diese auf Grund der Newton'schen Hypothese abgeleitete Gleichung liefert den Ausdruck für die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes einer Flüssigkeit, welche durch eine Röhre fliesst.

Die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkte der Flüssigkeit kann aber durch Versuche nicht ermittelt werden, folglich kann die Gleichung (4) zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten μ und λ nicht dienen. —

Um diese Gleichung zu transformiren, wollen wir diejenige Wassermenge berechnen, welche in einer gewissen Zeit durchfliessen würde, wenn die letzte Gleichung richtig wäre, und alsdann die berechnete Wassermenge mit derjenigen vergleichen, welche durch Versuche gefunden wird.

Aus Gleichung (4) kann das durchfliessende Wasservolumen sehr leicht ermittelt werden: beschreibt man nämlich im Röhrenquerschnitte zwei Kreise mit den Radien r und $r + \partial r$, so entsteht ein Ring mit dem Flächeninhalte

$$2\pi r d r.$$

Da sämmtliche Punkte dieses Ringes gleich weit von der Röhrenachse entfernt sind, so wird sich in allen diesen Punkten die Flüssigkeit mit gleicher Geschwindigkeit bewegen; diese Geschwindigkeit wollen wir mit u bezeichnen. Pro Secunde passirt dann durch diesen Ring das Wasservolumen

$$2\pi r u \partial r,$$

durch den ganzen Röhrenquerschnitt also — das Volumen

$$2\pi \int_0^\varrho r u \partial r$$

Bezeichnet man dieses Volumen mit Q und setzt unter das Integralzeichen anstatt u das zweite Glied der Gleichung (4) ein, so erhält man sofort

$$Q = \frac{\pi}{8}\frac{B\varrho^4}{\mu}\left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Diese Gleichung kann schon direct mit Versuchen verglichen werden; es wäre jedoch wünschenswerth noch den Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit zu haben; bezeichnen wir dieselbe mit v, so ist

$$\pi \varrho^2 v = Q.$$

Eliminirt man Q zwischen den zwei letzten Gleichungen, so ergiebt sich das folgende Abhängigkeitsverhältniss der mittleren Geschwindigkeit zu den Cohäsions- oder Reibungskräften

$$v = \frac{1}{8}\frac{B\varrho^2}{\mu}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right) \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind in Bezug auf μ und λ identisch, sie dürfen nicht als zwei verschiedene und von einander unabhängige Gleichungen betrachtet werden. Deshalb können wir mit ihrer Hülfe, auf Grund eines einzigen Versuches die Grössen λ nnd μ nicht ermitteln. Nimmt man aber bei den Versuchen Röhren von verschiedenen Durchmessern, so kann jede der beiden Gleichungen einzeln zur Bestimmung der Grössen μ und λ benutzt werden. Selbstverständlich müssen die Versuche so eingerichtet werden, dass alle bei Aufstellung der Gleichung (4) zu Grunde gelegten Voraussetzungen erfüllt werden, anderenfalls erhält man unrichtige Werthe für μ und λ.

Dieselben Gleichungen ermöglichen noch ein viel wichtigeres Ziel zu erreichen, nämlich — sie können zur Verificirung der Newton'schen Hypothese selbst dienen. —

Wird nämlich das Gesetz der Reibung in den Flüssigkeiten durch die Newton'sche Hypothese richtig ausgedrückt, so muss die Gleichung (5) die ausfliessende Wassermenge immer und für jede Grösse der Reibungskräfte richtig bestimmen, sind aber die in der Hypothese angenommenen Kräfte imaginäre, also in Wirklichkeit gar nicht vorkommende, so kann das Rechnungsresultat nach Gleichung (5) mit dem Resultate der wirklichen Kräfte nur in einzelnen besonderen Fällen übereinstimmen. Macht man z. B. zwei Versuche mit Röhren von verschiedenen Durchmessern ϱ oder mit einer und derselben Röhre, aber bei verschiedenen Druckdifferenzen an den Rohrenden (von diesen Differenzen ist B abhängig), so kann man die respectiven Mengen der durchfliessenden Flüssigkeit ermitteln. Setzt man diese zwei wirklichen Grössen von Q in die Gleichung (5) ein, so bekommt man zwei verschiedene Gleichungen, aus welchen die Grössen μ und λ sich ermitteln lassen. Wenn wir diese Coefficienten zur Ermittelung der Reibungskräfte nach der Newton'schen Hypothese anwenden, so können wir mittelst Gleichung (5) diejenige Wassermenge berechnen, welche in den obigen zwei Fällen durch die Röhre fliesst. Es ist augenscheinlich, dass eine solche Berechnung dieselben Resultate ergeben wird, wie die

Versuche. Das Rechnungsresultat mit imaginären Kräften wird also dasselbe sein wie das Wirkungsresultat in der Natur wirklich vorhandener Kräfte. Nimmt man aber Fälle, in welchen andere Umstände die Intensität der wirklichen Kräfte anders gestalten, als es nach Newton's Hypothese vorausgesetzt ist, so werden die Wirkungsresultate zweier Kräftesysteme, nämlich eines imaginären und eines wirklichen nicht mehr übereinstimmen. Die wirklich durchfliessende Wassermenge wird der nach der Gleichung (5) berechneten, in welche die oben bestimmten Grössen statt μ und λ eingesetzt wurden, nicht mehr gleich sein.

Stimmen aber bei verschiedenen Versuchen, bei welchen höchst verschiedene auf die Flüssigkeit wirkende Kraftintensitäten hervorgerufen werden, die Resultate mit den Rechnungsresultaten nach der Gleichung (5) überein, so beweist dies, dass alle bei der Ableitung der Gleichung (5) gemachten Voraussetzungen auch durch Versuche bestätigt werden. Da aber eines der wichtigsten Umstände durch die Newton'sche Hypothese bestimmt wurde, so ist eine solche beständige Uebereinstimmung der Versuchsresultate und der Rechnungsresultate mit der Gleichung (5) ein Beweis für die Richtigkeit der Newton'schen Hypothese. Umgekehrt würde eine Nichtübereinstimmung der Versuche mit den Formeln als ein deutlicher Beweis für die Unrichtigkeit der erwähnten Hypothese anzusehen sein.

Die Gleichung (5) kann also als eins der zuverlässigsten Criterien bei der der Beurtheilung der Richtigkeit der Newton'schen Hypothese gelten; sie verdient also eine besonders genaue Vergleichung mit den Versuchen. —

Bei dieser Vergleichung müssen wir immer berücksichtigen, dass bei der Ableitung der vielfach erwähnten Gleichung nicht **eine**, sondern **einige** Voraussetzungen gemacht worden sind und dass nur diejenigen Versuche als vergleichungsfähige bezeichnet werden können, bei welchen **alle Voraussetzungen ohne Ausnahme** erfüllt wurden. Die Nichterfüllung einer einzigen Voraussetzung würde den Versuch für die Vergleichung gänzlich unbrauchbar machen. Untersuchen wir nun, unter welchen Verhältnissen die bei der Ableitung der Gleichungen für die Bewegung des Wassers in Röhren angenommenen Voraussetzungen bestehen können? Die diesbezügliche Untersuchung kann nur auf Grund eines genauen Studiums der bereits gemachten Versuche vorgenommen werden. —

Was die erste Voraussetzung anbelangt, nämlich die geradlinige, der Röhrenachse parallele Bewegung der Wassertheilchen, so basirt dieselbe auf directer Beobachtung.

Ludwig[1] bemerkte, dass in genügend langen Röhren die der Flüssigkeit beigemengten sichtbaren Theilchen sich geradlinig und der Röhrenachse parallel bewegen, und Hagen[2] sagt, dass die Beobachtung der Bewegung von Wasser in Glasröhren (deren Durchmesser nicht grösser als 2,7 rheinische Linien oder 6,12 Millimeter war) die Ueberzeugung verschafft, dass bei nicht zu hohem Drucke und nicht hohen Temperaturen das Wasser in sehr feine cylindrische Schichten getheilt zu sein scheint, welche sich parallel zur Röhrenachse bewegen. Diese Erscheinung kann leicht beobachtet werden, wenn man dem Wasser, welches durch die Röhre fliesst, feine Körper von gleichem wie das Wasser specifischen Gewichte, z. B. dunkles Bernsteinpulver, beimengt. Ein sehr charakteristisches Kennzeichen dieser Erscheinung besteht darin, dass, wenn Wasser in die Atmosphäre ausfliesst und sich dabei so schnell bewegt, dass die capilläre Anziehungskraft der Ränder der Ausflussöffnung die Form des Wasserstrahles nicht verändert, derselbe eine völlig glatte und durchsichtige Oberfläche hat. Findet die Bewegung unter einem grossen Drucke oder bei einer hohen Temperatur statt, so bemerkt man sofort, dass die im Wasser schwimmenden leichten Körper sich ziemlich wirbelförmig in verschiedenen Richtungen bewegen, und dieser Umstand beweist, dass die Wassertheilchen ausser der fortschreitenden Bewegung mit der ganzen Wassermasse auch noch mannigfache fortwährende relative Bewegungen im Inneren der Wassermasse haben. In diesem Falle erhält die Oberfläche des ausfliessenden Wasserstrahles wegen der sich auf derselben bildenden kleinen Wellen die weissliche Färbung des matten Glases.[3]

---

[1] Ludwig. Lehrbuch der Physiologie, Bd. II, S. 57, Zweite Auflage

[2] Hagen. Abhandl. der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869 (Berlin 1870), 2. Bd., S. 1 u. 2.

[3] Jacobson erklärt (Heinrich Jacobson.' Reich. u. Dub. Reymond's Archiv, S. 91) dieses Kennzeichen als kein charakteristisches, da er vielfach das Wasser in ganz klare Strahlen ausfliessen gesehen habe, wobei die Bedingungen von Poiseuille's Gesetz nicht erfüllt waren. Diese Bemerkung muss wohl berücksichtigt werden, besonders bei der Aufstellung von Versuchen nach Poiseuille's Methode. Die Versuche müssen in solcher Weise geleitet werden, dass es möglich sei das wirkliche Vorhandensein aller Verhältnisse für die richtige Aufstellung des Gesetzes von Poiseuille zu beur-

In weiten Röhren sind, wie die alten Versuche von Saint-Venant[1] (vorzüglich beschrieben von Boussinesque[2]) gezeigt haben, die Strömungen nicht mehr parallele und verändern sich die Geschwindigkeiten nicht mehr regelmässig. Im Gegentheil, je grösser der Querschnitt des Wasserkörpers ist, um so grösser werden die verschiedenen Trennungen der Flüssigkeit, deren Strudelbewegungen und andere schiefe Strömungen, welche auf den Reibungswiderstand oder vielmehr auf die Arbeit der Reibung (weil die Krümmungen die Wege der Wassertheilchen verlängern) Einfluss haben. Wir sehen also, dass die erste Voraussetzung keineswegs immer erfüllt wird, dass folglich durchaus nicht alle Versuche über Bewegung von Wasser in Röhren zur Prüfung der Hypothese von Newton geeignet sind, und dass diesem Zwecke nur solche Versuche entsprechen können, welche mit langen und dünnen (capillären) Röhren bei kleinem Drucke und bei mittleren Temperaturen gemacht wurden. —

Die zweite Voraussetzung, dass nämlich eine Flüssigkeit, welche durch eine Röhre fliesst, sich so zu sagen in unendlich dünne Schichten theilt, ist von Hagen, wie bereits erwähnt wurde, durch directe Versuche bestätigt worden und wird unter denselben Verhältnissen erfüllt, welche für die erste Voraussetzung maassgebend sind. —

Die dritte Voraussetzung: dass der hydrodynamische Druck in jedem Röhrenquerschnitte constant bleibt, ist, im Grunde genommen, wie bereits erwähnt wurde, eine directe und nothwendige Folge der ersten Voraussetzung und wird also zugleich mit derselben erfüllt. —

Die vierte Voraussetzung ist die zu verificirende Newton's Hypothese selbst. —

Bei der Ableitung der Gleichung (4) wurde noch die Voraussetzung gemacht, dass

$$p = A - Bx.$$

In Betreff dieser Voraussetzung muss bemerkt werden, dass, abgesehen von den Versuchen von Darcy, in welchen diese Gleichung durch die Beobachtung von nur drei Pyäsometern bestätigt

---

theilen, und zwar nicht etwa nach dem Aussehen des Wasserstrahles, sondern nach einer Vergleichung der Resultate von Messungen der Röhrendimensionen, der Druckhöhen und der Gewichte der durchfliessenden Flüssigkeiten.

[1] De Saint-Venant. Formules et tables nouvelles. Annales des Mines 4 series t. XX. 1851. S. 49.

[2] Boussinesque. Essai sur la théorie des eaux courantes, § 1 u. 2.

wurde, die weit umfangreicheren Versuche von Lampe dieselben Resultate ergeben haben. Um sich einen Begriff von der Genauigkeit dieser Gleichung zu verschaffen, wenden wir uns an die nachstehende Tabelle von Lampe[1]. In derselben sind die dem verschiedenen Drucke entsprechenden Höhen y der Wassersäulen und die Röhrenlängen x zwischen den beobachteten Punkten in rheinischen Fussen ausgedrückt.

Tabelle I.

$y = 42{,}5913 + 0{,}016512\ x$
Wahrscheinliche Fehler: 0,0722, 0,000046.

Entfernungen x	Werthe von y beobachtete	Werthe von y berechnete
373,06	48,75	49,14
455,60	50,11	50,18
687,37	53,94	53,85
766,12	55,24	54,91
883,34	57,18	56,88
1262,93	63,44	63,29
1313,40	64,28	64,05
1409,14	65,86	65,85
1583,77	68,74	68,93
1632,12	69,54	69,67
1668,09	70,13	70,40
1974,17	75,19	75,13
2372,96	81,77	81,95
2789,81	88,66	88,39
2940,01	91,14	91,18

Die Werthe A und B wurden auf Grund dieser Tabelle nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Der wahrscheinliche Fehler in der Berechnung des Druckes ist kleiner als ein Tausendstel seines Werthes. —

Nachdem wir uns nun überzeugt haben, dass für die Bestimmung des hydrodynamischen Druckes in Abhängigkeit von x die Formel richtig gewählt ist, muss ermittelt werden, welche von den beim Versuche beobachteten Grössen den Werth von B bestimmen. Man bezeichne mit p den hydrodynamischen Druck in einem beliebigen, um x vom Röhrenanfange entfernten Röhrenquerschnitte, und mit p_1 den hydrodynamischen Druck bei einer Entfernung $x + l$ vom Röhrenanfange, dann ist

[1] Der Civilingenieur. Neue Folge. 19. Bd. 1873. S. 101.

$$p = A - Bx$$
$$p_1 = A - B(x + l)$$
oder
$$p_1 - p = Bl,$$
oder, wenn wir die Druckdifferenz am Anfange und am Ende des Röhrentheiles mit p_0, also
$$p_0 = p_1 - p$$
bezeichnen, so finden wir
$$B = \frac{p_0}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (5) und (6) ein, so ist

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\pi p_0 \varrho^4}{8\mu l}\left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right] \\ v &= \frac{p_0 \varrho^2}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Der Druck auf die Quadrateinheit der Oberfläche kann aber durch das Product aus dem Gewichte $\varDelta$ der Volumeneinheit der Flüssigkeit bei gegebener Temperatur mal die Höhe h der Flüssigkeitssäule ausgedrückt werden, d. h.
$$p_0 = \varDelta h.$$

Wir können also den Gleichungen (8) die Form

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\pi \varDelta h \varrho^4}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right) \\ \text{und} \qquad v &= \frac{\varDelta h \varrho^2}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\varrho}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

geben. Der hydrodynamische Druck lässt sich nicht in jedem beliebigen Querschnitte leicht beobachten. Am bequemsten wäre es denselben an den Röhrenenden in den Gefässen, in welche die Röhren einmünden, zu messen. Wenn dies möglich wäre, so könnte der Werth von p_0 durch den Druckunterschied im Niveau der Mittelpunkte der Röhrenenden in den Gefässen, in welche die Röhren eingesetzt sind, ausgedrückt werden. Dies wird auch gewöhnlich angenommen und haben Girard, Poiseuille und Hagen so verfahren. Helmholtz hat sich in seinem Werke[1] auch nicht dagegen ausgesprochen, denn diese Annahme kann in vielen Fällen als eine berechtigte gelten. Jacobson hat indessen bemerkt,[2]

---

[1] Wissenschaftliche Abhandlungen. 1. Bd., S. 219—220. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

[2] Dr. Heinrich Jacobson's Beiträge zur Haemodynamik. Reichert's und Reymond's Archive, 1860, S. 99.

dass zuweilen diese Annahme eine unrichtige sei. Seine Versuche zeigten nämlich, dass an den Rohrenden, da wo die Flüssigkeit in das Rohr einströmt, der Druck auf eine kurze Distanz im Inneren der Röhre bedeutend schneller sinkt als weiter nach dem Ende des Rohres zu. Die Versuche zeigten weiter, dass in den Gefässen, in welche die Röhren einmünden, im Niveau der Röhrenmittelpunkte die Druckdifferenz zuweilen eine beträchtlich grössere ist als diejenige Grösse p_0, welche in Gleichung (8) einzusetzen ist. Jacobson vermuthet, dass diese Unrichtigkeit in der Bestimmung von p_0 respective von h die wahrscheinliche Ursache ist, warum Girard's Versuchsresultate mit denjenigen von Poiseuille und seinen eigenen nicht übereinstimmen. —

Endlich war bei der Ableitung der Gleichung (4) und der daraus folgenden Gleichungen (5), (6), (8) und (9) die Voraussetzung gemacht worden, dass μ von r unabhängig ist. In Betreff dieses Umstandes bemerkte Saint-Venant[1] noch im Jahre 1851, dass, wenn man eine Uebereinstimmung zwischen Navier's Theorie und den Resultaten der Beobachtungen von Wasserströmungen in Canälen und Röhren herstellen wolle, angenommen werden müsse, dass μ um so grösser je grösser r ist. Saint-Venant meint aber, dass die Ursache, warum Navier's Theorie den Versuchen widerspricht, nicht darin liege, dass die Wirkungsverhältnisse der Molecularkräfte an der Oberfläche und im Inneren der Flüssigkeit verschiedene sind; er sucht den viel wahrscheinlicheren Grund dieses Widerspruches in einer anderen Erscheinung, welche darin besteht, dass die Strömungen nicht parallel zu einander sind, dass ihre Geschwindigkeiten sich nicht allmählig und regelmässig von Punkt zu Punkt verändern, dass endlich die Strömungstrennungen, Strudel und andere schiefe Bewegungen, welche die Grösse der Reibung stark beeinflussen, in weiten Querschnitten leichter entstehen und sich bedeutender entwickeln als in schmalen. Andererseits zeigten die Versuche von Plateau, welcher die Schwingungen der Magnetnadel in Flüssigkeiten beobachtete: das eine Mal an der Oberfläche und ein anderes Mal in einer ziemlichen Tiefe, dass die Schwingungszeiten in beiden Fällen durchaus nicht die gleichen waren

[1] Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes 1851, p. 49.

	in Wasser	in Glycerin	in gesättigter Sodalösung	in Weingeist	in Terpentin	in Olivenöl
An der Oberfläche	46	2160	60	15	14	303
In der Tiefe	24	1170	46	35	34	795

Für weite Röhren ist demnach die Voraussetzung, dass μ von r unabhängig ist, eine unrichtige, bei Wasser müsste man voraussetzen, dass μ um so kleiner ist, je grösser der Durchmesser wird, was den Forderungen von Saint-Venant und Boussinesq, welche die Molecularkräfte nicht berücksichtigten, gerade entgegengesetzt ist.

In äusserst dünnen Röhren verändert sich μ wahrscheinlich so wenig, dass man diese Veränderlichkeit als ohne Nachtheil für einen ziemlich hohen Grad von Genauigkeit vernachlässigen kann. Zu einem solchen Schlusse gelangt man wenigstens, wenn man die bemerkenswerthen Uebereinstimmungen der Poiseuille'schen Versuche mit den Formeln (8) und (9) betrachtet, welche in der Voraussetzung abgeleitet wurden, dass μ constant ist. —

Es erweist sich also, dass, abgesehen von der Newton'schen Hypothese, alle Voraussetzungen, welche bei der Ableitung der Gleichungen (8) gemacht wurden, erfüllt werden können, wenn das Wasser durch sehr dünne und verhältnissmässig lange Röhren unter einem niedrigen Drucke und bei nicht hoher Temperatur fliesst. Was nun die Hypothese von Newton anbelangt, so ist dieselbe entweder eine für alle Arten von Bewegungen richtige, oder sie ist für keinen Fall richtig. Die Vergleichung einer sehr grossen Zahl von Versuchsresultaten, welche unter den oben geschilderten Verhältnissen erzielt wurden, mit den Rechnungsresultaten nach den Formeln (5) und (8) muss diese Hypothese entweder bestätigen oder widerlegen. —

Versuche mit sehr dünnen und verhältnissmässig langen Röhren waren vielfach schon gemacht worden; z. B. von Girard, von Poiseuille, von einigen französisshen Akademikern, welche Poiseuille's Versuche verificirt haben, von Hagen und von Jacobson. Alle diese Versuche zeigen, dass das Gesetz der Bewegung von Wasser in dünnen Röhren in verschiedenen Fällen ein sehr verschiedenes ist. Dem ersten dieser Gesetze zufolge, welches gegenwärtig unter dem Namen des Gesetzes von Poiseuille oder von Hagen-Poiseuille bekannt ist, soll durch eine Röhre, unter sonst gleichen Umständen, mehr Wasser durchfliessen als den anderen Gesetzen zufolge. Nach dem Gesetze von Poiseuille scheint das Wasser so zu fliessen, dass alle jene, bei Ableitung der Gleichungen (5), (8) und (9) gemachten Voraussetzungen erfüllt werden.

Mit Ausnahme derjenigen von Girard liefern alle die anderen erwähnten Versuche solche Resultate, welche mit den Resultaten von Poiseuille beinahe identisch übereinstimmen. Wir halten es daher für nothwendig und hinreichend ausser den Versuchen von Girard auch die umfangreichen und glänzend durchgeführten Versuche von Poiseuille zu prüfen. Da die Versuche von Poiseuille durch zahlreiche und mannigfaltige andere Versuche bestätigt worden sind, so verlieren gewissermassen diejenigen von Girard, welche mit den obigen nicht ganz übereinstimmen, an Bedeutung, und dies um so mehr, als die Ursache dieses Unterschiedes gegenwärtig schwer aufzufinden ist. Jedenfalls wollen wir uns bei den Versuchen von Girard aufhalten in der Absicht zu beweisen, dass diese Versuche die Schlussfolgerungen nicht widerlegen, welche auf einer Vergleichung beruhen zwischen einer auf Newton's Hypothese begründeten theoretischen Ableitung und den Versuchen von Poiseuille und Jacobson. —

Die Versuche führten Girard, wie wir früher gesehen haben, auf die Gleichung (I). Dieselbe bestimmt die mittlere Geschwindigkeit in folgender Weise:

$$v = \frac{hd}{4bl} \quad \text{oder} \quad v = \frac{h\varrho}{2bl},$$

und Gleichung (9) zeigt, dass

$$v = \frac{\varDelta h \varrho^2}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda \varrho}\right)$$

oder, da $\frac{4\mu}{\lambda\varrho}$ im Vergleich zur Einheit eine sehr grosse Zahl ist, so darf in Uebereinstimmung mit Navier annähernd

$$v = \frac{\varDelta h \varrho}{2\lambda l}$$

gesetzt werden.

Die zwei ersten dieser vier Formeln sind eine Wiederholung der Gleichung 1 (S. 23), in welcher h, eben so wie in diesen zwei Gleichungen, wie bereits auf S. 22 betont wurde, den Druck pro

Quadrateinheit bezeichnet; in den zwei letzten Gleichungen wird aber mit h die in Längeneinheiten ausgedrückte Höhe der Flüssigkeitssäule ausgedrückt, so dass in denselben das Product Δh eine gleiche Bedeutung mit der Grösse h der zwei ersten Gleichungen hat.

Eine Vergleichung dieser zwei Formeln, welche eine und dieselbe Grösse v der mittleren Geschwindigkeit ausdrücken, zeigt, dass diese Formeln gleichlautende werden, wenn μ bedeutend grösser als λ wird, d. h. wenn die innere Reibung bedeutend grösser als die äussere ist. Diese Voraussetzung hat Navier auch wirklich gemacht[1]), denn er brauchte es, um beweisen zu können, dass seine Rechnungsresultate mit Girard's Versuchsresultaten übereinstimmen und er erhielt dabei die Gleichung

$$v = \frac{\Delta h \varrho}{2 l \lambda}.$$

Wenn diese Gleichung eine richtige wäre, so würde damit die Richtigkeit sowohl der gemachten Voraussetzungen, als auch der Hypothese von Newton bewiesen sein und könnte die Gleichung selbst zur Ermittelung des Coefficienten der inneren Reibung λ angewendet werden.

Diese Gleichung ist aber keine richtige. In erster Reihe wird sie von Girard's eigenen Versuchen widerlegt, denn dieselben führten ihn zu der Voraussetzung, dass eine gewisse Flüssigkeitsschicht an den Röhrenwandungen unbeweglich hafte. Offenbar kann aber eine solche Erscheinung nicht stattfinden, wenn die Adhäsion der Flüssigkeit an die Wandungen geringer als die Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen mit einander ist. Diese Gleichung wird zweitens durch die Versuche von Hagen und Ducleaux widerlegt, denn dieselben zeigen im Gegentheil, dass μ bedeutend kleiner als λ ist. Wir sehen also, dass die scheinbare Uebereinstimmung von Navier's Rechnungsresultaten mit Girard's Versuchen bei näherer Prüfung die Newton'sche Hypothese nicht bestätigen kann, was aber nicht beweist, dass die genannten Versuche diese Hypothese widerlegen. —

Wäre die von Navier und später auch von Anderen gefundene Gleichung unter der einzigen Voraussetzung der Richtigkeit der Newton'schen Hypothese abgeleitet worden und hätte sie keine

[1] Mémoires de l'Institut de France, Bd. VI, S. 431.

sonstigen Bedingungen in sich enthalten, so müsste eine Nichtübereinstimmung der Formel mit den Versuchen zu dem Schlusse führen, dass die Hypothese eine unrichtige ist. Der Gleichung (9) waren aber viele andere Voraussetzungen zu Grunde gelegt worden, und unter anderen auch die, dass die Strömungen geradlinige und der Röhrenachse parallele seien; wenn aber diese Voraussetzung ungenügend genau erfüllt wird, so kann dies an und für sich eine Nichtübereinstimmung der Gleichung mit den Versuchen nach sich ziehen. Nun wurde aber diese Voraussetzung in die Rechnung eingeführt, nicht etwa weil es die Newton'sche Hypothese so erforderte, sondern weil Navier's Differentialgleichungen, welche noch complicirtere als diejenigen der Euler'schen Hydrodynamik sind, in ihrer allgemeinen Form nicht integrirbar sind; und deshalb führte Navier in seine Rechnung die Voraussetzung von der geradlinigen, der Röhrenachse parallelen Bewegung der Theilchen, um die Frage wenigstens für einen speciellen Fall definitiv lösen zu können. Navier's Resultate werden also nur für diejenigen Forscher von Werth sein, welche es verstehen werden, ihre Versuche genau nach seinen Voraussetzungen anzustellen; für den Beobachter, dem dies nicht gelingt, verlieren Navier's Resultate jede Bedeutung. Den Differentialgleichungen dieses Gelehrten, welche auf der Newtonschen Hypothese beruhen, können wahrscheinlich sehr complicirte und für verschiedene Fälle sehr mannigfaltige Bewegungen entsprechen. Die Mannigfaltigkeit der Bewegung des Wassers in dünnen Röhren wurde von fast allen Beobachtern dieser Erscheinung, von Girard angefangen, beobachtet; alle behaupten, dass unter verschiedenen Verhältnissen auch die Bewegung des Wassers in Röhren nach verschiedenen Gesetzen vor sich gehe. Es mag aber das Gesetz der Bewegung des Wassers in Röhren sein, wie es will, der Reibungswiderstand der Flüssigkeit kann nicht für einen gewissen Fall durch eine solche Function der Geschwindigkeit und für einen anderen Fall — durch eine andere Function derselben Variabeln ausgedrückt werden; es kann nicht vorausgesetzt werden, dass Newton's Hypothese, eine richtige für einen gewissen Fall, für einen anderen — unrichtig sei. Wenn also diese Hypothese in einzelnen Fällen, wie wir sehen werden, völlig bestätigt wird, so muss auch hier die Nichtübereinstimmung der Gleichung (8) mit Girard's Versuchen in solchen Einwirkungen gesucht werden, welche die Wassertheilchen von den geradlinigen Bewegungen ablenken. Wir können also behaupten, dass Girard's Versuche Newton's Hypothese weder bestätigen noch widerlegen. —

Poiseuille machte wesentliche Fortschritte in den Untersuchungen betreffend die Bewegung des Wassers in dünnen Röhren[1]. Dieser gelehrte Arzt sagt in dem Vorworte zu seiner Schrift, dass, um in der Physiologie fortzuschreiten, man unbedingt die Bewegungsgesetze des Wassers in Röhren, deren Durchmesser kleiner als 0,01 Millimeter ist, wissen müsse; dass die betreffenden Versuche von Dubuat, Gerstner und Girard unzutreffende seien, weil sie mit verhältnissmässig noch zu weiten Röhren gemacht wurden[2]; dass ferner Navier auf analytischem Wege, durch Einführung der Hypothese über die gegenseitige Einwirkung der Molecüle auf einander, wohl eine der Girard'schen ähnliche Formel gefunden habe, doch dieselbe mit Recht nur dann angewendet werden dürfe, wenn sie durch Versuche bestätigt werden könnte. Dieser Umstand war es, welcher die Veranlassung gab zu Poiseuille's Versuchen. Die Ansicht ist ohne Zweifel eine sehr richtige. Wir haben bereits bemerkt, dass die Formeln von Navier und Girard nur dann übereinstimmen, wenn man die falsche und den Versuchen widersprechende Voraussetzung macht, dass die Adhäsion des Wassers an die Wandungen der von Girard angewendeten Röhren kleiner als die Cohäsion zwischen den Theilchen der Flüssigkeit sei. —

Poiseuille hat seine Versuche mit Röhren von äusserst kleinen Durchmessern gemacht[3].

Bezeichnung der Röhren.	Die zu einander senkrechten Röhrendurchmesser in Millimetern ausgedrückt			
	an dem einen Röhrenende		an dem anderen Röhrenende	
E	0,0286	0,0296	0,02933	0,03000
D	0,04466	0,04600	0,04250	0,04450
C	0,0845	0,0845	0,0850	0,0860
B	0,1117	0,1135	0,1125	0,1145
A	0,1395	0,1415	0,1405	0,1430
F	0,6160	0,6932	0,6140	0,6900

[1] Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides. Mémoires, presentés par divers savants. Institut. Academie Royale des sciences. Bd. IX. S. 433 u. ff.

[2] Daselbst. S. 435.

[3] Daselbst. S. 461—484.

Die Versuche mit diesen Röhren zeigen[1], ähnlich wie bei den Versuchen von Girard, dass 1) die Bewegung in den Röhren zuweilen nach einem gewissen Gesetze und zuweilen nach einem anderen vor sich geht: dass in denjenigen Fällen, wo bei einer gewissen Temperatur t der Flüssigkeit die Länge l der Röhre in Vergleich zu ihrem Durchmesser d genügend gross ist, das eine Bewegungsgesetz massgebend ist, dass dagegen für kleinere Grössen von l ein anderes, von dem ersteren sich sehr unterscheidendes Gesetz als wirksam sich erweist. Das für die Röhren von verschiedenen Durchmessern und für die Giltigkeit des einen oder des anderen Gesetzes massgebende Grenzverhältniss $\frac{l}{d}$ ist nicht mit genügender Deutlichkeit zu erkennen; indessen kann man doch behaupten, dass bei grossen Durchmessern das Grenzverhältniss $\frac{l}{d}$ auch ein grösseres ist. Poiseuille fand bei seinen Versuchen folgende Grenzwerthe[2]

für die Röhre	E	70
„ „ „	D	80
„ „ „	C	120
„ „ „	B	270
„ „ „	A	180
„ „ „	F	310

2) Aus den Versuchen lässt sich weiter schliessen, dass die pro Secunde durchströmende Wassermenge Q dem Drucke p proportional ist und dass dieselbe durch die Formel $Q = Kp$ ausgedrückt werden kann. In dieser Gleichung ist K eine für eine und dieselbe Röhre und für eine und dieselbe Temperatur constante Grösse, im Uebrigen aber ist K variabel und als eine Function sowohl des Durchmessers und der Länge der Röhre als auch der Temperatur der durchströmenden Flüssigkeit zu betrachten.

Der Grad der Genauigkeit dieser Formel für eine und dieselbe Röhre lässt sich aus nachstehender Tabelle entnehmen[3].

Diese Tabelle wurde auf Grund des Versuches Nr. 2 der Tabelle II in folgender Weise berechnet. In die Gleichung $Q = Kp$ wurden zuerst diejenigen Werthe von Q und p eingesetzt, welche

---

[1] Poiseuille. Recherches. S. 494.

[2] Daselbst. S. 495 u. ff.

[3] Daselbst, Nr. 76.

sich bei dem Versuche Nr. 2 ergeben haben, alsdann wurde aus dieser Gleichung K ermittelt und die erhaltene Grösse in die Gleichung $Q = Kp$ eingesetzt. Der Reihe nach wurden alsdann in diese Gleichung die bei den Versuchen beobachteten Werthe von p eingesetzt, worauf sodann die entsprechenden Werthe von Q berechnet wurden.

3) Die Grösse K bleibt dieselbe ohne Rücksicht darauf, ob die Flüssigkeit in die Luft ausströmt oder in Wasser, auf welches ein gewisser grösserer oder kleinerer Druck ausgeübt wird. Im letzteren Falle ist zu berücksichtigen, dass p die Druckdifferenz an den beiden Röhrenmündungen ausdrückt.

4) Das Studium der erhaltenen Resultate führte Poiseuille zu der Ueberzeugung, dass K der vierten Potenz des Röhrendurch-

Tabelle II.

Röhre K: Länge $l = 364{,}00$ Millim., Durchmesser des freien Endes $d = 0{,}1316$, Temperatur der durchfliessenden Flüssigkeit $t = 11^\circ$ Celsius.

Nr. des Versuches.	Druck in Millim. der Quecksilbersäule	Zahl der Secunden, in welchen durch die Röhre 1 Cubikcentimeter passirt: beobachtete Zeit	berechnete Zeit	Mittlere Ausflussgeschwindigkeit in Millim.
1	54,987	8590,00	8598,2	8,56
2	210,129	2250,00	2250,0	32,68
3	419,645	1125,75	1126,6	65,30
4	835,565	565,00	565,8	130,1
5	2338,37	197,50	202,1	372,3
6	3095.54	154,00	152,73	474,4
7	3856,94	123,00	122,80	597,7
8	4616,53	106,25	102,40	693,7
9	5376,53	88,25	87,93	832,7
10	6136,53	77,50	77,04	948,7

messers proportional[1], der Röhrenlänge aber umgekehrt proportional ist, und deshalb bei constanter Temperatur durch die Formel

$$K = K'' \frac{d^4}{l},$$

in welcher K'' blos von der Temperatur abhängig sein kann, ausgedrückt werden darf.

[1] Also nicht in der Weise, wie es aus Girard's Versuchen, auf Grund der Gleichung I folgen würde.

Unter Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung giebt die letztere dann den Ausdruck

$$K'' = \frac{Ql}{pd^4}$$

Um den Grad der Genauigkeit dieser Formel zu prüfen, beobachtete Poiseuille (Tabelle III) bei einem Drucke einer 775 Millimeter hohen Quecksilbersäule, welche eine Temperatur 0° hatte, die durch 25 Millimeter lange Röhren durchströmende Wassermenge. Er setzte alsdann die beobachteten Zahlen in die letzte Gleichung ein und berechnete die Werthe von K'', welche in Tabelle III zusammengestellt sind[1].

Tabelle III.

Bezeichnung der Röhren.	Mittlere Röhrendurchmesser in Millimetern.	Werthe von K''
M	0,013949	2495,50
E	0,029380	2496,00
D	0,043738	2494,42
C	0,085492	2496,77
B	0,113400	2496,20
A	0,141600	2492,67
F	0,652170	2495,00

Auf Grund dieser Tabelle bestimmt Poiseuille für die Temperatur $t = 10°$C die mittlere Grösse

$$K'' = 2495{,}224.$$

Vergleichen wir nun den mittleren Werth von K'' mit den durch Versuche ermittelten Grössen dieses Coefficienten, so ist die grösste Zahl für K'' in Tabelle III um 0,0006 grösser und die kleinste um 0,0010 kleiner als der mittlere Werth. Diese Grössen liegen innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler, denn, obgleich die Durchmesser der Röhrenöffnungen mit einer Genauigkeit bis auf 0,001 der absoluten Grösse gemessen wurden, so waren die Oeffnungen doch keine runden. Zur Ermittelung der in die Tabelle eingetragenen Werthe von d war man daher genöthigt die Röhrenöffnungen als elliptische anzunehmen und die Durchmesser der mit diesen Ellipsen congruenten Kreise zu berechnen. Wir können

---

[1] Poiseuille. Recherches, S. 520.

also behaupten, dass K'' effectiv eine bei constanter Temperatur constante Grösse ist und dass bei $t = 10^0$

$$Q = 2495{,}224 \frac{pd^4}{l}.$$

In dieser Gleichung repräsentirt Q die Zahl der pro Secunde durchströmenden Cubikmillimeter Wasser, p, d und l — die Höhe der Quecksilbersäule, den Durchmesser der Röhre und ihre Länge, bezogen auf die Temperatur 0°. Wird p durch die Millimeterzahl der Höhe einer Wassersäule bei 0° ausgedrückt, so ist, da das specifische Gewicht des Quecksilbers gleich 13,576981 ist,

$$Q = 183{,}783 \frac{pd^4}{l}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht, dass v — die mittlere Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Wassers in der Röhre durch die Formel

$$v = 3177{,}078 \frac{pd^2}{l}$$

ausgedrückt werden darf.

Bei den Versuchen mit der Röhre B, deren Durchmesser $d = 0{,}1134$ und $l = 25$ war, ist die Grösse dieser Geschwindigkeit bei $p = 775$ Millimeter

$$v = 1266{,}507$$

gewesen, hingegen beim Versuche mit der Röhre M, deren Durchmesser $d = 0{,}0139499$ und die Länge $l = 25$ war, bei $p = 775$ —

$$v = 19{,}1657.$$

Die Abhängigkeit der Coefficienten K'' von der Temperatur hat Poiseuille, ähnlich wie Girard, durch eine Formel zweiter Potenz der Temperatur und zwar durch die folgende:[1]

$$K'' = 1836{,}724\,[1 + 0{,}0336793\,\mathrm{t} + 0{,}0002209936\,\mathrm{t}^2]$$

ausgedrückt.

Wird die Höhe p durch eine Wassersäule bei 0° ausgedrückt, dann ist

$$Q = 135{,}282\,[1 + 0{,}0336793\,\mathrm{t} + 0{,}0002209936\,\mathrm{t}^2]\ldots \quad (10)$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird durch die nachstehende Tabelle IV[2] bestätigt. In derselben sind angeführt die Ergebnisse der Versuche mit der Röhre D, welche einen Durchmesser $d =$

---

[1] Poiseuille. Recherches, S. 531.

[2] Daselbst, S. 233.

0,0440406 und eine Länge $l = 50{,}225$ hatte, bei einem Drucke einer Quecksilbersäule von $p = 776$ Millimeter.

Tabelle IV.

Temperaturen nach Celsius t.	Q = Zahl der Cubikmillimeter Wasser, welche in einer Secunde durchfliessen	
	berechnet	beobachtet
5	0,125324	0,125388
10	0,145072	0,145031
15	0,165998	0,165468
20	0,188105	0,188328
25	0,211391	0,211371
30	0,235856	0,236241
35	0,261501	0,262411
40	0,288326	0,289335
45,1	0,316903	0,316466

Die vorstehenden Tabellen zeigen, dass die empirischen Poiseuille'schen Formeln die Gesetze der Bewegung des Wassers in dünnen Röhren in dem Falle, wo die Wassertheilchen parallel zur Röhrenachse sich bewegen, sehr genau ausdrücken. In gleicher Weise bieten die Versuche mit der Röhre A so wie mit anderen Röhren sehr übereinstimmende Resultate. —

Nach den Versuchen von Poiseuille wird also die pro Secunde durchfliessende Wassermenge durch die Formel

$$Q = K'' \frac{pd^4}{l}$$

und die mittlere Stromgeschwindigkeit — durch

$$v = \frac{4K''}{\pi} \frac{pd^2}{l}$$

ausgedrückt.

Setzen wir statt des Durchmessers den Halbmesser ϱ ein, so ist

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{16K''p\varrho^4}{l} \\ \text{und} \quad v &= \frac{16}{\pi}K''p\frac{\varrho^2}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hagen hat ein ähnliches Gesetz gefunden, welches durch Jacobson's Beobachtungen eine Bestätigung erhalten hat.[1] Vergleichen wir nun diese Gleichungen mit der Gleichung (9) und berücksichtigen dabei, dass in jenen Gleichungen die Höhe der Flüssig-

[1] Reicherts u. Dub.-Reymond's Arch. 1860, S. 81.

keitssäule mit h bezeichnet war, dagegen in den letzten Gleichungen Poiseuille die Höhe der Flüssigkeitssäule mit p bezeichnet hatte, so erweist sich, dass

$$16\,K'' = \frac{\pi \varDelta}{8\mu}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda \varrho}\right).$$

Der zweite Theil dieser Gleichung zeigt, dass K'' eine Function von ϱ ist; die Tabelle III zeigt aber, dass K'' bis auf 0,001 vom Halbmesser unabhängig ist, trotzdem der grösste beobachtete Halbmesser (die Röhre F) gleich 0,65217 und der kleinste (die Röhre M) gleich 0,013949, der grösste Durchmesser also 47 Mal grösser als der kleinste war. Bezeichnen wir jedoch die dem Halbmesser ϱ entsprechende Grösse mit K'', mit K_1'' dagegen diejenige Grösse, welche ϱ_1 entspricht, so ist in Folge der letzten Gleichung

$$16\,K_1'' = \frac{\pi \varDelta}{8\mu}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda \varrho_1}\right).$$

Alsdann ergeben die beiden letzten Gleichungen die folgende:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{\varrho}\left\{\frac{\frac{\varrho}{\varrho_1} - 1}{\frac{K_1''}{K''} - 1} - 1\right\}.$$

Anderseits zeigt die Tabelle III, dass das grösste Verhältniss der Radien $\frac{\varrho}{\varrho_1} = 47$ ist. Da nun das Verhältniss von K_1'' zu K'' nicht grösser als 1,001 sein kann, so ist folglich

$$\frac{4\mu}{\lambda\varrho} < \frac{1}{11500} < 0{,}0001.$$

Diese Ungleichheit erklärt uns, warum Poiseuille das Abhängigkeitsverhältniss zwischen K'' und ϱ nicht bestimmen konnte; dieselbe zeigt ausserdem, dass, wenn mit der Gleichung (9) gerechnet und dabei eine Genauigkeit von nur 0,001 beansprucht wird, das Glied $\frac{4\mu}{\lambda\varrho}$ als ein verschwindend kleines in Vergleich zur Einheit in jener Gleichung vernachlässigt werden darf. In diesem Falle erhalten wir also anstatt der Gleichungen (9) die Gleichungen

$$Q = \frac{\pi \varDelta h \varrho^4}{8\mu l} \quad \text{und} \quad v = \frac{\varDelta h \varrho^2}{8\mu l},$$

welche mit den Poiseuille'schen völlig übereinstimmen. Wir sehen demnach, dass Poiseuille's Versuche die Gesetze des Ausfliessens der Flüssigkeiten aus dünnen Röhren in gleicher Weise zum Ausdruck bringen, wie die oben angeführten Rechnungen, welche auf der Voraussetzung beruhen, dass die Hypothese von Newton in Betreff der Reibung des Wassers eine richtige ist. Diese Uebereinstimmung der Resultate berechtigt zu der Behauptung, dass auch die zu Grunde gelegten Voraussetzungen, wenigstens was die Genauigkeitsgrenzen der Versuche anbetrifft, richtige sind. —

Der angeführte Beweis der Richtigkeit der Newton'schen Hypothese wäre aber von keiner grossen Bedeutung und man könnte denselben nicht als einen triftigen bezeichnen, wenn die Kräfte, welche auf diese Weise ermittelt werden, sich während der Dauer der Versuche so wenig veränderten, dass in den gegebenen Genauigkeitsgrenzen immer ein und dieselben Resultate zu erwarten seien, so dass es dabei auf die Methode der Ermittelung gar nicht ankäme. Nun aber verändern sich die Kräfte nach der Newton'schen Voraussetzung proportional dem Quotienten $\frac{\partial u}{\partial r}$. In Folge der Gleichungen (2) und (7) sind dieselben Kräfte aber proportional dem Quotienten $-\frac{p_0 r}{2 \mu l}$. Im Inneren der Röhre, in einer um r von der Achse entlegenen beliebigen Punkte ist also die innere Reibung der Flüssigkeit pro Flächeneinheit gleich

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{p_0 r}{2 l}.$$

Bei zwei verschiedenen Versuchen mit einer und derselben Röhre sind also die den gleichen Werthen von r entsprechenden Kräfte der Grösse p_0 proportional. Die Tabelle III zeigt aber, dass bei den Versuchen mit der Röhre K die äussersten Grenzen, in welchen der Druck p_0 variirte, $p_0 =$ (beinahe) 55 Millim. und $p_0 =$ 6137 Millim. waren. Der grösste Druck war also circa 111 Mal grösser als der kleinste. Da nun die Rechnungsresultate, welche auf Grund einer so grossen Veränderlichkeit der Kräfte erreicht wurden, mit den Resultaten von 10 verschiedenen Versuchen übereinstimmen, und wie die Tabelle II zeigt, Ungenauigkeiten von nur 0,001 aufweisen, so bleibt kein Zweifel mehr, dass die Hypothese eine von der Wahrheit sehr wenig abweichende ist.

Unter der Voraussetzung, dass die Reibung zwischen den Theilchen der Flüssigkeit der ersten Potenz der relativen Geschwindigkeit, d. h. der Grösse $\frac{\partial u}{\partial r}$ proportional ist, wurden also Rechnungsresultate gewonnen, welche sogar bei einer Veränderlichkeit der Grösse $\frac{\partial u}{\partial r}$ in den sehr weiten Grenzen von 1 bis 111 mit den Versuchsresultaten, wie wir oben gesehen haben, auffallend übereinstimmen. Es lässt sich also kaum annehmen, dass eine andere Rechnungsweise, welche auf der Voraussetzung beruht, das jener Widerstand nicht der ersten, sondern der zweiten Potenz der relativen Geschwindigkeit, also $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ proportional sei, genauere Resultate ergeben werde, nämlich solche, welche mit den Versuchen noch besser übereinstimmen würden. —

Die Versuche von Poiseuille bieten also einen Beweis für die Richtigkeit der Newton'schen Hypothese; es könnte nur noch die Richtigkeit der Versuche selbst in Frage gestellt werden; ein Zweifel in dieser Richtung würde nur durch eine Wiederholung der Versuche oder durch eine Prüfung derselben von Seiten anderer Gelehrter widerlegt werden können. Eine derartige Prüfung wurde übrigens schon durch die Pariser Akademie vorgenommen, und haben die wiederholten Versuche mit dünnen Röhren die von Poiseuille erhaltenen Resultate bestätigt. Später ist von Dr. Jacobson aus Königsberg untersucht worden, ob die Poiseuille'schen Gesetze auch auf erheblich weitere Röhren als diejenigen von Poiseuille anwendbar seien: Jacobson verwendet Röhren von folgenden Durchmessern:[1]

Röhren A ... $\varrho = 0{,}8769$ Millim. oder $d = 1{,}7538$
„ B ... $\varrho = 1{,}1470$ „ „ $d = 2{,}2940$
„ C ... $\varrho = 1{,}4328$ „ „ $d = 2{,}8656$

Wir sehen also, dass diese Röhren beinahe solche Durchmesser wie die Girard'schen Röhren hatten. Jacobson benutzte zu seinen Versuchen eben so wie Girard kupferne Röhren. Die Resultate dieser Versuche bestätigten die Beobachtungen von Poiseuille.

Zum Beweise, dass seine Resultate mit denjenigen Poiseuille's übereinstimmen, schrieb Jacobson das Poiseuille'sche Gesetz oder die zweite Gleichung der Gruppe (11) in der Form

$$p = k \frac{l}{\varrho^2} c,$$

worin c die mittlere Stromgeschwindigkeit repräsentirt. Die Grösse k

[1] Reich. u. Dub.-Reymond's Arch., 1860, S. 81.

bestimmte Jacobson aus seinen eigenen Beobachtungen und berechnete den Druck p in Preussischen Zollen. Er erhielt folgende Resultate:

ϱ	l	t	k
0,8769	533,3 Millim.	16,8°	0,000034240 g
		16,6°	0,000034896 „
		16,6°	0,000034568 „
		16,8°	0,000034488 „
	518,2 „	15,1°	0,000035960 „
		15,1°	0,000035904 „
		15,1°	0,000035752 „
		15,1°	0,000035472 „
1,1470	518,1 „	11,2°	0,000041320 „
		11,2°	0,000041256 „
		11,6°	0,000040648 „
	437 „	12,2°	0,000038472 „
		12,2°	0,000038048 „
		17,0°	0,000034384 „
		18,9°	0,000033016 „
		20,2°	0,000031720 „
1,4328	620,4 „	13,4°	0,000036720 „
		13,4°	0,000036325 „
		13,4°	0,000036584 „
		15,6°	0,000035728 „
		15,8°	0,000035264 „
		15,8°	0,000035136 „
		16,7°	0,000034504 „

Die Poiseuille'sche Formel liefert bei Anwendung derselben Längeneinheit folgende Zahlen:

t	k
0°	0,000055488 g
10°	0,000041448 „
11,5°	0,000039176 „
12,5°	0,000038600 „
14°	0,000036632 „
15,5°	0,000035232 „
16,5°	0,000034328 „
18,9°	0,000032352 „
20,5°	0,000031071 „

Diese Tabelle zeigt, dass beide Beobachter fast identische Resultate erhielten. —

Die Versuche von Poiseuille und von Jacobson haben also die Richtigkeit der Hypothese von Newton erwiesen, und können wir auf Grund jener Versuche diejenige Reibung ermitteln, welche im Inneren der Flüssigkeit in einem Quadratmillimeter Oberfläche und bei einer Geschwindigkeit von 1 Millimeter entwickelt wird. Es muss bemerkt werden, dass in der Gleichung (10) Q die Cubikmillimeterzahl des pro Secunde durchfliessenden Wassers ausdrückt, wenn p, d und l in Millimetern gegeben sind, und dass die erste der Gleichungen (9) auch den Werth von Q in Milligrammen ergiebt, wenn h, ϱ und l in Millimetern und Δ in Milligrammen ausgedrückt sind. Wenn h in Bezug auf Wasser angenommen ist, so ist $\Delta = 1$ Milligramm. Vernachlässigen wir nun in Gleichung (9) das Glied $\frac{4\mu}{\lambda\varrho}$ und combiniren dann die Gleichungen (9) und (10), so ist

$$\mu = \frac{\pi}{128135{,}282\ [1 + 0{,}0336793\ t + 0{,}0002209936\ t^2]} \quad \ldots . \quad (12)$$

Nunmehr ist es leicht mit Hilfe dieser Gleichung μ für die verschiedenen Temperaturen zu bestimmen. Einige Werthe von μ finden sich in der nachstehenden Tabelle V zusammengestellt.

Tabelle V.

Temperatur t^0 C.	Werthe von μ in Milligrammen pro Quadratmillimeter bei einer Geschwindigkeit von 1 Millim.
0	0,0001816
10	0,0001335
20	0,0001027
30	0,0000821
40	0,0000672

Um die entsprechenden Werthe von μ in Milligrammen, bezogen auf einen Quadratmeter Oberfläche bei einer Geschwindigkeit von 0,01 Meter zu erhalten, hat man die vorstehenden Zahlen mit 10000000 zu multipliciren. Soll μ in Grammen, bezogen auf 1 Quadratmeter Oberfläche und auf die Geschwindigkeit von 0,01 Meter ausgedrückt werden, so sind dieselben Zahlen nur mit 10000 zu multipliciren. Dies ist klar.

Bewegt sich also bei einer Temperatur von $t = 20^0$ C. oder 16^0 R. ein Quadratmeter Oberfläche in der Richtung seiner eigenen

Fläche mit einer Geschwindigkeit von 0,01 Meter, so entsteht dabei ein Widerstand von

1,027 Gramm.

Dieselbe Zahl wurde schon früher erwähnt. —

Obgleich nun die auf der Newton'schen Hypothese beruhenden Rechnungsresultate auffallend genau mit den Resultaten der höchst mannigfaltigen Versuche von Poiseuille übereinstimmen und obgleich diese Versuche durch diejenigen der französischen Akademie und durch die Versuche von Jacobson noch bestätigt wurden, so ist die Richtigkeit der Hypothese von Newton in früherer Zeit und noch bis heute von mancher Seite in Zweifel gezogen worden.

In erster Reihe gab dazu die Veranlassung der Umstand, dass die eben erwähnten Formeln von Navier für Canäle und selbst für Röhren mit grösserem Durchmesser nicht anwendbar sind, sowie der fernere Umstand, dass sowohl die auf empirischem Wege erhaltenen Formeln, welche den Widerstand bei der Bewegung der Flüssigkeiten in offenen Canälen und in Rohrleitungen ausdrücken, als auch der von Beaufroy und von Froude gefundene und vom russischen Gelehrten D. I. Mendelejew verbesserte Ausdruck[1] für den Widerstand bei der Bewegung der in grossen Bassins schwimmenden Brettern in der Form von Functionen erster Potenz der mittleren Stromgeschwindigkeit oder der Geschwindigkeit schwimmender Bretter nicht dargestellt werden können. Eine zweite Veranlassung an der Richtigkeit der Newton'schen Hypothese zu zweifeln bot die scheinbare Möglichkeit auf analytischem Wege eine solche Gleichung zu finden, welche die durchfliessende Wassermenge in Uebereinstimmung mit Poiseuille's Versuchen angiebt und auf der Voraussetzung beruht, dass der Widerstand der Reibung in Flüssigkeiten eine Function zweiter Potenz der Geschwindigkeit ist. Könnte nun eine in der gedachten Hinsicht fehlerfreie Uebereinstimmung der Gleichung mit den Versuchen erreicht werden, so müsste man freilich Newton's Hypothese als unzutreffend fallen lassen, weiter unten werden wir aber sehen, dass eine solche Uebereinstimmung nicht vorhanden ist. —

---

[1] Д. Менделеевъ. О сопротивленiи жидкости и о воздухоплаванiи. Выпускъ I. 1880 стр. 67 Уравненіе X. (D. Mendelejew. Ueber den Widerstand der Flüssigkeiten und über die Luftschiffahrt. Lief. I, (1880) S. 67, Gleichung X).

Die angeführten Einwendungen wollen wir etwas näher prüfen und deren Unrichtigkeiten zeigen.

In erster Reihe muss erwähnt werden, dass bereits Sonnet, welcher sich der von Navier in seinem Berichte angeführten Formel des Verhältnisses der mittleren Stromgeschwindigkeit in Canälen zur maximalen Geschwindigkeit bediente, die Bemerkung machte, dass die von Navier angegebenen Grenzen, innerhalb welcher dieses Verhältniss eingeschlossen sein sollte, in Wirklichkeit mit den Beobachtungen nicht übereinstimmen. Dies veranlasste Sonnet die Ansicht auszusprechen, dass die von Navier zu Grunde gelegte Hypothese eine unvollkommene sei. Er vervollständigte dieselbe [1] und gelangte dann mittelst einer Rechnung zu dem Schlusse, dass die Differenz zwischen der Geschwindigkeit an der Canaloberfläche und der an den Canalwandungen dem Producte $R^2 J$ proportional sein müsse, wohingegen alle Versuche zum Resultate $\sqrt{RJ}$ führen. Hier bezeichnet R den mittleren Halbmesser des Canalquerschnittes und J das Gefälle pro Längeneinheit des Canals. Die Correctionen von Sonnet haben daher die Frage nicht aufgeklärt. Darcy machte neue Versuche mit Röhren von grossen Durchmessern und bediente sich dabei der Röhre von Pitot, welche die Stromgeschwindigkeiten für verschiedene Entfernungen von der Röhrenachse bestimmt. Diese Versuche veranlassten Darcy Newton's Hypothese zu verändern und als Voraussetzung einzustellen, dass die innere Reibung nicht dem Quotienten $\frac{\partial u}{\partial r}$, sondern dem Producte $R^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ proportional ist. Die auf Grund dieser Hypothese erhaltenen Rechnungsresultate haben sich aber auch nicht bewährt [2]. Es ist also auch dieser Versuch Newton's Hypothese zu verändern nicht gelungen.

D. I. Mendelejew endlich, welcher die Resultate der vorhergegangenen Arbeiten, insbesondere aber die Versuche von Beaufroy und Froude, mit in grossen Bassins schwimmenden Brettern untersuchte, spricht sich in folgender Weise aus: [3] „Es

---

[1] Sonnet. Recherches sur le mouvement uniforme des eaux 1845, Darcy et Bazin. Recherches Hydrauliques, S. 28.

[2] Kleitz. Etutes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement. Note A, S. 211.

[3] О сопротивленіи жидкостей и о воздухоплаваніи. Ueber den Widerstand der Flüssigkeiten und über die Luftschiffahrt. Lieferung I, S. 95 u. 96.

unterliegt jedoch keinem Zweifel, dass die verzögernde Kraft oder die Reibung bei Versuchen mit dünnen capillären Röhren sich fast proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit verändert und dass dieselbe bei Versuchen mit weiten Röhren proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit ist.“ Dann weiter: „Berücksichtigt man, dass bei den Versuchen mit dünnen Röhren **die beeinflussenden Flächen grosse und die relativen Geschwindigkeiten kleine** sind, dass dagegen bei **weiten Röhren die Geschwindigkeiten gewöhnlich grosse und die relativen Flächen kleine sind,** so gelangt man zu dem Schlusse, dass die Frage über die Reibung in Röhren durch ein einziges, für alle Fälle gemeinschaftliches Gesetz zur Lösung gebracht werden kann und dass bei grossen Geschwindigkeiten diejenigen Glieder dieses Gesetzes die vorwiegende Wirkung ausüben werden, welche bei kleinen Geschwindigkeiten fast verschwinden, und umgekehrt. Ein derartig allgemeines Gesetz wird aber in der Hydrodynamik wohl sobald nicht gefunden werden.“ Etwas weiter bemerkt Herr Mendelejew Folgendes: „Die ungenügende Allgemeinheit der theoretischen Grundsätze und die Unzulänglichkeit der Methoden zur mathematischen Analyse der Reibungserscheinungen wird schon dadurch erwiesen, dass wir die Analyse der Erscheinungen gewöhnlich damit anfangen, dass wir von vorne herein in den Grundgleichungen gewisse Glieder vernachlässigen. So wird z. B. bei der vollkommendsten und erfolgreichsten Analyse der inneren Reibung[1] nothwendiger Weise damit angefangen, dass man diejenigen Glieder, welche die zweite Potenz der Geschwindigkeit enthalten, vernachlässigt; für diesen Fall ist das Verfahren noch gerechtfertigt, weil hier die Geschwindigkeiten kleine sind.“

Wir haben bereits gesehen, dass wenn die Analyse richtig angewandt wird, man die Quadrate sogar nicht unbeträchtlicher Geschwindigkeiten vernachlässigen kann und dass die Rechnungs-

[1] Wahrscheinlich hat der Verfasser, D. I. Mendelejew, hier die Worte „in Capillarröhren“ unabsichtlich ausgelassen. Das Ende des Satzes giebt zu dieser Vermuthung Veranlassung.

resultate mit den Versuchsresultaten alsdann doch noch übereinstimmen. Es muss jedoch bemerkt werden, dass die mittleren Ausflussgeschwindigkeiten, welche bei den Versuchen von Poiseuille bis 1266,5 Millim. betragen haben, keineswegs kleinere sind, als die Geschwindigkeiten, welche bei vielen Versuchen mit weiten Röhren[1] und bei vielen Versuchen von Beaufoy und Froude vorhanden waren. Was nun die grössten Geschwindigkeiten in Capillarröhren, respective diejenigen Geschwindigkeiten anbelangt, welche die an der Röhrenachse gelegenen Flüssigkeitstheilchen besitzen, so stehen dieselben den Geschwindigkeiten der Froude'schen schwimmenden Brettern noch näher. Der Werth der grössten Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren von Poiseuille und Jacobson wird durch die Combination der Gleichungen (4) und (7) ermittelt und ergiebt sich als

$$u_0 = \frac{p\varrho^2}{4\mu\lambda} \cdot$$

Vernachlässigt man in der zweiten der Gleichungen (8) das Glied $\frac{4\mu}{\lambda\varrho}$ und vergleicht diese Gleichung mit der eben angeführten Gleichung, so sieht man sofort, dass die grösste Geschwindigkeit zwei Mal so gross als die mittlere ist. Die mittleren Flüssigkeitstheilchen bewegten sich also bei den Versuchen von Poiseuille mit einer Geschwindigkeit bis zu 2,333 Meter pro Secunde, also nicht um Vieles langsamer als die Bretter bei den Versuchen von Froude, deren grösste Geschwindigkeiten bis 10 Fuss pro Secunde waren. Die angeführte Ansicht von D. I. Mendelejew kann auch deshalb nicht adoptirt werden, weil noch nicht genügendes wissenschaftliches Material vorliegt (die Versuche von Helmholtz und Piotrowski, sowohl wie diejenigen von O. E. Meyer nicht aus-

---

[1] Bei den Versuchen von Darcy waren die mittleren Geschwindigkeiten die folgenden (Kleitz. Etutes sur les forces moléculaires. Note A, S. 213): in dem gusseisernen Rohre *A* mit dem Durchmesser 0,118 Meter waren die mittleren Ausflussgeschwindigkeiten: 0,758, 1,128, 1,488, 1,933, 2,506, 4,323 Meter pro Secunde, in dem gusseisernen Rohre *B* mit dem Durchmesser 0,2447 Meter betrugen die Ausflussgeschwindigkeiten 0,537, 0,949, 1,904, 4,497 Meter pro Secunde; in dem Rohre *C* mit dem Durchmesser 0,297 Meter waren die mittleren Geschwindigkeiten 0,355, 1,206, 1,685, 2,365 Meter pro Secunde; im Rohre *D* mit dem Durchmesser 0,50 Meter waren die mittleren Geschwindigkeiten 0,4752, 0,7951, 1,1197 Meter pro Secunde.

genommen), welches als eine unanfechtbare Grundlage für eine derartige Behauptung gelten könnte.

Ein Mangel der Analyse, bei welcher nur die ersten Potenzen der relativen Geschwindigkeiten berücksichtigt werden, könnte sich nur dann erweisen (wenn überhaupt ein solcher Mangel vorhanden wäre), wenn man die genaue Lösung einer der Fragen, welche von Sonnet, Dupui, Beaufoy studirt wurden, oder einer anderen Frage finden würde, und wenn die Resultate dieser Lösung mit den Resultaten gut durchgeführter Versuche nicht übereinstimmen werden. Gegenwärtig aber, da noch keine dieser Fragen auf Grund der Gleichungen von Navier gelöst wurde, da diese Analyse in Bezug auf die angedeuteten Fragen noch keine Resultate ergeben hat, da ferner wir noch nicht wissen, was für eine Function der mittleren Geschwindigkeit, auf Grund einer richtigen Analyse, den Widerstand in grossen Röhren und in Canälen auszudrücken im Stande ist, gegenwärtig ist eine abschliessende Ansicht über die Mangelhaftigkeit der Analyse noch als eine unberechtigte zu bezeichnen. Eine Unzulänglichkeit der Analyse für die Lösung der aufgestellten Fragen ist wohl vorhanden, sie besteht aber nicht darin, dass die Quadrate und die anderen höheren Potenzen der relativen Geschwindigkeit vernachlässigt werden, sondern sie besteht darin, dass die Integrale der Differentialgleichungen von Navier unbekannt sind, dass die Eigenschaften der Functionen, welche diesen Differentialgleichungen entsprechen, noch bis jetzt nicht ermittelt worden sind. Unsere Erwiderung auf die Ansicht des Herrn D. Mendelejew würde jedoch um Vieles an Bedeutung verloren haben, wenn man behaupten könnte, dass für die genaue Beurteilung, ob die Analyse anwendbar sei, die vollständige Lösung der Differentialgleichungen, wenn auch nur für einen einzigen von den erwähnten Fällen, wirklich nothwendig sei. — Eine derartige Annahme kann aber nur auf Grund der Möglichkeit das Endresultat vorauszusagen zugelassen werden, vorausgesetzt freilich, dass die Ueberzeugung bestehe, dass es keinen grossen Unterschied giebt zwischen den Erscheinungen, welche Sonnet, Dupui und andere gelehrte Forscher der Bewegung des Wassers in weiten Röhren und der schwimmenden Bretter in weiten Bassins beobachteten und zwischen den Erscheinungen bei der geradlinigen Bewegung der Wassertheilchen in den Capillarröhren von Poiseuille. Ohne Zweifel sind dieses eben diejenigen Voraussetzungen, welche Widersprüche gegen Newton's Hypothese hervorgerufen haben, dieselben waren aber unbegründete. Alle diese Anfechtungen entstanden dadurch, dass die Rechnungsresultate für die geradlinige Bewegung im Widerspruche mit den Resultaten solcher Versuche standen, bei welchen die Bewegungen der Wasserstrahlen, wohl bekannt, krummlinige waren. Die Thatsache, dass die Strömung des Wassers in Canälen mit vielfachen Wirbelbewegungen verbunden ist, war seit lange bekannt: diese Erscheinung wurde schon von Descartes und sogar von Leonardo-da-Vinci[1] bemerkt, später dann von einer grossen Anzahl italienischer und französischer Hydrauliker und Mathematiker, unter welchen Poncelet und Saint-Venant besonders zu nennen sind. Starke Wirbelbewegungen und allgemeine Ablenkungen von der geradlinigen Bewegung, wie wir bereits oben erwähnten, hat Hagen direct in Glasröhren bemerkt und Saint-Venant und Darcy haben sogar beobachtet, dass der Reibungswiderstand, welcher bei der Verlängerung der Wege der Angriffspunkte der Reibung entsteht, mit der Grösse des Canalquerschnittes wächst. Mit Rücksicht darauf führt Boussinesq[2] sogar einen neuen Reibungscoefficienten ein, bezogen auf eine vermeintliche, nicht existirende, geradlinige Bewegung, welche an die Stelle der wirklichen Strömung des Wassers in Rohrleitungen und in Canälen gesetzt werden muss. Dieser Coefficient musste freilich ein grösserer als der wirkliche sein, welchen wir in die Rechnung einführen müssten, wenn uns die Art und Weise der Einführung der wirklichen Strombewegungen in die Rechnung bekannt wäre; und in der That ist dieser Coefficient zuweilen 100, ja sogar mehrere 100 Mal grösser als der wirkliche, je nach den Querschnittsdimensionen des Wasserkörpers, innerhalb dessen sich die verschiedenen Bewegungsablenkungen bilden. Dass um die in grossen Bassins schwimmenden Bretter herum die Bewegung der Strömungen auch keine geradlinige ist, ist auch seit lange bekannt[3]. Wir sehen also, dass alle Beobachtungen, welche Veranlassung gaben, die Newton'sche Hypothese in Frage zu stellen, in Wirklichkeit mit solchen Flüssigkeitsbewegungen angestellt wurden, für welche über die Wege, welche

---

[1] Essai sur la Théorie des eaux courantes par Boussinesq. Rapport, S. 4.

[2] Daselbst. § 12, 49.

[3] Poncelet. Introduction à la mécanique industrielle 3. Aufl. § 376, S. 573.

die Angriffspunkte der Reibungskräfte zurücklegen, nur das Einzige bekannt war, dass dieselben keineswegs geradlinige sind. Diese Versuche müssen also für die Prüfung der Hypothese als unpassende bezeichnet werden und können folgerichtig keinen Beweis für die Unrichtigkeit dieser Hypothese liefern.

Auf Grund der Theoremen von Cauchy über das gegenseitige Abhängigkeitsverhältniss der sich an den Seitenflächen eines unendlich kleinen Tetraëders entwickelnden Reibungswiderstände beweist Levy die mathematische Unmöglichkeit, dass die Reibung dem Quotienten $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ oder der allgemeineren Formel

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+B\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+C\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^3+\ldots\ldots$$

proportional sei[1].

Er behauptet nämlich, dass, wenn die Reibung in der Flüssigkeit durch den Differentialquotienten der Geschwindigkeit (d. h. durch die relative Geschwindigkeit) in erster Potenz ausgedrückt werden könnte, der Quotient $\frac{\partial u}{\partial r}$ dabei mit einem constanten Factoren multiplicirt werden müsse, dass ferner dieser Factor nur beim Uebergange von einem Punkte zu einem anderen veränderlich sein könne und dass für verschiedene Flächen, welche sich in einem Punkte schneiden, derselbe constant bleibe.

Sobald aber die vorhergehende Formel angenommen wird, so kann die letzte Bedingung nicht mehr bestehen, denn jene Formel kann in die folgende transformirt werden:

$$\left[A+B\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+C\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\ldots\ldots\right]\frac{\partial u}{\partial r},$$

wobei der Factor in den Klammern, mit welchen $\frac{\partial u}{\partial r}$ multiplicirt wird, für die verschiedenen Flächen, welche sich in einem Punkte schneiden, nicht mehr constant ist. —

Da leider über die Gründe, welche Levy zu seinen Ableitungen geführt haben, Nichts publicirt worden ist und wir dieselben daher nicht zur Hand haben, so können wir auf die Andeutungen der

---

[1] Comptes rendus Bd. LXVIII (1869) S. 285. Hydrodynamique. Rapport sur un mémoire de M. Maurice Levy. Par Mm. Combes, Serret, Bonnet, Phillipps et Saint-Vernant rapporteur.

französischen Akademiker nicht näher eingehen. Kleitz[1] hat in seinem höchst bemerkenswerthen Werke gezeigt, dass der Coefficient von $\frac{\partial u}{\partial r}$, welcher in der vorliegenden Schrift mit μ und in jenem Werke mit φ bezeichnet wird, von den relativen Geschwindigkeiten abhängig sein könne und dass es daher möglich sei, dass die Cohäsionskraft durch den Ausdruck

$$\left[A + B\frac{\partial u}{\partial r} + C\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \ldots\ldots\right]\frac{\partial u}{\partial r}$$

dargestellt werde.

Kleitz's Formeln beweisen also nur die Möglichkeit, nicht aber die Nothwendigkeit dieses Ausdruckes, welch letztere nur durch eine Vergleichung der Versuchs- und der Rechnungsresultate bewiesen werden kann.

An einer anderen Stelle derselben Schrift sucht Kleitz zu beweisen, dass dieser der Newton'schen Hypothese widersprechende Ausdruck der Cohäsionskraft mit keinem von den gemachten Versuchen, und unter anderen — auch nicht mit denjenigen von Poiseuille im Widerspruche stehe. Zur Begründung dieser Ansicht sagt Kleitz, dass er für den Fall einer gleichmässigen Bewegung der Flüssigkeit in einer cylindrischen Röhre in Uebereinstimmung mit Saint-Venant den Ausdruck

$$\varphi = \varepsilon + \varepsilon_1\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

annehme, dass aber Saint-Venant aus der Untersuchung der Versuche von Poiseuille, bei welchen die Röhrendurchmesser innerhalb der Grenzen $\frac{1}{7}$ und $\frac{2}{3}$ Millim. eingeschlossen waren, nicht schliessen durfte, dass $\varepsilon_1 = 0$, wodurch die Cohäsionskraft wieder in Uebereinstimmung mit Newton's Hypothese durch den Ausdruck

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial r},$$

dargestellt würde.

Indem Kleitz Saint-Venant's Formel für die mittlere Stromgeschwindigkeit des Wassers in der Röhre annimmt, bezeichnet er mit r den Röhrenhalbmesser, mit ϱ die Dichtigkeit des Wassers und mit g die Beschleunigung der Schwere, und schreibt

---

[1] Comptes rendus Bd. LXVIII (1869) S. 197.

$$u = \frac{\varrho g i r^2}{2\varepsilon 4}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left(\frac{\varrho g}{2\varepsilon}\right)^2 (ir)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\varrho g}{2\varepsilon}\right)^4 (ir)^4 + \ldots\ldots\right].$$

Saint-Venant hat nun diese Gleichung mit den Versuchen von Poiseuille verglichen, und da er dabei wahrgenommen hatte, dass

$$u = \frac{\varrho g}{2\varepsilon}.\frac{ir^2}{4},$$

so schloss er daraus, dass

$$\varepsilon_1 = 0.$$

Kleitz widerlegt aber diese Schlussfolgerung, indem er sagt: „Bei den Versuchen von Poiseuille war das grösste Gefälle i pro Längeneinheit gleich 421; da jedoch der maximale Röhrendurchmesser nicht grösser, als $\frac{2}{3}$ Millim. (0,00066 Meter) war, so war der Maximalwerth des Productes ir $\frac{421 \times 0{,}001}{3} = 0{,}14$. Da die mittlere Geschwindigkeit zuweilen bis 42 Millim. pro Secunde war, so mussten die Glieder der in den Klammern eingeschlossenen Reihe, welche ir in der zweiten, in der vierten u. s. w. Potenz enthalten, verschwindend klein werden und die mittlere Geschwindigkeit konnte ir^2 proportional sein.“

Wenn die angeführte Bemerkung von Kleitz richtig wäre, so liesse sich Poiseuille's Formel

$$u = \frac{\varrho g}{2\varepsilon}.\frac{ir^2}{4} = \frac{\varrho g h d^2}{32\varepsilon l}$$

auf theoretischem Wege mit einer gewissen Genauigkeit nicht nur in der Voraussetzung ableiten, dass die Cohäsionskräfte durch Newton's Hypothese richtig ausgedrückt werden, sondern auch in der anderen Voraussetzung, dass jene Hypothese eine unrichtige sei und dass die Cohäsionskraft durch die Formel

$$\left[\varepsilon + \varepsilon_1\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial r}$$

ausgedrückt werden müsse.

Auf diese Weise würden Poiseuille's Versuche für die Prüfung der Newton'schen Hypothese ihren Werth gänzlich verloren haben.

Kleitz's Widerlegung ist aber eine unrichtige und basirt auf einem unerklärlichen Irrthume. Kleitz berücksichtigte nämlich nicht, dass die in den Klammern eingeschlossene Reihe nicht nur den Factor ir, sondern auch noch den Factor $\frac{\varrho g}{2\varepsilon}$ in denselben Potenzen enthält, d. h. dass diese Reihe den Factor $\frac{\varrho g}{2\varepsilon} ir$ enthält.

Nach den Versuchen von Poiseuille kann diese Grösse in Abhängigkeit von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit des Wassers in der Röhre ausgedrückt werden.

In der That, da

$$u = \frac{\varrho g}{2\varepsilon} \cdot \frac{ir^2}{4},$$

so ist

$$\frac{\varrho g}{2\varepsilon} ir = \frac{4u}{r}.$$

Der Werth dieses Productes ist nun keineswegs eine verschwindend kleine Grösse. Die Tabelle II zeigt nämlich, dass bei der kleinsten Geschwindigkeit $u = 8{,}56$ Mm.

$$\frac{g\varrho}{2\varepsilon} ir = \frac{4 \times 8{,}56}{0{,}0658} = 520,$$

und bei der grössten Geschwindigkeit $u = 948{,}7$ Millim. betrug

$$\frac{\varrho g}{2\varepsilon} ir = \frac{4 \times 948{,}7}{0{,}0658} = 57672.$$

Enthält nun jene Reihe die zweite, die vierte u. s. w. Potenzen dieser Zahlen, welche respective mit $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$, $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2$ u. s. w. multiplicirt sind, und weicht dabei die Summe ihrer Glieder von der Einheit sehr wenig ab, so kann letzteres nur unter der Bedingung, dass

$$\varepsilon_1 = 0$$

ist, stattfinden.

Kleitz's Widerlegung muss also als eine unbegründete bezeichnet werden, dagegen aber müssen wir anerkennen, dass Poiseuille's Versuche die Newton'sche Hypothese bestätigen.

Der Widerspruch zwischen Kleitz's Formel und den Versuchen von Poiseuille entstand dadurch, dass Kleitz bei seiner Ableitung in die Formel für den Widerstand $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^3$ statt $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ eingeführt hatte. Unter der Voraussetzung, dass die innere Reibung

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

proportional ist, verschwindet der Widerspruch von selbst. In ihrer allgemeinen Form ist die Lösung dieser Frage eine höchst schwierige, wohingegen dieselbe für den speciellen Fall der geradlinigen Bewegung der Wassertheilchen in Capillarröhren eine ziemlich leichte ist. Eine solche partielle Lösung ist aber eine vollkommen genügende, denn die Vergleichung mit Poiseuille's Versuchen zeigt, dass $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ auf die Grösse der inneren Reibung von keinem Einflusse ist.

Wir wollen nun die Formel für die durch eine Röhre durchfliessende Wassermenge ableiten. Zu dem Behufe werden wir dieselben Voraussetzungen wie vorher aufstellen, mit Ausnahme der Hypothese von Newton, welche wir jetzt durch die Voraussetzung ersetzen, dass die Reibung der Grösse

$$\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

proportional ist.

Die Ableitungsweise wird im Allgemeinen dieselbe, wie die obige sein, wir müssen aber vorher bemerken, dass die beiden Glieder des letzten Ausdruckes die gleichen Vorzeichen haben müssen, widrigenfalls könnte er für einen gewissen Werth von $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ gleich 0 werden, d. h. dass bei einer gewissen relativen Geschwindigkeit der Reibungswiderstand verschwindet, und wenn jener Ausdruck für

$$\frac{\partial u}{\partial r} < \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_1$$

ein negativer war, so könnte er für

$$\frac{\partial u}{\partial r} > \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_1$$

ein positiver werden; mit anderen Worten würde der Widerstand bei gewissen Werthen der relativen Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial r}$ seine Wirkung in der einen, und bei gewissen anderen Werthen — in der entgegengesetzten Richtung ausüben, was ganz unmöglich ist. Die Vorzeichen der Glieder $\mu \frac{\partial u}{\partial r}$ und $\nu \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ müssen also die gleichen sein.

Wir haben bereits gesehen, dass $\frac{\partial u}{\partial r}$ eine negative Grösse ist. $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ ist jedenfalls positiv, wenn also μ positiv angenommen wird, so muss ν negativ angenommen werden.

Nach diesen Bemerkungen ist es nun leicht die Kräfte, welche in den Seitenflächen des unendlich kleinen Wassermolecüls (Fig. 1) wirken, auszudrücken. Die in der Fläche *cn* wirkende Reibung ist gleich

$$-\left[\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]r\,\partial\varphi\,\partial x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,\text{(E)}'$$

in der Fläche *fm* wirkt die Reibung

$$\left\{\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\partial r}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\partial r\right\}(r+\partial r)\,\partial\varphi\,\partial x\,.\,.\,\text{(F)}'$$

und der hydrodynamische Druck wird eben so wie früher in *cf*

$$p\,r\,\partial\varphi\,\partial r$$

und in *mn* $\qquad -\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)r\,\partial\varphi\,\partial x \qquad$ sein.

Die Summe der Projektionen dieser vier Kräfte auf die Richtung der Röhrenachse giebt uns nun die Gleichung

$$\frac{\partial\left\{r\left[\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\right\}}{\partial r}=r\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Da nun aber

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-B,$$

so finden wir leicht, dass

$$\left\{r\left[\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\right\}_{r=r}-\left\{r\left[\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]\right\}_{r=0}=-B\frac{r^2}{2}.$$

Für $r=0$ kann $\frac{\partial u}{\partial r}$ nicht unendlich gross werden, denn die relative Geschwindigkeit der an der Röhrenachse gelegenen Wassertheilchen kann nicht unendlich gross sein. Das zweite Glied der linken Seite der letzten Gleichung ist also für $r=0$ gleich 0, und es ergiebt sich

$$\mu\frac{\partial u}{\partial r}-\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2=-\frac{Br}{2}.$$

Hieraus erhalten wir sofort:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{-\mu\pm\sqrt{\mu^2+2\nu Br}}{2\nu}$$

Da nun der absolute Werth von $\sqrt{u^2+2\nu Br}$ grösser als derjenige von μ ist, so hängt das Vorzeichen des Nenners des letzten Bruches von dem Vorzeichen der Wurzel ab. Hat die Wurzel das

Vorzeichen $+$, so wird $\frac{\partial u}{\partial r}$ durch eine negative Grösse ausgedrückt werden, was der aufgestellten Frage entspricht. Behält man dagegen vor der Wurzel das Zeichen $-$, so wird $\frac{\partial u}{\partial r}$ einen positiven Werth erhalten, welcher der Frage nicht entspricht. Die letzte Gleichung muss also in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\nu B r}}{2\nu}$$

dargestellt werden.

Durch die Integration dieser Gleichung in den Grenzen $r = 0$ und $r = r$ werden wir den Wert der Geschwindigkeit der Wassertheilchen in einem um r von der Achse entfernten Punkte erhalten.

Die Integration geschieht leichter, wenn die Wurzel in eine Reihe entwickelt wird:

$$\sqrt{\mu^2 + 2\nu B r} = \mu\left[1 + \frac{\nu B}{\mu^2} r - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3 - \frac{5}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 r^4 + \frac{7}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 r^5 \ldots\ldots\right].$$

Dann ist

$$\int_0^r \sqrt{\mu^2 + 2\nu B r}\,\partial r = \mu r\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\nu B}{\mu^2} r - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 r^4 + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 r^5 - \ldots\ldots\right].$$

Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit an der Röhrenachse, welche $r = 0$ entspricht, mit u_0, so ist

$$u - u_0 = -\frac{\mu r}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu B}{\mu^2} r - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 r^4 + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 r^5 - \ldots\ldots\right].$$

Setzen wir nun in die rechte Seite dieser Gleichung den Röhrenhalbmesser ϱ anstatt r ein, so wird u in der linken Seite derselben Gleichung die Geschwindigkeit des Wassers relativ zu den Röhrenwandungen ausdrücken. Es ist nun bekannt, dass wenn die Flüssigkeit die Röhrenwandungen benetzt, diese Geschwindigkeit gleich 0 gesetzt werden kann, d. h. dass für $r = \varrho$ ist $u = 0$ und folglich

$$u_0 = \frac{\mu\varrho}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\nu B}{\mu^2}\varrho - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 \varrho^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 \varrho^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 \varrho^4 + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 \varrho^5 - \ldots\ldots\right].$$

Addiren wir die Glieder dieser Gleichung mit den respectiven Gliedern der vorhergehenden, so resultirt daraus die folgende:

$$u = \frac{\mu}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu B}{\mu^2}(\varrho^2 - r^2) - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2(\varrho^3 - r^3) + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3(\varrho^4 - r^4) - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4(\varrho^5 - r^5) + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5(\varrho^6 - r^6) - \ldots\ldots\right].$$

Ist die Bewegungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit für jede beliebige Entfernung r von der Röhrenachse bekannt, dann ist das pro Zeiteinheit durch das Rohr fliessende Wasservolumen Q gleich

$$Q = 2\pi\int_0^{\varrho} u r \partial r \;,$$

und zufolge der letzteren Gleichung

$$Q = \frac{\pi B}{8\mu}\varrho^4\left[1 - \frac{2}{5}\;\frac{\nu B}{\mu^2}\varrho + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2\varrho^2 - \frac{5}{14}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3\varrho^3 + \ldots\ldots\right].$$

Dies ist nun diejenige Gleichung, welche an die Stelle der Gleichung (5) tritt. Die mittlere Stromgeschwindigkeit des Wassers in der Röhre erhalten wir, indem wir Q durch den Röhrenquerschnitt $\pi\varrho^2$ dividiren, folglich ist

$$v = \frac{B\varrho^2}{8\mu}\left[1 + \frac{2}{5}\;\frac{\nu B}{\mu^2}\varrho + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2\varrho^2 - \frac{5}{14}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3\varrho^3 + \ldots\ldots\right].$$

Nun ist es aus den Versuchen von Poiseuille schon bekannt, dass mit einem sehr hohen Genauigkeitsgrade

$$v = \frac{B\varrho^2}{8\mu} \quad \text{oder} \quad \frac{B\varrho}{\mu} = \frac{8v}{\varrho}$$

Setzt man in den letzten Ausdruck für Q in den Klammern $\frac{8v}{\varrho}$ anstatt $\frac{B\varrho}{\mu}$ ein, so wird der Fehler ein sehr geringer sein und erhalten wir dabei die sehr annähernde Gleichung

$$Q = \frac{\pi}{8}\;\frac{B}{\mu}\varrho^4\left[1 - \frac{2}{5}\;\frac{\nu}{\mu}\;\frac{8v}{\varrho} + \frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\left(\frac{8v}{\varrho}\right)^2 - \frac{5}{14}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3\left(\frac{8v}{\varrho}\right)^3 + \ldots\ldots\right.$$

Poiseuille's Versuche haben gezeigt, dass für alle beobachtete Werthe der Geschwindigkeit v

$$\frac{\pi B}{8\mu}\varrho^4$$

der Grösse Q beinahe genau gleich war und dass der Unterschied zwischen Q und $\frac{\pi B}{8\mu}\varrho^4$ niemals 0,001 übertraf. Für alle Werthe von v, welche in den Grenzen der Versuche eingeschlossen sind, ist also

$$-\frac{2}{5}\,\frac{\nu}{\mu}\,\frac{8v}{\varrho}+\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\left(\frac{8v}{\varrho}\right)^2-\frac{5}{14}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3\left(\frac{8v}{\varrho}\right)^3+\ldots\ldots\ldots<0{,}001.$$

Die Tabelle II zeigt, dass $\varrho = 0{,}0658$ und die Geschwindigkeit $v = 948{,}7$ ist; es ist also $\frac{8\mu}{\varrho} = 115343$.

Setzt man diesen Werth von $\frac{8\mu}{\varrho}$ in die vorhergehende Gleichung ein, so ist

$$-\frac{2}{5}\,115343\,\frac{\nu}{\mu}+\frac{1}{3}(115343)^2\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2-\frac{5}{14}(115343)^3\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3+\ldots<0{,}001$$

oder

$$\frac{\nu}{\mu}<0{,}0000001.$$

Wir sehen also, dass unter der Voraussetzung, dass die Formel, welche den Reibungswiderstand ausdrückt, die zweite Potenz der relativen Geschwindigkeit enthalten müsse, der Coefficient ν, welcher vor der zweiten Potenz der relativen Geschwindigkeit stehen sollte, so gering sein muss, dass keiner von dem ausgeführten Versuche die Nothwendigkeit dieses Gliedes erweisen konnte.

Es kann nun mit Sicherheit behauptet werden, dass durchaus kein Grund vorliegt, die Newton'sche Hypothese für eine nicht hinreichend genaue zu halten. —

Wir wollen hier noch eine Bemerkung Levy's, betreffend die innere Reibung der Flüssigkeiten in Berücksichtigung ziehen. Dieser Gelehrte meint nämlich, dass für die Erklärung der in Canälen und Rohrleitungen beobachteten Erscheinungen die Genauigkeit, mit welcher Navier die innere Reibung ausgedrückt hatte, eine ungenügende sei, indem er nur die Differentialquotienten erster Ordnung der Geschwindigkeit berücksichtigte. Er ist vielmehr der Ansicht, dass auch die Differentialquotienten der höheren Ordnungen in die Gleichungen eingeführt werden müssten. Unter dieser sehr wahrscheinlichen Voraussetzung machte Levy seine Ableitungen und bewies damit, dass die Reihen, welche die innere Reibung auszudrücken haben, nur Differentialquotienten ungerader Ordnungen enthalten müssen.

Diese Betrachtungen mögen ganz richtige sein, indessen ist das denn auch ein Beweis dafür, dass sie unbedingt nothwendig sind? Müssen wir denn, so lange es sich nicht darum handelt, etwaige

Perturbationen einer Erscheinung zu erklären, bei der Lösung **einer jeden** Frage nicht nur die Differentialquotienten erster Ordnung, sondern auch diejenigen höherer Ordnungen berücksichtigen? Das ist doch wohl noch die Frage, und zwar wohl eine zu verneinende, wie es die Commission französischer Akademiker in ihrem Berichte betreffend Levy's Schrift auch gethan hatte[1]. Es ist wohl schwer mit dieser Meinung nicht übereinzustimmen, wenn man die Genauigkeit berücksichtigt, mit welcher Poiseuille's Versuchsresultate mit seinen empirischen Formeln übereinstimmen. Diese empirischen Formeln sind aber dieselben, welche man aus Navier's Gleichungen ableiten kann, indem man nur die ersten Potenzen der Differentialquotienten erster Ordnung der Geschwindigkeit berücksichtigt, d. h. die Newton'sche Hypothese als eine richtige annimmt. —

Mit Hilfe der Newton'schen Hypothese können wir also hoffen die innere Reibung der Flüssigkeiten mit einer genügenden Genauigkeit für alle diejenigen Fälle ermitteln zu können, für welche die relativen Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen sich bestimmen lassen, mit anderen Worten also für diejenigen Fälle, für welche die entsprechend angewandten Navier'schen Gleichungen sich integriren lassen.

Der volle Reibungswiderstand bei einer relativen Bewegung flüssiger und starrer Körper ist jedoch nicht allein von der inneren Reibung, sondern auch von der äusseren, d. h. von der Reibung der Flüssigkeiten mit starrem Körper abhängig.

Der Coefficient der äusseren Reibung, welchen wir mit λ bezeichnet haben, wurde bereits in die Gleichungen (8) und (9) eingeführt. Diese Gleichungen beziehen sich auf die Bewegung einer Flüssigkeit in gewissen Verhältnissen durch eine horizontale runde Röhre. Zur Bestimmung des Coefficienten λ bieten jedoch Poiseuille's Versuche, wie bereits bekannt ist, blos die einzige Ungleichheit

$$\frac{4\mu}{\lambda\varrho} < 0{,}001.$$

Nun lässt sich aber aus einer Ungleichheit eine Unbekannte nicht ermitteln; vermittelst derselben kann nur diejenige Grösse gefunden werden, welche λ in keinem Falle übertreffen kann. Die angeführte Ungleichheit zeigt, dass

[1] Comptes rendus 13. LXVIII. Seite 586.

$$\frac{\lambda}{\mu} > \frac{40000}{\varrho}.$$

Da ferner bei dem Versuche von Poiseuille die Röhre M den Halbmesser $\varrho = \frac{0{,}013942}{2} = 0{,}006975$ hatte, so ist

$$\frac{\lambda}{\mu} > 5\,730\,000.$$

Diese Lücke in unserem Wissen veranlasste Helmholtz die Frage über die innere und äussere Reibung der Flüssigkeiten zu studiren[1]. Da die Versuche mit Röhren von grösserem Durchmesser als diejenigen, welche von Poiseuille und Girard angewendet worden waren, ungemeine Schwierigkeiten bieten, so beabsichtige Helmholtz seine Versuche in einer anderen Weise, welche den theoretischen Forschungen unterworfen werden könnte, anzustellen. Zu dem Zwecke integrirte Helmholtz Navier's Gleichungen für die Drehungsschwingungen einer mit einer Flüssigkeit gefüllten Kugel, welche an einem Faden aufgehängt ist. Die Integrirung wurde in der Voraussetzung ausgeführt, dass alle an einer mit dem Kugelgefässe concentrischen Kugelfläche gelegenen Theilchen der eingeschlossenen Flüssigkeit während der ganzen Zeit der durch die Schwingungen des Gefässes hervorgerufenen Bewegung der Flüssigkeit ihre Kugelfläche nicht verlassen. Mit anderen Worten, er setzte voraus, dass bei der Bewegung die Flüssigkeit so zu sagen in eine Unzahl unendlich feiner sphärischer ineinander gelagerter und dicht aneinander anliegender Schichten sich theile und dass diese Schichten sich bei der Bewegung nicht miteinander vermengen.

Die Versuche wurden auf den Vorschlag von Helmholtz durch Piotrowski ausgeführt. Durch unmittelbare Beobachtungen (ähnlich wie bei den Hagen'schen Versuchen — für die geradlinige Bewegung des Wassers in Capillarröhren) wurde jedoch der Grad der Genauigkeit, mit welcher jene Voraussetzung sich bei den Versuchen von Piotrowski bewährte, nicht ermittelt.

Die Versuche ergaben für Wasser bei 24,5° C. einen Coefficienten der inneren Reibung $\mu = 1{,}1858$[2]. Poiseuille's Versuche ergaben

[1] Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen. Erster Bd. Reibung von Flüssigkeiten.

[2] Helmholtz. Wissenschaftliche Abhandlungen S. 290.

für diese Temperatur den Coefficienten $\mu = 0{,}95206$. Diese Zahlen verhalten sich wie 5 : 4. Dieser geringe Unterschied in den Resultaten so ungemein schwieriger Versuche lässt sich durch verschiedene Umstände erklären.

Helmholtz sagt selbst, dass die Versuche keine besonders genauen gewesen wären, denn um, in Bezug auf Genauigkeit, ähnliche Resultate wie die Poiseuille'schen zu erreichen, kam es bei der von Helmholtz vorgeschlagenen Versuchsmethode darauf an, die Schwingungszeiten der Kugel bis auf 0,01 Secunde genau festzustellen[1]. Eine derartige Genauigkeit war jedoch unerreichbar; unter Anderem schon deshalb, weil die Lufttemperatur des Zimmers keine der Anforderung entsprechend constante war. Eine andere wahrscheinliche Ursache des Unterschiedes zwischen den Versuchsresultaten von Piotrowski und denjenigen von Poiseuille bestand in einer nicht vollkommenen Genauigkeit der Helmholtz'schen Hypothese, dass nämlich die bewegte Flüssigkeit sich in unendlich feine sphärische Schichten theile. Falls sich bei der Bewegung der Flüssigkeit etwaige Strudel bildeten, was anscheinend sehr wahrscheinlich ist, wenn die von den Angriffspunkten der Reibung zurückgelegten Wege grössere waren als diejenigen, welche man vermuthete, so musste der, auf Grund solcher Versuche berechnete Coefficient ein grösserer als derjenige von Poiseuille sein. Deshalb verdient der von Poiseuille für Wasser erhaltene Coefficient der inneren Reibung mehr Vertrauen als derjenige von Piotrowski. Den Coefficienten der äusseren Reibung konnte Helmholtz aus den Versuchen von Piotrowski auch nicht bestimmen. Er führte die Rechnung in doppelter und zwar verschiedener Weise, wobei er zu verschiedenen Resultaten gelangte, so dass es gewagt erscheint sich derselben zu bedienen. Nach der einen Rechnung ist $\lambda = 2{,}3534$, nach der anderen hingegen ist $\lambda = 0{,}71545$. Nicht sehr viel nähere Resultate erhielt Helmholtz bei der Bestimmung von λ aus den Versuchen von Girard. Versuche mit Röhren von einem Durchmesser von 1,83 Millimeter ergaben $\lambda = 0{,}3984$, und Versuche mit Röhren von 2,96 Millimeter Durchmesser ergaben $\lambda = 0{,}111$.

Andere Versuche wurden behufs Ermittelung des Coefficienten der äusseren Reibung nicht angestellt, und ist uns somit diese Grösse bis jetzt noch unbekannt. Es lassen sich also gegenwärtig

[1] Helmholtz. Reibung von Flüssigkeiten S. 174.

nur solche Fragen betreffend die Grösse der Reibung starrer und flüssiger Körper lösen, bei welchen die Grösse der inneren Reibung von keinem erheblichen Einflusse ist. Die Versuche von Poiseuille haben schon gezeigt, dass wenn die Adhäsion der Flüssigkeit an dem starren Körper im Vergleiche zu der Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen untereinander eine sehr grosse ist, diejenigen Glieder im Ausdrucke für den Reibungswiderstand, welche von der Reibung der Flüssigkeit an der Oberfläche des starren Körpers abhängig sind, als sehr geringe in Vergleich zu den anderen Gliedern desselben Ausdruckes erscheinen. Die als Schmiermittel verwendbaren Flüssigkeiten haften gewöhnlich sehr stark an den geschmierten Oberflächen der starren Körper an; dieser Umstand veranlasst also zu der Vermuthung, dass bei Erörterung der Fragen betreffend die Wirkung schmierender Flüssigkeiten auf die Reibung wir mit dem Coefficienten der Reibung zwischen der Flüssigkeit und dem starren Körper uns nicht zu beschäftigen brauchen. —

Alles, was wir nun über die Forschungen in Betreff der Reibungswiderstände in Flüssigkeiten gesagt haben, führt zu folgenden Thesen:

1) Newton's Hypothese ist für Wasser eine sehr genaue; daraus können wir schliessen, dass dieselbe wahrscheinlich auch für andere, wenigstens für die nicht sehr dichten Flüssigkeiten eine genaue ist.

2) Der Coefficient der inneren Reibung ist von der Temperatur sehr abhängig (Tabelle V.).

3) Der Reibungscoefficient und seine Abhängigkeit von der Temperatur kann auf Grund beliebiger Versuche und bei beliebigen Geschwindigkeiten ermittelt werden, nur müssen die Verhältnisse, unter welchen die Versuche stattfinden denjenigen Voraussetzungen entsprechen, bei welchen die Navier'schen Gleichungen für die zu prüfenden Versuche integrirt worden sind.

4) Bei Anwendung der Poiseuille'schen Methode sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

a) Die inneren Flächen der versuchten Röhren dürfen keine Vorsprünge oder Vertiefungen enthalten, welche die geradlinige Bewegung der Strömung zu modificiren geeignet wären.

b) Die Versuche müssen in solcher Weise ausgeführt werden, dass die Wirkung eines jeden der in die Poiseuille'sche Formel eingeführten Elemente zu controlliren sei. Die Versuche müssen also mit Röhren von verschiedenem Durchmesser gemacht werden, Röhren von gleichem Durchmesser müssen verschiedene Längen haben und endlich muss das Ausfliessen der Flüssigkeit unter verschiedenem Drucke beobachtet werden, damit die Ausflussgeschwindigkeiten auch hinreichend verschiedene seien.

5) Die Gleichung (9) wird nur dann für die Ermittelung des Coefficienten der inneren, und vielleicht auch der äusseren Reibung zu verwenden sein, wenn ein Beweis für die genügend geradlinige Bewegung der Flüssigkeit während des Versuches vorhanden sein wird.

Die Möglichkeit den Coefficienten der inneren Reibung und dessen Abhängigkeit von der Temperatur bei beliebigen Geschwindigkeiten der Bewegung zu ermitteln und dabei sicher zu sein, dass man durch eine möglicher Weise unrichtige Einführung der Geschwindigkeit keine Fehler begeht, veranlasst zu der Hoffnung richtige Resultate auch aus den Versuchen mit der Torsionswage zu erhalten, obgleich die Bewegungen ihrer Scheibe höchst langsame sind. Es muss freilich bei derartigen Versuchen die unerlässliche Bedingung erfüllt werden, dass das Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Coefficienten der inneren Reibung und den Schwingungszeiten nach den Navier'schen Gleichungen streng genau bestimmt werde, oder, wenn es, um die Integration zu ermöglichen, nothwendig erscheint, so müssen gewisse Voraussetzungen angenommen werden, aber unter der Bedingung, dass dieselben durch unmittelbare Beobachtungen bestätigt werden könnten.

In dieser Weise hat die Aufgabe O. E. Meyer gelöst:[1] er bestimmte die Reibungscoefficienten für das Brunnenwasser und für destillirtes Wasser, und unterscheiden sich seine Coefficienten sehr wenig von den Poiseuille'schen. Mit Bezug auf die Bestimmung des Coefficienten der inneren Reibung des Wassers besitzen O. E. Meyer's Versuche eine untergeordnete Bedeutung für uns, als Beweis jedoch für die Möglichkeit mittelst der Coulomb'schen Wage genaue Resultate zu erzielen, sind dieselben für uns von höchstem Werthe.

Nachdem wir diese Ueberzeugung gewonnen haben, so erhält eine andere Reihe von Versuchen dieses Gelehrten mit Bezug auf den Gegenstand der vorliegenden Schrift eine besonders wichtige

---

[1] Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf. Bd. 113, 1861. S. 55—86, 193—238, 283—425. Der experimentale und der theoretische Theil. Journal für reine und angewandte Mathematik. Crell. Bd. 59. S. 229.

Bedeutung. Die letzteren betreffen Forschungen in Bezug auf den Coefficienten der inneren Reibung von Rüböl bei verschiedenen Temperaturen.[1] Es war dies die erste und bis jetzt auch die einzige Forschung in dieser Hinsicht. Wir wollen also die Versuchsresultate von O. E. Meyer gründlich kennen lernen.

Der mathematische Theil der Lösung der Frage über das Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Coefficienten der inneren Reibung der versuchten Flüssigkeit und den Schwingungszeiten der in derselben eingetauchten Scheibe der Torsionswaage ist ein derartig complicirter und umfangreicher, dass es nicht wohl angehen würde denselben hier auseinander zu setzen. Diejenigen Leser, welche sich dafür interessiren, werden diese Ableitung in dem Berichte von O. E. Meyer über die Reibung der Flüssigkeiten in der Crell'schen Zeitschrift finden.

Wir wollen hier also blos die Voraussetzungen bezeichnen, unter welchen die Frage gelöst wurde. Um Navier's Gleichungen für diesen Fall integriren zu können, machte Meyer die folgenden Voraussetzungen: 1) dass die Flüssigkeit so zu sagen aus unendlich feinen, wagerechten, runden, oberhalb und unterhalb der Scheibe gelegenen Schichten besteht, 2) dass bei den Schwingungen der Scheibe die Schichten miteinander nicht vermischt werden, sondern dass sie gegeinander verschoben werden, indem sie sich um eine gemeinschafttliche Achse drehen, 3) dass diejenigen Schichten, welche die Scheibe benetzen, mit derselben zusammen bewegt werden, dass die in einer gewissen Entfernung gelegenen Schichten sich gar nicht drehen, dass aber die zwischenliegenden Schichten sich um so stärker drehen, je näher sie der Scheibe sind. Streng genommen können die Schichten in dieser Weise nicht bewegt werden: die Drehung der Flüssigkeitstheilchen um die Achse muss wegen ihrer Trägheit unbedingt mit einer Radialbewegung verbunden sein; ausserdem, wenn im Ruhezustande der Scheibe die Wassertheilchen in senkrechten Geraden zur horizontalen Scheibenfläche liegen, so lagern sich dieselben während der Schwingungen in gewissen Spiralen, und da die Längen der Spiralen den Längen der Senkrechten gleich sind, so können die Entfernungen der Wassertheilchen von der Achse nicht dieselben bleiben; die Wassertheilchen müssen also unbedingt gewisse, der Achse parallele Bewegungen besitzen.

[1] Poggend. Annal. Bd. 113, S. 410.

O. E. Meyer hat die Möglichkeit seiner Voraussetzungen durch directe Beobachtungen bestätigt: er brachte in die Flüssigkeiten leichte schwimmende Körper, bspw. kleine Stückchen Papier, vertheilte dieselben in regelmässige Figuren und beobachtete die Veränderungen in diesen Figuren während der Schwingungen der Scheibe; es zeigte sich, dass die Figuren ihre Formen recht gut behielten. Noch ein Umstand wurde bei diesen Versuchen nicht genügend berücksichtigt, nämlich der Antheil an der Bewegung der Flüssigkeit derjenigen Theilchen, welche, ausserhalb der Scheibe gelegen, einen gemeinschaftlichen Durchmesser mit der Scheibe hatten. Alle diese Umstände veranlassen zur Annahme, dass die effectiven Geschwindigkeiten, bei welchen die Reibung stattfand, grössere waren als diejenigen, welche in die Rechnung eingeführt wurden, daher musste auch der berechnete Coefficient grösser als der wirkliche ausfallen. O. E. Meyer hat aus seinen Versuchen Coefficienten erhalten, welche die entsprechenden Coefficienten von Poiseuille und von Jacobson um 16 oder 20 Procent übertreffen.[1] Eine derartige Genauigkeit ist für praktische Ableitungen meistens eine genügende.

Die Beobachtungsresultate für das Rüböl sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.[2]

Tabelle VI.

Temperatur Celsius	Dichtigkeit	Grösse μ in Milligrammen pro Quadratcentimeter bei einer Geschwindigkeit von 0,01 Meter pro Secunde
0	0,9292	69,3
6,5	0,9254	14,9
12,4	0,9211	7,52
13,9	0,9201	6,79
18,1	0,9168	3,44
24,5	0,9133	2,19
29,5	0,9102	1,65
31,6	0,9087	1,50

Damit die Zahlen der vorstehenden Tabelle mit den Resultaten, welche für Wasser gefunden wurden, verglichen werden können

[1] Poggend. Annal. S. 421 u. 432.

[2] Poggend. Annal. S. 410.

(siehe Tabelle V), müssen die Werthe von μ in Tabelle VI auf Milligramme pro Quadratmillimeter bei einer Geschwindigkeit von 0,001 Meter pro Secunde bezogen werden; daher hat man die Zahlen der dritten Columne in Tabelle VI durch 1000 zu dividiren. Dieselben Zahlen lassen sich sehr gut durch die Formel

$$\mu = \frac{1}{1{,}4 + 0{,}529\,t + 0{,}0507\,t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12\text{a})$$

ausdrücken.

Mit welcher Genauigkeit die Gleichung (12a) die Versuchsresultate auszudrücken vermag, zeigt die folgende Tabelle.

Tabelle VII.

Temperatur Celsius	Coefficienten der inneren Reibung μ in Milligrammen pro Quadramillim. bei einer Geschwindigkeit von 1 Millimeter	
	Nach den Versuchen	Nach der Formel (12 a) berechnet
0	0,6930	0,7142
6,5	0,1490	0,1433
12,4	0,0752	0,0635
13,9	0,0679	0,0540
18,1	0,0344	0,0362
24,5	0,0219	0,0223
29,5	0,0165	0,0163
31,6	0,0150	0,0143

Wir sehen aus dieser Tabelle sofort, dass der Reibungscoefficient anfangs sehr schnell, dann aber langsam abnimmt. Bei einer Vergleichung der Tabellen V und VII sehen wir, dass die innere Reibung für Rüböl eine viel grössere ist als für Wasser. Bei 0° verhalten sich die bezüglichen Grössen wie 3816 zu 1 und bei 14° — wie 560 zu 1.

Die Resultate seiner Versuche mit dem im Handel vorkommenden, als Brennöl gebräuchlichen Rüböle verglich O. E. Meyer mit Coulomb's Versuchen,[1] und zeigte es sich hierbei, dass Meyer doppelt kleine Grössen erhielt. Meyer glaubte diesen Unterschied der ungleichen Reinheit des Oeles in den zwei Fällen zuschreiben

[1] Poggend. Annal. S. 418 u. 419.

zu müssen. Sind aber die Zahlen von Meyer richtige, was nicht wohl zu bezweifeln ist, so ist bei 20° C. die innere Reibung des Oeles, mit welchem Coulomb seine Versuche machte, eine beinahe 600 Mal, und nicht 17,5 Mal grössere, als die innere Reibung des Wassers bei derselben Temperatur.

Der Reibungswiderstand an der Oberfläche eines verticalen unendlich langen Cylinders, welcher sich in einem anderen concentrischen mit Flüssigkeit gefülltem Cylinder dreht.

Diese Frage hat Vieles gemeinsam mit den Erscheinungen, welche bei der Reibung der Maschinentheile auftreten. Es giebt sogar gegenwärtig keine andere Erscheinung, auf welche Navier's Gleichungen mit einem gewissen Erfolge angewandt werden könnten, und welche ihren Umständen nach den Verhältnissen, bei welchen die Bewegung der Maschinentheile vor sich geht, ähnlicher wäre. Für die beabsichtigten Untersuchungen über den Einfluss der schmierenden Flüssigkeiten auf die Reibung der Maschinentheile ist die Lösung jener Frage eine unbedingt nothwendige, denn nur dadurch können wir den Einfluss der Eigenschaften einer Flüssigkeit auf den Reibungswiderstand mit der möglichst genauen Richtigkeit ermittteln.

Indessen kann diese Frage, ähnlich wie die zwei vorhergehenden Fragen, nicht auf Grund erwiesener und unzweifelhafter Principien beantwortet werden. Auf diesen Fall angewendet, lassen sich Navier's Gleichungen ohne Weiteres nicht integriren, vielmehr sind wir genöthigt behufs Integrirung eine Hypothese über die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen aufzustellen. Diese Hypothese ist allerdings eine ziemlich wahrscheinliche, um sie jedoch näher prüfen zu können, müssen noch Versuche angestellt werden, welche bis jetzt noch niemals vorgenommen worden sind. Der Mangel dieser Versuche war eben die Ursache, dass der vorhergehende Abschnitt unserer Schrift so umfangreich geworden ist. Die in demselben enthaltenen Vergleichungen der Versuchsresultate mit den auf wahrscheinlichen Hypothesen über die Bewegung der Flüssigkeiten begründeten Rechnungsresultaten bieten eine Analogie mit der bevorstehenden Lösung der aufgestellten Frage und bieten ferner das einzige Mittel für die Beurtheilung, in wie fern die weiter folgenden Ableitungen von Wichtigkeit und richtige sind, ferner — welche Umstände vorauszusehen sind, deren Einfluss die Uebereinstimmung zwischen den aus den Rechnungen sich ergebenden Resultaten und den Versuchsresultaten beeinträchtigen könnte. —

Die Reibung in den Maschinen entsteht zumeist, indem ein Cylinder in einem anderen, mit einer gewissen Flüssigkeit geschmierten Cylinder gedreht wird.

Um die Wirkung der inneren und der äusseren Reibung der Flüssigkeiten zu ermitteln, wenn ein unendlich langer Cylinder in einem anderen ähnlichen Cylinder gedreht wird, bediente sich Max Margules[1] der Navier'schen Gleichungen. Die Resultate, welche Margules erhalten hat, lassen sich auch auf eine andere Weise, ohne der allgemeinen Navier'sche Formeln ableiten.

Zur Ableitung dieser Formeln denken wir uns, dass zwei runde unendlich lange Cylinder eine und dieselbe geometrische Drehungsachse haben, und dass der ringförmige Zwischenraum zwischen dem äusseren und dem inneren Cylinder durch eine beliebige homogene Flüssigkeit ausgefüllt ist, welche an den Oberflächen der beiden Cylinder mehr oder weniger stark anhaftet. Würde die Flüssigkeit den inneren Cylinder gar nicht benetzen, so würde eine Drehung um seine geometrische Achse gar keine Bewegung dieser Flüssigkeit in Bezug auf den anderen Cylinder hervorrufen und umgekehrt: würde die Flüssigkeit den äusseren Cylinder nicht benetzen, so würde sich die ganze Flüssigkeit zusammen mit dem inneren Cylinder in Bezug auf den äusseren Cylinder bewegen. Würden nun weder auf die Cylinder, noch auf die Flüssigkeit ausser der Cohäsion der Flüssigkeitstheilchen untereinander und der Adhäsion der Flüssigkeit an die Cylinder keine anderen Kräfte wirksam sein, so könnte eine gleichförmige Bewegung eines Cylinders in einer ihn nicht benetzenden Flüssigkeit eben so wie eine gleichförmige Drehung eines von der Flüssigkeit benetzten Cylinders in einem anderen Cylinder, welchen die Flüssigkeit aber nicht benetzt, ohne Einwirkung jed-

[1] Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften. Bd. LXXXIII. II. Abth. März-Heft. Jahrg. 1881. Ueber die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit.

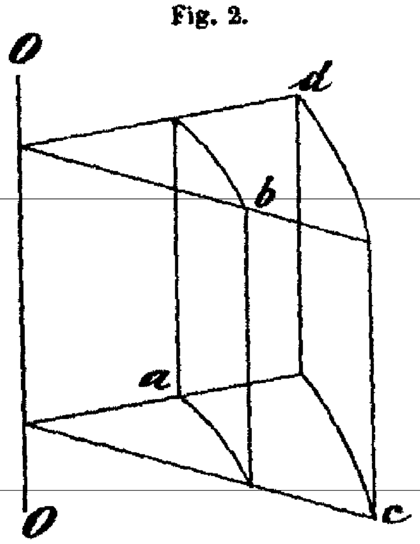
weder Kraft vor sich gehen können. Benetzt aber die Flüssigkeit beide Cylinder, so wird der schnell bewegte innere Cylinder die Flüssigkeit mitbewegen, und dadurch die Bewegung des äusseren, langsamer bewegten Cylinders beschleunigen.

Damit sich also die beiden Cylinder gleichförmig, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten drehen können, müssen äussere Kräfte die Drehung des äusseren Cylinders verzögern und diejenige des inneren Cylinders beschleunigen. Die Intensität der letzteren Kräfte wird von der Cohäsionskraft der Flüssigkeitstheilchen untereinander, oder von der inneren Reibung der Flüssigkeit, so wie von der Adhäsionskraft der Flüssigkeitstheilchen an die beiden Cylinder, oder von der äusseren Reibung der Flüssigkeit abhängig sein.

Behufs grösserer Einfachheit der nachfolgenden Betrachtungen denke man sich, dass unsere zwei Cylinder eine verticale Achse haben, d a s s d e r ä u s s e r e C y l i n d e r u n b e w e g l i c h i s t, und dass sich der innere in der Richtung des Uhrzeigers dreht. Die Drehung des inneren Cylinders zieht die Bewegung der den Cylinder benetzenden Flüssigkeitsschicht nach sich, diese Schicht zieht wieder die nachfolgende mit sich fort u. s. w., dabei wird jede Schicht von der inneren mitgezogen und von der äusseren zurückgehalten; die äusserste Flüssigkeitsschicht wird an dem äusseren Cylinder aufgehalten. Bei dieser Bewegung vertheilen sich die Flüssigkeitstheilchen und die Kräfte symmetrisch in Bezug auf die Drehungsachse des Cylinders; denkt man sich also in der Flüssigkeit cylindrische Oberflächen, deren Achsen mit der Drehungsachse zusammenfallen, so werden alle an einer und derselben gedachten Oberfläche gelegenen Flüssigkeitstheilchen sich in den gleichen Verhältnissen befinden, und werden also sämmtliche mit gleicher Geschwindigkeit um die Achse gedreht. Alle an einer anderen cylindrischen Oberfläche gelegenen Flüssigkeitstheilchen werden eine andere gemeinschaftliche Geschwindigkeit annehmen, und falls die erste Oberfläche die innere in Bezug auf die letztere ist, so wird die Geschwindigkeit der an der ersteren Oberfläche gelegenen Flüssigkeitstheilchen eine grössere sein, als die Geschwindigkeit der an der letzteren Oberfläche gelegenen Theilchen; die an diesen Oberflächen gelegenen Theilchen der Flüssigkeit bilden also zwei unmessbar dünne Schichten. Es ist nun klar, dass, mag der Zwischenraum zwischen den beiden Cylindern ein noch so schmaler, oder die durch die Cylinder begrenzte Flüssigkeitsschicht eine noch so dünne sein, so kann man sich die letztere doch stets in eine Unzahl unendlich dünner Schichten getheilt denken, welche immer gegenseitig sich bewegen und um die gemeinschaftliche Achse sich drehen werden. Ist die Voraussetzung, dass die Flüssigkeit im Beharrungszustande der Bewegung in unendlich feine cylindrische Schichten zerfällt, eine richtige so, kann mit Hilfe der Newton'schen Hypothese sehr leicht die Wirkung der inneren und der äusseren Reibung der Flüssigkeit auf das Moment der den inneren Cylinder drehenden äusseren Kräfte ermittelt werden.

In einer beliebigen von den oben erwähnten Schichten denke man sich ein Element, welches einerseits von den zwei cylindrischen die ganze Schicht einschliessenden Oberflächen, andererseits von zwei unendlich nahe aneinander gelegenen, zu der Drehungsachse senkrechten Flächen, so wie endlich von zwei durch die Achse gehenden und einen unendlich kleinen Winkel bildenden Flächen begrenzt wird. In den Begrenzungsflächen dieses Elementes werden verschiedene Kräfte wirken: auf die cylindrischen Flächen ab und cd, eben so wie auf die geraden Flächen ac, bc, bd, da werden gewisse normale, dem Inhalte der Flächen proportionale Kräfte wirken, und kann man sich die Angriffspunkte dieser Kräfte, als in den Schwerpunkten der bezüglichen Flächen gelegen denken. Die cylindrischen Flächen ab und cd haben in den zur Drehungsachse senkrechten Richtungen gewisse relative Bewegungen in Bezug auf die angrenzenden Flüssigkeitsschichten, und da unser Element keine der Drehungsachse parallele Bewegung haben kann, so werden die in den Flächenelementen ab und cd wirkenden Cohäsions- oder Reibungskräfte in den zu jenen Flächenelementen tangenten Flächen liegen und senkrecht zur Drehungsachse sein.

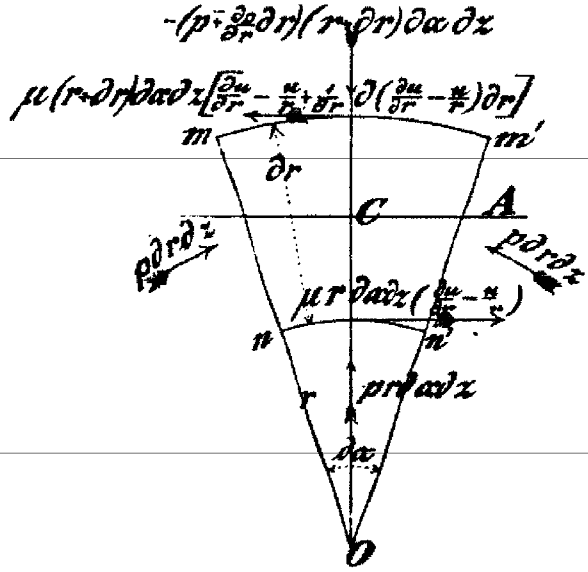
Fig. 2.



Die Elemente ac und bd trennen unser Element von solchen Theilen der unendlich feinen cylindrischen Schicht, welche zugleich mit unserem Flüssigkeitselemente bewegt werden und ihre gegenseitige Lage unveränderlich behalten, also kein Bestreben, sich in der Richtung der Flächen ac und bd gegenseitig zu verschieben haben, es werden also in den Flächenelementen ac und bd keine ihnen parallelen Kräfte thätig sein.

In den Flächenelementen $a\,d$ und $b\,c$ werden wohl Kräfte hervorgerufen, welche den Flächen parallel gerichtet sind, denn ohne diese Kräfte würde das Flüssigkeitselement von den eben erwähnten, in Bezug auf die cylindrischen Flächen $a\,b$ und $c\,d$ tangential wirkenden Kräften in eine Drehung um eine verticale Achse versetzt werden. Die tangential in den Flächen $a\,b$ und $c\,d$ wirkenden Kräfte liegen in einer gemeinschaftlichen zur Drehungsachse des Cylinders senkrechten Fläche. Denken wir uns in Figur 3 den horizontalen, also zur Drehungsachse senkrechten, Querschnitt des Flüssigkeitselementes. In Figur 3 ist O die Projection der Drehungsachse auf die Schnittfläche, $n\,n'$ und $m\,m'$ — die Projectionen der cylindrischen Flächen $a\,b$ und $c\,d$ und die Geraden $n\,m$ und $n'\,m'$ — die Projectionen der Flächen $a\,d$ und $b\,c$.

Fig. 3.



Mit Hilfe dieser Figur können wir nun auf Grund der Newton'schen Hypothese und auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen der auf das Flüssigkeitselement parallel zur horizontalen Projectionsfläche wirkenden Kräfte die Cohäsions- oder Reibungskräfte ermitteln.

Nehmen wir folgende Bezeichnungen an:

- r Halbmesser der Oberfläche $n\,n'$, welche die cylindrische Schicht von der Innenseite begrenzt.
- $r + \partial r$ Halbmesser der äusseren Grenze $m\,m'$.
- $\partial \alpha$ Winkel zwischen den durch die Drehungsachse gehenden Grenzflächen $O\,n$ und $O\,n'$, welche unser Flüssigkeitselement von den beiden Seiten einschliessen.
- ∂z Entfernung zwischen den zwei horizontalen Flächen, welche das Flüssigkeitselement von oben und von unten begrenzen.
- p Normaldruck pro Flächeneinheit im Punkte a (Fig. 2) oder im Punkte n (Fig. 3).

Der Normaldruck pro Flächeneinheit im Punkte d (Fig. 2) oder im Punkte m (Fig. 3) wird nicht mehr p sein, sondern derselbe wird, abhängig von r, sich verändern, und wird sein

$$p + \frac{\partial p}{\partial r} \partial r.$$

Der Druck p wird in der Richtung von O nach C, der Druck $p + \frac{\partial p}{\partial r} \partial r$ von C nach O hin wirken.

Bezeichnen wir das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit mit Δ, so ist bei einer Drehungsgeschwindigkeit u die Centrifugalkraft des Flüssigkeitselementes gleich

$$\frac{\Delta \; r \partial \alpha \; \partial r \; \partial z}{g} \cdot \frac{u^2}{r}$$

Der Normaldruck pro Flächeneinheit in den Flächen $a\,d$ und $a\,b$ (Fig. 2), resp. $n\,m$ $n\,n'$ (Fig. 3) wird ein gleicher sein, denn diese Flächen haben den gemeinschaftlichen Punkt a, resp. n. Da andererseits der Normaldruck auf die unendlich kleinen Elemente der cylindrischen Fläche, welche mit einem und demselben Halbmesser r beschrieben ist, mit den Veränderungen des Winkels α dieselbe bleibt, so wird auch in der Fläche $b\,c$ (Fig. 2) derselbe Normaldruck wie in den Flächen $a\,b$ und $a\,d$, resp. — in $n'\,m'$ (Fig. 3) wie in $m\,n$ und $n\,n'$ wirken, d. h. — in den drei Flächen $a\,b$, $a\,d$, $b\,e$, resp. $n\,n'$, $n\,m$ und $n'\,m'$ wird derselbe Druck p wirksam sein.

Um die Newton'sche Hypothese zur Ermittelung der in den Flächenelementen $n\,n'$ und $m\,m'$ wirkenden Reibungswiderstände benutzen zu können, muss vorher das Grenzverhältniss der Differenzen der Drehungsgeschwindigkeiten zu den Differenzen der Halbmesser der cylindrischen Schichten bestimmt werden. Da sich die cylindrischen Schichten nur drehen, und keine andere Bewegung haben, so genügt es, die Bögen $m\,m'$ und $n\,n'$ (Fig. 3), welche auf den cylindrischen Flächen und in ihrer zur Achse senkrechten Schnittfläche liegen, zu berücksichtigen. Würden sich die Bögen $m\,m'$ und $n\,n'$ in der Weise drehen, als ob sie einem starren Körper angehörten, und würden sie sich bei der Drehung gegenseitig nicht verschieben, so würde ein in einer Entfernung r von der Achse gelegener Punkt n (Fig. 3) in der Zeit ∂t bei einer Geschwindigkeit ω den Bogen

$$r \, \omega \, \partial t$$

beschrieben haben. Ein Punkt m, welcher einen Kreis mit dem

Halbmesser $r + \partial r$ beschreibt, würde in derselben Zeit ∂t den Bogen $(r + \partial r)\,\omega\,\partial t = r\,\omega\,\partial t + \omega\,\partial t\,\partial r$ beschrieben haben.

Die Differenz dieser Verschiebungen ist $\omega\,\partial r\,dt$.

Die Differenz der Geschwindigkeiten jener Punkte oder der Zuwachs der Drehungsgeschwindigkeit beim Uebergange von dem einen dieser Punkte zum anderen ist $\omega\,\partial r$.

Das Grenzverhältniss dieser Grösse zu ∂r ist offenbar ω. Bilden die cylindrischen Schichten keinen starren Körper, und sind die Winkelgeschwindigkeiten der Bögen $n\,n'$ und $m\,m'$ bei ihrer Drehung um die Achse O verschieden und der Veränderlichkeit des Halbmessers entsprechend veränderlich, so wird, wenn dem Halbmesser r die Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, dem Halbmesser $r + \partial r$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega + \frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r$ entsprechen. In diesem Falle wird der Bogen $m\,m'$ in der Zeit ∂t den Weg

$$(r+\partial r)\left(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r\right)\partial t = r\omega\,\partial t + r\frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r\partial t + \omega\,\partial\, r\partial t + \frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r^2\,\partial t$$

zurücklegen, und ist alsdann die Differenz der von den Bögen $m\,m'$ uud $n\,n'$ zurückgelegten Wege gleich

$$\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r + \omega\,\partial r + \frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r^2\right)\partial t.$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz ist also gleich

$$r\frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r + \omega\,\partial r + \frac{\partial \omega}{\partial r}\partial r^2$$

und das Grenzverhältniss der letzten Grösse zu ∂r, wenn ∂r die Grenze 0 erreicht

$$r\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega.$$

Subtrahiren wir nun von dieser Grösse das Grenzverhältniss der Geschwindigkeitsdifferenzen zu den Halbmesserdifferenzen, welches für starre Körper gefunden wurde, also für den Fall, wo keine gegenseitigen Verschiebungen der Theilchen, demnach auch keine Reibung hervorrufende Gleitungen vorhanden sind, so erhalten wir die relative Geschwindigkeit

$$r\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega - \omega = r\frac{\partial \omega}{\partial r},$$

von welcher die Reibung abhängig ist.

Bezeichnet man mit u die Drehungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit in einem um r von der Drehungsachse entfernten Punkte, so ist bekanntlich

$$u = \omega r \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{u}{r}$$

und folglich

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \quad \text{oder} \quad r\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \quad \ldots\ldots \text{(G)}.$$

Folglich ist in einer Entfernung r von der Drehungsachse die zu der letzteren rechtwinkelige Gleitung der Grösse

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

proportional. Erhält nun die Entfernung von der Drehungsachse einen Zuwachs ∂r, so wird an Stelle der vorhergehenden die Grösse

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)\partial r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(K)}$$

treten müssen.

Unter Berücksichtigung dieser Ausdrücke können wir die Reibungswiderstände, welche in den Flächen ab und cd (Fig. 2) resp. in den Flächen nn', mm' (Fig. 3) hervorgerufen werden, ausdrücken.

Der in der Fläche nn' (Fig. 3) tangential zu derselben wirkende Reibungswiderstand wird, wenn wir nach dem Früheren den Coefficienten der inneren Reibung mit μ bezeichnen,

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) r\,\partial\alpha\,\partial z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

sein, und der Widerstand in der Richtung der Tangenten zum Bogen mm'

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \frac{1}{\partial r}\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)\partial r\right](r + \partial r)\,\partial\alpha\,\partial z$$

oder

$$\mu\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{r\frac{\partial u}{\partial r} - u}{r^2}\right)\partial r\right](r + \partial r)\,\partial\alpha\,\partial z.$$

Vernachlässigt man in diesem Ausdrucke die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnungen als die dritte, so erhält man

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) r\,\partial\alpha\,\partial z + \mu\, r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\partial r\,\partial\alpha\,\partial z \quad \ldots\ldots \text{(M)}.$$

Wir haben vorausgesetzt, dass die Drehung der Flüssigkeit in der Richtung des Uhrzeigers vor sich geht und dass die inneren Schichten die äusseren mit sich ziehen, die äusseren hingegen die inneren aufhalten. Es folgt daraus, dass die in nm' angreifende und durch die Formel (L) ausgedrückte Kraft von links nach rechts wirkt, und deshalb muss sie, wie es üblich ist, durch eine positive Zahl ausgedrückt werden; die in der Fläche mm' wirkende Kraft wird hingegen von rechts nach links wirken, und muss deshalb durch eine negative Zahl ausgedrückt werden.

Das Vorzeichen der durch die Eormel (L) ausgedrückten Zahl ist von dem Vorzeichen der Grösse $\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}$ abhängig, denn alle anderen Factoren des Ausdruckes (L) sind positive Grössen. Nun ist aber $\frac{\partial u}{\partial r}$ eine negative Zahl, denn im vorliegenden Falle vermindern sich die Winkelgeschwindigkeiten ω. Die Formeln (L) und (M) liefern also beide negative Zahlen; sollen dieselben daher die in den Flächenelementen nn' und mm' angreifenden Kräfte sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach ausdrücken, so hat man vor dem Ausdrucke (L) das Zeichen — zu setzen und die Formel (M) so zu lassen, wie sie ist.

Die zu den Flächenelementen nm und $n'm'$ tangential wirkenden Kräfte lassen sich nach der Bedingung ermitteln, dass alle radial wirkenden Kräfte einander gleich sein müssen, weil die Flüssigkeitstheilchen sich in cylindrischen Schichten vertheilen müssen. Eine eben solche Kraft wie diejenige, welche in der Richtung der Linie nm (Fig. 3) auf das Flüssigkeitselement $nm\,n'm'$ wirkt, wirkt auch in derselben Richtung in der Linie $n'm'$ auf das rechts von $n'm'$ gelegene Flüssigkeitstheilchen. Wenn längs der Linie nm eine Kraft δ in der Richtung von n nach m wirkt, so wird unser Flüssigkeitselement in dem rechts gelegenen Elemente in der Fläche $n'm'$ eine gleiche Kraft δ und zwar auch in der Richtung von n' nach m' hervorrufen; folglich wird die letztere Kraft, auf unser Flüssigkeitselement bezogen, in der Fläche $n'm'$ die Wirkung der Kraft δ in der Richtung von m' nach n' hervorrufen. Die Grösse der Kraft δ wird aus der Momentengleichung aller auf die Flächenelemente nn', nm, mm' und $n'm'$ wirkenden Kräfte bestimmt.

Die Momente jener Kräfte in Bezug auf den Mittelpunkt C sind folgende:

a) Der Normaldruck an allen Seitenflächen und die Centrifugalkraft gehen durch den Mittelpunkt und sind folglich die Momente dieser Kräfte gleich Null.

b) Das Moment der in der Seitenfläche nn' angreifenden Kraft wird erhalten, indem man den Ausdruck (L), wie bereits bemerkt wurde, mit dem negativen Vorzeichen, mit $\left(-\frac{\partial r}{2}\right)$ multiplicirt; wir erhalten also das Moment

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \frac{r}{2} \partial \alpha \; \partial r \; \partial z.$$

c) Das Moment der in dem Flächenelemente mm' angreifenden Kraft ist das Product aus dem Ausdrucke (M) mit $\frac{\partial r}{2}$, d. h.

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \frac{r}{2} \partial \alpha \; \partial r \; \partial z + \mu \frac{r}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \partial r^2 \; \partial \alpha \; \partial z.$$

d) Die Summe der Momente der in den Seitenflächen nm und $n'm'$ wirkenden Kräfte δ ist

$$\delta \left(r + \frac{\partial r}{2}\right) \partial \alpha.$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke muss Null sein, folglich ist

$$\delta r \; \partial \alpha + \delta \frac{\partial r}{2} \partial \alpha = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) r \partial \alpha \; \partial r \; \partial z - \mu \frac{r}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \partial r^2 \partial \alpha \; \partial z.$$

Es leuchtet nun ohne Weiteres ein, dass in der Richtung der Linie nm von n und m hin die Kraft

$$\delta = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \partial r \; \partial z \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (\mathrm{N})$$

und in der Richtung der Linie $n'm'$ die Kraft

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \partial r \, \partial z. \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\mathrm{O})$$

wirkt.

Um schliesslich das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten der Flüssigkeit und den Entfernungen dieser Punkte von der Drehungsachse zu ermitteln, wollen wir alle das Flüssigkeitselement angreifende Kräfte auf eine Tangente projectiren, welche den aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OC beschriebenen Kreis im Punkte C berührt, und wollen alsdann jene Projectionen addiren. Die letzteren haben folgende Werthe:

a) Die Projectionen des Normaldruckes in den Flächen nn' und mm', so wie auch diejenige der Centrifugalkraft sind gleich 0.

b) Die Projectionen der in nn' angreifenden Kraft wird durch die Formel (L) mit dem Vorzeichen — ausgedrückt, sie ist also gleich

$$-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right) r\,\partial\alpha\,\partial z.$$

c) Die Projection der in mm' angreifenden Kraft wird durch die Formel (M) ausgedrückt, sie ist also gleich

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right) r\,\partial\alpha\,\partial z+\mu r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\partial r\,\partial\alpha\,\partial z.$$

d) Um die Projectionen der in den Elementen mn und $n'm'$ angreifenden Kräfte δ zu ermitteln, hat man den Ausdruck für δ mit $\sin\frac{\partial\alpha}{2}$ zu multipliciren. Es muss dabei berücksichtigt werden, dass die nach rechts von OC abgetragenen Winkel als positive und die nach links von OC abgetragenen als negative in die Rechnung einzuführen sind. Es leuchtet dann ohne Weiteres ein, dass die Projection der in nm angreifenden Kraft gleich

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}\right)\sin\frac{\partial\alpha}{2}\,\partial r\,\partial z.$$

sein muss und dass derselbe Ausdruck auch für die Projection der in $n'm'$ angreifenden Kraft zutrifft.

Die Summe dieser vier Ausdrücke muss 0 gleich sein. Dabei muss noch berücksichtigt werden, dass $\sin\frac{\partial\alpha}{2}$ mit einer Genauigkeit bis auf unendlich Kleine dritter Ordnung gleich $\frac{\partial\alpha}{2}$ zu setzen ist. Wir erhalten auf diese Weise die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=0,$$

welche auch von Max Margules gefunden wurde[1].

Man findet leicht das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$u=\frac{C}{r}+C'r, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

in welchem die Constanten C und C' durch diejenigen Bedingungen bestimmt werden, welche an der Oberfläche der Flüssigkeit bestehen.

[1] Max Margules. Ueber die Bestimmung des Reib- und Gleit-Coefficienten. S. 12.

Für den Fall, dass das unendlich kleine Flüssigkeitselement nn' mm' (Fig. 3) den inneren oder den äusseren starren Cylinder berührt, wird sein Gleichgewichtszustand auf folgende Weise bestimmt. Es sei:

r_2 innerer Halbmesser des äusseren Cylinders,
U_2 die Drehungsgeschwindigkeit des äusseren Cylinders in der Richtung des Uhrzeigers an dem mit dem Halbmesser
r_2 beschriebenen Kreise,
u_2 die Drehungsgeschwindigkeit der den äusseren Cylinder unmittelbar berührenden Flüssigkeit.

Die Flüssigkeit wird also auf der Oberfläche des Cylinders mit der Geschwindigkeit

$$u_2 - U_2$$

gleiten. Bezeichnen wir nun den Coefficienten der äusseren Reibung mit λ_1, so ist die im Flächenelemente mm' angreifende Reibung gleich

$$\lambda_1 (u_2 - U_2) r_2 \partial \alpha \ \partial z.$$

Die Richtung dieser Kraft wird eine der Bewegung der Flüssigkeit entgegengesetzte sein, folglich muss die das Flüssigkeitselement angreifende Kraft durch eine negative Zahl ausgedrückt werden. Wird der äussere Cylinder von der Flüssigkeit mitgenommen, so ist

$$U_2 < u_2.$$

Es wird in diesem Falle sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach die im Flüssigkeitselemente mm' angreifende Kraft durch die Formel

$$\lambda (U_2 - u_2) r_2 \partial \alpha \ \partial z$$

ausgedrückt werden.

Was die in den Flächenelementen mn', nm und $n'm'$ angreifenden Kräfte anbelangt, so erhält man ihre Werthe, indem man in die Formeln (L), (N) und (O) $r_2 - \partial r$ anstatt r einsetzt. Dadurch erhalten wir neue Formeln, welche dieselben Glieder enthalten werden wie die alten, mit dem einzigen Unterschiede, dass in ihnen r_2 statt r stehen wird und ausserdem eine Summe unendlich kleiner Glieder dritter und höherer Ordnungen. Die letzteren können bei der nachfolgenden Ableitung vernachlässigt werden; wir können daher die Summe der Projectionen aller Kräfte auf die Richtung der Linie CA (Fig. 3) in folgender Weise schreiben:

$$\lambda_2 (U_2 - u_2)\, r_2\, \partial \alpha\, \partial z - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)_{r = r_2} r_2\, \partial \alpha\, \partial z$$
$$+ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)_{r = r_2} \partial r\, \partial \alpha\, \partial z = 0$$

oder

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)_{r = r_2}.$$

Da ferner nach Gleichung (13)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{C}{r^2} + C'$$

und

$$-\frac{u}{r} = -\frac{C}{r^2} - C',$$

so ist

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) = -2\mu \frac{C}{r_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Aehnliche Betrachtungen führen uns zur Ermittelung des Gleichgewichtszustandes des unendlich kleinen Flüssigkeitselementes $n n' m m'$ (Fig. 3), wenn dieser mit seiner Seitenfläche $n m'$ den inneren Cylinder berührt.

Bezeichnen wir mit

r_1 den Halbmesser des inneren Cylinders, mit

U_1 die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Cylinders bei seiner Drehung in der Richtung des Uhrzeigers, mit

u_1 die Geschwindigkeit der Drehung der mitgenommenen Flüssigkeitsschicht, mit

λ_1 den Reibungscoefficienten der Flüssigkeit mit dem inneren Cylinder,

so ist die im Flächenelemente tangential zum Bogen nach rechts gerichtete Reibungskraft gleich

$$\lambda_1 (U_1 - u_1)\, r_1\, \partial \alpha\, \partial z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

Um diejenigen Reibungskräfte zu ermitteln, welche in den Seitenflächen $m m'$, $n m$ und $n' m'$ angreifen, hat man in die Formeln (L) und (O) $r_1 + \partial r$ anstatt r einzustellen; dabei ist aber zu berücksichtigen, dass in diesem Falle die Formel (L) eine nach links wirkende, daher eine negative Reibungskraft auszudrücken hat, das Vorzeichen in der Formel (L) also beibehalten werden muss. Setzt man nun in die Formeln (L) und (O) $r_1 + \partial r$ anstatt r ein, so erhält man in ähnlicher Weise wie im vorhergehenden Falle die Summe der Projectionen auf die Gerade CA aller auf das Flüssigkeitselement wirkenden Kräfte in der Form

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) r_1 \, d\alpha \, dz + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_1} r_1 \, d\alpha \, \partial z$$
$$+ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \partial r \, \partial \alpha \, \partial z = 0$$

oder

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) = - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_1},$$

und in Folge der Gleichung (13)

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) = 2 \mu \frac{C}{r_1^2}.$$

Wir haben damit ein System von zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 (U_2 - u_2) &= - 2 \mu \frac{C}{r_2^2} \\ \lambda_1 (U_1 - u_1) &= 2 \mu \frac{C}{r_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Der Gleichung (13) zufolge ist nun

$$u_2 = \frac{C}{r_2} + C' r_2 \text{ und } u_1 = \frac{C}{r_1} + C' r_1;$$

setzt man diese Werthe von u_2 und u_1 in die vorhergehenden Gleichungen (16) ein, so ist

$$\lambda_2 \left(U_2 - \frac{C}{r_2} - C' r_2\right) = - 2 \mu \frac{C}{r_2^2}$$

und

$$\lambda_1 \left(U_1 - \frac{C}{r_1} - C' r_1\right) = 2 \mu \frac{C}{r_1^2}$$

oder

$$C \left(\frac{1}{r_2} - \frac{2\mu}{\lambda_2 r_2^2}\right) + C' r_2 = U_2$$

$$C \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2\mu}{\lambda_1 r_1^2}\right) + C' r_1 = U_1.$$

Diese zwei Gleichungen erster Potenz in Bezug auf C und C' ergeben für dieselben folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{r_1^2 r_2^2 (U_1 r_2 - U_2 r_1)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)} \\ &\text{und} \\ C' &= \frac{r_2^2 U_2 \left(r_1 + \frac{2\mu}{\lambda_1}\right) - r_1^2 U_1 \left(r_2 - \frac{2\mu}{\lambda_2}\right)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Es genügt nun diese zwei Werthe in die Gleichung (13) einzusetzen, um den Ausdruck für die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes der Flüssigkeit zu erhalten; da der Weg eines jeden Punktes bekannt ist (nach der Voraussetzung ist es ein constanter Kreis), so ist also die Bewegung der Flüssigkeit eine völlig bekannte, und können wir die Reibungskräfte bestimmen.

Zur Ermittelung des Genauigkeitsgrades unserer Hypothese und der darauf begründeten Formeln (15) müssen wir die Rechnungsresultate dieser Formeln mit entsprechenden Versuchsresultaten vergleichen. Wir gelangen am raschesten zum Ziele, wenn wir einerseits durch Versuche und andererseits durch Rechnung die Summe der Momente der Reibungskräfte ermitteln, welche die Flüssigkeit im Falle des Ruhezustandes des äusseren Cylinders auf den sich drehenden inneren Cylinder ausübt.

Die Reibungskraft, welche ein unendlich kleines Flächenelement eines in der Flüssigkeit sich drehenden Cylinders angreift, wird durch die Formel (15) ausgedrückt. Wegen der Gleichung (16) nimmt die letztere die Form

$$2\mu \frac{C}{r_1} \partial \alpha \partial z$$

an. Wenn wir diesen Ausdruck mit dem Halbmesser des Cylinders multipliciren, so erhalten wir den nachstehenden Ausdruck für das Moment jener Elementarkraft in Bezug auf die Drehungsachse des Cylinders, d. h.

$$2\mu C \partial \alpha \partial z.$$

Die Summe aller Elementarmomente der Reibungskräfte, welche den Cylinder angreifen, und seiner Drehung Widerstand entgegensetzen, wird durch die Integrirung der vorstehenden Formel erhalten: erstens in Bezug auf α in den Grenzen 0 und 2π und zweitens in Bezug auf z in den Grenzen $z = 0$ und $z = h$, wobei h die Länge des Cylinders bezeichnet. Bezeichnet man die Summe der Momente aller Reibungskräfte mit M, so ist

$$M = 4\mu \pi h C.$$

Setzt man in diese Gleichung anstatt C den zweiten Theil der ersten Gleichung (17) ein, so ist

$$M = 4\mu \pi h \frac{r_1^2 r_2^2 (U_1 r_2 - U_2 r_1)}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}.$$

Ist der äussere Cylinder, wie meistens, unbeweglich, d. h.

$$U_2 = 0,$$

dann nimmt der vorstehende Ausdruck die folgende Form an:

$$M = 4\mu\,\pi\,h\,\frac{r_1^{\,2}\,r_1^{\,3}\,U_1}{r_1\,r_2\,(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) + 2\,\mu\left(\frac{r_2^{\,3}}{\lambda_1} + \frac{r_1^{\,3}}{\lambda_2}\right)} \quad \ldots \ldots (18)$$

Es erübrigt jetzt noch, dieses Moment mit der Summe der Momente der äusseren Kräfte zu vergleichen, welche bei den Versuchen den inneren Cylinder drehen und die gleichmässige Geschwindigkeit U_1 an seiner Oberfläche aufrecht erhalten. — Mittelst einer Reihe von Versuchen bei verschiedenen Geschwindigkeiten U_1, besonders aber mit Cylindern verschiedener Halbmesser, könnte man sowohl die Richtigkeit der aufgestellten Hypothese prüfen, als auch die Werthe der Coefficienten μ, λ_1 und λ_2 ermitteln. Die Werthe von λ_1 und λ_2 werden um so schwieriger zu bestimmen sein, je bedeutender dieselben die Grösse μ übertreffen. Je grösser jedoch andererseits λ_1 und λ_2 im Vergleiche zu μ sind, um so geringer wird ihre Wirkung auf die Grösse des Momentes sein. Für stark an feste Körper adhärirende Flüssigkeiten, für welche λ_1 und λ_2 sehr grosse Werthe besitzen, wird es daher schwierig sein jene Zahlen durch Versuche zu bestimmen; dessen ungeachtet lässt sich das Moment M und der Coefficient μ mit hinreichender Genauigkeit ermitteln.

Die im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Betrachtungen, betreffend die Frage über die Reibung in Flüssigkeiten und über die Versuche, welche genügend genaue Werthe der Coefficienten der inneren und der äusseren Reibung zu ergeben geeignet sind, veranlassen zu der Meinung, dass die Cylinder, mit welchen die Versuche behufs einer Prüfung der Formel (18) vorzunehmen sind, durchaus keine beliebigen Halbmesser r_1 und r_2 haben dürfen. Die Hypothese, dass die in einem gewissen Zeitpunkte an der Oberfläche eines Cylinders (dessen Achse mit den Achsen der beiden die Flüssigkeit einschliessenden starren Cylinder zusammenfällt) gelegenen Flüssigkeitstheilchen, an jenem Cylinder während der ganzen Zeit des Versuches bleiben, wird wohl nicht gleicherweise auf die sehr dünnen, wie auch dicken Flüssigkeitsschichten anwendbar sein. Nach den Versuchen mit Röhren zu urtheilen, ist es sehr wahrscheinlich, dass bei kleinen Differenzen der Grössen r_1 und r_2 die Hypothese eine der Wirklichkeit näher kommende sein wird als bei grossen Differenzen zwischen r_1 und r_2. Es ist sehr möglich, dass in den letzteren Verhältnissen Strudel und Stromtrennungen sich bilden, welche die von den Flüssigkeitstheilchen zurückgelegten Wege verlängern und für den Ausdruck des Momentes M der Reibungskräfte eine nicht mehr von der ersten Potenz der Geschwindigkeit U_1 abhängige Formel ergeben, sondern vielmehr eine andere Formel, in welcher die Geschwindigkeit U_1, ähnlich wie in der für Canäle und Rohrleitungen giltigen Formel, in der ersten und in der zweiten Potenz vertreten ist.

Es muss erwähnt werden, dass bis jetzt noch keine Versuche bekannt sind, welche für die Prüfung der Formel (18) nach irgend welcher Richtung brauchbar wären.

Die Versuche von Helmholtz und Piotrowski lassen vermuthen, dass auch die Formel (18) wenigstens für sehr kleine Differenzen der Halbmesser

$$r_2 - r_1 = e$$

eine ziemlich richtige sein wird.

Für die Fälle, in welchen die Stärke e der Flüssigkeitsschicht eine sehr geringe im Vergleiche zu den Halbmessern r_1 und r_2 sein wird, lässt sich die Formel (18) bedeutend vereinfachen, indem man in dieselbe die Grösse e einführt und diejenigen Glieder vernachlässigt, welche, die zweite, die dritte und die höheren Potenzen von e enthaltend, verschwindend kleine sein werden.

Im Falle wir uns mit einer Genauigkeit begnügen, welche den Gleichungen

$$r_2^2 = r_1(r_1 + 2e) \text{ und } r_2^3 = r_1^2(r_1 + 3e)$$

entspricht, so können wir statt der Gleichung (18) die folgende aufstellen

$$M = \mu\, 2\pi\, h \frac{r_1^2 (r_1 + 3e)\, U_1}{(r_1 + e)\, e + \mu\left(\frac{r_1 + 3e}{\lambda_1} + \frac{r_1}{\lambda_2}\right)}$$

Ist $3e$ im Verhältnisse zu r_1 eine verschwindend kleine Grösse, so wird die Gleichung eine noch einfachere, nämlich

$$M = \mu \frac{2\pi\, r_1\, h\, U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}\, r_1.$$

Dividirt man diese Grösse durch r_1, so erhält man den sogenannten Reibungswiderstand der zwei Cylinder, welchen wir mit F bezeichnen wollen. Es ist also

$$F = \mu \frac{2\pi r_1 h U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}$$

oder

$$F = \frac{2\pi r_1 h U_1}{\frac{e}{\mu} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt der ganzen Berührungsfläche des inneren Cylinders mit der Flüssigkeit durch Q, d. h. $2\pi r_1 h = Q$, so ist

$$F = \frac{Q U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

Diese Formel lässt sich in Worten wie folgt ausdrücken:

Bei constanter Temperatur der schmierenden Flüssigkeit ist der Reibungswiderstand zweier geschmierter Cylinder direct proportional: 1) dem Coefficienten der inneren Reibung dieses Schmiermittels für jene Temperatur, 2) dem Inhalte der Berührungsfläche der sich reibenden starren Körper und 3) der ersten Potenz der relativen Geschwindigkeit jener Körper an ihrer Berührungsfläche. Dahingegen ist jener Reibungswiderstand umgekehrt proportional einer aus folgenden drei Gliedern bestehenden Summe: nämlich aus der Dicke der schmierenden Flüssigkeitsschicht plus den zwei Verhältnissen der Coefficienten der inneren Reibung bei der gegebenen Temperatur zu den Coefficienten der äusseren Reibung der Flüssigkeit; einmal mit dem inneren Cylinder, ein anderes Mal mit dem äusseren.

Es muss nun wohl berücksichtigt werden, dass die Gleichung (19) nur für diejenigen Fälle giltig ist, in welchen die Bewegung in der Weise sich vollzieht, als ob die Flüssigkeit aus unendlich feinen cylindrischen Schichten zusammengesetzt wäre, welche eine mit den starren Cylindern gemeinschaftliche Achse haben, so dass die Bewegung ähnlich wie in den Röhren von Poiseuille, Hagen und Jacobson vor sich geht. Hierbei ist nur der Unterschied, dass, während bei letzteren die Schichten in den Röhren, ohne sich zu vermischen und ohne sich um die Achse zu drehen, parallel zur Achse sich bewegten, im vorliegenden Falle die Schichten sich um die Achse drehen, ohne sich zu vermischen und ohne sich parallel zur Achse zu verschieben. Ist indessen die Bewegung der Flüssigkeit eine complicirtere, was der Fall sein würde, wenn die thatsächlichen Geschwindigkeiten der bewegten Flüssigkeitstheilchen grössere als wir sie angenommen wären, oder wenn die von den Angriffspunkten der Kräfte der inneren Reibung zurückgelegten Wege grössere als diejenigen wären, welche der angenommenen Hypothese entsprechen, dann würde der Widerstand, welcher der Drehung des Cylinders entgegengesetzt wird, ein grösserer als der nach Formel (19) berechnete Widerstand F sein.

Nimmt man sich jedoch vor, die auf dem Wege der Versuche ermittelte Reibungskraft für eine von der vorausgesetzten abweichende Bewegung durch eine Formel auszudrücken, welche dem Inhalte der Berührungsfläche zwischen dem starren Cylinder und der Flüssigkeit proportional und dabei eine Function der Geschwindigkeit an der Oberfläche des inneren Cylinders ist, wobei der äussere Cylinder unbeweglich bleibt, dann muss in jene Formel U_1 nicht in der ersten, sondern in einer anderen, höheren Potenz eingeführt werden. Als Beweis hierfür gelten die Versuche von D. I. Mendelejew und Kuzminski,[1] bei denen die Wasserschicht eine ziemlick dicke war, und welche den Werth

$$F = 0{,}14\, Q\, U^2 \text{ Kilogramm}$$

ergaben.

Die Gleichung (19) zeigt, dass der Einfluss des Coefficienten der inneren und der äusseren Reibung kein gleicher ist. In denjenigen Fällen, in welchen das Verhältniss des Coefficienten der inneren Reibung μ zu den Coefficienten der äusseren Reibung λ_1 und λ_2 (z. B. bei Wasser und Glas) ein sehr kleines wird, ist möglicher Weise die Grösse e um ein Bedeutendes grösser, als die Summe der Verhältnisse $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$. Begnügt man sich mit einer durch Vernachlässigung der Summe $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ zu erreichenden Genauigkeit, so ist

$$F = \mu \frac{Q\, U_1}{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\,\mathrm{a})$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Reibungswiderstand von der

[1] Журналъ русскаго физико-химическаго общества (Zeitschrift des russischen Vereins für Chemie und Physik. Bd. XIV. Heft 5. S. 209).

inneren Reibung unabhängig und der Dicke der schmierenden Schicht umgekehrt proportional. Ist dagegen die Cohäsion zwischen den Flüssigkeitstheilchen eine grössere, ist ferner μ im Vergleiche zu λ_1 und λ_2 nicht nur verschwindend klein, sondern im Gegentheil e im Vergleich zu $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ eine ganz unbedeutende und geringe Grösse, dann lässt sich mit einer gewissen Genauigkeit der Ausdruck

$$F = \frac{Q\,U_1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$$

aufsetzen.

Bestehen beide Cylinder aus demselben Materiale, so dass

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{ so ist}$$

$$F = \frac{\lambda}{2}\,U Q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\,\text{b})$$

Wir sehen aus dieser Formel, dass in dem gedachten Falle der Reibungswiderstand weder von der inneren Reibung, noch von der Dicke der schmierenden Schicht, sondern bloss von der äusseren Reibung der Flüssigkeit an den Berührungsflächen derselben mit den starren Körpern, als auch von der Geschwindigkeit, bei welcher die Reibung stattfindet, und vom Inhalte der Berührungsfläche abhängig ist.

Sind die Eigenschaften der Flüssigkeit und der dieselbe einschliessenden Cylinder derartige, dass die Summe $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ eine Grösse derselben Ordnung ist wie e, d. h. wie die Dicke der schmierenden Schicht, dann ist die Wirkung der inneren und der äusseren Reibung ungefähr die gleiche. Die von **Margules** vorgeschlagenen Versuche könnten nur unter solchen Verhältnissen zur Ermittelung der Coefficienten der inneren und der äusseren Reibung dienen. —

Die Gleichung (19) und die aus derselben abgeleiteten Gleichungen beziehen sich auf einen imaginären Fall, welcher wohl ein Interesse in theoretischer Hinsicht besitzt, in Wirklichkeit aber in seinen Einzelheiten nicht vorkommen kann. Unter Anderem kann er dies schon deshalb nicht, weil die Länge der Cylinder als eine unendlich grosse vorausgesetzt ist.

Bei der Lösung der aufgestellten Frage galt es in erster Reihe um die genaue Ermittelung der Wirkung, welche die Eigenschaften der Flüssigkeit auf die Reibung der geschmierten Körper ausüben, ohne Rücksicht darauf, ob die Verhältnisse, welche der streng richtigen Lösung der Frage entsprechen, mit den gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen übereinstimmen. Die Lösung der Frage in dieser Weise dient dazu, um die Wirkung der Eigenschaften der Flüssigkeit für gewisse (wenngleich nicht herzustellende) Verhältnisse kennen zu lernen, um alsdann mit Hilfe dieser Kenntniss die Wirkung der Eigenschaften der Flüssigkeit ermitteln zu können, sei es auch nur annähernd, für andere, in Wirklichkeit vorkommende Verhältnisse, welche den imaginären mehr oder minder ähnlich sind. Die Resultate ähnlicher theoretischer Ableitungen lassen sich nur dann auf praktische Fragen anwenden, wenn man im Stande ist mit genügender Klarheit und mit Bestimmtheit nachzuweisen, worin die Analogie und der Unterschied zwischen dem wirklichen und dem imaginären Falle liegt, und wenn ferner man zu ermitteln vermag, in wie fern jeder Umstand, welcher in dem wirklichen Fall ein von dem imaginären verschiedener ist, auf die Anwendung der theoretischen Ableitung in dem speciellen Falle von Einfluss ist.

Bevor wir also zur Anwendung der Formel (19) auf Fälle der Praxis übergehen, sollen alle diejenigen Verhältnisse bezeichnet werden, welche einen Unterschied zeigen zwischen den Umständen, wie sie bei der Reibung der Maschinentheile obwalten, und denjenigen Umständen, für welche die Formel abgeleitet wurde. Zweitens soll auf Grund der bis jetzt angestellten Versuche und Beobachtungen, sei es auch nur in allgemeinen Umrissen, der Wirkungsgrad eines jeden den Unterschied bildenden Umstandes bestimmt werden.

Die Analogie zwischen den Reibungserscheinungen bei geschmierten Maschinentheilen und der imaginären Erscheinung, welche wir erforscht haben, besteht darin, dass in beiden Fällen ein Cylinder in einem anderen um die gemeinschaftliche Achse gedreht wird.

Der Unterschied zwischen den in der Praxis vorkommenden Erscheinungen und der imaginären hängt von vielen Umständen ab.

Der auffallendste Unterschied bezieht sich auf die Länge der Cylinder. In dem imaginären Falle war die Länge der Cylinder als eine unendlich grosse vorausgesetzt, was in Wirklichkeit nicht vorkommen kann. Der Unterschied jedoch in der Grösse des Reibungswiderstandes bei einer unbegrenzten und bei einer begrenzten Länge der Cylinder besteht nur darin, dass im ersten Falle die Adhäsionskraft der Flüssigkeitstheilchen mit den einschliessenden Cylinderoberflächen an allen Punkten der Oberflächen der Cylinder dieselbe ist, während bei einer begrenzten Länge der Cylinder die Adhäsionskraft an den mittleren Theilen eine andere ist als an denjenigen Punkten der Cylinder, welche den Rändern derselben näher liegen. Berücksichtigen wir nun, dass die Wirkungssphäre der Adhäsionskräfte zwischen flüssigen und starren Körpern einen unermesslich kleinen Halbmesser hat, so sehen wir ohne Weiteres ein, dass die gesammte Reibungsfläche der Maschinentheile eine unermesslich grosse im Vergleiche zu denjenigen Theilen der Reibungsfläche ist, welche, an den Cylinderrändern gelegen, die Breite der Adhäsionssphäre haben, und für welche die Reibung anders als in den übrigen Theilen der Reibungsfläche ausfällt.

Man ist daher berechtigt den mittleren Reibungswiderstand pro Quadrateinheit der Reibungsfläche unter Berücksichtigung der Wirkung der Ränder und unter Nichtberücksichtigung ihrer Wirkung in beiden Fällen als nahezu gleich gross anzunehmen.

Der zweite, obwohl auffallende, indessen wohl nicht sehr in's Gewicht fallende Unterschied zwischen den Verhältnissen der Bewegung in den Maschinen und dem für die Ableitung der Formel (19) verwendeten imaginären Apparate besteht darin, dass in den Maschinentheilen keine Continuität der Oberfläche des äusseren starren Cylinders in der zur Achse senkrechten Richtung vorhanden ist.

Bekanntlich bestehen die Lager aus einzelnen Theilen, und sogar in diesen ist die Cylinderoberfläche keine continuirliche, sondern dieselbe wird durch Rillen, welche für den Zufluss des Schmiermittels dienen, unterbrochen. An den Rändern der einzelnen Theile und der Rillen treten besondere, denjenigen ähnliche Verhältnisse auf, welche bei der Besprechung der Wirkung der begrenzten Cylinderlänge erwähnt wurden. Aber auch hier wie dort sind die in abweichenden Verhältnissen befindlichen Flächen im Vergleich zu der Berührungsfläche der Zapfen mit den Lagern verschwindend klein. Die Wirkung der zur Achse parallelen Ränder kann eventuell von grösserem Einflusse als diejenige zur Achse senkrechter Ränder sein, wenn bspw. die Längsränder die Bewegung der Flüssigkeit complicirter gestalten, als es bei unserer theoretischen Untersuchung vorausgesetzt wurde, wo es nämlich hiess, dass die Flüssigkeitsschichten nur auf Cylinderoberflächen, welche eine gemeinschaftliche Achse besitzen, gegenseitig bewegt werden können.

Ein viel beträchtlicherer Unterschied zwischen den Verhältnissen, welche bei den Maschinenbewegungen eintreten, und denjenigen Verhältnissen, welche in unserem imaginären Falle vorausgesetzt wurden, besteht in der sichtbaren Unbeständigkeit der Temperatur, bei welcher die Maschinentheile sich gegenseitig reiben. Unsere Formel wurde in der Voraussetzung abgeleitet, dass die Temperatur der schmierenden Schicht eine für alle Punkte und für die ganze Dauer der Bewegung constante sei. In der Wirklichkeit ist aber die Temperatur nicht nur eine für verschiedene Zeitpunkte verschiedene, sondern auch die verschiedenen Punkte der schmierenden Schicht haben in einem und demselben Zeitpunkte eine andere Temperatur. Nach den von O. E. Meyer untersuchten Eigenschaften des Rüböls zu beurtheilen, sollte man meinen, dass bei Temperaturveränderungen der schmierenden Schicht die Coefficienten μ, λ_1 und λ_2 sich verändern, und dass diese Veränderungen eventuell sehr gross ausfallen können. Je stärker aber diese Coefficienten sich verändern, als um so beträchtlicher kann der Unterschied zwischen den Beobachtungsresultaten der wirklichen Erscheinungen und den Rechnungsresultaten für eine beständige Temperatur sich erweisen.

Einen weniger auffallenden, jedoch keineswegs einen unbedeutenden Unterschied in den beiden zu vergleichenden Fällen bieten diejenigen Umstände, welche die Dicke der schmierenden Schicht in dem imaginären und in den Fällen der Wirklichkeit beeinflussen.

In dem imaginären Falle war die Dicke der schmierenden Schicht als eine gewisse gegebene Grösse betrachtet worden, welche für alle Punkte derselben eine constante und durchaus von Nichts abhängige war, als eine solche also, welche als eine unabhängige Veränderliche betrachtet werden durfte. In den Erscheinungen der Wirklichkeit wird die Dicke der Schicht e nicht gegeben, sie lässt sich sogar nicht einmal messen; erstens, weil sie ungemein klein ist, und deshalb sich der Messung so zu sagen entzieht, und zweitens weil sie durchaus nicht in allen Punkten eine constante ist. Man muss sie daher auf indirectem Wege bestimmen, und sogar dann erscheint sie als eine höchst complicirte Function von vielen Verhältnissen. Streng genommen hat die Dicke der Schmierschicht zwischen den Maschinentheilen für einen jeden Punkt der Oberfläche eines Schenkels bspw. ihren besonderen Werth. Deshalb ist in die Formeln (19) und (19 a) nicht die wirkliche Grösse e, sondern eine imaginäre mittlere einzusetzen, welche für jeden einzelnen Fall besonders zu ermitteln ist. Diese mittlere Grösse werden wir beständig berücksichtigen und werden ihrer oft zu erwähnen haben. Zum Unterschiede von der wirklichen Grösse e wollen wir die mittlere Dicke der schmierenden Schicht, welche dem gegebenen Falle entspricht, mit ε bezeichnen.

Bei den Anwendungen der Formeln auf etwaige specielle Fälle haben wir uns also nicht mehr der Formeln (19) und (19a) zu bedienen, sondern haben andere, der Form nach mit jenen gleiche aufzustellen, in welchen ε statt e eingesetzt ist. Diese Formeln sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} F &= \mu \frac{Q\,U_1}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} \\ F &= \mu \frac{Q\,U_1}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Die Grösse ε, wie bereits erwähnt wurde, ist eine sehr verwickelte Function von sehr vielen unabhängigen Veränderlichen.

a) In erster Reihe muss bemerkt werden, dass die geschmierten Oberflächen der Maschinentheile einander nicht mathematisch genau entsprechen. Die Vertiefungen und Vorsprünge an den Oberflächen sind wohl gewöhnlich sehr kleine, aber die Dicke der schmierenden Schicht ist auch eine sehr geringe. Sind also die Abweichungen von der regelmässigen Form der sich reibenden Flächen im Vergleiche zu den Dimensionen der Flächen scheinbar noch so unbedeutende, für das blosse Auge fast gänzlich unsichtbare, so können sie trotzdem sehr beträchtliche im Vergleiche zu der Dicke der schmierenden Schicht sein und können dem zufolge starke örtliche Vergrösserungen und Verkleinerungen der Dicke der Schmierschicht hervorrufen.

b) Als zweiten Umstand, welcher die Dicke der Schmierschicht bedingt, kann der Druck bezeichnet werden, welcher die Schmiere aus dem von derselben eingenommenen Raume herauspresst. Eigentlich sind noch keine Versuche behufs Ermittelung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen der Dicke der schmierenden Schicht und dem Drucke pro Quadrateinheit der geschmierten Berührungsfläche der Maschinentheile vorgenommen worden. Es scheint jedoch, dass die Dicke der schmierenden Schicht von dem Drucke pro Quadrateinheit abhängig ist, und dass einem grösseren Drucke eine kleinere Dicke der Schicht entspricht. Man kann in Bezug auf dieses Abhängigkeitsverhältniss behaupten, dass, je geringer die Adhäsion der Flüssigkeit an die umschliessenden festen Körper ist und je beweglicher die Theilchen der Flüssigkeit sind, dieselbe so leichter herausgepresst wird. Wenn also die Temperaturerhöhung die Beweglichkeit der Flüssigkeit vergrössert und die Adhäsion vermindert, so zieht die Temperaturerhöhung gleichzeitig eine Verminderung der Dicke der schmierenden Schicht nach sich. Wir können nun sagen, dass die Dicke der schmierenden Schicht eine Function des Druckes pro Quadrateinheit ist, welche bei Erhöhung des Druckes abnimmt, und dass sie ausserdem eine noch unbekannte Function von μ, λ_1 und λ_2 und von der Temperatur ist.

c) Der Druck bedingt aber nur die maximale Dicke der Schmierschicht, er verhindert aber keineswegs, dass die Dicke jener Schicht eine beliebig kleinere werde. Wenn der Zutritt der Schmiere zu der zu schmierenden Oberfläche in ungenügender Menge stattfindet, so dass die grösstmögliche Dicke der schmierenden Schicht auch nicht erreicht werden kann, so kann sich die Schmiere trotzdem wohl über die ganze Fläche verbreiten. Die Dicke der schmierenden Schicht ist also von der Zuflussmenge der Schmiere abhängig.

d) Wenn die Ränder der geschmierten Theile, bspw. die Ränder der Lager oder der Rillen, derartig gestaltete sind, dass sie die sogar in Fülle zutretende Schmiere von der Achse abschaben, so wird die Dicke der Schmierschicht vermindert. Die Dicke ε ist also eine gewisse Function von der Gestalt der Lager- und Rillenränder.

e) Endlich wirken auf die geschmierten Theile gewisse äussere Kräfte, welche ihre Form verändern. Diese Formveränderungen sind sehr oft nicht für beide sich reibenden Flächen die gleichen. Auf diese Weise ist also die Formveränderung eine neue Ursache, damit die Reibungsflächen einander nicht entsprechen, und je grösser die äusseren Kräfte sein werden, je grössere Veränderungen dieselben in den starren Körpern hervorrufen, um desto stärker kann die Nichtübereinstimmung der Reibungsflächen miteinander hervortreten. Die mittlere Dicke der Schicht ε ist also von den äusseren Kräften, welche die Form der Reibungsflächen zu verändern suchen, abhängig. Die angeführte Zusammenstellung zeigt, dass bei einer Vergleichung der auf Grund der Gleichungen (20) erhaltenen Rechnungsresultate mit den Resultaten der wirklichen Erscheinungen sehr viele Verhältnisse zu berücksichtigen sind.

Ausser den erwähnten Verhältnissen werden wir in vielen Fällen verschiedene andere Bedingungen, welche eine mehr oder minder grosse Wirkung ausüben können, noch zu berücksichtigen haben; diese Verhältnisse werden später besprochen werden. Was nun die Formel (20) anbelangt, so kann dieselbe auf die Erscheinungen der Wirklichkeit gar nicht angewandt werden, wenn die äusseren Kräfte, welche die Metalltheile angreifen, dieselben so stark aneinander drücken, dass die Metallflächen unmittelbar aufeinander zu wirken anfangen.

Das gänzliche Verschwinden der schmierenden Schicht wird bis zu einem gewissen Grade durch die Porosität der Metalle verhindert. Die Schmiere dringt durch die Poren in die Tiefe der Metalltheile ein, tritt aber dann wieder durch dieselben an die Oberfläche.[1] Mit Rücksicht auf diesen Umstand kann man behaupten, dass bei den Bewegungen der Maschinentheile ein völliges Verschwinden der Schmiere in höchst seltenen Fällen eintreten wird. Bei grossem Drucke und ungenügender Schmierung können jedoch die Metallflächen so nahe aneinander gepresst werden, dass die Wirkung der Molecularkräfte sichtbar zum Vorschein tritt und die Anwendung der Formel (20) unmöglich macht. Je geringer die äusseren Kräfte die sich reibenden Flüssigkeiten aneinander pressen, und je reichlicher die Schmierung vor sich geht, um so wahrscheinlicher wird die Uebereinstimmung zwischen den Thatsachen und der Formel sein. Der Wirkungsgrad jedes einzelnen Verhältnisses auf die mittlere Dicke ε der schmierenden Schicht lässt sich aber nur aus einer Vergleichung der Formel mit Versuchen ermitteln.

Der volle Reibungswiderstand, welcher bei gewissen Verhältnissen durch die Gleichung (20) ausgedrückt wird, und welcher zur Ermittelung der Arbeit der Reibung dient, giebt jedoch keine Antwort auf die Frage, ob nun alles geschehen sei, um jenen schädlichen Widerstand zu vermindern? Um den Werth des vollen

[1] Diese Erscheinung wird leicht an Lagern beobachtet, besonders wenn dieselben einem starken Drucke ausgesetzt waren. Nimmt man ein Lager von der Achse herunter, und wischt es ganz trocken ab, so bemerkt man leicht, dass die Oberfläche des Lagers in kurzer Zeit sich mit einer Schicht Schmiere bedeckt, welche sichtbar aus den Poren hervorgetreten ist und ziemlich grosse Tropfen bildet. Dieses Hervortreten der Schmiere dauert zuweilen Stunden lang.

Reibungswiderstandes beurtheilen zu können, muss das Verhältniss der Reibung zu einer gewissen anderen Kraft, welche zugleich mit der Reibung wirkt, und von welcher die Reibung in einer bestimmten Abhängigkeit ist, bekannt sein. Zur Vergleichung wäre es am natürlichsten und einfachsten den Druck zu wählen, welcher normal zu den Elementen der Reibungsflächen wirkt und die letzteren aneinander drückt. Das Zahlenverhältniss des Reibungswiderstandes zum Normaldrucke wird bekanntlich Reibungscoefficient genannt.

Ist

P der volle Normaldruck auf die Reibungsflächen,
f der Reibungcoefficient,
F der Reibungswiderstand,

dann ist

$$F = f P.$$

Es sind sehr viele Versuche behufs Ermittelung der Grösse f in Bezug auf Maschinentheile angestellt worden. Bei der Prüfung der praktischen Anwendbarkeit der Formel (20), welche den Reibungswiderstand in Abhängigkeit von verschiedenen Umständen bestimmt, werden wir auf jene Versuche zurückzukommen haben. Wir wollen nun die Gleichung (20) auf eine solche Weise transformiren, dass der durch dieselbe ausgedrückte Reibungswiderstand als ein Product aus dem Reibungscoefficienten und dem Normaldrucke auftritt.

In den meisten Fällen darf angenommen werden, dass der Normaldruck über die ganze Berührungsfläche der sich reibenden Körper gleichmässig vertheilt ist. Bezeichnen wir also den gesammten Normaldruck mit P und den entsprechenden Normaldruck pro Flächeinheit mit p und multipliciren alsdann den Zähler und den Nenner des zweiten Theiles der ersten der Gleichungen (20) mit p, so nimmt dieselbe die Form

$$F = \mu \frac{U_1 P}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}\right) p}$$

an. Vergleichen wir die zwei letzten Gleichungen, so sehen wir sofort ein, dass der sogenannte Reibungscoefficient

$$f = \frac{\mu U_1}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}\right) p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

Unter der Voraussetzung, dass die Adhäsion der flüssigen Schmiere an die Metallflächen eine bedeutend grössere als die innere Reibung der Flüssigkeit ist, d. h., dass λ_1 und λ_2 unvergleichlich grössere Zahlen als μ sind, kann mit Hilfe der zweiten der Gleichungen (20) die folgende gefunden werden:

$$f = \mu \frac{U_1}{\varepsilon p} \quad \text{(21 a)}$$

Ob nun die eine oder die andere Gleichung angewandt wird, erweist sich der Reibungscoefficient jedenfalls als eine Function vieler unabhängiger Veränderlicher. Derselbe ist abhängig von U_1, p, μ, λ_1, λ_2 und ε und sind die letzten vier Grössen noch an und für sich von vielen Umständen abhängig. Sie haben nämlich alle für verschiedene schmierende Flüssigkeiten unter im Uebrigen gleichen Umständen verschiedene Werthe. Sie sind von der Temperatur der Schmierschicht, und diese letztere wiederum von der sich entwickelnden Wärmemenge, von der Wärmeleitung der sich reibenden starren Körper und von der äusseren Temperatur der Luft abhängig. Ausserdem sind die Grössen λ_1 und λ_2 von den Eigenschaften der sich reibenden starren Körper und die Dicke ε noch von dem Umstande abhängig, ob die Reibungsflächen vollkommen zu einander passen oder nicht, so wie von den Formveränderungen jener Flächen bei Einwirkung der äusseren Kräfte. Weiter ist ε von der Ränderform der Reibungsflächen, von der Zuflussmenge der Schmiere und wahrscheinlich auch von dem Drucke pro Einheit der Reibungsfläche abhängig.

Viele unter diesen Umständen besitzen in Bezug auf den Reibungscoefficienten einen bedeutenden Einfluss, leider wurden sie aber bei den angestellten Versuchen entweder gar nicht, oder wenigstens ungenügend genau ermittelt.

In den Beschreibungen der bis heute gemachten Versuche finden wir gar keine Andeutungen über die Dicke der Schicht ε, es werden nicht ein Mal die sämmtlichen Verhältnisse beschrieben, welche jene Grösse bedingen. Die Temperatur der Schmierschicht wurde wegen Mangel an entsprechenden Instrumenten nie gemessen, und wir können uns in Betreff derselben nur eine annähernde Vorstellung machen. In welchem Grade aber eine nur annähernde Angabe der Temperatur eine ungenügende ist, lässt sich nach den Veränderungen von μ für Rüböl in den Temperaturgrenzen, welche bei guten Bewegungsverhältnissen der Maschinentheile eintreten können, leicht beurtheilen. Diese Nachtheile der früheren Versuche, betreffend die Reibung der Maschinentheile, schliessen beinahe jede Möglichkeit aus die durch unmittelbare Versuche für die Reibungscoefficienten gewonnenen Zahlen mit den Rechnungsresultaten nach den Gleichungen (21) und (21 a) zu vergleichen.

Wir müssen uns also nothwendiger Weise auf eine Vergleichung des Charakteristischen in den Kennzeichen des Abhängigkeitsverhältnisses unseres Coefficienten in Bezug auf die verschiedenen Umstände, welche seinen Werth bedingen, beschränken.

Für die nähere Vergleichung bedarf es neuer Versuche. Rathsam wäre es dieselben erst dann anzustellen, wenn sich die in Gleichung (21) angedeuteten Haupteigenschaften der Grösse f durch die früheren Versuche bewähren und wenn in Betreff derjenigen Versuche, welche die Angaben der Formel (21) nicht bestätigen oder denselben sogar widersprechen, gewisse wahrscheinliche Erklärungen der Ursachen des scheinbaren Widerspruches zwischen den Versuchen und der Formel gefunden sein werden.

Vergleichung der Formeln mit den Versuchsresultaten.

Indem wir uns nun zu der Vergleichung der Wirkung verschiedener Verhältnisse wenden, von welchen die Grösse des Reibungscoefficienten abhängig ist, und welche einerseits in Gleichung (21) angegeben worden sind, andererseits aber aus den Versuchsresultaten hervorgehen, so haben wir in erster Reihe zu berücksichtigen, dass die Gleichung (21) in der Voraussetzung abgeleitet wurde, dass die Entfernung zwischen dem inneren und dem äusseren Cylinder eine vollständig bestimmte und weder von dem auf die Flüssigkeit ausgeübten Drucke, noch von ihrer Temperatur und von der Drehungsgeschwindigkeit abhängige Grösse ist. Jetzt soll nun jene Gleichung auf solche Fälle Anwendung finden, bei welchen die Entfernung zwischen den Cylindern von allen diesen Elementen eine Abhängige sein kann, oder sogar (wenn die starren Theile sich berühren) Null ist. Wir wollen daher die Richtigkeit der Gleichung in Bezug auf jedes einzelne ihrer Elemente prüfen. In Bezug auf die Geschwindigkeit soll berücksichtigt werden, dass die Gleichungen

(21) und (19) auf dieselbe Weise wie die Gleichung (8), welche mit den Versuchen von Poiseuille genau übereinstimmt, abgeleitet wurden, und dass die nämliche Methode O. E. Meyer zu seinen, durch seine eigenen Versuche bestätigten Gleichungen geführt hatte. Entspricht also die Gleichung (19) den Reibungserscheinungen in den Maschinentheilen nicht genau, so kann dies daher kommen, dass der Reibungswiderstand, welcher bei der Bewegung der Maschinentheile entsteht, nicht der ersten Potenz der Geschwindigkeit, sondern ihrer zweiten Potenz (wie es eben die Versuche von D. I. Mendelejew bereits gezeigt haben) proportional ist. Es liegt aber durchaus kein Grund vor die Voraussetzung aufzustellen, dass die Geschwindigkeit in jener Gleichung durch Glieder von niedrigeren Potenzen als die erste vertreten sein sollte. Erweist sich jedoch, dass sogar bei der grössten Dicke der Schicht, d. h. bei einer solchen, wo die Abweichungen von der für die Ableitung der Gleichung (19) aufgestellten Voraussetzung die möglichsten sind, die Gleichung (19) trotzdem eine richtige in Bezug auf die Geschwindigkeit ist, so können wir mit Recht die Behauptung aufstellen, dass die Gleichung (19) in Bezug auf die Geschwindigkeit eine richtige ist.

In Bezug auf Gleichung (21 a) muss berücksichtigt werden, dass dieselbe nur auf diejenigen Fälle angewandt werden darf, für welche die Grösse $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ im Vergleiche zur mittleren Dicke der Schicht ε eine verschwindend kleine Grösse ist.

Erweist es sich, dass bei den geringsten vorkommenden Dicken ε die erwähnte Vernachlässigung als eine berechtigte erscheint, indem die Genauigkeit darunter nicht leidet, so wird in allen den Fällen, in welchen die Dicke der Schmierschicht eine grössere ist, jene Vernachlässigung als eine noch mehr berechtigte erscheinen. Die Frage, ob die Summe $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ im Vergleiche zur Grösse ε vernachlässigt werden darf, wird durch die Vergleichung der Reibungscoefficienten bei verschiedenen Dicken der Schmierschicht und bei sonst gleichen Verhältnissen sich erweisen. Zeigt es sich, dass der Reibungscoefficient der Dicke der Schmierschicht mit einer genügenden Genauigkeit umgekehrt proportional angenommen werden darf, so kann man mit demselben Genauigkeitsgrade die Formel (21 a) statt der complicirteren Formel (21) anwenden. —

Die Gleichung (21) wird in Bezug auf Geschwindigkeit am besten durch die Versuche von Hirn, welche schon im Jahre 1854 veröffentlicht wurden[1], geprüft.

Wir wollen unsere Untersuchung mit diesen Versuchen nicht bloss aus dem Grunde anfangen, weil dieselben früher als die anderen, welche wir auch einem genauen Studium später unterziehen werden, angestellt wurden, sondern auch deshalb, weil das Verfahren von Hirn am besten die Art und Weise zeigt, wie die Versuche anzustellen sind, damit wo möglich alle Verhältnisse, welche auf den Reibungscoefficienten von Einfluss sein können, berücksichtigt werden.

Hirn hat zwar auch nicht alles Nothwendige bestimmt, und das mechanische Wärmeäquivalent 370 Kilogrammmeter[2], welches er aus seinen Versuchen bestimmte, stimmt mit der gegenwärtig angenommenen Grösse 425 Kgrmmmetern auch nicht überein, indessen hat Hirn die verschiedenen anderen Elemente, wie wir später sehen werden, besser als andere Forscher bestimmt, und entstand der Fehler in der Ermittelung des Wärmeäquivalentes wahrscheinlich aus einem Irrthume bei der Bestimmung der Tourenzahl des Apparates. Der Geschwindigkeitszähler zeigte wahrscheinlich eine um 12 oder 13 Procent kleinere Geschwindigkeit, als die wirkliche war. Die Tourenzahl wurde an einem besonderen Zähler bestimmt, welcher vom Hauptapparate aus mittelst einer über dessen Achse und über eine Scheibe des Zählers gehende Schnur getrieben wurde. Bei einer solchen Transmission ist immer ein gewisses Gleiten der Schnur vorhanden, und kann deshalb die an dem Zähler abgelesene Umdrehungszahl unmöglich eine richtige sein; sie müsste um einige Procente kleiner als die wirkliche ausfallen. —

Der Apparat von Hirn bestand aus einer leeren gusseisernen Trommel (von 230 Millim. Durchmesser und 220 Millim. Länge) mit einigen aus einem Stücke mit derselben gegossenen dünnen Speichen und einer Nabe in der Mitte. Die Enden der Trommel waren mit Blechscheiben, welche um die Achse herum Oeffnungen besassen, verschlossen. Die Trommel war mit der Nabe auf eine eiserne horizontale Achse fest aufgespannt. Der Achsendurchmesser war kleiner als die Oeffnungsdurchmesser in den Deckscheiben, und blieben deshalb in den Scheiben ringförmige Oeffnungen. Durch

[1] Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse. Bd. XXVI, 1854. S. 188. Études sur les principaux phénomènes, que présentent les frottements médiats et sur les diverses manières de déterminer la valeur mécanique des matières employées au graissage des machines. [2] Daselbst. S. 205.

die Oeffnung in einer der Scheiben konnte zur Abkühlung der Trommel in das Innere derselben mittelst eines Rohres Wasser zugeführt werden; durch die Oeffnung in der anderen Scheibe floss das Wasser aus der Trommel wieder aus, trat dann in ein Blechrohr, welches um die Oeffnung herum an die Deckplatte angelöthet war, und das Wasser nach der Seite, ohne dasselbe auf die äussere Fläche der Trommel gelangen zu lassen, in ein besonderes Gefäss leitete. Die äussere Fläche der Trommel war in Form eines Kreiscylinders, welcher eine gemeinschaftliche Achse mit den Zapfen der eisernen Achse besass, abgedreht und polirt. Auf der Trommel lag ein Bronzelager, welches die Form eines Halbcylinders hatte und mit seiner inneren Fläche ganz genau an die äussere Fläche der Trommel angeschliffen war. Auf das Lager war ein Eichenbalken in der Form eines im Ruhezustande ausbalancirten Hebels mit belasteten Enden gelegt. Das Totalgewicht des Lagers, des Balkens und der Belastung war 50 Kilogramm. Der Fehler in dem Gewichte der Belastungen, welche in Bezug auf die Achse im Gleichgewichte waren, war nicht grösser als 10 Gramm,[1] d. h. nicht grösser als 0,0002 der Totalbelastung. Bei der Drehung der Trommel wurde der Hebel mitgenommen und, um denselben in seine horizontale Lage zurückzuführen, musste das eine seiner Enden mit einem Zusatzgewichte belastet werden. Dieses Zusatzgewicht war es eben, welches die Möglichkeit zur Ermittelung des Reibungscoefficienten gab. An einem der Lagerenden war eine cylindrische verticale Vertiefung angebracht, und in dieselbe eine Thermometerkugel genau hineingepasst.

Nach der Zeichnung des Apparates von Hirn zu urtheilen, war die Entfernung zwischen der Thermometerkugel und der inneren Reibungsfläche des Lagers ungefähr 10 Millimeter.

Die Drehungsgeschwindigkeit wurde an einem besonderen Zähler beobachtet, welcher von der Trommelachse mittelst einer Schnur getrieben wurde. Mit Hilfe dieses Apparates stellte Hirn seine Versuche mit verschiedenen Schmiermitteln an[2] und bestimmte dabei

---

[1] Bulletins. S. 200.

[2] Hirn. Études. Tabelle F:

Englischer Wallrath.	Anderes Olivenöl.	Oleïn-Oel.
Wallrath von Haussoulier (Paris).	Pieds-de-boeuf-Oel.	Rother Fischthran.
Künstlicher Wallrath.	Rüböl (sog. geschältes).	Talg.
Olivenöl.	Rüböl (sog. perfectionirtes).	Wasser.
		Luft.

die Wirkung der Geschwindigkeit und der Temperatur auf die Grösse der Reibung, oder was dasselbe sagen will — auf den Reibungscoefficienten.

Um die Wirkung der Grösse der Berührungsfläche der sich reibenden Körper oder den Druck pro Flächeneinheit zu bestimmen verwendete Hirn einen besonderen Dynamometer, welcher die Bewegung des Motors auf einen Mul-jenny-Werkstuhl übersetzte. Um eine gewisse constante Temperatur des Lagers zu erhalten (dieselbe war in verschiedenen Versuchen von 19 bis 60° C.) wurde Wasser durch die Trommel geleitet. —

Die Beobachtungsresultate von Hirn bilden einige grosse Tabellen und sind in seinem Werke zu finden. Wir brauchen alle jene Tabellen hier nicht anzuführen, müssen jedoch einige Auszüge aus seinen Resultaten hier mittheilen. Die wichtigsten Theile aus den Tabellen von Hirn sind in Nachstehendem angegeben:

Tabelle VIII.

Der untere Theil der Trommel ist in Olivenöl eingetaucht.

Verhältniss $\frac{P_1}{P}$	Temperatur des Apparates T	92 Umdrehungen pro Minute. Geschwindigkeit 1,108 Meter pro Secunde			51 Umdrehungen pro Minute. Geschwindigkeit 0,614 Meter pro Secunde		
		Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt, in Kgramm. P	Reibungscoefficient f	Verhältniss der verschiedenen Coefficienten zu dem Coefficienten für 60° C.	Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt, in Kgramm. P_1	Reibungscoefficient f	Verhältniss der verschiedenen Coefficienten zu dem Coefficienten für 60° C.
0,61	60	0,67	0,0646	1	0,41	0,0398	1
0,60	55	0,85	0,0817	1,264	0,51	0,0494	1,241
0,59	50	1,06	0,1015	1,571	0,625	0,0603	1,515
0,61	45	1,35	0,1285	1,989	0,82	0,0789	1,982
0,63	40	1,74	0,1644	2,545	1,10	0,1052	2,643
0,64	35	2,23	0,2088	3,232	1,49	0,1414	3,553
0,64	30	2,82	0,2610	4,040	1,80	0,1700	4,271
0,62	25	3,56	0,3250	5,031	2,15	0,2015	5,063

Tabelle IX.

Der untere Theil der Trommel ist in Wallrath eingetaucht. 51 Umdrehungen pro Minute.

Temperatur des Apparates T	Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt, in Kilogrammen P	Reibungscoefficient f	Verhältniss der verschiedenen Reibungscoefficienten zu dem Reibungscoefficienten für 60° C.
60	0,19	0,0185	1
55	0,24	0,0233	1,259
50	0,29	0,0280	1,513
45	0,39	0,0378	2,043
40	—	—	—
35	0,64	0,0608	3,286
30	—	—	—
25	1,1	0,1052	5,686

Tabelle X.

Der untere Theil der Trommel ist in raffinirtes Olivenöl eingetaucht. 51 Umdrehungen pro Minute.

Temperatur des Apparates T	Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt, in Kilogrammen P	Reibungscoefficient f	Verhältniss der verschiedenen Reibungscoefficienten zu dem Reibungscoefficienten für 60° C.
60	—	—	—
55	0,56	0,0541	1,250
50	0,70	0,0675	1,559
45	0,89	0,0855	1,975
40	1,15	0,1099	2,538
35	1,48	0,1406	3,247
30	1,87	0,1762	4,069
25	2,45	0,2284	5,275
20	3,00	0,2768	6,393

Tabelle XI.

Die Trommel wird mit Wallrath geschmiert. 92 Umdrehungen pro Minute.

Temperatur des Apparates T	Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt, in Kilogrammen P	Reibungscoefficient f	Verhältniss der verschiedenen Reibungscoefficienten zu dem Reibungscoefficienten für 60° C.
60	0,4	0,0388	1
55	0,7	0,0675	1,735
50	1,04	0,0996	2,567
45	1,34	0,1276	3,289
40	—	—	—
34,5	3,9	0,3538	9,118
29,6	4,85	0,4324	11,14
25,7	5,7	0,5083	13,10

Tabelle XII.

Bezeichnung der Oele	Temperatur des Apparates	Belastung, welche das Gleichgewicht wiederherstellt: Bei 90 Umdrehungen pro Minute P	Bei 50 Umdrehungen pro Minute P_1	Relative Qualität des Oeles	Verhältniss der Belastungen $\frac{P_1}{P}$
Englischer Wallrath . .	40	0,93	0,59	1	0,63
Künstlicher Wallrath .	40	0,84	0,55	1,07	0,65
Olivenöl	40	1,60	1,02	0,58	0,63
Ochsenfussöl	40	1,8	1,17	0,505	0,65
Rüböl	40	1,81	1,09	0,54	0,60
Raffinirtes Rüböl	40	2,05	1,31	0,45	0,64
Oleinöl	40	1,97	1,24	0,48	0,63
Olivenöl	40	1,85	1,18	0,50	0,64
Fischthran	40	1,46	0,92	0,64	0,63

In der Beschreibung der Versuche ist von einer Nichtübereinstimmung der Flächen nichts gesagt, es heisst bloss, dass das Lager an die Trommel gut angepasst war und ist ausserdem indirect erwähnt, dass bei gleichen Berührungsflächen und bei Verwendung eines und desselben Schmiermittels, ferner bei gleichen Geschwindigkeiten, bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur, die Reibungscoefficienten auch die gleichen ausfallen.[1] Man kann daraus schliessen, dass ein Nichtübereinstimmen der Flächen entweder durch ein gutes Abschleifen der Flächen aufeinander beseitigt wurde, oder dass die Differenz eine zu geringe war, um eine merkliche Wirkung ausüben zu können.

Die gleiche Bemerkung lässt sich auch mit Bezug auf die Form der Lagerränder machen. Was nun die Formveränderungen der Reibungsflächen anbelangt, so liessen sich solche bei den angewandten Dimensionen und bei den vorhanden gewesenen Belastungen gar nicht erwarten.

Man kann also annehmen, dass die erwähnten Umstände entweder gar nicht vorhanden waren, oder dass ihre Wirkung immer die nämliche war, dass aber die Eigenschaften der Schmieröle, die Temperatur, bei welcher die Reibung vor sich ging, die Geschwindigkeit, der relative Druck und die Dicke der schmierenden Schicht die einzigen veränderlichen Grössen bei den Versuchen gewesen sind.

Bei seinen Untersuchungen wechselte Hirn alle Variabeln, mit Ausnahme der Dicke der Schmierschicht, in ziemlich weiten Grenzen, die letzterwähnte Grösse war dabei nicht einmal annähernd ermittelt. Aus diesem Grunde wird bei den Versuchen von Hirn durch die Wirkung der Dicke der Schmierschicht die Wirkung der anderen Veränderlichen verdeckt. Die Wirkung der schmierenden Schicht ist aber leider keineswegs eine geringe und darf durchaus nicht vernachlässigt werden, so dass aus diesem Grunde die Versuche von Hirn für eine unwiderlegliche Bestätigung der Gleichungen (21 a) nicht verwendet werden können. —

Am leichtesten ist zu beweisen, dass der Reibungscoefficient der Maschinentheile, wie die Gleichung (21 a) zeigt, der inneren Reibung der Flüssigkeit direct proportional ist. Die in den Tabellen VIII, IX und X angeführten Reibungscoefficienten beziehen sich auf einen gleichen Druck und auf eine gleiche, 57 Umdrehungen entsprechende Geschwindigkeit.

---

[1] Hirn. Études sur les principaux phénomènes.

In allen vorliegenden Fällen war der untere Theil der Trommel in die schmierende Flüssigkeit eingetaucht, folglich waren die Schmierungsverhältnisse die gleichen; wir finden schliesslich in allen drei Tabellen dieselben Werthe der Temperatur T. Vergleichen wir nun die in Tabelle X zusammengestellten Reibungscoefficienten bei einer Schmierung mit raffinirtem Olivenöl mit den entsprechenden Coefficienten der Tabelle IX für Wallrathschmierung, so finden wir, dass die ersteren Coefficienten bei allen Temperaturen die letzteren übertreffen, und dass die entsprechenden Verhältnisse die folgenden sind:

$$\frac{541}{233} = 2{,}32; \quad \frac{675}{280} = 2{,}41; \quad \frac{855}{378} = 2{,}26; \quad \frac{1406}{608} = 2{,}31 \quad \text{und} \quad \frac{2284}{1052} = 2{,}17.$$

Der mittlere dieser Werthe ist gleich 2,29. Fast dasselbe Verhältniss ergiebt sich zwischen den Coefficienten der inneren Reibung für Olivenöl (Huile vièrge) und für Wallrath (Winter-oil), welche S. I. Lamanski bei den Temperaturen 9°, 16° und 25° C. erhielt.[1] Diese Verhältnisse sind die folgenden:

$$\frac{810}{312} = 2{,}60; \quad \frac{548}{215} = 2{,}51 \quad \text{und} \quad \frac{372}{146} = 2{,}55.$$

Der mittlere dieser Werthe ergiebt sich zu 2,55. Der unbedeutende Unterschied zwischen den Zahlen 2,55 und 2,29 lässt sich daraus erklären, dass Hirn und S. I. Lamanski bei ihren Versuchen Oele von verschiedenen Eigenschaften verwendeten. Die Richtigkeit dieser Annahme wird durch Hirn's eigene Versuche bewiesen. Die Vergleichung der Reibungscoefficienten bei einer Schmierung mittelst nicht raffinirten Olivenöles (Tabelle VIII) mit denjenigen bei Wallrathschmierung (Tabelle IX) ergiebt folgende Verhältnisse:

$$\frac{398}{185} = 2{,}15; \quad \frac{494}{233} = 2{,}11; \quad \frac{603}{280} = 2{,}15; \quad \frac{789}{378} = 2{,}10; \quad \frac{1414}{608} = 2{,}33.$$

Der mittlere dieser Werthe 2,17 unterscheidet sich von der Zahl 2,29 beinahe um ebenso viel, wie 2,29 von 2,55. Bemerkenswerth ist dabei, dass das raffinirte Olivenöl mit Bezug auf seine

---

[1] S. I. Lamanski hat seine Versuche im Auftrage des Kais. Russisch. Technischen Vereins, welcher in Folge des Antrages seiner zweiten Section und durch meinen Vorschlag veranlasst, den Entschluss fasste, jene Versuche vorzunehmen. Die angeführten Resultate wurden mittelst eines Poiseuille'schen Apparates gewonnen.

Schmierfähigkeit sich als ein schlechteres als das nicht raffinirte zeigte.

Die angeführten Verhältnisse der Reibungscoefficienten bei den Schmierungen mit verschiedenen Oelen und der Coefficienten der inneren Reibung jener Oele bestätigen vollkommen ausreichend die Richtigkeit der Gleichungen (20) und (21 a) bezüglich der Einwirkung der Coefficienten der inneren Reibung auf den Reibungscoefficienten bei den Maschinentheilen. —

Untersuchen wir nun die angeführten Tabellen in der Absicht die Wirkung der Temperatur auf den Reibungscoefficienten zu ermitteln, so bemerken wir in erster Reihe, dass die in den Tabellen unter T angegebenen Zahlen die Temperaturen der Thermometerkugel, nicht aber diejenigen der schmierenden Schicht darstellen. Bei den Versuchen wurden die Temperaturen der schmierenden Schicht nicht beobachtet, und können dieselben heute nicht mehr genau bestimmt werden, jedenfalls ist es sicher, dass bei den Versuchen die mittleren Temperaturen der schmierenden Schicht höhere als die entsprechenden Tabellenzahlen waren. Der Unterschied war ein um so grösserer, je höher die Temperaturen der Thermometerkugel waren.

Das Lager wurde nämlich, sowohl von der umgebenden Luft und von dem darauf gelegenen Holzbalken, als auch durch Wärmeausstrahlung beständig abgekühlt. Besass nun dasselbe an der Stelle, wo sich die Thermometerkugel befand, während einer gewissen Zeit eine gewisse constante Temperatur, welche höher als die der umgebenden Körper war, so beweist dies, dass zu der bezeichneten Stelle des Lagers von seinen stärker erwärmten, an der Berührungsfläche mit der Schmiere gelegenen Theilen Wärme zufloss, und zwar von denjenigen Theilen, an welchen in Folge der Reibung Wärme sich entwickelte. Je höher die Temperatur T der Thermometerkugel im Vergleiche zu derjenigen der umgebenden Körper war, um so mehr Wärme verlor das Lager, um desto mehr Wärme floss also von den die Kugel umgebenden Lagertheilen zu der äusseren, der Abkühlung ausgesetzten Oberfläche des Lagers hin. Als Ersatz für diesen Wärmeverlust musste an die die Kugel umgebenden Theile Wärme von den mit der Schmiere in Berührung gelegenen Theilen abgegeben werden. Ein grösseres Zuströmen von Wärme von den inneren Lagertheilen nach der Thermometerkugel erforderte nothwendiger Weise, dass auch die Temperaturdifferenz der Kugel und der Berührungsfläche des Lagers mit der Schmiere eine grössere würde.

Je grösser also die Differenz zwischen der Temperatur T des Thermometers und der Temperatur T_0 der umgebenden Körper ist, um so höher muss auch die Temperatur T_1 der Berührungsfläche des Lagers mit der Schmiere im Vergleiche zu der Temperatur T des Thermometers sein.

Bezeichnen wir aber die mittlere Temperatur der Schmierschicht mit t, so leuchtet ohne Weiteres ein, dass t grösser als T_1 ist, in anderer Weise könnte die sich in der Schmiere entwickelnde Wärme nicht auf die innere Fläche des Lagers übertragen werden.

Es ist also unbedingt nothwendig, dass

$$t > T_1 > T,$$

wobei t um so grösser als T_1 ist, je grösser T_1 als T_0 ist. Wie gross jedoch bei den Versuchen von Hirn die Temperaturdifferenz $t - T$ war, das kann heute nicht ermittelt werden: erstens weil dieses die Lösung einer der schwierigsten Aufgaben der mathematischen Physik erfordern würde, und zweitens — weil weder der Coefficient der Wärmeleitung des Lagermetalls des Hirn'schen Apparates, noch die Dimensionen seines Lagers bekannt sind. Höchst wahrscheinlich hat diese Differenz nur einige Grad betragen. Der kleinen Zeichnung, welche Hirn's Schrift beiliegt, nach zu urtheilen, war die Stärke seines Lagers ungefähr 20 Millim. und das Thermometer gab die Temperatur in der Mitte der Stärke des Lagers, also in einer Entfernung von 10 Millim. von der erwähnten Oberfläche, an. Der der Abkühlung ausgesetzte Lagertheil bildete die Lagerflansche; dieselbe hatte die Form einer kurzen und breiten Stange von ungefähr 20 Millim. Dicke, 200 Millim. Breite und 60 Millim. Länge. Man kann sich daher von der Differenz der Temperaturen T_1 und T nur eine annähernde Vorstellung auf Grund der Versuche von R. E. Lenz gewinnen. Lenz bestimmte nämlich die Temperatur an verschiedenen Stellen eines runden 8,12 Millim. im Durchmesser haltenden Messingstabes, welcher an einem Ende erwärmt wurde.[1]

In nachstehender Tabelle sind die Temperaturen der Stange

[1] Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Wärmeleitung der Metalle. 1869.

in verschiedenen Abständen von dem erwärmten Ende derselben angegeben.

Tabelle XIII.

Entfernungen, Centimeter	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperaturen t^0 C.	61,16	52,62	45,42	39,34	34,18	29,78	26,01	22,78
Abnahme d. Temp. in Gr. Cels. pro lauf. 10 Millim.		8,54	7,20	6,08	5,16	4,40	3,77	3,23

Die eben angeführten Temperaturen t stimmen sehr gut mit den Temperaturen des Lagers bei den verschiedenen Versuchen von Hirn überein, und weichen die Temperaturdifferenzen $T_1 - T$ wohl nicht bedeutend von den bezüglichen Zahlen der letzten Zeile in vorstehender Tabelle ab. Was die Temperaturdifferenz $t - T$ anbelangt, so sind wir ausser Stande eine der eben angeführten ähnliche annähernde Bestimmung derselben zu geben; wir können bloss vermuthen, dass man in Folge der ungemein geringen Dicke der Schicht keine grossen Differenzen zwischen t und T_1 zu erwarten hat, und dass die Temperaturdifferenzen $t - T_1$ von den Zahlen der letzten Zeile der Tabelle XIII nur wenig abweichen werden. —

Diese Betrachtungen vorausgeschickt, können wir uns nun der Versuche von Hirn behufs Untersuchung der Temperaturwirkung auf die Grösse der Reibungscoefficienten bedienen; wir werden aber zunächst bei denjenigen Versuchen verweilen, bei welchen, so weit es anging, die Wirkung der Dicke der Schicht, damit deren Wirkung nicht derjenigen der Temperatur zugeschrieben werden könnte, beseitigt wurde. Wir müssen also diejenigen Versuche prüfen, bei welchen der untere Theil der Trommel in die Schmiere eingetaucht war.[1] Die unter diesen Umständen vorgenommenen Versuche haben gezeigt, dass die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Temperatur in den versuchten Temperaturgrenzen für alle von Hirn untersuchten Oele und für verschiedene Geschwindigkeiten dieselbe bleibt.[2] Hirn hat diese Abhängigkeit durch eine ziemlich einfache Gleichung ausgedrückt. Er bezeichnet nämlich den Reibungscoefficienten für eine gewisse Temperatur T' mit A, mit a dagegen eine

[1] Hirn. Études S. 198.

[2] Hirn. Études S. 199 und §. 79 der vorliegenden Schrift.

gewisse constante Zahl, und schreibt alsdann den Ausdruck für den Reibungscoefficienten bei einer anderen Temperatur T in folgender Weise:

$$f = \frac{A}{a^{(T-T')}}.$$

Die Zahl A ist für verschiedene Oele eine verschiedene, dagegen ist die Zahl a für alle von Hirn versuchten Oele dieselbe, nämlich $a = 1{,}0492$.

Die Formel von Hirn stimmt sehr gut mit den Versuchen überein, ist aber doch nur für diejenigen Fälle eine richtige, bei welchen die im Lager gemessene Temperatur von derjenigen der schmierenden Schicht um eben so viel wie im Hirn'schen Apparate abweicht, unter anderen Verhältnissen ist sie jedoch keine richtige; eben so wenig kann sie verwendet werden, wenn in die Rechnung die Temperatur der schmierenden Schicht eingeführt wird.

Um die Gleichung (21 a) mit den Resultaten der beschriebenen Versuchen zu vergleichen, wollen wir, ähnlich wie Hirn, voraussetzen, dass in jener Gleichung sowohl U_1 und p, als auch ε sich nicht verändern.

Wir bezeichnen mit f' den Reibungscoefficienten, welcher der Temperatur t' entspricht und mit μ' den derselben Temperatur entsprechenden Coefficienten der inneren Reibung. Es mögen alsdann der Temperatur t die Coefficienten f und μ entsprechen. In Folge der Gleichung (21 a) ist

$$\frac{f}{f'} = \frac{\mu}{\mu'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Hirn versuchte unter Anderem auch das Rüböl und sagt, dass er bei verschiedenen Temperaturen für alle Oele, also auch für das Rüböl ein und dasselbe Verhältniss der respectiven Reibungscoefficienten gefunden habe. Deshalb wollen wir in Gleichung (22) den zweiten Theil der Gleichung (12 a), welche ich für Rüböl auf Grund der Meyer'schen Versuche erhielt, einführen, alsdann ist

$$\frac{f}{f'} = \frac{1{,}4 + 0{,}529\,t' + 0{,}0507\,t'^2}{1{,}4 + 0{,}529\,t + 0{,}0507\,t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22\,\mathrm{a})$$

Diese Gleichung bietet die Möglichkeit das Verhältniss der Reibungscoefficienten für Rübölschmierungen bei verschiedenen Temperaturen (streng genommen jedoch nur bei solchen, welche 31,6° C.

nicht übersteigen) zu ermitteln. Bleiben wir jedoch bei diesen Temperaturen stehen, so ist uns beinahe jede Möglichkeit benommen, einen Gebrauch von Hirn's Versuchen in der beabsichtigten Weise zu machen; deshalb erlauben wir uns, einige Expollationen zu machen.

Die niedrigste Beobachtungstemperatur war 25° C.; bei dieser Temperatur musste also die Temperaturdifferenz des Thermometers und der Schmierschicht die kleinste sein; wir wollen nun annehmen, dass bei 25° C. jene Differenz der entsprechenden Zahl in der Tabelle XIII gleich war. Angenommen, es sei $t = 29$. Diese Zahl führen wir in die letzte Gleichung ein und bestimmen die Temperaturen t', welche verschiedenen Werthen für das Verhältniss $\frac{f}{f'}$ entsprechen. Als Werthe des letzteren Verhältnisses wollen wir die mittleren Werthe aus den Tabellen VIII, IX und X nehmen, alsdann finden wir die in nachstehender Tabelle enthaltenen Zahlen.

Tabelle XIV.

Temperatur T =	60	55	50	45	40	35	30	25
Mittlere Werthe des Verhältnisses $\frac{f}{f'}$	1	1,258	1,537	1,997	2,575	3,279	4,057	5,263
t =	73	65	58	50	44	38	33,5	29

Die Werthe t bezeichnen die Temperaturen der schmierenden Schicht bei den Versuchen von Hirn, wie sich dieselben aus der Gleichung (22 a) ermitteln lassen. Dies sind sehr wahrscheinliche Zahlen, welche wohl wenig von den wirklichen abweichen. Da nun die Werthe von t unter der Annahme gefunden wurden, dass die Gleichung (22 a) das Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Temperatur und dem Reibungscoefficienten richtig ausdrücke, und dass ferner die Gleichung (12 a) auch bei Temperaturen von über 31,6° anwendbar sei, so sollte man annehmen, dass jene Voraussetzungen berechtigte gewesen sind. —

Die Zusammenwirkung der Dicke der schmierenden Schicht und der Temperatur auf die Grösse des Reibungscoefficienten wird aus einer Vergleichung der Tabellen VIII, IX und X mit der Tabelle XI leicht ermittelt. Die ersten drei Tabellen enthalten die

Resultate solcher Versuche, für welche die Dicke der schmierenden Schicht bei verschiedenen Temperaturen dieselbe war. Wir sehen, dass die den gleichen Temperaturen entsprechenden Coefficienten beinahe in demselben Verhältnisse zu einander stehen. Die mittleren Werthe dieser Verhältnisse finden wir in der Tabelle XV unter dem Buchstaben δ. Ganz verschiedene Verhältnisse der Reibungscoefficienten sehen wir aber in Tabelle XI, obschon diese Verhältnisse denselben Temperaturen entsprechen wie in den Tabellen VIII, IX und X und obgleich für die Aufstellung der Tabelle XI derselbe Wallrath verwendet wurde, wie für die Aufstellung der Tabelle IX. Der Unterschied zwischen den zwei Versuchsmethoden bestand nur darin, dass bei den Versuchen, welche die Zahlen der Tabellen VIII, IX und X ergeben, der Untertheil der Trommel in Oel eingetaucht war, weshalb die Dicke der Schmierschicht fortwährend dieselbe blieb, wohingegen bei den Versuchen, welche zu den Zahlen der Tabelle XI geführt haben, die Trommel nur ein Mal geschmiert wurde, weshalb bei einem andauernden Drehen die Schmiere ihre anfängliche Dicke nicht behalten konnte. Um einen besseren Ueberblick über den Einfluss der Dicke der Schmierschicht zu haben, sind die Verhältnisszahlen der Coefficienten der Tabelle XI in der Tabelle XV unter dem Buchstaben δ' wiederholt worden, wobei die Zahlen δ und δ' denselben Temperaturen entsprechen.

Tabelle XV.

T =	60	55	50	45	40	35	30	25
δ =	1	1,259	1,513	2,043	—	3,286	—	5,686
δ' =	1	1,734	2,553	3,289	—	9,091	11,140	13,100

Ein Blick auf die letzten zwei Zeilen der Tabelle XV zeigt sofort, dass die Dicke der Schmierschicht unmöglich unberücksichtigt gelassen werden darf. —

Der Einfluss der Geschwindigkeit, bei welcher die Reibung stattfindet, auf die Grösse des Reibungscoefficienten äussert sich sofort bei der Uebersicht der Tabellen VIII und XII; wir können jedoch diese Tabellen mit den Formeln (21) und (21 a) nicht vergleichen, bevor wir nicht die Wirkung der Dicke der schmierenden Schicht bei jenen Versuchen gründlich berücksichtigt haben. Bei den Versuchen gelang es nicht, die gemeinschaftliche Wirkung dieser zwei

Elemente zu beseitigen, denn die Dicke der Schicht ist eine gewisse Function der Geschwindigkeit. Betreffend das noch sehr wenig erforschte Abhängigkeitsverhältniss der Dicke der Schmierschicht von der Geschwindigkeit sagt Hirn Folgendes: „Wenn die Stoffe (Schmiermittel) ausserordentlich flüssige sind und beinahe gar keine Klebrigkeit (viscosité) besitzen (z. B. Wasser, Luft u. dergl.), so ist die Wirkung der Geschwindigkeit eine wohl wahrnehmbare, jedoch eine bedeutend geringere als bei Fetten, welche thatsächlich als Schmiermittel verwendet werden und lässt sich jene Wirkung ungemein schwer bestimmen. Bei Abnahme der Geschwindigkeit vermindert sich auch die unter das Lager mitgenommene Quantität des Schmiermittels; die sich gegenseitig reibenden Flächen treten daher näher aneinander und ihre gegenseitige Wirkung aufeinander wird in Folge dessen eine grössere."[1] Um die Wirkung der Geschwindigkeit auf die Dicke der Schmierschicht näher zu bezeichnen, sagt dann Hirn weiter: „Wenn wir, ohne die Temperatur zu verändern, die Geschwindigkeit verzögern, so werden wir bemerken, dass im Anfange die Reibungscoefficienten kleinere werden; es tritt aber später ein Moment ein, in welchem die Abnahme des Reibungscoefficienten aufhört und die letzteren dann rasch in die Höhe gehen, so dass sie bald die den grössten Geschwindigkeiten entsprechenden Reibungscoefficienten übertreffen. Sollte darin ein Widerspruch sein?" fragt Hirn,[2] und beantwortet dann die Frage mit: „keineswegs. Dies alles ist sehr natürlich und kann bei einiger Erwägung vorausgesetzt werden. Ist das Oel flüssig und der Druck gross, so tritt ein Moment ein, in welchem die Geschwindigkeit als eine ungenügend grosse erscheint, um das Schmiermaterial unter das Lager hinaufbringen zu können, und wird dann seine Schicht immer dünner und dünner."

Aus diesen Andeutungen lässt sich freilich ein genaues Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Dicke der Schmierschicht und der Geschwindigkeit nicht ermitteln, man kann indessen wohl sagen, dass, wenn kein Mangel an Schmiermaterial vorhanden ist, d. h. wenn die Schmiere im Ueberfluss zutritt, dass alsdann ihre Schicht

[1] Hirn. Études. S. 210. Streng genommen lässt sich alles dies einzig und allein dadurch erklären, dass die Dicke der schmierenden Schicht eine kleinere wird und braucht dabei die Vergrösserung der gegenseitigen Wirkung starrer Körper gar nicht berücksichtigt zu werden. Der Verfasser.

[2] Hirn. Études. S. 214.

zwischen den sich reibenden Flächen bei Abnahme der Geschwindigkeit auch eine kleinere wird. Bei sehr geringen Geschwindigkeiten, welche dem Ruhezustande nahe kommen, ist die Dicke der Schmierschicht auch eine sehr geringe, bei der ersten Beschleunigung der Bewegung wächst dagegen dieselbe sehr stark, und wohl auch weiterhin bei grösseren Geschwindigkeiten, jedoch sehr wenig.

Nach diesen Vorbemerkungen über die Wirkung der Geschwindigkeit auf die Dicke der Schmierschicht können wir nun das Studium der Wirkung der Geschwindigkeit auf den Reibungscoefficienten beginnen. Es ist einleuchtend, dass zur Beseitigung einer Zusammenwirkung auf die Grösse des Reibungscoefficienten der Geschwindigkeit und der Dicke der schmierenden Schicht nur solche Versuche zu prüfen sind, bei welchen die Geschwindigkeiten schon hinreichend grosse sind; dann bleibt die Dicke der Schicht eine wenig veränderliche. Hirn meint, dass die Versuche, welchen die Tabellen VIII und XII entsprechen, mit genügend grossen Geschwindigkeiten angestellt worden seien. Auf Grund der Tabelle VIII behauptet Hirn, dass, wenn die Geschwindigkeit von 92 Umdrehungen bis auf 51, d. h. in dem Verhältnisse von 1 bis 0,55 abnimmt, die das Gleichtgewicht wiederherstellende Belastung, oder was dasselbe ist, der Reibungscoefficient bei allen Temperaturen ebenfalls abnimmt, und zwar im Verhälnisse von 1 zu 0,62. Aus Tabelle XII sehen wir andererseits, dass, wenn die Umdrehungszahlen im Verhältnisse von $90:50 = 1:0{,}55$ abnehmen, die das Gleichgewicht wiederherstellenden Belastungen oder die Reibungscoefficienten im Verhältnisse von 1 zu 0,63 abnehmen. „Abgesehen von diesen Versuchen," sagt dann Hirn[1] weiter, „haben mich zu denselben Resultaten auch viele andere Versuche geführt, welche ich mit anderen Geschwindigkeiten und unter sehr wechselnden Verhältnissen vorgenommen habe. Sobald bei den verschiedenen Geschwindigkeiten die Temperatur dieselbe blieb, blieb auch die das Gleichgewicht wiederherstellende Belastung oder der Reibungscoefficient in einer directen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit." Es ist ausserdem Folgendes zu bemerken:[2]

1) „Wenn die Reibungsflächen reichlich mit gutem und genügend zähem Oele geschmiert werden, wenn ferner der auf die

[1] Hirn. Études. S. 208.

[2] Ibid. S. 209.

Flächen ausgeübte Druck nicht so stark ist, dass er die Schmiere herauspresst und wenn endlich bei Versuchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten eine und dieselbe Temperatur in allen Theilen aufrecht erhalten wird, so bleiben die Belastungen, welche das Gleichgewicht mit der Reibung wiederherstellen, den Geschwindigkeiten beinahe proportional."

2) „Werden die Reibungsflächen dagegen spärlich geschmiert, oder wenn die Bewegung sehr lange mit einer und derselben Oelmenge vor sich geht, oder wenn das Oel ein zu flüssiges ist, so dass die schmierende Schicht bei kleinen Geschwindigkeiten eine viel dünnere als bei grossen wird, oder wenn der Druck im Vergleiche zu den Dimensionen der Reibungsflächen ein zu grosser, ist, die Temperaturen aber constant bleiben, so sind die Belastungen, welche das Gleichgewicht mit der Reibung herstellen, der Geschwindigkeit in einer Potenz proportional, welche kleiner als die Einheit ist, und dem Bruche $\frac{1}{2}$ um so näher kommt, als die Verhältnisse ungünstiger werden."

4)[1] „Wenn die Reibungsflächen nicht geschmiert werden und in Folge eines grossen Druckes die Luft keinen Zutritt zwischen die Reibungsflächen erhalten kann, und dieselben also von einander gar nicht getrennt sind; mit einem Worte, wenn die Reibung eine unmittelbare wird,[2] dann verschwindet der Einfluss der Geschwindigkeit gänzlich."

5) „Endlich, wenn die Temperatur gar nicht berücksichtigt wird, und das Schmieren der Reibungsflächen so wie bei Maschinentheilen vor sich geht, so kann für diesen allgemeinen Fall ohne grossen Fehler angenommen werden, dass die Reibung der Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit proportional ist, so dass also, wenn die Geschwindigkeiten in den Verhältnissen der Zahlen 1 : 4 : 9 : 16 u. s. w. zu einander stehen, Reibungswiderstände hervorgerufen werden, welche den Zahlen 1 : 2 : 3 : 4 u. s. w. proportional sind."

$$f = A\sqrt{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Wenden wir uns nun zu der Gleichung (21), im Besonderen zu der Gleichung (21 a)

---

[1] Hirn. Etudes. S. 210.

[2] Merkwürdig ist es, dass Hirn in diesem Falle von der Beständigkeit der Temperatur nicht spricht.

$$f = \mu \frac{U}{\varepsilon p} \dots \dots \dots \dots \dots \quad (24)$$

so sehen wir sofort diese Gleichung, wie auch die Versuche von Hiin zeigen,

1) Dass, wenn μ (deren Grösse von der Temperatur abhängig ist), ε und p constante Werthe haben, der Reibungscoefficient f der Geschwindigkeit U proportional ist. In dieser Hinsicht ist also die Gleichung (21 a) eine vollkommen richtige.

2) Dass ein Abnehmen der Dicke der Schmierschicht ε die Vergrösserung des Reibungscoefficienten zur Folge hat; sobald also das Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Dicke der Schmierschicht ε und der Geschwindigkeit U ermittelt wird, so wird auch in dieser Hinsicht die Gleichung (21 a) zu richtigen Schlüssen führen. Leider giebt es bis jetzt noch keine zuverlässigen Grundsätze zur Bestimmung dieses Verhältnisses in Zahlen. —

Der Einfluss der Grösse der Berührungsflächen auf den Reibungswiderstand oder des Druckes pro Flächeneinheit auf den Reibungscoefficienten wurde mittelst eines besonderen Dynamometers, welches die Bewegung von den Transmissionen einer Spinnerei auf einen Mul-jenny-Werkstuhl übersetzte, untersucht. Hirn verminderte die Flächen der Platbänder (plates-bandes) im Verhältnisse von 20 zu 12 oder, was dasselbe ist, vergrösserte den Druck im Verhältnisse von 12 zu 20; dabei erwies sich der Reibungswiderstand kleiner. Zwei ziemlich lange andauernde Vergleichsversuche ergaben sehr nahe zu einander liegende Resultate. Der eine dieser Versuche zeigte, dass bei einer Vergrösserung des relativen Druckes im Verhältnisse von $12:20 = 1:1{,}666$ die Arbeit der Reibung oder der Reibungscoefficient im Verhältnisse von $1:1{,}335$ kleiner wurde; der andere Versuch ergab bei derselben Vergrösserung des relativen Druckes eine Verminderung des Reibungscoefficienten im Verhältnisse von $1:1{,}351$, das mittlere dieser zwei Verhältnisse $1:1{,}34$ unterscheidet sich von $1:1{,}666$ sehr wenig. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass in Wirklichkeit das Verhältniss, in welchem die Reibung in Folge der Verminderung der Berührungsfläche kleiner wurde, $1:1{,}666$ noch näher war, denn die Dynamometerindicationen bezogen sich auf den Reibungswiderstand in allen Theilen des Werkstuhles, nicht aber auschliesslich auf denjenigen, welcher in den Platbändern (plates-bandes) entwickelt wurde; bei einer Veränderung der Flächen der letzteren blieb aber die Reibung in den anderen Theilen eine unveränderte und war keineswegs eine zu kleine im Vergleiche mit der Gesammtreibung. Mit diesen nicht sehr bestimmten Bemerkungen endet Hirn seine Forschungen, und können wir daher vor der Hand auch kein genaueres Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Reibungscoefficienten und dem Drucke p pro Flächeneinheit hier anführen.

Diese Angabe genügt indessen, um die Richtigkeit der Gleichung (21 a) in Bezug auf p zu zeigen; dass nämlich, wenn der relative Druck ein veränderlicher, alle anderen Glieder derselben Gleichung aber unveränderliche blieben, die Reibungscoefficienten in demselben Verhältnisse abnehmen, in welchem der relative Druck zunimmt. Wenn aber der Druck pro Flächeneinheit der Reibungsfläche wächst, so nimmt die Dicke der Schmierschicht etwas ab, und sinkt daher der Reibungscoefficient f nicht so rasch, wie der Druck p wächst. —

Die in dem vorhergehenden Paragraphen erörterte Vergleichung der von Hirn erhaltenen Resultate mit der Gleichung (21 a) bestätigt also vollkommen genügend die Richtigkeit dieser Gleichung.

Was nun die Bemerkung von Hirn anbelangt, dass der Reibungscoefficient nur bei sehr geringen Geschwindigkeiten, wenn die Dicke der Schmierschicht eine ausserordentlich geringe wird, abzunehmen aufhört, so beweist das, dass unter gewöhnlichen Verhältnissen das Glied ε, welches im Zähler des Ausdruckes (21) für den Reibungscoefficienten steht, die Summe der anderen Glieder $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ bedeutend übertrifft. Dies beweist unmittelbar, dass unter gewöhnlichen Verhältnissen die Gleichung (21 a) anstatt der Gleichung (21) gesetzt werden darf. —

Um die Möglichkeit die Formel (21) mit der Formel (21 a) zu ersetzen noch besser beweisen zu können und ferner die annähernde Dicke der Schmierschicht, wenn auch ungefähr, angeben zu können sollen hier des Verfassers eigene mit der Ingham and Stapfer-Maschine (bekannt unter der Bezeichnung Bailey-Maschine) angestellten Versuche angeführt werden. In dieser Maschine fassen zwei halbcylindrische Lager von unten und von oben eine kleine, auf einer horizontalen Achse sitzende Trommel.

In dem Oberlager ist ein Thermometer angebracht. Bei den Versuchen wird die Maschine gewöhnlich mit einem oder zwei Tropfen des zu untersuchenden Oeles geschmiert, und dann die Umdrehungszahl, welche die Temperatur des Thermometers auf eine bestimmte Zahl von Graden erhöhen kann, bestimmt. Im Anfange steigt gewöhnlich die Temperatur sehr stark, zu Ende des Versuches aber, wenn die Temperatur schon eine ziemlich hohe geworden, steigt sie langsam, und kann deshalb die Umdrehungszahl nicht sehr genau bestimmt werden.

Mit Baumöl angestellte Versuche haben dem Verfasser folgende Zahlen geliefert:

Die Maschine wurde mit einem Tropfen Baumöl geschmiert und 8 Minuten lang gedreht. Die Temperatur stieg von 12° C. bis auf 70° C., d. h. um 58°, wobei die Maschine

1	Mal	10 419	Umdrehungen
1	„	10 393	„ „
1	„	10 090	„ „
1	„	10 145	„ „
durchschnittlich		10 262	Umdrehungen machte.

Bei einer Schmierung mit zwei Tropfen wurde sie 13 Minuten lang gedreht und ist die Temperatur von 20° C. bis auf 70° C., d. h. um 50° gestiegen, die Maschine machte

1	Mal	17 644	Umdrehungen
1	„	17 783	„ „
1	„	17 996	„ „
durchschnittlich		17 808	Umdrehungen.

Nach $13^1/_2$ Minuten langem Drehen stieg die Temperatur von 20° C. bis auf 70° C., d. h. um 50°. Die Maschine machte dabei

1	Mal	18 104	Umdrehungen
1	„	18 121	„ „
1	„	18 230	„ „
durchschnittlich		18 152	Umdrehungen.

Bei den ersten vier Versuchen machte die Maschine durchschnittlich 1283 Umdrehungen pro Minute, bei den folgenden drei Versuchen war die mittlere Zahl der Umdrehungen pro Minute gleich 1290 und bei den drei letzten Versuchen machte die Maschine durchschnittlich 1345 Umdrehungen pro Minute.

Die Zahl der Umdrehungen pro Minute blieb also bei allen 10 Versuchen dieselbe, der Druck war auch der nämliche, auch die

Temperatur war dieselbe, nur war sie bei einer Schmierung mit zwei Tropfen eine etwas höhere, als bei einer Schmierung mit einem Tropfen. Der Coefficient der inneren Reibung war also in den ersten vier Versuchen ganz unbedeutend grösser, als in den letzten sechs Versuchen. Der Wärmeverlust in den ersten vier Versuchen entspricht einer Dauer von acht Minuten und in den letzten sechs Versuchen einer Dauer von 13 Minuten. Bei jedem der vier ersten Versuche ist also der Wärmeverlust ein kleinerer, als bei jedem der sechs letzten Versuche. Jedenfalls sind alle diese Ungenauigkeiten von sehr geringem Belange, und wir können ganz sicher behaupten, dass die Erhöhung der Temperatur um 50° bei einer Schmierung mit einem Tropfen durch 9500 und bei einer Schmierung mit zwei Tropfen durch 18000 Umdrehungen erreicht wurde. Dies beweist, dass die Reibungscoefficienten den Tropfenzahlen oder, was dasselbe ist, der Dicke der Schmierschicht umgekehrt proportional waren. Mit anderen Worten beweist dies, dass bei unseren Versuchen die Dicke der Schmierschicht ε die Summe $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ hinreichend übertraf. Was nun die Dicke der Schmierschicht anbelangt, so muss bemerkt werden, dass der Trommeldurchmesser 71 Millimeter und die Trommellänge 78 Millimeter betragen, die Oberfläche der Trommel also 17400 Quadratmillimeter betragen hatte. Das Volumen des Tropfens ist uns nicht genau bekannt, jedenfalls hat es nicht mehr als 17 Kubikmillimeter. Hieraus ergiebt sich, dass bei Baumölschmierung die Dicke der Schicht $\varepsilon = 0{,}001$ die Anwendung der Gleichung (21 a) zulässt. —

Nachdem wir uns überzeugt haben, dass unter denjenigen Verhältnissen, unter welchen Hirn seine Versuche angestellt hatte, die Gleichung (21 a) mit hinreichender Genauigkeit angewendet werden kann, wollen wir untersuchen, in wie fern seine ad 5 aufgestellte These eine richtige ist, dass nämlich in Maschinentheilen bei der gewöhnlichen gemeinschaftlichen Wirkung der Geschwindigkeit und der von der Geschwindigkeit abhängenden Temperatur, der Reibungscoefficient direct proportional der Quadratwurzel aus der entsprechenden Geschwindigkeit ist, d. h. dass

$$f = A\sqrt{U}.$$

Bei Maschinentheilen findet keine künstliche Abkühlung statt; die Temperatur der Schmierschicht wird in denselben durch die Gleichheit der Wärmemenge bedingt, welche in Folge der Reibung sich entwickelt und der Wärmemenge, welche der Maschinentheil zu gleicher Zeit durch Strahlung und Wärmeleitung verliert.

Ist U die Geschwindigkeit des Maschinentheiles und

$$f = \frac{\mu U}{\varepsilon p}$$

sein Reibungscoefficient, dann wird durch einen Druck P eine Arbeit der Reibung von

$$\frac{\mu U^2}{\varepsilon p} P$$

pro Secunde hervorgerufen.

Die entsprechende Zahl q der Wärmeeinheiten erhält man, wenn man diese Arbeit durch den mechanischen Wärmeäquivalenten E dividirt. Es ist dann

$$q = \frac{1}{E} \frac{\mu U^2}{\varepsilon p} P.$$

Um die Zahl der Wärmeeinheiten, welche der Maschinentheil verliert, durch eine Formel auszudrücken, wollen wir die folgenden Bezeichnungen annehmen, es sei:

t die Temperatur der Schmierschicht,
t_0 die umgebende Lufttemperatur,
k der Coefficient der Wärmeleitung bezogen auf eine gewisse Wärmeeinheit, auf welche auch der oben angeführte Ausdruck für die Wärmeentwickelung durch Reibung bezogen ist.

Die Zahl der verlorenen Wärmeeinheiten ist dann gleich

$$k(t - t_0).$$

Im Beharrungszustande, welcher namentlich für die Techniker von Interesse ist, müssen die obigen zwei Grössen einander gleich sein, und es entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{E} \frac{\mu U^2}{\varepsilon p} P = k(t - t_0).$$

Wenn wir nun in dieser Gleichung μ durch die entsprechende Function der Temperatur t ersetzen und wenn es uns gelingt ε in der Form einer Function von U auszudrücken, so werden wir zu einer Gleichung mit zwei Variabeln, nämlich der Geschwindigkeit U und der Temperatur t gelangen. Diese Gleichung giebt uns dann die Möglichkeit, die Temperatur, welche einer beliebigen Geschwindigkeit entspricht, zu ermitteln. Nach der Lösung dieser Gleichung wird die Vergleichung der den verschiedenen Geschwindigkeiten entsprechenden Reibungscoefficienten keine Schwierigkeiten bieten. Nehmen wir bspw. an, dass für eine gewisse Geschwindigkeit U_1 die Gleichung eine Temperatur t_1 ergiebt, bezeichnen wir ferner den der Temperatur t_1 entsprechenden Coefficienten der inneren Reibung mit μ_1, mit ε_1 — die der Geschwindigkeit U_1 entsprechende Dicke der Schicht, dann wird der Reibungscoefficient f_1, welcher der Geschwindigkeit U_1 entspricht, auf Grund der Gleichung (21 a) gleich

$$f_1 = \frac{\mu_1 U_1}{\varepsilon_1 p}$$

sein, und bei einer Geschwindigkeit U wird

$$f = \frac{\mu U}{\varepsilon p}.$$

Das Verhältniss dieser Coefficienten ist gleich

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\varepsilon \mu_1 U_1}{\varepsilon \mu U}.$$

Berücksichtigen wir nun, dass zugleich mit U_1 die Grössen ε_1 und t_1 auch wachsen, und dass in Folge der Temperaturerhöhung der Coefficient der inneren Reibung μ stark abnimmt, so leuchtet sofort ein, dass das Verhältniss der Coefficienten $\frac{f_1}{f}$ bedeutend schwächer als das Verhältniss der Geschwindigkeiten wächst. Es muss aber auch noch hinzugefügt werden, dass das Verhältniss $\frac{\mu_1}{\mu}$ sehr abhängig davon sein kann, von welchem Grade an die Temperatur zu wechseln beginnt. Für Rüböl zeigt die Gleichung (12 a), dass

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1{,}4 + 0{,}529\, t + 0{,}0507\, t^2}{1{,}4 + 0{,}529\, t_1 + 0{,}0507\, t_1^2}.$$

Setzt man in diese Gleichung anstatt der Temperatur t_1 die Temperatur $t + \tau$ ein, so ist

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1{,}4 + 0{,}520\, t + 0{,}0507\, t^2}{1{,}4 + 0{,}529\,(t + \tau) + 0{,}0507\,(t + \tau)^2}.$$

Für gleiche Werthe von τ ist der vorstehende Ausdruck ein verschiedener für verschiedene Werthe von t. Das Verhältniss $\frac{f_1}{f}$

ist also von derjenigen Temperatur abhängig, von welcher die Geschwindigkeitsveränderungen beginnen.

Wir müssen jedoch berücksichtigen, dass die Dicke der Schicht ε nicht ausschliesslich von der Geschwindigkeit abhängig ist, sondern im Gegentheile diese Grösse auch bei gleichen Geschwindigkeiten eine veränderliche sein kann, wenn bspw. die Schmiere in grösserer oder geringerer Menge zufliesst, wenn die Reibungsflächen mehr oder minder aufeinander gepasst sind, wenn die Form der Lagerränder geändert wird, wenn der Druck der Flächeneinheit wechselt oder endlich, wenn äussere Kräfte die Reibungsflächen mehr oder weniger deformiren.

Eine derartige complicirte Veränderlichkeit der Grösse ε erklärt auch sofort, warum verschiedene Beobachter die Wirkung der Geschwindigkeit auf den Reibungscoefficienten in Maschinentheilen bei gewöhnlichen Verhältnissen verschieden erklärten und warum das im Anfange dieses Paragraphen angeführte Hirn'sche Gesetz den Beobachtungen von Thurston und von Kirchweger widerspricht. Gegenwärtig können wir Mangels Kenntnissen der Abhängigkeitsverhältnisse zwischen der Dicke der Schmierschicht und der Geschwindigkeit jenes Gesetz nicht ein Mal annähernd durch eine Formel ausdrücken; dasselbe muss durch eine Prüfung der gemachten Versuche ermittelt werden. —

In allen denjenigen Fällen, für welche die Gleichung (21 a) behufs Ermittelung des Reibungscoefficienten angewendet werden darf, und für welche durch Versuche der Reibungscoefficient ermittelt werden kann, lässt sich aus derselben Gleichung auch die Dicke der Schmierschicht bei gegebener Temperatur bestimmen.

Wir müssen bei dieser Gelegenheit bemerken, dass die laboratorischen Versuche behufs Bestimmung des Reibungscoefficienten, mögen dieselben noch so gut organisirt sein, selbst wenn die Temperatur der Schmierschicht eine bekannte ist, in der Hauptsache nur zur Untersuchung des Abhängigkeitsverhältnisses der Dicke der Schmierschicht von verschiedenen Verhältnissen angewandt werden können. Um die wahrscheinliche Grösse des Reibungscoefficienten für die verschiedenen praktischen Verhältnisse zu bestimmen, müssen wir uns daher der Methoden der Statistik bedienen. Die Dicke der Schicht bei den verschiedenen Versuchen, auf welche die Gleichung (21 a) anwendbar ist, wird aus der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\mu U}{f p} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (25)$$

bestimmt. Wir sehen, dass ε nur für solche Fälle bestimmt werden kann, für welche alle Grössen des zweiten Theiles der obigen Gleichung bekannt sind. Die Grössen U, p und f findet man in entsprechenden Versuchstabellen, die Grösse μ wurde aber dabei niemals bestimmt. Deshalb bietet keiner der angestellten Versuche ein genügendes Material für das Studium der Grösse ε. Die gemachten Versuche können in dieser Hinsicht nur dazu dienen, um die ersten ungenauen Annäherungswerthe von ε, so zu sagen die relative Grösse von ε in der Reihe der anderen Glieder zu bestimmen. Setzt man in die Gleichung (25) die Werthe von U, p und f aus den Tabellen IX, X und XI von Hirn und die nach Gleichung (12 a) berechneten Werthe von μ ein, wobei die entsprechenden Werthe von t aus der Tabelle XIV zu entnehmen sind, so können wir leicht die den verschiedenen Versuchen von Hirn entsprechenden Dicken der Schmierschicht bestimmen. Diese Werthe von ε sind in der nachstehenden Tabelle XVI, welche als Ergänzungstabelle zu den Tabellen VIII, IX, X und XI dient, zusammengestellt. Dabei ist auf Grund der Versuche von S. I. Lamanski für Wallrath μ 2,55 Mal kleiner als für Olivenöl angenommen.

Tabelle XVI.

Temperatur		Coefficient der inneren Reibung für Olivenöl	Dicke der Schmierschicht mit Bezug auf die Tabellen:				
des Apparates	d. Schmierschicht		VIII Olivenöl		IX Wallrath	X Raffin. Olivenöl	XI Wallrath
			91 Umdreh. $U = 1{,}108$	51 Umdreh. 0,602	51 Umdreh. 0,602	51 Umdreh. 0,602	92 Umdreh. 1,108
T	t	μ	ε	ε	ε	ε	ε
60	73	0,000 000 31	0,053	0,048	0,041	—	0,036
55	65	0,000 000 39	0,053	0,052	0,043	0,047	0,025
50	58	0,000 000 50	0,054	0,051	0,043	0,046	0,022
45	50	0,000 000 65	0,056	0,050	0,041	0,045	0,022
40	44	0,000 000 81	0,055	0,048	—	0,045	—
35	38	0,000 001 06	0,056	0,047	0,037	0,046	0,013
30	35,5	0,000 001 31	0,056	0,047	—	0,045	0,013
25	29	0,000 001 68	0,057	0,051	0,039	0,045	0,014
20	24	0,000 002 34	—	—	—	0,052	—

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dass die Dicke der Schmierschicht eine bedeutend grössere als 0,001 Millimeter ist, während bei Verwendung von Baumöl für eine Eisenwelle und Bronzelager die Dicke von 0,001 Millimeter sich als eine genügende erwiesen hat, um die Anwendung der Gleichung (21 a) zu berechtigen. Die Dicke der Schicht ist von der Temperatur beinahe unabhängig und scheint bei Erhöhung der Temperatur etwas abzunehmen. Bei einer Beschleunigung der Geschwindigkeit wird die Dicke der Schmierschicht unter sonst gleichen Verhältnissen eine grössere; die Dicke der an der Trommel haften bleibenden Schicht wird jedoch nur unbedeutend grösser bei einer Beschleunigung der Geschwindigkeit von 0,6 bis auf 1,1 Meter, wenn der Untertheil der Trommel in Oel eingetaucht ist; die Vergleichung der die Tabellen IX und XI ergänzenden Zahlen mit einander zeigt hingegen, dass bei verschiedenen Schmierungsarten die Dicken der Schmierschichten verschieden ausfallen; dabei leuchtet ohne Weiteres ein, dass eine Beschleunigung der Geschwindigkeit die Dicke der Schicht nicht vergrössern kann, wenn der Zufluss des Oeles ein ungenügender ist. —

So belehrend nun die Versuche von Hirn sind, so können dieselben nicht ein Mal zu einer eingehenden Prüfung der Gleichung (21) verwendet werden.

Wir müssen uns vielmehr zu anderen Versuchen schon um deswegen wenden, weil bei den Versuchen von Hirn die Geschwindigkeiten nicht über 1,108 Meter gross waren, in der Praxis hingegen bei Maschinen bedeutend grössere Geschwindigkeiten vorkommen; ferner wechselte die Belastung fast gar nicht, dieselbe konnte keine merklichen Deformationen der Reibungsflächen hervorrufen und war auch an und für sich eine zu geringe, um einen beträchtlichen Druck pro Flächeneinheit, wie ein solcher unter gewöhnlichen Verhältnissen bei Maschinen vorkommt, hervorzurufen. Ferner wechselten die Geschwindigkeiten in zu engen Grenzen und endlich blieb die Wirkung des Lagermetalls unberücksichtigt. —

Die Versuche von Thurston zeigen, ähnlich wie diejenigen von Hirn, die Wirkung der Temperatur, der Geschwindigkeit und der Belastung.

Thurston beobachtete die Reibung zwischen einem kleinen horizontalen Stahlzapfen und zwei an denselben von oben und von unten angepressten Bronzelagern.[1] Die Lager waren in einen Metallrahmen eingefasst, welcher dieselben an den Zapfen anpresste: von oben unmittelbar, und von unten durch Vermittelung einer zwischen dem Rahmenuntertheil und dem Unterlager angebrachten Spiralfeder. Der Druck des Oberlagers auf den Zapfen war also nur um das Gewicht der beiden Lager, so wie des Rahmens und seiner Theile grösser als derjenige des Unterlagers. Das Gewicht dieser Theile war indessen nur ein sehr geringes, man kann daher annehmen, dass der Zapfen von oben und von unten von einem gleichen in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Drucke angegriffen wurde. — Es ist nun klar, dass die Biegung des Zapfens in Folge der Wirkung der darauf hängenden Theile vernachlässigt werden konnte und man annehmen durfte, dass bei den Versuchen von Thurston keine Biegung vorhanden war. Die Schmiere gelangte zum Zapfen aus zwei an dem Oberlager angebrachten Schmierbüchsen.

Zur Bestimmung der Temperatur, bei welcher die Reibung stattfand, war im Obertheile eine Vertikalöffnung über der Mitte der Zapfenlänge vorhanden, unterhalb derselben war eine Vertiefung im Oberlager eingebohrt, und in dieselbe eine Thermometerkugel hineingepasst. Behufs Ermittelung der Reibungscoefficienten war an dem Rahmen eine Stange mit einem Gewichte am unteren Ende derselben angebracht. Der Rahmen mit der Stange und mit dem Gewichte bildeten eine Art von Pendel, welches an den Zapfen angehängt war und sich um denselben schwingen konnte. Im Ruhezustande des Apparates hing dieses Pendel senkrecht, bei der Drehung des Zapfens entwickelte sich aber an der Oberfläche des letzteren eine Reibung, welche das Pendel aus seiner senkrechten Lage um so mehr ablenkte, je grösser die Reibung wurde.

Die Messung des Ablenkungswinkels des Pendels von der senkrechten Richtung lieferte Thurston ein sehr zuverlässiges Mittel zur Ermittelung der Reibungskraft. Das Verhältniss der letzteren zu dem Drucke, welcher das Lager an den Zapfen anpresste, ergab den Reibungscoefficienten.

Um die Werthe der Reibungscoefficienten bei ziemlich hohen

---

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 31 Fig. 19, S. 132 Fig. 20, S. 146 Fig. 21 und 22.

Tabelle XVII.[1]

Neuer Stahlzapfen, Bronzelager. Druck und Temperatur veränderliche. Schmierung mittelst Wallrath.

Geschwindigkeiten =	30 Fuss pro Minute 0,152 Meter pro Secunde					100 Fuss pro Minute 0,506 Meter pro Secunde					250′ p. Min. 1,287 M. p. S.		500′ p. Min. 2,574 M. p. S.		1200′ p. Minute 6,1 M. p. Secunde		
Druck: Pfund pro □-Zoll =	200	150	100	50	4	200	150	100	50	4	200	100	200	100	200	150	100
Druck: Atmosphären =	13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	6,8	13,6	6,8	13,6	10,2	6,8
Temperatur C.																	
65,5	0,0500	0,0500	0,0250	0,0125	0,125	0,0140	0,0074	0,0025	0,0037	0,0630	0,0047	0,0028	0,0053	0,0037	0,0060	0,0058	0,0061
60,0	0,0250	0,0330	0,0110	0,0087	0,125	0,0100	0,0050	0,0025	0,0037	0,0630	0,0047	0,0030	0,0053	0,0037	0,0062	0,0058	0,0070
54,4	0,0160	0,0200	0,0044	0,0075	0,125	0,0087	0,0041	0,0019	0,0037	0,0630	0,0047	0,0030	0,0053	0,0037	0,0065	0,0062	0,0075
48,9	0,0110	0,0110	0,0044	0,0075	0,125	0,0056	0,0035	0,0019	0,0037	0,0630	0,0047	0,0037	0,0056	0,0037	0,0069	0,0067	0,0080
43,3	0,0100	0,0033	0,0037	0,0062	0,094	0,0044	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0050	0,0044	0,0062	0,0050	0,0075	0,0075	0,0087
37,8	0,0075	0,0028	0,0031	0,0056	0,094	0,0040	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0056	0,0045	0,0065	0,0061	0,0081	0,0083	0,0094
32,2	0,0056	0,0025	0,0031	0,0037	0,094	0,0040	0,0033	0,0019	0,0037	0,0630	0,0070	0,0052	0,0075	0,0061	0,0100	0,0170	0,0150

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 185.

Temperaturen ermitteln zu können, wurde der Apparat von aussen durch einen Bunsen'schen Brenner erwärmt.[1] —

Einige der mittelst des vorher beschriebenen Apparates von Thurston erhaltenen Zahlenresultate sind in der vorstehenden Tabelle XVII aufgeführt. Wir sehen, dass diese Tabelle eine bedeutend grössere Zahl von Fällen als die Tabellen von Hirn enthält. Sowohl die Tabellen von Thurston, als auch diejenigen von Hirn beziehen sich auf nahezu dieselben Temperaturen, indessen, was die Geschwindigkeiten anbelangt, so sind diejenigen, welche von Hirn angeführt wurden, in den Grenzen 0,602 Meter pro Secunde (50 Umdrehungen pro Minute) und 1,108 Meter pro Secunde (92 Umdrehungen pro Minute) eingeschlossen, die Geschwindigkeiten hingegen, welche Thurston beobachtet hatte, wechseln in den Grenzen 0,152 Meter und 6,10 Meter pro Secunde. Der Druck, für welchen Hirn die Reibungskräfte bestimmt hatte, war ungefähr 0,1 Atmosphäre, wohingegen Thurston mit einem Drucke von 0,27 bis 13,6 Atmosphären experimentirte. Die bei den Versuchen von Thurston beobachteten Geschwindigkeiten schliessen beinahe alle in der Praxis vorkommenden Geschwindigkeiten in sich ein; der relative Druck indessen, obgleich er 136 Mal grösser als bei den Versuchen von Hirn war, ist trotzdem ein weit geringerer als der oft in der Praxis vorkommende: der Druck auf die Zapfenlager der Waggonachsen bspw. erreicht zuweilen 50, ja sogar 60 Atmosphären. Da nun die Tabelle von Thurston eine grössere Zahl Fälle umfasst, so müsste dieselbe von grösserem Interesse als die Tabellen von Hirn sein, indessen bieten die Versuche von Thurston der Ableitung allgemeiner Schlüsse noch grössere Schwierigkeiten als die Versuche von Hirn. Es könnte den Anschein haben, als ob Thurston's Versuche die Möglichkeit gewährten die Wirkung der Geschwindigkeit, so wie des relativen Druckes und der Temperatur auf den Reibungscoefficienten einzeln zu untersuchen, dies ist aber doch nur scheinbar, denn in Wirklichkeit ist es nicht der Fall. In Wirklichkeit ist nämlich in den Tabellen der Einfluss der Geschwindigkeit eben so wie der des relativen Druckes als ein gleichzeitiger mit der Wirkung der Dicke der Schmierschicht, so wie der Temperatur dargestellt; deshalb lässt sich keine dieser Wirkungen im Einzelnen bestimmen. Es ergiebt sich dies aus folgenden Betrachtungen. —

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 138.

Im Thurston'schen Apparate gelangt die Schmiere in eine Rille an der unteren Fläche des Oberlagers (es ist indessen nicht gesagt: ob durch einen Docht oder auf welche andere Weise); aus dieser Rille dringt dann das Oel unter die eine Hälfte des Oberlagers, passirt diese, und tritt alsdann an den äusseren Rand des Unterlagers; unter der Wirkung der Form dieses Randes wird es von hier zwischen das Unterlager und den Zapfen getrieben. Der an dem Zapfen haften gebliebene Theil der Schmiere passirt das Unterlager und gelangt so an den unteren Rand der zweiten Hälfte des Oberlagers, von wo dieselbe endlich zwischen den Zapfen und das Oberlager geführt wird. Auf diese Weise unterliegt das Oel bei jeder Umdrehung des Zapfens an drei Stellen der Wirkung der Lager- oder Rillenränder. Natürlich kann bei diesem Apparate die Reibung nicht bei gleichen Dicken der Schmierschicht, wie im Hirn'schen Apparate oder bei den Zapfen der Waggonachsen, bei welchen nur ein Lager und nicht zwei sind, und bei welchen nicht selten Unter- und Oberschmierung ist, stattfinden. Ausser dem oben erwähnten wirkten noch andere Umstände bei Thurston's Versuchen auf eine Verminderung der Dicke der Schmierschicht. Wie bereits erwähnt, war bei den Thurston'schen Versuchen der relative Druck unvergleichlich grösser als bei den Versuchen von Hirn; derselbe konnte sehr leicht die Dicke der Schmierschicht vermindern, und war möglicher Weise so gross, dass er zu derartigen Belastungen gerechnet werden musste, welche nach Hirn's Ansichten bei einer gegebenen Geschwindigkeit und einer gewissen Verdünnung des Schmiermittels als unverhältnissmässig grosse bezeichnet werden müssen. Die Geschwindigkeiten waren in vielen Versuchen bei Thurston geringere als diejenigen bei den Hirn'schen Versuchen. Unter dem Einflusse der grossen Belastungen pro Flächeneinheit bei den Versuchen von Thurston konnten also diese Geschwindigkeiten als zu kleine erscheinen, um die maximale Dicke der Schicht zu erhalten. Sind nun die angeführten Erwägungen in Bezug auf die Dicke der Schicht begründete und ist die Gleichung (21 a) eine richtige, so müssen die von Thurston erhaltenen Reibungscoefficienten andere Eigenschaften als die Hirn'schen besitzen; eine Temperaturerhöhung, welche den Coefficienten der inneren Reibung, also den Zähler in der Gleichung (21 a) vermindert, könnte sonach den ganzen Bruch nicht mehr vermindern, denn die Temperaturerhöhung zieht zugleich eine Verdünnung des Oeles nach sich und muss in Folge dessen die Dicke der Schmierschicht ε eine geringere werden. Der Einfluss von ε wird aber um so geringer je grösser die Geschwindigkeit und je kleiner die Belastung pro Flächeneinheit ist.

Die Wirkung der Geschwindigkeit an und für sich kann bei den Versuchen von Thurston auch nicht so scharf wie bei den Versuchen von Hirn hervortreten, denn bei ungenügend grossen Geschwindigkeiten wächst die von ihrer Maximalgrenze ziemlich entfernte Dicke der Schmierschicht mit der Beschleunigung der Geschwindigkeit, resp. nimmt mit der Verzögerung derselben sehr bedeutend ab.

Die Wirkung der relativen Belastung wird durch diejenige von ε auch verdeckt, denn, wenn p wächst, nimmt ε ab.

Alle diese Vermuthungen werden durch die Zahlen der Tabelle XVII bestätigt.

Die Temperaturerhöhung steigert den Reibungscoefficienten nur bei einer Geschwindigkeit von nicht unter 250 Fuss pro Minute oder 1,287 Meter pro Secunde.

Bei so grossen Geschwindigkeiten ist die Wirkung der Temperatur (wie zu vermuthen) eine um so grössere, je grösser die Geschwindigkeit und je kleiner die Belastung ist.

Bei Geschwindigkeiten nicht über 100 Fuss pro Minute oder 0,506 Meter pro Secunde wirken die Temperaturveränderungen auf den Reibungscoefficienten durch den Coefficienten der inneren Reibung des Schmiermittels in geringerem Masse als durch die Dicke der Schicht. Die Temperaturerhöhung vermindert gleichzeitig μ und ε, ε nimmt aber rascher als μ ab, und ist dabei der Einfluss von ε um so bedeutender, je geringer die Geschwindigkeit und je grösser die Belastung ist.

Wie bereits auf Seite 128 erwähnt wurde, bemerkte Hirn, dass ε, welches im Nenner unserer Gleichung (21) a steht, mit Abnahme der Geschwindigkeit abnimmt, und zwar in der Weise, dass der Reibungscoefficient bei geringen Geschwindigkeiten grösser als bei den grösstmöglichen ausfallen kann. Die Wirkung der Geschwindigkeit U äussert sich also dadurch, dass bei Abnahme derselben sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruches (21) a abnehmen.

Bei einer und derselben Temperatur und für dieselben Geschwindigkeiten zieht eine Druckveränderung die vorausgesetzte Veränderung in der Dicke der Schicht nach sich.

Richtig aufgefasst widerspricht also die Tabelle XVII der Gleichung (21 a) nicht, im Gegentheil könnte diese Tabelle in Verbindung mit der Gleichung (21 a) einen gewissen Anhalt zur Prüfung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen der Dicke der Schicht ε einerseits und zwischen dem relativen Drucke und der Temperatur andererseits bieten, freilich nur in der Voraussetzung, dass die in der Tabelle angeführten Temperaturen in Wirklichkeit auch auf die Temperatur der Schmierschicht bezogen werden können.

Eine Untersuchung dieses Abhängigkeitsverhältnisses ist gegenwärtig von der grössten Wichtigkeit, denn nur durch eine solche können unsere Kenntnisse auf dem Gebiete der Fragen über die Reibung merklich gefördert werden.

Eine Untersuchung auf der Grundlage der mittelst Versuche festgestellten Thatsachen kann jedoch nur dann vorgenommen werden, wenn die Ueberzeugung besteht, dass die in den Tabellen enthaltenen Grössen auch ausreichend genau bestimmt sind.

Mit Bezug auf die in der Tabelle XVII enthaltenen Temperaturen bemerken wir aber zwei Umstände, welche voraussetzen lassen, dass dieselben von den wirklichen sehr abweichende sind.

Vor allen Dingen müssen wir Thurston's eigene Bemerkung hervorheben, dass nämlich die Temperaturen nur als annähernde angegeben seien. (It should be remembered that no temperature readings can be taken as more than approximate.[1])

Als zweiter Umstand, geeignet zu bezweifeln, dass die Temperaturen der Tabelle XVII die richtigen sind, muss die Einrichtung des Apparates selbst bezeichnet werden. Die Thermometerkugel war in diesem Apparate, ähnlich wie in demjenigen von Hirn in einer Vertiefung des Oberlagers angebracht. Schon deshalb allein waren die abgelesenen Thermometerzahlen niedrigere, als die mittlere Temperatur der Schmierschicht. Die Differenz zwischen der abgelesenen und der wirklichen Temperatur der Schmierschicht war auch hier eine um so grössere, je höher die Thermometertemperaturen waren und je grösser die Differenz zwischen der Temperatur der Thermometerkugel und der den Apparat umgebenden Körper war.

Die Temperaturen der umgebenden Luft sind aber in der Tabelle nicht berücksichtigt, obgleich dieselben, wie wir später

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 188.

Tabelle XVIII.

Die Zahlen der pro Minute erzeugten Wärmeeinheiten.[1] Neuer Stahlzapfen, Bronzelager, Geschwindigkeit, Druck und Temperatur veränderliche, Wallrathschmierung.

Geschwindigkeiten		30 Fuss pro Minute 0,152 Meter pro Secunde					100 Fuss pro Minute 0,506 Meter pro Secunde					250′ p. Min. 1,287 M. p. S.		500′ p. Min. 2,574 M. p. S.		1000′ p. Minute 6,1 M. p. Secunde		
Druck: Pfund pro □ Zoll		200	150	100	50	4	200	150	100	50	4	200	100	200	100	200	150	100
Druck: Atmosphären		13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	10,2	6,8	3,4	0,27	13,6	6,8	13,6	6,8	13,6	10,2	6,8
Temperatur Farn.	Cels.																	
150	65,5	2,4	1,82	0,6	0,16	0,12	2,27	0,90	0,20	0,16	0,20	1,90	0,57	4,29	1,50	11,66	8,46	5,83
140	60	1,2	1,22	0,27	0,11	0,12	1,62	0,60	0,20	0,16	0,20	1,90	0,59	4,29	1,50	12,05	8,46	6,80
130	54,4	0,8	0,73	0,11	0,09	0,12	1,40	0,50	0,16	0,16	0,20	1,90	0,59	4,29	1,50	12,63	9,03	7,28
120	48,9	0,53	0,40	0,11	0,09	0,12	0,90	0,41	0,16	0,16	0,20	1,90	0,75	4,54	1,50	13,41	9,80	7,78
110	43,3	0,49	0,12	0,09	0,07	0,09	0,72	0,40	0,16	0,16	0,20	2,02	0,89	5,02	2,02	14,58	10,93	8,46
100	37,8	0,36	0,11	0,07	0,07	0,09	0,65	0,40	0,16	0,16	0,20	2,31	0,89	5,26	2,40	15,80	11,74	9,15
90	32	0,26	0,09	0,07	0,04	0,09	0,65	0,40	0,16	0,16	0,20	2,84	1,05	6,07	2,40	19,44	24,80	14,58

[1] Die Berührungsfläche zwischen dem Zapfen und dem Lager ist auf Grund der Angabe von **Thurston** berechnet, dass nämlich bei einer Belastung der Achse von 10000 Pfund (5000 Pfund pro Zapfen) die Belastung pro □ Zol 400 Pfund war. **Thurston.** S. 145.

sehen werden, sehr wechselnde sein mussten. Die Wärmemenge, welche bei den verschiedenen Versuchen aus dem Apparate in die umgebenden Gegenstände pro Zeiteinheit ausströmte, bestimmte unmittelbar die in Rede stehende Temperaturdifferenz, welche eine um so grössere werden musste, je mehr Wärme in einer Zeiteinheit durch Reibung erzeugt wurde. Die erzeugte Wärmemenge war aber immer der Arbeit der Reibungskraft proportional, und zeigt die Tabelle XVIII, wie sehr verschieden diese Wärmemengen waren.

Die Tabelle XVIII lässt nämlich erkennen, dass in gewissen Fällen die erzeugte Wärmemenge eine sehr geringe, in gewissen anderen aber eine sehr bedeutende war. Wir haben Grund zu vermuthen, dass bei der Wärmeleitung des Apparates die Reibung in vielen Fällen nicht genügend Wärme erzeugte, um in demselben die in der Tabelle angeführte Temperatur zu erhalten, und dass die Temperatur der Thermometerkugel nur durch die Erwärmung des die Lager einfassenden Rahmens aufrecht erhalten wurde. In anderen Fällen entwickelte die Reibung wieder so viel Wärme, dass nur die Abkühlungsvorrichtungen, welche den Rahmen umgaben, die Temperatur der Kugel bis auf die in der Tabelle angeführte vermindern konnten. In allen den Fällen, in welchen der Rahmen von aussen erwärmt wurde, war die Temperatur der Kugel entweder eine höhere als diejenige der Schmierschicht oder eine der Temperatur derselben gleiche. In denjenigen Fällen dagegen, in welchen der Apparat abgekühlt wurde, war die Temperatur der Thermometerkugel eine niedrigere als diejenige der Schmierschicht. Die Temperaturen der Tabelle waren also in einem Falle niedrigere als diejenigen der Schmierschicht, in anderen Fällen waren dieselben der Temperatur der Schicht gleiche und wieder in anderen Fällen — höhere als diejenigen der Schicht. In welchen Fällen das Eine, das Andere oder das Dritte stattfand, lässt sich nicht bestimmen.

Unter Berücksichtigung der über die Temperaturdifferenz zwischen der Thermometerkugel und der Schmierschicht bei den Versuchen von Hirn angestellten Betrachtungen zeigt die Tabelle XIV, dass bei den Versuchen von Thurston die Temperaturdifferenz in vielen Fällen eine bedeutend grössere war, und dass jene Temperaturen an und für sich unter der Wirkung höchst verschiedener pro Zeiteinheit erzeugten Wärmemengen auch höchst verschiedene waren.

Wird bspw. bei einer Temperaturdifferenz (des Thermometers und der Schicht) von 0,1 Grad 0,07 Wärmeeinheiten erzeugt, so kann bei einer Wärmeerzeugung von 24,8 Wärmeeinheiten die Temperaturdifferenz ungefähr 60° betragen. So grosse Correctionen lassen sich schwer mit Aussicht auf befriedigenden Erfolg durchführen, da die grössten Differenzen der Tabellentemperaturen kaum 33° übersteigen. Die Thurston'sche Tabelle lässt sich also zur Untersuchung der Wirkung keines der einzelnen Elemente des Reibungscoefficienten verwenden. Eben so wenig kann diese Tabelle dazu dienen, um die Abhängigkeit zwischen der Dicke der Schmierschicht und den auf dieselbe wirkenden Verhältnissen zu erläutern. —

Die Tabelle XVII könnte indessen wohl dazu dienen, um einen Einblick in gewisse mittlere Veränderungen der Reibungscoefficienten bei verschiedenen Geschwindigkeiten, doch ohne Rücksicht auf die Temperatur, zu erhalten, mit der einzigen Bedingung, dass die Temperaturen die gewöhnlichen Grenzen nicht überschreiten.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, sagt Thurston:[1] „Für kalte Zapfen in guten Verhältnissen, bei guter Wallrathschmierung, wenn die Geschwindigkeiten in den Grenzen 100 Fuss und 1200 Fuss pro Minute (0,5 Meter und 6 Meter pro Secunde) sich verändern, kann gerechnet werden, dass der Reibungscoefficient proportional der Wurzel fünfter Potenz aus der Geschwindigkeit veränderlich ist.“

$$f = a\sqrt[5]{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26).$$

Hirn gelangt auf Grund seiner Versuche zu dem Resultate, dass

$$f = A\sqrt{U}.$$

Wahrscheinlich rührt dieser Unterschied zwischen beiden Formeln daher, dass die Temperaturen bei den respectiven Versuchen verschiedene waren. Die Wirkung der Temperatur auf das Verhältniss der Geschwindigkeiten wurde bereits besprochen. Wir sahen dort, dass, je höher die Temperatur, bei welcher Reibung stattfindet, ist, um so kleiner wird μ, und ist es höchst wahrscheinlich, dass der Bruch

$$\frac{\mu U}{\varepsilon}$$

bei grossen Geschwindigkeiten, wenn ε sich seiner Maximalgrenze

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 187.

nähert, langsamer als bei geringen Geschwindigkeiten wächst. Die Temperaturen bei den Versuchen von Thurston waren bei grossen Geschwindigkeiten wahrscheinlich (siehe Tabelle XVIII) bedeutend grössere als bei den Versuchen von Hirn. —

Die Wirkung der relativen Belastung scheint in Tabelle XVII nicht ein Mal allgemein richtig ausgedrückt zu sein. Die Tabelle zeigt bspw., dass sogar bei den niedrigsten Temperaturen eine Geschwindigkeit von 250 Fuss pro Minute (1,287 Meter pro Secunde), ja sogar eine solche von 500 Fuss pro Minute (2,574 Meter pro Secunde) noch nicht ausreichend war, damit das unter das Lager getriebene Oel eine genügend dicke Schicht bilde, bei welcher der Reibungscoefficient, wie es die Gleichung (21 a) erfordert, durch die Vergrösserung der Belastung von 100 bis auf 200 Pf. pro Quadratzoll (oder von 6,8 bis auf 13,6 Atmosphären) ein kleinerer werde, und doch finden wir in demselben Werke von Thurston eine Tabelle,[1] welche Zahlenresultate der Versuche für eine Geschwindigkeit von 300 Fuss pro Minute (1,515 Meter pro Secunde) für einen Stahlzapfen, für Bronzelager und für Wallrathschmierung enthält. Die Tabelle XIX stellt die Resultate dieser Versuche dar.

Tabelle XIX.

Druck	Pfund pro □ Zoll	100	200	300	400	500
	Atmosphären	6,8	13,6	20,4	27,2	34
$f =$		0,0141	0,0063	0,0049	0,0042	0,0039

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dass eine Vergrösserung des Druckes bis auf 500 Pfd. pro 1 □ Zoll oder bis auf 34 Atmosphären eine Verminderung der Reibungscoefficienten zur Folge hatte.

Eine andere Tabelle von Thurston[2] widerspricht der Tabelle XVII noch mehr. Einen Theil der in derselben enthaltenen Zahlen findet man in nachstehender Tabelle.

[1] Thurston. Friction and lubrication. S. 177.
[2] Ibidem, S. 175.

Tabelle XX.

Reibungscoefficienten. Gusseisenzapfen, Stahllager, Geschwindigkeit 150 Fuss pro Minute oder 0,759 Meter pro Secunde.

Druck	Pfund pro □ Zoll	50	100	250	500	750	1000
	Atmosphären	3,4	6,8	17	34	51	68
Wallrath		0,013	0,008	0,005	0,004	0,0043	0,009
West-Virginiaöl		0,0213	0,015	0,009	0,00525	0,005	0,010

Wir sehen aus dieser Tabelle, dass sogar bei einer Geschwindigkeit von nur 150 Fuss pro Minute (0,759 Meter pro Secunde) bei einem Drucke bis zu 500 Pfund pro □ Zoll, oder bei einem Drucke von 34 Atmosphären Wallrath noch eine genügend dicke Schicht bildet, das West-Virginiaöl — sogar noch bei dem starken Drucke von 750 Pfund oder 51 Atmosphären.

Thurston selbst misst der letzteren Tabelle eine grössere Bedeutung zu, indem er sich derselben zur Ermittelung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen dem Reibungscoefficienten und dem relativen Drucke bedient. Er gelangt auf Grund seiner Versuche zu der Meinung, dass

$$f = \frac{a}{\sqrt{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Durch eine ziemlich einfache Rechnung kann man sich leicht überzeugen, dass diese Formel wohl ziemlich gut mit der Tabelle XX stimmt, indessen durchaus nicht mit der Tabelle XIX. Es muss hier bemerkt werden, dass dieselbe Formel auch durch die Versuche von Kirchweger mit Rüböl, bei welchen der Druck pro Quadratzoll zwischen 26,6 und 168,3 Pfund variirte, bestätigt wird. Wir wollen uns nunmehr zu diesen letzteren wenden. —

Kirchweger's Apparat wa rim Wesentlichen dem Thurston'schen ähnlich.[1] Bei beiden wurden die Lager an die Zapfen von oben und von unten mit nahezu gleichem Drucke, welcher die Zapfen fast gar nicht verbog, angepresst. Bei den Versuchen von Kirchweger besass der Schenkel einer Waggonachse $2^3/_4$ Zoll Durchmesser

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1864, S. 12.

und $5^1/_2$ Zoll Länge (66 Millim. Durchmesser und 131,9 Millim. Länge), die Lager waren aus einer harten Bleilegirung angefertigt, die Berührungsfläche zwischen dem Schenkel und dem Lager betrug in einem Falle 6 Quadratzoll (34,5 Quadratcentimeter), in einem anderen Falle $5^3/_4$ Quadratzoll (33,1 Quadratcentimeter), die Umdrehungszahlen waren 180 und 360 pro Minute, was den Geschwindigkeiten 0,621 und 1,242 Meter pro Secunde entsprach.

Die Versuche ergaben die in den nachstehenden vier Tabellen XXI, XXII, XXIII und XXIV enthaltenen Zahlen.

Tabelle XXI.

Schmiermittel Cohäsionsöl, Berührungsfläche 6 □ Zoll = 34,5 □ Centimeter. Lagermetall Hartblei, Tourenzahl 180 pro Minute, resp. eine Geschwindigkeit von 0,621 Meter pro Secunde.

Volle Belastung Pfund	Druck		Reibungscoefficienten			
	Pfund pro □ Zoll	Atmosphären	grösster	geringster	mittlerer nach zwei Versuchen	mittlerer nach vier Versuchen
160	26,6	2,11	0,0253 00,253	0,0253 0,0221	0,0253 0,0237	0,0245
260	43,3	3,42	0,0175 0,0175	0,0155 0,0155	0,0165 0,0168	0,0167
410	68,3	5,40	0,0173 0,0173	0,0161 0,0160	0,0165 0,0164	0,0165
510	85	6,71	0,0163 0,0144	0,0149 0,0139	0,0157 0,0141	0,0149
660	110	8,69	0,0122 0,0138	0,0115 0,0114	0,0120 0,0127	0,0124
760	126,7	10,01	0,0097 0,0117	0,0094 0,0113	0,0096 0,0114	0,0105
910	151,7	11,98	0,0095 0,0135	0,0095 0,0092	0,0092 0,0111	0,0103
1010	168,3	13,30	0,0100 0,0080	0,0085 0,0080	0,0092 0,0080	0,0086

Tabelle XXII.

Eisenachse, Schenkeldurchmesser 85 Millim., Schenkellänge 134 Millim., Berührungsfläche 47,3 Quadratcentimeter, Umdrehungszahl 180, Geschwindigkeit 0,8 Meter pro Secunde, Lagermetall Zinncomposition, Schmiermittel Rüböl.

Volle Belastung Pfund		2070	4070	6070	8070
Druck	Pfund pro □-Zoll	259	509	759	1009
	Atmosphären . . .	20	40	58	77
Reibungs-coefficienten	grösste	0,0123	0,0100	0,0097	0,0112
	kleinste	0,0084	0,0083	0,0069	0,0092
	mittlere	0,0107	0,0094	0,0079	0,0096

Tabelle XXIII.

Gussstahlachse, Schenkeldurchmesser $2^3/_4$ Zoll, Schenkellänge $5^1/_2$ Zoll, Auflagerfläche $5^3/_4$ □ Zoll = 33,1 □ Centimeter, Rübölschmierung, Hartbleilager, 180 Umdrehungen pro Minute, Geschwindigkeit 0,621 Meter pro Secunde.

Volle Belastung		2070	4070	6070	8070
Druck	Pfund pro □ Zoll	360	707,8	1055,7	1403,5
	Atmosphären . . .	28,6	55,8	83,4	110,9
Reibungs-coefficienten	grösste	0,0117	0,0124	0,0107	0,0096
	kleinste	0,0081	0,0081	0,0077	0,0082
	mittlere	0,0099	0,0103	0,0092	0,0089

Tabelle XXIV.

Rübölschmierung, Auflagerfläche 34 Quadratcentimeter, Hartbleilager, 360 Umdrehungen pro Minute, Geschwindigkeit 1,26 Meter pro Secunde.

Volle Belastung.		4070	6070	8070
Druck	Pfund pro □ Zoll	707,8	1055,7	1403,6
	Atmosphären . . .	55,8	83,4	110,9
Reibungs-coefficienten	grösste	0,0098 0,0103	0,0101 0,0109	0,0104 0,0115
	kleinste	0,0081 0,0085	0,0087 0,0084	0,0071 0,0087
	mittlere	0,0089 0,0091 0,0090	0,0094 0,0096 0,0095	0,0087 0,0101 0,0094

Kirchweger kam zu folgenden Schlüssen:

1) Bei Stahl- oder Eisenzapfen, bei Rüböl- oder Cohäsionsölschmierung, bei Lagern aus Zinncomposition[1] oder bei Hartbleilagern[2] liegt der Reibungscoefficient in den Grenzen 0,0090 und 0,0099.

2) Für Bronzelager[3] ist der Reibungscoefficient gleich 0,0141.

3) Der Reibungscoefficient ist weder von der Belastung, noch von der Grösse der Auflagerfläche abhängig.

4) Derselbe ist von der Geschwindigkeit unabhängig. Die Umdrehungszahlen waren: 10, 180 und 360.

5) Die äussere Lufttemperatur hat innerhalb der Grenzen von 25° und − 5° R. keinen Einfluss. —

Die Tabellen XXIII und XXIV zeigen sofort, dass eine Beschleunigung der Geschwindigkeit von 0,621 Meter bis auf 1,24 Meter pro Secunde den Reibungscoefficienten nicht ein Mal in dem Masse vergrössert, wie es Thurston für kalte Zapfen angenommen hatte, d. h. proportional der Wurzel fünfter Potenz aus der Geschwindigkeit. Die Tabellen XXII und XXIII lassen vermuthen, dass bei gleichen Belastungen die Grösse der Auflagerfläche von keinem Einflusse ist, denn bei 33,1 und 47,3 Quadratcentimetern Auflagerfläche zeigten sich die Reibungscoefficienten als beinahe gleiche.

Die Tabellen XXI, XXII und XXIII zeigen deutlich, dass bei Geschwindigkeiten von 0,62 und 0,80 Meter pro Secunde die Reibungscoefficienten abnehmen, wenn die Totalbelastung eine grössere wird und wenn die Belastung pro Flächeneinheit in den Grenzen von 2,11 bis 110,9 Atmosphären, welche die sämmtlichen in der Praxis vorkommenden Fälle einschliessen, wächst.

Vergleicht man diese vier Tabellen mit der Hirn'schen Tabelle VIII, welche die Reibungscoefficienten für die von der Rübölschmierung sehr wenig verschiedene Olivenölschmierung (siehe Tabelle XII) enthält, so scheint zwischen den Versuchen von Hirn und von Kirchweger durchaus nichts Gemeinschaftliches zu bestehen.

---

[1] Es wird eine Legirung von 59 Theilen Zinn, 13 Theilen Antimon und 9 Theilen Kupfer geschmolzen und in dünne Plättchen gegossen. $81\frac{1}{2}$ Theile von dieser Legirung werden darauf mit $88\frac{1}{2}$ Theilen Zinn eingeschmolzen und werden aus dieser neuen Legirung dann die Lager gegossen.

[2] Eine Legirung von 85 Theilen Blei mit 15 Theilen Antimon.

[3] Eine Legirung von 20 Theilen Kupfer, zwei Theilen Zinn, einem Theile Zink und einem Theile Blei.

Um indessen die Kirchweger'schen Versuchsresultate zu verstehen, muss vorher, wenn auch nur annähernd, der Werth der mittleren Temperatur der Schmierschicht bestimmt werden. —

Um diese Temperatur zu bestimmen setzen wir voraus, dass der Schenkel unter normalen Verhältnissen gelaufen ist, d. h. dass die Reibung so viel Wärme erzeugte, als die den Zapfen umgebenden Theile an Wärme absorbirten. Die bei den Versuchen entwickelte Wärmemenge ist leicht zu bestimmen; höchst schwierig ist jedoch aus der erzeugten Wärmemenge und aus der Temperatur der umgebenden Gegenstände die Temperatur der Schmierschicht zu bestimmen. Um sich indessen eine Idee von jener Temperatur zu machen, wollen wir, ähnlich wie Hirn, annehmen, dass die verloren gehende Wärmemenge durch das Product aus der Temperaturdifferenz x zwischen der Schmierschicht und der umgebenden Körper und dem Wärmeleitungscoefficienten Δ, d. h. durch

$$x \Delta$$

ausgedrückt werden kann.

Den annähernden Werth der Grösse Δ können wir auf Grund unserer eigenen vor einigen Jahren angestellten Versuche ermitteln. Ein gewöhnlicher Waggonachsenzapfen von ungefähr 80 Millimetern unterstützte ein Lager mit einer gewöhnlichen Waggonschmierbuchse. An die Buchse wurde eine Last angehängt. In dem Obertheile der Buchse, eben so wie bei dem Apparate von Thurston, war eine Oeffnung und darunter im Lager eine Vertiefung. In die Vertiefung war ganz genau ein kleines eisernes, mit Quecksilber gefülltes Gefäss eingepasst, in welches dann die Kugel eines Thermometers eingetaucht wurde. Bei einem der Versuche wurde der Zapfen mit Baumöl geschmiert, trug eine Last von 3260 Kilo, wurde ziemlich gleichmässig gedreht und machte in 32 Minuten 4324 Umdrehungen. Das Thermometer, welches anfänglich dieselbe Temperatur im Lager, wie in der äusseren Luft, nämlich 14,2° C. erwies, zeigte am Schlusse des Versuches 20° C. Das Gewicht der Zapfen mit dem Lager und der Buchse hat zusammen nicht mehr als 20 Kilo betragen. (Die Zapfen 6,75 Kilo, das Lager circa 3,25 Kilo und die Buchse ungefähr 10 Kilo.) Die mittlere Temperatur dieser drei Gegenstände ist nicht um mehr als 6° C. gestiegen, ihre Wärmecapacität konnte auf 0,1 geschätzt werden. Damit sich also ihre Temperatur um 6° C. erhöhe, mussten sie $0{,}1 \times 20 \times 6 = 12$ Wärmeeinheiten absorbiren. Die Reibung am Zapfen hat freilich bedeutend mehr Wärme erzeugt. Nach dem Versuche von Kirchweger mit Baumöl und mit einem Zinnlager bei einer Belastung von 8000 Pfund beträgt der Reibungscoefficient nicht weniger als 0,01, folglich war die Arbeit der Reibung bei einer Umdrehung des Zapfens nicht unter $32{,}6 \times \pi \times 0{,}08 = 8{,}2$ Kilogrammmeter. Es wurde also bei 4342 Umdrehungen nicht unter 35 000 Kilogrammmeter Arbeit erzeugt, welche 83 Wärmeeinheiten entsprechen. Hieraus ersehen wir, dass während der 32 Minuten die die Buchse umgebende Luft und insbesondere die Achse, welche die Verlängerung des Schenkels bildete, beinahe 71 Wärmeeinheiten absorbirten. Wenden wir nun auf den vorliegenden Fall die auf S. 121—125 angestellten Betrachtungen an, so gelangen wir zu der Ueberzeugung, dass nicht nur die mittlere, sondern auch die grösste Temperaturdifferenz der Schmierschicht und der abkühlenden Körper kaum 10° ausmachte; wir können daher behaupten, dass die Zahl der Wärmeeinheiten $\varDelta$, welche in einer Minute übertragen wurden,

$$\frac{71}{32 \times 10} = \text{beinahe } \frac{1}{4} \text{ war.}$$

Wahrscheinlich wurde bei dem Kirchweger'schen Apparate von den umgebenden Körpern nicht weniger Wärme absorbirt. —

Unter Berücksichtigung dieser Zahl wollen wir uns nun zu der Untersuchung der Kirchweger'schen Methode wenden.

Es sei

P der volle Druck eines Lagers auf den Zapfen, ausgedrückt in Kilogr.,

d der Zapfendurchmesser in Metern,

f der bezügliche Reibungscoefficient,

n die Umdrehungszahl pro Minute,

q die Zahl der Wärmeeinheiten, welche durch Reibung pro Minute erzeugt werden.

Da wir zwei Lager haben und da das mechanische Wärmeäquivalent gleich 425 Kilogrammmetern ist, so kann angenommen werden, dass

$$q = \frac{2\pi d f P}{425} \cdot n \quad \text{(28)}$$

Wird diese ganze Wärmemenge von den umgebenden Körpern absorbirt und ist die Differenz zwischen der Temperatur der Schmierschicht und derjenigen der umgebenden Körper gleich x, dann ist

$$x\,\varDelta = \frac{2\pi\, d f P}{425}\, n.$$

Ist t_0 die umgebende Lufttemperatur und t die Temperatur der Schmierschicht, dann kann anstatt der letzten Gleichung auch die folgende gestellt werden

$$t - t_0 = \frac{2\pi\, d f P}{425\,\varDelta}\, n.$$

Sind diese Werthe von d, P, f, n und $\varDelta$ bekannt, so kann die Temperaturdifferenz $t - t_0$ ohne Weiteres bestimmt werden.

Für die Kirchweger'schen Versuche kann angenommen werden $\varDelta = \frac{1}{4}$, $\pi d = 0{,}210$, $n = 180$. Setzen wir nun in die Gleichung (29) die Werthe von P und f aus den Tabellen XXI, XXIII und XXIV ein, so erhalten wir die entsprechenden Werthe von $t - t_0$.

Wir finden auf diese Weise für die Versuche der Tabelle XXI und

für die Belastungen . . . . 160; 260; 410; 510; 660; 760; 910; 1010 Pf.
die entsprechenden Werthe
von $(t - t_0)$ = ... 1,1; 1,3; 2,0; 2,2; 2,3; 2,3; 2,7; 2,5° C.

Für die Versuche der Tabelle XXIII und

für die Belastungen . . . . 2070; 4070; 6070; 8070 Pf.
die entsprechenden Werthe von $(t - t_0)$ 6,0; 12,2; 16,3; 20,9° C.

Endlich für die Versuche der Tabelle XXIV und

für die Belastungen . . . . 4070; 6070 und 8070 Pf.
die entsprechenden Werthe von $(t - t_0)$. 21,4; 33,4 und 44,2° C.

Die angeführten Tabellen zeigen, dass die Zahlen der Tabelle XXI Versuchen entsprechen, bei welchen die Temperaturen der Schmierschicht fast gleiche und zugleich keine hohen waren.

Was hingegen die Temperaturen der Schmierschicht bei denjenigen Versuchen anbetrifft, auf welche sich die Tabelle XXIV bezieht und für welche die Umdrehungszahl gleich 360 war, so sind dieselben bedeutend höhere als diejenigen, welche die Schmierschicht bei den der Tabelle XXIII entsprechenden Versuchen hatte, wobei die Umdrehungszahl nur 180 war. Uebertreffen also die Reibungscoefficienten der Tabelle XXIV die entsprechenden Coefficienten der Tabelle XXIII nicht, so kann dies keineswegs als eine Widerlegung der Gleichung (21 a) angesehen werden. Es beweist dies nur, dass die Verhältnisse, unter welchen die Versuche vorgenommen wurden, derartige waren, dass der Zahlenwerth des Bruches $\frac{\mu U}{\varepsilon}$ bei den Versuchen, welche die Tabelle XXIV darstellt, derselbe war, wie bei den durch die Tabelle XXIII ausgedrückten Versuchen, dass in Folge der Temperaturerhöhung μ derartig abgenommen und durch die Beschleunigung der Geschwindigkeit, vielleicht aber auch durch andere Ursachen, ε so stark zugenommen hat, dass der Quotient $\frac{\mu}{\varepsilon}$ eben so stark abnahm, als U grösser wurde. In Betreff derjenigen Coefficienten, welche zehn Umdrehungen pro Minute entsprechen, lässt sich nichts sagen, da dieselben von Kirchweger in der Beschreibung seiner Versuche nicht angeführt sind. Es muss daher die von uns gegebene Erklärung angenommen werden, weil wir bereits bewiesen haben, dass die Gleichung (21 a) in Bezug auf U nur insofern unrichtig sein könnte, dass der Exponent der Geschwindigkeit zu niedrig geschätzt wurde, keineswegs aber kann derselbe gleich Null angenommen werden, was eine unrichtige Erklärung der Kirchweger'schen Versuche bedingen würde. Der vierte Satz von Kirchweger kann also nicht als ein unbedingt richtiger angenommen werden. —

Die Behauptung Kirchweger's ad 3, dass der Reibungscoefficient von der relativen Belastung unabhängig sei, ist gleichfalls eine unrichtige. Bei den Versuchen, auf welche sich die Tabelle XXI bezieht, waren die Geschwindigkeiten eben so wie die Temperaturen fast unveränderliche; veränderlich waren nur die relativen Belastungen. Wahrscheinlich variirte dabei die Dicke der Schicht in dem Masse, wie sie von dem Drucke abhängig ist.

Behandeln wir die mittleren Reibungscoefficienten in Tabelle XXI als Functionen des Druckes pro Flächeneinheit, bezeichnen wir, wie früher, mit p und f die Belastung pro Flächeneinheit und den Reibungscoefficienten, mit p_1 und f_1 dagegen im Speciellen den Druck von 2,11 Atmosphären und den respectiven Reibungscoefficienten 0,0245, dann lässt sich das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den in Tabelle XXI enthaltenen Grössen von f und p, wie man sich leicht überzeugen kann, durch die folgende Gleichung ausdrücken

$$\frac{f_1}{f} = \sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

Die Genauigkeit dieser Gleichung ist aus nachstehender Tabelle ersichtlich.

Tabelle XXV.

Druck Atmosphären	2,11	3,42	5,40	6,71	8,69	10,01	11,98	13,30
$\frac{f_1}{f}$	1	1,47	1,49	1,64	2,03	2,33	2,38	2,85
$\sqrt{\frac{p}{p_1}}$	1	1,27	1,60	1,79	2,03	2,18	2,38	2,51

Die letzte Gleichung ergiebt die folgende

$$f = f_1 \sqrt{\frac{p_1}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

oder

$$f\sqrt{p} = f_1 \sqrt{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30\,a)$$

Ein ähnliches Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Reibungscoefficienten und den relativen Belastungen wird auch von Hirn angegeben.[1] Dieselbe Gleichung verbindet die Versuche von Hirn mit denjenigen von Kirchweger und von Thurston. Beispielsweise entspricht den Kirchweger'schen Versuchen mit Rüböl zufolge (vergl. Tabelle XXI) einem Drucke von 6,73 Atmosphären ein mittlerer Reibungscoefficient von 0,0149, folglich muss bei einem Drucke von $p = 0{,}1$ Atmosphäre, wie es bei den Versuchen von Hirn mit Olivenöl, welches dem Rüböle sehr ähnlich ist, der Fall war,

$$f = 0{,}0149 \sqrt{\frac{6{,}73}{0{,}1}} = 0{,}122 \text{ sein.}$$

Dieser Coefficient ist unwesentlich verschieden von den Reibungscoefficienten 0,1054 und 0,1414, welche in der Tabelle VIII der Geschwindigkeit 0,614 Meter und den Temperaturen $T = 40^0$ C. und $T = 35^0$ C. entsprechen. Diese Geschwindigkeit ist derjenigen bei den Versuchen von Kirchweger beinahe gleich und gehören die Temperaturen bei den Hirn'schen Versuchen durchaus nicht zu den hohen. Wohl ist es richtig, dass diese Coefficienten noch besser mit einander stimmen könnten, doch muss man berücksichtigen, dass das Kirchweger'sche Rüböl ziemlich merklich von dem Hirn'schen verschieden sein konnte.

Nach Tabelle XII zu beurtheilen, waren zwei Gattungen von

---

[1] Hirn. Études. S. 227.

Rüböl, welche Hirn untersuchte, um mehr als 10% von einander verschieden. Das von O. E. Meyer untersuchte Rüböl ergab sogar einen Coefficienten der inneren Reibung, welcher beinahe zwei Mal so gross war, als das von Coulomb untersuchte Oel.

Die Analogie zwischen den Versuchen von Hirn und denjenigen von Thurston finden wir mittelst der Tabellen XX und IX. Die Tabelle XX zeigt, dass bei Wallrathschmierung für $p_1 = 3{,}4$ Atmosphären $f_1 = 0{,}013$; da nun bei den Versuchen von Hirn $p = 0{,}1$ war, so sollte bei nicht zu hohen Temperaturen in der Hirn'schen Tabelle für Wallrath der Reibungscoefficient

$$f = 0{,}0130 \sqrt{\frac{3{,}4}{0{,}1}} = 0{,}0758$$

gefunden werden können. Obgleich wir nun nicht genau denselben Coefficienten in Tabelle IX finden, so können wir doch durch Interpolation ermitteln, dass derselbe der Temperatur 30° C. entspricht. Sehr wahrscheinlich ist es sogar, dass die Thurston'schen Versuche eben auf diese Temperatur bezogen wurden.

Für constante Grössen der Temperaturen und der Geschwindigkeiten kann das Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Dicke der Schicht und der relativen Belastung für alle diejenigen Fälle bestimmt werden, für welche die Gleichung (30) besteht.

Es bezeichne ε_1 eine gewisse mittlere Dicke der Schicht, p_1 und f_1 die entsprechenden Werthe des Druckes und des Reibungscoefficienten. Die Gleichungen (25) und (30) ergeben dann sofort

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p}} \text{ oder } \varepsilon\sqrt{p} = \varepsilon_1\sqrt{p_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Bei gleichen Temperaturen, bei gleichen Geschwindigkeiten und bei gleichen Schmierungsverhältnissen sind also die Dicken der Schmierschicht den Quadratwurzeln aus den relativen Belastungen umgekehrt proportional oder, was dasselbe ist, bei constanter Temperatur und bei constanter Geschwindigkeit ist das Product aus dem Zahlenwerthe der Dicke der Schicht mit der Quadratwurzel aus dem Zahlenwerthe des relativen Druckes für dasselbe Oel eine constante Zahl.

Ist die Temperatur der Schmierschicht gegeben, so können die absoluten Dicken der Schmierschichten, welche den in Tabelle XXI dargestellten Versuchen entsprechen, aus den Gleichungen (25) und (12 a) leicht berechnet werden. Unter Berücksichtigung der auf die

Tabelle XXI bezogenen kleinen Tabelle auf S. 156, darf $t = 18^0$ C. angenommen werden.

Wir erhalten auf diese Weise die Zahlen der nachstehenden Tabelle.

Tabelle XXVI.

Für p =	2,11	3,43	5,40	6,71	8,69	10,01	11,98	13,30
ε =	0,0470	0,0386	0,0247	0,0220	0,0209	0,0209	0,0178	0,0192

Eine noch grössere Analogie zwischen den Kirchweger'schen in Tabelle XXI und den Thurston'schen in Tabelle XX dargestellten Versuchen finden wir mittelst der Gleichungen (30) und (31).

Setzen wir den Ausdruck des Reibungscoefficienten mit Bezug auf die Versuche, welche die Tabelle XX darstellt, auf und bezeichnen alle in jenem Ausdrucke vorkommenden Grössen durch Buchstaben ohne Zeichen:

$$f = \frac{\mu U}{\varepsilon p}.$$

Mit Bezug auf die Tabelle XXI bezeichne man jene Grössen durch Buchstaben mit dem Zeichen $_1$, dann ist

$$f_1 = \frac{\mu_1 U_1}{\varepsilon_1 p_1}.$$

In Folge der Gleichungen (30) und (31) ist

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\mu U}{\mu_1 U_1} \sqrt{\frac{p_1}{p}}.$$

Wenn die Geschwindigkeiten und die Temperaturen sowohl bei den Versuchen von Thurston als auch bei denjenigen von Kirchweger unveränderliche waren, so müssen sowohl die Grössen μU und $\mu_1 U_1$, als auch deren Verhältniss zu einander constant sein.

Es sei

$$A = \frac{\mu U}{\mu_1 U_1}$$

jene Constante, dann ist

$$\frac{f}{f_1} = A \sqrt{\frac{p_1}{p}} \quad \text{oder } f = A \sqrt{\frac{p_1}{p}} \cdot f_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Wir sehen, dass man die von Thurston erhaltenen Reibungscoefficienten findet, wenn die Kirchweger'schen mit einer gewissen

Constanten und mit der Quadratwurzel aus dem umgekehrten Verhältnisse der relativen Belastungen multiplicirt. Um A bestimmen zu können, müssen die Grössen U und U_1, μ und μ_1 bekannt sein. Die Geschwindigkeiten U und U_1 sind gegeben, zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{\mu}{\mu_1}$ fehlen aber die Temperaturen; deshalb wollen wir die Grösse A aus der Vergleichung der Coefficienten und der Belastungen bei den ersten Versuchen, auf welche sich die Tabellen XX und XXI beziehen, ermitteln. Jene Vergleichung ergiebt für Wallrath

$$0{,}013 = A\sqrt{\frac{2{,}11}{3{,}4}} \times 0{,}0245 \text{ oder } A = 0{,}673$$

und für West-Virginiaöl

$$0{,}0213 = A\sqrt{\frac{2{,}11}{3{,}4}} \times 0{,}0245 \text{ oder } A = 0{,}103.$$

Setzen wir nun anstatt A in die Gleichung (23) die vorstehenden Werthe und anstatt p_1 und f_1 die Zahlen 2,11 und 0,0245 aus Tabelle XXI ein, so erhalten wir zwei Formeln: die eine für Wallrath und die andere für West-Virginiaöl. Führen wir in jede dieser Formeln anstatt p die entsprechenden Zahlen aus Tabelle XX ein, so erhalten wir die nachstehenden Werthe von f:

	$p =$	3,4	6,8	17,0	34,0	51,0
Wallrath	f nach Gleichung (32)	0,013	0,0092	0,0058	0,0041	0,0033
	f nach Tabelle XX	0,013	0,008	0,005	0,004	0,0043
West-Virginiaöl	f nach Gleichung (32)	0,0213	0,0151	0,0095	0,0067	0,0055
	f nach Tabelle XX	0,0213	0,015	0,009	0,0052	0,005

Wir sehen daraus, dass die Zahlen, welche mit Hilfe der Gleichung (32) erhalten wurden, sich sehr wenig von denjenigen unterscheiden, welche bei den Versuchen erhalten wurden. Berücksichtigen wir nun, wie schwierig es ist die Versuche genau auszuführen, insbesondere aber die Temperatur constant zu erhalten, und ziehen ausserdem noch in Betracht, dass bei einer Druckerhöhung jedenfalls eine, wenn auch nur geringe Temperaturerhöhung zu erwarten ist, so beweist der Umstand, dass die aus

Versuchen erhaltenen Reibungscoefficienten etwas kleiner als die berechneten sich erwiesen, die Richtigkeit der Gleichung (32) noch mehr.

Die letzten Betrachtungen haben uns also zu sehr wichtigen Resultaten geführt: wir haben drei ganz abgesonderte Gruppen von Versuchen, nämlich die von Hirn, von Thurston und von Kirchweger, welche bis jetzt nichts Gemeinschaftliches zu haben schienen, in eine harmonische Reihe, für welche ein und dieselben Gesetze gelten, gebracht. Diese Gesetze erweisen sich jedoch nur in gewissen, für jedes Oel verschiedenen Grenzen als richtige. Für Wallrath ist die Gleichung (32) in den Grenzen $0 < p < 34$ Atmosphären anwendbar, für das West-Virginiaöl dagegen in den Grenzen $0 < p < 51$ Atmosphären. —

Das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Reibungscoefficienten und den Belastungen pro Flächeneinheit stimmt mit den Tabellen XXIII und XXIV ganz und gar nicht.

Obgleich die Reibungscoefficienten, welche in Tabelle XXIII enthalten sind, derselben Geschwindigkeit wie in Tabelle XXI und Belastungen von 28 bis 111 Atmosphären entsprechen, unterscheiden sich doch dieselben von dem Coefficienten der Tabelle XXI, welcher der Belastung von 13,3 Atmosphären entspricht, fast gar nicht. Der Widerspruch zwischen den theoretischen Ableitungen und den Zahlen der Tabellen XXI und XXIII, welche aus Versuchen mit einer und derselben Oelgattung, so wie bei gleichen Geschwindigkeiten gewonnen wurden, muss den besonderen Schmierungsverhältnissen entsprechenden Wirkungen der Temperatur und der Dicke der Schicht zugeschrieben werden.

Um die beiden Grössen annähernd zu ermitteln, versuchen wir zunächst die Temperatur mit Hilfe der zwei kleinen Tabellen auf Seite 156 zu bestimmen.

Wir finden in denselben nur die Annäherungswerthe von $t - t_0$; uns fehlen also zur Bestimmung von t die Temperaturen t_0, über welche jedoch für die einzelnen Versuche die kleinen Tabellen gar keine Angaben enthalten; es ist nur so viel gesagt, dass die umgebende Lufttemperatur bei den Versuchen in den Grenzen -5^0 R. und $+25^0$ R. oder $-6{,}25^0$ C. und $+31{,}5^0$ C. eingeschlossen war; man kann aus den Tabellen nicht ein Mal ersehen, bei welcher Temperatur die meisten Versuche angestellt wurden; wahrscheinlich waren dieselben jedoch nicht viel verschieden von 15^0 oder 20^0 C.

Unter diesen Voraussetzungen können wir nach Gleichung (12 a) die entsprechenden Werthe von μ, und sodann nach Gleichung (25) mit Hilfe einer der Tabellen XXIII oder XXIV auch die entsprechenden Werthe der Dicke der Schmierschicht ε bestimmen. Die nachstehende Tabelle XXVII enthält diese Rechnungsresultate mit Bezug auf Tabelle XXIII.

Tabelle XXVII.

Gesammt-druck		Relativer Druck	Anzahl der Wärmeeinheiten	Temperatur-differenz	Für $t_0 = 15^0$ C.			Für $t_0 = 20^0$ C.		
Pfund	Kilogr.	Atm.								
P	P	p	q	x	t	μ	ε	t	μ	ε
2070	968	28,1	1,6	6,0°	21,0°	0,0000287	0,0062	26°	0,0000202	0,0044
4070	1903	56	3,15	12,2°	27,2°	0,0000187	0,0020	32,2°	0,0000141	0,0015
6070	2839	83,9	4,0	16,3°	31,3°	0,0000148	0,0012	36,3°	0,0000114	0,0009
8070	3774	111,2	6,7	20,9°	35,9°	0,0000167	0,0007	40,9°	0,0000927	0,0006

Diese Tabelle zeigt ohne Weiteres, dass die Dicke der Schicht ε sogar bei der Temperatur $t_0 = 15^0$ C. bedeutend geringer, als dies nach Tabelle XXVI unter Berücksichtigung der Gleichung (30) zu erwarten gewesen wäre, ausfällt. Für einen Druck von 28 Atmosphären sollte bspw. der Tabelle XXVI und der Gleichung (30) zufolge $\varepsilon = 0{,}014$ sein; die Tabelle XXVII ergiebt aber für ε den Werth 0,0062, welcher mehr als zwei Mal geringer ist. Es lässt sich dies aus einer etwaigen Unrichtigkeit in der Temperaturbestimmung t in Tabelle XXVII nicht gut erklären, denn wenn die Versuche bei nicht zu niedrigen Temperaturen vorgenommen wurden, worüber in der Beschreibung der Versuche gar nichts gesagt ist, so konnten die Temperaturen t_0 schwerlich niedrigere als die in Rechnung genommenen sein. Setzen wir andererseits voraus, dass die Versuche bei noch höheren Lufttemperaturen, als in der Tabelle angegeben ist, angestellt wurden, so finden wir auch höhere Temperaturen der Schmierschicht, und in Folge dessen noch kleinere Werthe von ε. Diese Betrachtungen veranlassen uns anzunehmen, dass bei der Gruppe von Versuchen, welche Kirchweger mit C bezeichnet, und welche wir in Tabelle XXIII anführen, das Lager nicht so an den Schenkel wie bei der anderen Gruppe, welche Kirchweger in dem dritten Abschnitte behandelt, und welche in

Tabelle XXI dargestellt sind, angepasst war. Wahrscheinlich wurde das Lager bei den sehr starken Belastungen an den Schenkeln besser angerieben, wodurch die Dicke der Schmierschicht um 0,007 Millimeter geringer werden konnte. Der grössere oder der geringere Grad der Genauigkeit, mit welcher das Lager an den Schenkeln angerieben ist, kann indessen den Unterschied zwischen den Tabellen XXVI und XXVII nicht ganz erklären. Betrachten wir diese Tabellen genau, so sehen wir sofort, dass die Temperaturen keinesfalls ohne Einfluss waren. —

Wir sehen also, dass die Versuche von Kirchweger nur schwer mit denjenigen von Hirn in Uebereinstimmung zu bringen wären; es würde sogar schwer fallen, zwei Versuchsserien von Hirn miteinander zu combiniren, wenn man annehmen würde, dass die Dicke der Schmierschicht eine völlig genaue Function der Temperatur derselben, des Druckes, welcher auf die Schicht ausgeübt wird, und der Geschwindigkeit, bei welcher die Schicht gebildet wird, sei. Die Temperatur, der Druck und die Geschwindigkeit bestimmen nur die obere Grenze, welche die Dicke der Schicht nicht überschreiten kann, verringern kann sich jedoch die Dicke der Schicht jederzeit, wie bspw. bei nicht genügend reichlicher Schmierung. Wahrscheinlich kann eine Abnahme der Dicke der Schicht auch in Folge anderer Ursachen eintreten, wie wir es bei den Untersuchungen der in Göttingen angestellten Versuche sehen werden. Die Prüfung dieser Versuche ist für uns auch in der Hinsicht eine höchst wichtige, weil die Reduction des Reibungscoefficienten f, wie solche durch die Gleichung (30) und durch die oben untersuchten Versuche bei einer Erhöhung des relativen Druckes bedingt wird, eine der wichtigsten Eigenschaften dieses Coefficienten ist. Das Thatsächliche dieser Eigenschaft muss durch möglichst mannigfaltige Versuche bewiesen werden.

Es ist daher nicht ausser Acht zu lassen, dass bei den Versuchen von Thurston und von Kirchweger die Erhöhung der relativen Belastung durch eine Erhöhung der vollen Belastung derselben Auflagerfläche erzielt wurde. Höchst wichtig wäre es also sich zu überzeugen, ob dasselbe Gesetz auch bei Veränderungen der relativen Belastung unter der Einwirkung derselben vollen Last auf die Auflagerflächen verschiedener Dimensionen bestehe? Diese Erscheinung lässt sich untersuchen und das Thatsächliche jener Eigenschaften lässt sich beweisen, wenn wir die in Göttingen erhaltenen[1] und in Tabelle XXVIII zusammengestellten Resultate durchsehen.

Tabelle XXVIII.

Volle Belastung Pfund	Flächeninhalt d. Auflagerfläche Quadratzoll	Relativ. Druck		Reibungscoefficienten bei Anwendung von			
		Pfund pro Quadratzoll	Anzahl Atmosphär.	Rothguss-lagern	Messing-lagern	Zinncom-positions-lagern	Hartblei-lagern
2500	17,9	140	11,1	0,00411	0,00515	0,00588	0,00819
	13,9	180	14,25	0,00398	0,00606	0,00555	0,00662
	11,0	227	18,0	0,00275	—	0,00397	0,00526
5000	17,9	280	22,2	0,00518	0,00653	0,00775	0,00826
	13,9	360	28,5	0,00575	0,00935	0,00729	0,00751
	11,0	454	36,0	0,00288	—	0,00409	0,00488
7500	17,9	420	33,3	0,00675	0,01250	0,01000	0,00901
	13,9	540	42,75	0,00699	0,00316	0,00934	0,00970
	11,0	681	54,0	0,00408	—	0,00386	0,00836
10000	17,9	560	44,4	0,01075	0,01310	0,01190	0,01124
	13,9	720	57,0	0,01000	0,01200	0,00991	0,01031
	11,0	908	72,0	0,00602	—	0,00530	—

Der bei den Versuchen in Göttingen angewendete Apparat ist von dem Thurston'schen und dem Kirchweger'schen wesentlich verschieden. Der Göttinger Apparat hatte nämlich nur ein Lager, das Oberlager, wohingegen das Unterlager gar nicht vorhanden war; deshalb verursachte die Belastung eine Biegung des Zapfens.

Dieser Umstand hat, wie wir später sehen werden, einen merklichen Einfluss auf den Reibungscoefficienten, was jedoch keineswegs wahrzunehmen verhindert, dass eine Erhöhung des relativen Druckes nicht nur bei geringen, sondern auch bei sehr grossen Belastungen den Reibungscoefficient stets vermindert.

Es wurden drei Achsen mit gleich starken Schenkeln von 4 Zoll Durchmesser versucht. Die Schenkellängen waren jedoch ungleiche, die eine betrug $8^1/_2$ Zoll, die andere 7 Zoll und die dritte 5 Zoll. Ein jeder von den drei Schenkeln wurde mit vier Lagern versucht, nämlich mit einem Rothgusslager, einem Messinglager, einem Zinncompositionslager und einem Hartbleilager.

---

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens. 1864. S. 16.

Tabelle XXIX.

Nr. des Zapfens	Volle Belastung	Auflagerfläche Quadratzoll	Relat. Druck		Reibungscoefficienten bei Anwendung von			
			Pfund pro Quadratzoll	Anzahl von Atmosph.	Rothgusslagern	Messinglagern	Zinncompositionslagern	Hartbleilagern
1	2500	11	227	18,0	0,00275	—	0,00397	0,00526
	5000		454	36,0	0,00288	—	0,00409	0,00488
	7500		681	54,0	0,00408	—	0,00386	0,00836
	10000		908	72,0	0,00602	—	0,00530	—
2	2500	13,9	180	14,25	0,00398	0,00606	0,00555	0,00662
	5000		360	28,5	0,00575	0,00935	0,00729	0,00751
	7500		540	42,75	0,00699	0,01316	0,00934	0,00970
	10000		720	57,0	0,01000	0,01200	0,00991	0,01031
3	2500	17,9	140	11,1	0,00411	0,00515	0,00588	0,00819
	5000		280	22,2	0,00518	0,00653	0,00775	0,00826
	7500		420	33,3	0,00675	0,01250	0,01000	0,00901
	10000		560	44,4	0,01075	0,01310	0,01190	0,01124
4	2500	13,2	190	15	0,00375	—	0,00518	0,00412
	5000		388	30	0,00495	—	0,00741	0,00529
	7500		570	45	0,00901	—	0,01219	0,00901
	10000		760	60	—	—	—	—

Jedes Lager wurde der Reihe nach mit Gewichten von 2500, 5000, 7500 und 10 000 Pfund belastet. Mit jeder einzelnen Belastung wurden zahlreiche Beobachtungen gemacht; die Zapfen wurden abwechselnd bald in einer, bald in der anderen Richtung gedreht und die Reibungscoefficienten für verschiedene Belastungen sowohl beim Uebergange von einem geringeren zu einem höheren Drucke als auch von einem höheren zu einem geringeren Drucke bestimmt. Die Tabellen XXVIII und XXIX enthalten die mittleren Werthe der Reibungscoefficienten, welche Geschwindigkeiten von 2, 4 und 8 deutschen Meilen pro Stunde oder ungefähr den Geschwindigkeiten an dem Schenkelumfange von 80, 160 und 360 Fuss pro Minute entsprechen; diese Reibungscoefficienten beziehen sich also auf eine Geschwindigkeit von ungefähr 160 Fuss pro Minute oder 0,78 Meter pro Secunde.

Die Tabellen XXVIII und XXIX stellen die Resultate ein und derselben Versuche nur in verschiedenen Gruppirungen dar, und sind zur Untersuchung der Wirkung der Geschwindigkeit oder der

Temperatur nicht geeignet, weil sie, wie schon erwähnt wurde, nur mittlere Werthe der Coefficienten enthalten, wobei jeder einzelne 120 doppelten Versuchen bei höchst verschiedenen Geschwindigkeiten entspricht. Von der Temperatur ist in der Beschreibung der Versuche nichts erwähnt, und kann also nur vermuthet werden, dass dieselbe eine gewöhnlich vorkommende war und von der äusseren Lufttemperatur weniger als bei den Versuchen von Kirchweger abwich, denn sowohl bei den Kirchweger'schen als auch bei den Göttinger Versuchen waren die relativen und die vollen Belastungen, wie auch die Geschwindigkeiten fast die gleichen; bei den Versuchen in Göttingen entwickelte sich aber die Wärme unter der Einwirkung eines einzigen mit einem gewissen Gewichte belasteten Lagers, wohingegen bei den Kirchweger'schen zwei Lager von fast gleicher Grösse, beide mit fast gleicher Kraft an den Schenkel angepresst, thätig waren. Wir sehen also ohne Weiteres ein, dass bei den Göttinger Versuchen weniger Wärme als bei den Kirchweger'schen entwickelt wurde. —

Die Tabelle XXVIII äussert eine viel beträchtlichere Verminderung des Reibungscoefficienten bei der Erhöhung des relativen Druckes, als dies aus Gleichung (30), welche mit Thurston's Resultaten übereinstimmt, zu schliessen wäre. Der Gleichung (30) nach sollte eine Erhöhung des relativen Druckes im Verhältnisse $\frac{18}{11,1} = \frac{36}{22,2} = \frac{54}{33,3} = \frac{72}{44,4} = 1,71$ eine Verminderung des Reibungscoefficienten in dem Verhältnisse $1 : \sqrt{1,71} = 1 : 1,3$ zur Folge haben, und nach Tabelle XXVIII (wenn man die Versuche mit Messinglagern unbeachtet lässt, weil mit denselben keine Versuche bei starken relativen Belastungen gemacht wurden) erhalten wir folgende Verhältnisse der mittleren Werthe der Reibungscoefficienten, entsprechend den grössten und den kleinsten relativen Belastungen:

Bei vollen Belastungen	2500	5000	7500	10000
Verhältn. d. Reibungscoeff. $n =$	1,52	1,91	1,85	2

Eine jede dieser Zahlen ist grösser als 1,3 und das mittlere Arithmetische 1,75 ist dem Verhältnisse der relativen Belastungen fast gleich. Nach diesen Zahlen zu urtheilen wäre also der Reibungscoefficient einfach der relativen Belastung umgekehrt proportional, und wenn dies richtig wäre, so müsste der Gleichung (21) zufolge der mittlere Werth der Dicke der Schmierschicht vom Drucke unabhängig sein. Eine solche Schlussfolgerung wäre aber eine unrichtige.

Die Veränderlichkeit der relativen Belastungen bei constanter voller Belastung war nicht der einzige Umstand, welcher bei jenen Versuchen die Reibungscoefficienten veränderte; die Vergrösserungen der relativen Belastungen, welche die Verminderung der Werthe der Reibungscoefficienten zur Folge hatte, wurden dadurch erzielt, dass bei den gleichen Zapfendurchmessern die Zapfenlängen verkürzt wurden; je kürzer nun der Zapfen wurde, um so weniger wurde derselbe von einer und derselben vollen Belastung gebogen; die Veränderlichkeit des Reibungscoefficienten war also die Folge der gleichzeitigen Wirkung eines erhöhten relativen Druckes und der Biegsamkeit des Zapfens. Die Tabelle XXIX zeigt, dass der Reibungscoefficient um so geringer war, je weniger der Zapfen gebogen wurde.

Aus den Versuchen von Hirn, von Thurston und von Kirchweger kann die Wirkung der Biegung nicht erkannt werden: aus den Versuchen von Hirn deshalb nicht, weil seine Trommel einem zu schwachen Drucke ausgesetzt war, um eine merkliche Biegung zeigen zu können; die Zapfen von Thurston und von Kirchweger konnten sich auch nicht biegen, weil die beiden Lager den Zapfen von entgegengesetzten Seiten mit fast gleicher Kraft zusammenpressten, daher denselben nicht biegen konnten. Der Hauptwerth der Göttinger Versuche besteht für uns darin, dass dieselben bis jetzt die einzigen sind, bei welchen die biegenden Kräfte ausreichend grosse und genügend verschiedene waren, um die Wirkung der Biegung des Schenkels auf den Reibungscoefficienten mit voller Deutlichkeit zeigen zu können.

Auf die angeführte Eigenschaft des Reibungscoefficienten wurde bis jetzt noch von Niemandem hingewiesen; dieselbe muss daher mit möglichster Klarheit erläutert werden.

Die in Göttingen versuchten Schenkel hatten folgende Abmessungen:

Nr. der Schenkel		1	2	3	4
Durchmesser	Zoll	4	4	4	$3^1/_2$
	Millim.	97	97	97	85
Länge	Zoll	$5^1/_2$	7	$8^1/_2$	$8^1/_2$
	Millim.	133	170	206	206.

Der Biegsamkeit nach verhalten sich diese Zapfen bei gleichen Werthen der Belastungen und bei einer gleichen Vertheilung derselben annähernd wie die Zahlen 1 : 1,8 : 3,7 : 6,7. Der Durchbiegungspfeil des am meisten biegsamen Zapfens Nr. 4 bei der ungünstigsten Belastung mit dem grössten Gewichte von 10000 Pfund = 4677 Kilo am Schenkelende ist nach der Formel

$$\frac{64 \times 4677 \times 206^3}{3\pi \times 85^3 \times 20000} = 0{,}27 \text{ Millim.}$$

Die thatsächliche Durchbiegung des Zapfens Nr. 4 ist eine viel geringere und auch die anderen Zapfen verbiegen sich noch viel weniger; so geringe aber auch diese Durchbiegungen sind, äussern dieselben trotzdem eine merkliche Wirkung auf den Reibungscoefficienten. Um die Wirkung dieser Elemente klar darzustellen, sind in der Tabelle XXIX die Reibungscoefficienten für jeden Zapfen einzeln zusammengestellt. Diese Tabelle zeigt mit einer auffallenden Klarheit, dass für einen und denselben Zapfen und für ein und dasselbe Lager bei gleicher Schmierung, kurz — unter gleichen Umständen (so weit es praktisch herzustellen ist) wird der Reibungscoefficient ein um so grösserer, als der Zapfen stärker gebogen wird. Wir finden freilich in der Tabelle unter Umständen Anomalien bzw. Widersprüche, es muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Lager eigentlich niemals vollständig egal angerieben waren; wahrscheinlich war das Lager des Zapfens Nr. 4 am besten an den Schenkel angerieben, und ergaben sich deshalb die vergleichnissmässig geringsten Reibungscoefficienten. Die Tabelle XXIX verdient um so mehr beachtet zu werden, weil sie die Wirkung der Biegung zum Vorschein bringt, trotzdem die Erhöhung des relativen Druckes bei einer Vergrösserung der vollen Belastung eines und desselben Lagers jene Wirkung der Biegung bei den Versuchen zu vermindern, ja sogar zu vernichten strebte. —

Hat nun die Biegung einen Einfluss auf die Grösse des Reibungscoefficienten (und davon überzeugt uns die Tabelle XXIX), so kann dies nur in Verbindung mit einer Veränderlichkeit der Dicke der Schmierschicht stattfinden. Die Wirkung der Biegung erwies sich aber als eine bedeutende, folglich ist auch die Wirkung der Dicke der Schicht sogar bei grossen Belastungen eine sehr beträchtliche. Daraus folgt, dass die Grösse ε im Nenner der Gleichung (21) eine viel grössere Bedeutung für den Reibungswiderstand als die Summe der anderen zwei Glieder $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ hat; diese Summe kann also vernachlässigt werden und der Reibungscoefficient für Maschinentheile durch die Gleichung (21 a) ausgedrückt werden d. h., wir haben das Recht zu schreiben:

$$f = \frac{\mu U}{\varepsilon p}.$$

Beim ersten Anblicke scheint es, als ob diese Gleichung mit den Tabellen XXVIII und XXIX, in welchen die Wirkung des Lagermetalles sehr klar auftritt, im Widerspruche stände, da die Gleichung (21)a kein Element enthält, welches die Wirkung dieses Umstandes auszudrücken vermag. Diese Ansicht ist indessen eine unrichtige, denn die Dicke der Schmierschicht, welche bei einem gewissen Drucke aufrecht erhalten wird, kann von den respectiven Eigenschaften des Schmiermittels und des geschmierten Materials abhängig sein. —

Schlussfolgerungen.

Die beschriebenen Versuche führen uns zu folgenden Thesen. Die Versuche von Hirn bestätigen die Gleichung (21)a genügend. Die anderen Versuche geben zwar keinen directen Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung, ihre Resultate lassen sich aber mit Hilfe der Gleichungen (21)a, (30) und (32) in Uebereinstimmung bringen.

Die Versuche liefern keine einzige Thatsache, welche mit der Gleichung (21)a im Widerspruche stände; alle scheinbaren Widersprüche lassen sich leicht durch die Wirkung der Temperatur und durch die höchst wahrscheinliche Verschiedenheit in dem Anpassen der Lager erklären. Die Gleichung (21)a kann und muss als eine richtige angenommen werden; eben so spricht Alles dafür, dass die Gleichung (30) für Rüböl bei einem Drucke nicht über 34 und für West-Virginiaöl bei einem Drucke von nicht über 51 Atmosphären eine richtige ist.

Gegenwärtig können wir also die höchst wahrscheinliche Behauptung aufstellen, dass für reichlich geschmierte Maschinentheile, in welchen das Aneinanderpassen der Reibungsflächen einen hohen Genauigkeitsgrad besitzt, der Reibungscoefficient

1) dem Coefficienten der inneren Reibung des flüssigen Schmiermittels bei der Temperatur der Schmierschicht und

2) der relativen Geschwindigkeit der sich reibenden Theile direct und

3) der wirklichen mittleren Dicke der zwischen den Reibungsflächen befindlichen Schmierschicht und

4) dem pro Flächeneinheit der Berührungsfläche ausgeübten Drucke umgekehrt proportional ist.

5) Bei constanter Temperatur ist die Dicke der Schmierschicht der Quadratwurzel aus der relativen Belastung der Berührungsfläche umgekehrt proportional.

6) Wir können also anstatt der Punkte ad 4 und ad 5 den folgenden aufsetzen, nämlich, dass bei constanter Temperatur der Reibungscoefficient der Quadratwurzel aus dem pro Flächeneinheit ausgeübten Drucke umgekehrt proportional ist.

7) Die Temperatur der Schmierschicht ist von den Eigenschaften des Schmiermittels, von der Geschwindigkeit, vom Drucke, von der Wärmeleitung der die Schmierschicht umgebenden Körper und von der umgebenden Lufttemperatur abhängig. — Für nicht beständig und ungenügend geschmierte Maschinentheile und für Maschinentheile, in welchen der Genauigkeitsgrad der Anpassung der sich reibenden Flächen kein hoher ist, ist der Reibungscoefficient ein grösserer als in den oben bezeichneten Fällen, und zwar in dem Masse, als der Zufluss der Schmiere ein geringerer oder der Ungenauigkeitsgrad der Anpassung der Reibungsflächen ein grösserer ist. Der zu berücksichtigende Ungenauigkeitsgrad der Anpassung der Reibungsflächen besteht nicht nur aus den beim Schleifen der Reibungsflächen unbeseitigten Unregelmässigkeiten, sondern auch aus den Formveränderungen, welche die sich reibenden Körper von den äusseren Kräften erleiden. —

In dem Masse, wie die Thesen über den Reibungscoefficienten richtige sind, müssen auch die aus denselben gewonnenen Ableitungen über den Reibungswiderstand bei der Bewegung der Maschinentheile richtige sein. — Wir führen hier diese Schlussfolgerungen in der Absicht an, um zeigen zu können, dass der Reibungswiderstand sich in einer ganz anderen Gestalt, als es gewöhnlich angenommen wird, vorstellt, und um einige bis jetzt noch unerklärte Erscheinungen zu erklären.

Es wird allgemein angenommen, dass der Reibungswiderstand dem Drucke proportional ist; wir wollen nun zeigen, dass dies nur unter gewissen, bei weitem nicht immer stattfindenden Verhältnissen der Fall ist. Dem Inhalte der Reibungsfläche wird, wenn derselbe genügend gross ist, um das Herauspressen der Schmiere zu verhindern, gewöhnlich gar keine Wirkung zugeschrieben; wir werden indessen sehen, dass diese Wirkung eine sehr merkliche ist, und dass der Reibungswiderstand ein um so grösserer ist, je grösser die Reibungsfläche wird. Die Temperaturwirkung wurde von einzelnen Gelehrten anerkannt, von anderen — nicht; Niemand hat aber die Temperaturwirkung auf den Reibungswiderstand streng zu bestimmen versucht, obgleich, wie wir es sogleich sehen werden, die bedeutende Wirkung der Temperatur auf den Reibungswiderstand sehr leicht zu bestimmen ist, freilich nicht für alle Oele und nicht für alle Temperaturen, jedenfalls aber für das Rüböl, das Olivenöl und für Wallrath in den Temperaturgrenzen zwischen 0^0 und 60 oder 70^0 C. —

Der Reibungswiderstand F ist der Belastung P dann proportional, wenn der Reibungscoefficient $\frac{\mu U}{\varepsilon p}$ unveränderlich bleibt.

Um aber diese Bedingung bei einer veränderlichen Belastung P zu erfüllen, ist es nothwendig,

1) dass $p = \frac{P}{Q}$ constant bleibe, d. h., dass der Inhalt der Auflagerflächen dasselbe Verhältniss zu der Belastung behalte und

2) dass der Werth von μ oder, was dasselbe ist, die Temperatur der Schmierschicht eine unveränderliche bleibe. Damit die Temperatur t der Schmierschicht eine Constante sei, muss die entwickelte Wärmemenge der vom Maschinentheile absorbirten immer gleich sein; wenn also Δ der Wärmeleitungscoefficient, t_0 die äussere Lufttemperatur und E der mechanische Wärmeäquivalent sind, so muss

$$\frac{\mu U^2 P}{\varepsilon p E} = \Delta (t - t_0)$$

sein.

Diese Gleichung zeigt, dass t nur dann constant bleiben kann, wenn t_0 veränderlich wird, und zwar in der Weise, dass t_0 abnimmt, wenn P grösser wird.

Die erste Bedingung lässt sich durch eine passende Einrichtung der für verschiedene Belastungen bestimmten Maschinentheile herstellen, wird aber ein Maschinentheil von verschiedenen Belastungen beansprucht, so kann ein constantes Verhältniss zwischen dem Normaldrucke und dem Reibungswiderstande nur dann eintreten, wenn eine jede Druckveränderung mit einer gleichzeitigen und entsprechenden Veränderung des Reibungsflächeninhaltes verbunden ist. Eine derartige Veränderlichkeit der Reibungsflächen ist jedoch keine übliche, daher können nur in verschiedenen Maschinen bei entsprechenden Temperaturen die Reibungswiderstände den Normalbelastungen proportional sein. —

Wenn F_1 und F die Reibungswiderstände bezeichnen, P_1 und P die entsprechenden Normalbelastungen bei einer constanten Geschwindigkeit U und bei einer constanten Auflagerfläche Q, so sind die entsprechenden relativen Belastungen $p_1 = \frac{P_1}{Q}$ und $p = \frac{P}{Q}$. Wir bezeichnen weiter die entsprechenden Temperaturen mit t_1 und t, die Coefficienten der inneren Reibung mit μ_1 und μ.

Die Reibungswiderstände lassen sich ausdrücken wie folgt:

$$F_1 = \frac{\mu_1 U}{\varepsilon_1 p_1} P_1 \quad \text{und} \quad F = \frac{\mu U}{\varepsilon p} P.$$

Dieselben stehen zu einander in einem Verhältnisse von

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon_1 p_1} \times \frac{\mu_1}{\mu} \times \frac{P_1}{P}.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (31) ergiebt die obige die folgende:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\mu_1}{\mu} \times \frac{P_1}{P} \times \sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Verhältniss $\frac{F_1}{F}$ nur dann dem Verhältnisse $\frac{P_1}{P}$ gleich ist, wenn die Temperaturen t und t_1 sich derartig unterscheiden, dass die Gleichung

$$\frac{\mu_1}{\mu} \sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1$$

besteht.

Ist aber $t = t_1$ und $\mu = \mu_1$, dann finden wir, wenn wir $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P_1}{Q}$ statt p und p_1 einsetzen, dass

$$\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{P_1}{P}}$$

d. h., dass die Reibungswiderstände den Quadratwurzeln aus den vollen oder eigentlich aus den Normalbelastungen proportional sind.

Ein fast gleiches Abhängigkeitsverhältniss wird auch zwischen den Reibungswiderständen und den Belastungen für den Fall bestehen, wenn die Temperaturen t und t_1 sich wenig von einander unterscheiden. Dieser Fall tritt ziemlich oft und mehr oder minder genau in den Maschinen ein. Wenn es sich also um keine sehr grosse Genauigkeit handelt, so kann die obige Gleichung angewendet werden. —

Wenn also die Bewegung einer Maschine bei einer gewissen Normalbelastung, bei einer constanten Geschwindigkeit, bei einer constanten Temperatur der äusseren Luft und bei einer reichlichen Schmierung stattfindet, und die Temperaturen in den verschiedenen Punkten der sich reibenden Theile sich unveränderlich erhalten, so lässt sich ein noch allgemeineres Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Reibungswiderstande und denjenigen Verhältnissen, welche denselben bestimmen, aufstellen. Für Rüböl können wir dieses Abhängigkeitsverhältniss mit Hilfe der Gleichungen (12)a und (31), von welchen die erstere die Abhängigkeit zwischen der inneren Reibung des Rüböls und der Temperatur, und die letztere diejenige zwischen der relativen Belastung und der Dicke der Schicht ausdrückt, aufsetzen. Den Versuchen von Hirn, welche wir in den Tabellen VIII, IX und X dargestellt haben, zufolge und laut der Bemerkung, dass die von Hirn erhaltene Gleichung auf alle von ihm versuchten Oele anwendbar sei, haben wir das Recht zu behaupten, dass auch die Gleichung (12)a auf jene Oele in den Temperaturgrenzen 0 und 73° bezogen werden darf.

Um das gesuchte Abhängigkeitsverhältniss durch eine Gleichung ausdrücken zu können, bemerke man, dass, wenn μ und t die innere Reibung des Rüböls und die entsprechende Temperatur und μ_1 die innere Reibung eines anderen Oeles bei derselben Temperatur ist, so ist

$$A\mu = \mu_1,$$

wobei A nach Tabelle XII zu bestimmen ist.

Bezeichnet nun ε_0 die Dicke der Schmierschicht bei einer reichlichen Schmierung und bei einem gewissen relativen Drucke p_0, so wird die Dicke der Schmierschicht ε für einen anderen relativen Druck p durch die Gleichung (31) ausgedrückt, d. h.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{p_0}}{\sqrt{p}}.$$

Wir wollen zur Abkürzung $\varepsilon_0 \sqrt{p_0} = \alpha$ bezeichnen, dann ist bei einer reichlichen Schmierung mit irgend einem Oele und bei einer völlig genauen Anpassung der Auflagerflächen der Reibungswiderstand gleich

$$\frac{A \mu U}{\alpha \sqrt{p}} P$$

oder, da

$$p = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{A \mu U}{\alpha} \sqrt{P} \sqrt{Q}.$$

Die Arbeit der Reibung pro Secunde wird also durch die Formel

$$\frac{A \mu U^2}{\alpha} \sqrt{P} \sqrt{Q}$$

ausgedrückt.

Die pro Zeiteinheit entwickelte Anzahl der Wärmeeinheiten wird einerseits dadurch erhalten, dass wir den letzten Ausdruck durch das mechanische Wärmeäquivalent E dividiren, und andererseits dadurch, dass wir die Temperaturdifferenz zwischen der Schmierschicht und zwischen der umgebenden Luft, d. h. $t - t_0$ mit dem Wärmeleitungscoefficienten Δ multipliciren. Wir können also für den Beharrungszustand der Bewegung die folgende Gleichung annehmen:

$$\frac{A \mu U^2}{\alpha E} \sqrt{P} \sqrt{Q} = \Delta (t - t_0) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

Die Grösse μ kann als eine Function der Temperatur durch die Formel

$$\mu = \frac{1}{a + bt + ct^2}$$

ausgedrückt werden. Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (34) ein, so erhalten wir:

$$\frac{A U^2}{\alpha \Delta E} \sqrt{Q} \sqrt{P} = (a + bt + ct^2)(t - t_0) \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Zugleich ist aber

$$\frac{F U}{E} = \Delta (t - t_0)$$

oder

$$t = \frac{F U}{E \Delta} + t_0 .$$

Setzen wir diesen Ausdruck für t in die Gleichung (35) ein, so ist

$$\frac{A\,U}{\alpha}\sqrt{Q}\sqrt{P} = \left\{a + b\left(\frac{F\,U}{E\,\Delta} + t_0\right) + c\left(\frac{F\,U}{E\,\Delta} + t_0\right)^2\right\} F.$$

Bezeichnen wir nun

$$\mu_0 = \frac{1}{a + b t_0 + c t_0^2}$$

und entwickeln alsdann die vorstehende Gleichung in Bezug auf F, so erhalten wir die Gleichung

$$F^3 + (b + 2 c t_0)\frac{E\,\Delta}{c\,U} F^2 + \frac{E^2\,\Delta^2}{\mu_0\,c\,U^2} F = \frac{A\,E^2\,\Delta^2}{\alpha\,c\,U}\sqrt{Q\,.\,P},$$

als den gesuchten Ausdruck für das Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Reibungswiderstande F und dem Normaldrucke P, wenn die Hilfsgrössen, welche in dieser Gleichung stehen, gegeben sind. —

Zur Ermittelung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen der Temperatur und der inneren Reibung der Mineralöle besitzen wir bis jetzt noch keine zuverlässigen Versuchsresultate, trotzdem diese Oele bereits ausserordentlich verbreitet sind und sowohl in Russland als auch im Auslande schon in vielen Fällen die Pflanzenöle verdrängt haben. Dieser Mangel an Versuchen benimmt uns die Möglichkeit die Abhängigkeit des Reibungswiderstandes von den verschiedenen Umständen bei der Mineralölschmierung zu zeigen. —

Bei noch nicht eingetretener Beständigkeit der Temperatur in allen Theilen einer Maschine, wie dies im Anfange der Bewegung, so lange die Maschinentheile erst auf Kosten der durch Reibung entwickelten Wärme bis zu ihrer Normaltemperatur erwärmt werden, stets der Fall ist, sind die Reibungswiderstände grösser als bei den Normaltemperaturen, welche dem Beharrungszustande der Bewegung entsprechen. Der Unterschied in dem Reibungswiderstande wird ein um so grösserer sein, je grösser die Temperaturdifferenz in den erwähnten zwei Fällen ist. —

Wenn gewisse Theile der Auflagerflächen sich unmittelbar berühren, andere jedoch durch eine Schmierschicht von einander abgesondert sind, so lassen sich die Reibungswiderstände gar keiner Bestimmung unterwerfen. Die Unmöglichkeit einer Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass es völlig unmöglich ist den Drucktheil zu bestimmen, welcher von den in unmittelbarer Berührung stehenden Reibungsflächen aufgenommen wird, und wie gross der auf den geschmierten Theilen lastende Druck ist. Die Kenntniss dieser Vertheilung der Totalbelastung ist aber unbedingt erforderlich.

Bezeichnet f_1 den Reibungscoefficienten des ungeschmierten Theiles bei einem Drucke P_1, und f_2 den Reibungscoefficienten des geschmierten Theiles bei einem Drucke P_2, dann müsste der Reibungswiderstand durch die Gleichung

$$F = f_2 P_1 + f_2 P_2$$

ausgedrückt werden oder, wenn P die volle Belastung bezeichnet.

$$F = \left(f_1 \frac{P_1}{P} + f_2 \frac{P_2}{P}\right) P.$$

Wäre $f_1 = f_2$ oder wäre wenigstens der Unterschied zwischen f_1 und f_2 ein geringer, so könnte man F, auch ohne das Verhältniss von P_1 und P_2 zu P zu kennen, ziemlich genau bestimmen; da jedoch die Werthe von f_1 und f_2 sehr verschiedene sein können, wie bspw. in dem Falle, wenn $f_1 = 0{,}2$ (S. 9) ist, so kann f_2 nur $0{,}01$ oder sogar $0{,}002$ betragen, und alsdann ist die Grösse F von den Werthen P_1 und P_2 wesentlich abhängig.

Es sei bspw. wenn $P_1 = 0{,}1\,P$; $P_2 = 0{,}9\,P$, $f_1 = 0{,}2$ und $f_2 = 0{,}004$, so ist $F = 0{,}0236\,P$. Für $P_1 = 0{,}9\,P$ und $P_2 = 0{,}1\,P$ hingegen ist bei den gleichen Werthen von f_1 und f_2

$$F = 0{,}1802\,P.$$

Der zweite Werth von F ist 7,6 Mal grösser als der erste. —

Alle von uns angeführten Thesen über die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten von verschiedenen Verhältnissen scheinen wohl ziemlich wahrscheinliche zu sein, können indessen keineswegs als unbedingt richtige Gesetze gelten.

Um diese Thesen entweder als falsche zu verwerfen oder aber als richtige Gesetze zu erklären, bedarf es neuer Versuchsresultate, welche für eine gründlichere Untersuchung als die bisherigen geeignet wären. Solche Versuche erscheinen als unumgänglich nöthige, um das Irren in so wichtigen Fragen, wie die Reibung der Maschinentheile ist (der Reibungscoefficient ist in den Maschinentheilen zwischen 0,0019 [Tabelle XVII] und 0,5083 [Tabelle XI], oder zwischen 1 und 250 veränderlich), zu beseitigen. Indem wir gegenwärtig nach den gebräuchlichen Regeln verfahren, können wir zuweilen bei der Bestimmung des Reibungscoefficienten und der Reibungswiderstände eines gewissen Maschinentheiles zehn- und mehrfach grössere als die wirklichen Werthe jener Grössen erhalten. Um den Reibungscoefficienten wenn auch nur für die günstigsten

Verhältnisse: wenn die Reibungsflächen vollkommen aneinander angeschliffen sind, wenn die äusseren Kräfte die Form der Reibungsflächen und deren Aneinanderpassen nicht alteriren, wenn ferner der Zufluss des Schmiermittels ein reichlicher ist, im Voraus bestimmen zu können, fehlen uns jetzt noch viele Kenntnisse. Wir müssen nämlich kennen:

1) Die Grösse der inneren Reibung der schmierenden Schicht bei einer bestimmten Temperatur.

2) Die Abhängigkeit der inneren Reibung der schmierenden Flüssigkeit von der Temperatur.

3) Die Abhängigkeit der Dicke der Schmierschicht von der Geschwindigkeit, von der Belastung pro Flächeneinheit der Berührungsfläche der sich reibenden Theile, von den Eigenschaften der geschmierten Metalle und von der Temperatur.

4) Das Gesetz der Wärmeleitung von der Schmierschicht in die umgebende Mitte. —

Erst wenn wir über diese Punkte Klarheit haben, können wir, und auch nur für den Fall eines absolut richtigen Anpassens der Auflagerflächen, ferner bei einer richtigen Schmierung, endlich bei einer Unveränderlichkeit der Berührungsflächen, den Reibungscoefficienten und den Reibungswiderstand bei einer beliebigen flüssigen Schmierung bestimmen, und zwar sobald die Geschwindigkeit der relativen Bewegung der Auflagerflächen, der pro Flächeneinheit derselben ausgeübte Normaldruck, die Eigenschaften der sich reibenden Metalle, die äussere Lufttemperatur und die Wärmeleitung der sich reibenden Theile gegeben sind.

Hiervon abgesehen, können wir dann auch noch die günstigsten Bedingungen bestimmen, bei welchen für ein gegebenes Schmiermittel die Arbeit der Reibung die geringste sein wird.

Ist diese letzte Frage für jede als Schmiermittel in Betracht kommende Flüssigkeit gelöst, so ist die Frage über die Wahl des Schmiermittels eine leicht zu beantwortende.

Mit der Lösung aller der im Vorhergehenden bezeichneten Fragen wird jedoch die Frage über die Reibung in ihrem vollen Umfange noch nicht gelöst, und viele wesentliche Fragen aus diesem Gebiete der Technik werden unbeantwortet bleiben.

In der Regel haben wir mit Maschinentheilen zu thun, deren Reibungsflächen gerade nicht den höchsten Grad von Genauigkeit in Bezug auf Anpassung und Anschleifen der Reibungsflächen besitzen.

In der täglichen Praxis kommen nicht vollständig genau angepasste Reibungsflächen oder durch den Einfluss äusserer Kräfte entstandene Alterationen genau angepasster Flächen vor. Die Schmiermittel werden ferner nur in seltenen Fällen vollständig gut an die Reibungsflächen herangebracht. Unregelmässigkeiten in dieser Hinsicht werden durch eine mangelhafte Functionirung der Schmierapparate oder durch einen ungünstigen Zustand der Lagerränder hervorgerufen. Für die Praxis sind die interessantesten diejenigen Reibungswiderstände, welche den wahrscheinlichsten Verhältnissen entsprechen, von welchen sowohl das Anpassen der Reibungsflächen, als auch der Zutritt der Schmiere zwischen die Reibungsflächen abhängig ist.

Es müssen also folgende Fragen erörtert werden:

1) Die Bedeutung der Gesammtheit schädlicher Verhältnisse vom gegenwärtigen Stande des Maschinenbaues aus.

2) Die Wirkung einer grösseren oder geringeren Genauigkeit, mit welcher die Flächen angepasst sind, auf den Reibungswiderstand.

3) Die Wirkung einer grösseren oder geringeren Biegsamkeit der Zapfen, so wie auch die Wirkung anderer ähnlicher Umstände auf den Reibungswiderstand.

4) Die Wirkung einer reichlichen oder spärlichen Schmierung.

5) Die Wirkung des Zustandes, in welchem sich die Lagerränder befinden.

Nur eine derartige umfassende und allseitige Erörterung der Frage kann den Reibungswiderstand in eine Reihe mit denjenigen Kräften stellen, über welche wir mehr oder minder nach unserem Belieben verfügen können. Diese Untersuchung wird uns weiter die Mittel geben den Reibungswiderstand in einer gegebenen Richtung zu vergrössern oder denselben zu vermindern; diese Untersuchung wird weiterhin unsere Irrthümer in Bezug auf die Fragen über die Reibung nachweisen, wird dieselben beseitigen und uns zeigen, auf welche Weise gewisse Aufgaben, bspw. die Frage über die Bestimmung der Zapfenabmessungen oder die Bestimmung des pro Einheit der Auflagerfläche ausgeübten Druckes, oder endlich die Frage über die Wahl des Lagermetalls, zu lösen sind. —

Bei der Bestimmung der Zapfendimensionen wird gewöhnlich der Zapfendurchmesser mit Rücksicht auf Festigkeit und mit Erwägung des Umstandes gewählt, dass die Wege der Angriffspunkte der Reibung, und daher auch die Arbeit dieses Widerstandes, um so geringere ausfallen, als der Durchmesser kleiner gehalten wird. Die Zapfenlänge wird in Abhängigkeit vom Durchmesser für verschiedene Metalle ungleich angenommen.

Releaux giebt bspw. die folgenden Formeln zur Bestimmung der Zapfenlängen an. Es bezeichnet in denselben

P den in Kilogrammen ausgedrückten, den Zapfen angreifenden Druck,
d den in Millimetern ausgedrückten Zapfendurchmesser,
l die Zapfenlänge.

Für Eisenzapfen ist alsdann

$$d = \frac{9}{8}\sqrt{P} \text{ und } l = 1{,}5\,d.$$

Für Stahlzapfen

$$d = 0{,}95\sqrt{P} \text{ und } l = 1{,}78\,d.$$

Die verhältnissmässige Biegsamkeit dieser für eine und dieselbe Belastung bestimmten Zapfen lässt sich durch ihre Durchbiegung bei einer gleichmässigen über die ganze Länge vertheilten Belastung bestimmen. Die Durchbiegung f wird als Function von P und vom Elasticitätsmodul E durch die Formel

$$f = \frac{8\,Pl^3}{\pi\,E\,d^4}$$

ausgedrückt. Den angeführten Formeln zufolge wird die Durchbiegung für Eisenzapfen gleich

$$f = \frac{24}{\pi E}\sqrt{P}$$

und für Stahlzapfen

$$f_1 = \frac{47{,}5}{\pi E}\sqrt{P}.$$

Da der Elasticitätsmodul für Eisen und für Stahl derselbe ist, so zeigen die obigen Formeln, dass bei jenen Dimensionen Stahlzapfen zweimal grössere Durchbiegungen geben als Eisenzapfen. In gleicher Weise verhalten sich die Durchbiegungen der Zapfen Nr. 1 und Nr. 2, denn bei gleichen Zapfendurchmessern verhalten sich die Durchbiegungen wie die dritten Potenzen ihrer Längen, d. h. wie $(5{,}5)^3$ zu 7^3 oder wie 166 zu 343. Die Reibungscoefficienten des Zapfens Nr. 1 sind fast $1^3/_4$ Mal geringere als diejenigen des Zapfens Nr. 2. Diese Vergleichung gestattet anzunehmen, dass, indem wir mit Releaux's Formeln rechnen, wir für Stahlzapfen fast die $1^3/_4$fache

Reibung im Vergleiche zu den Eisenzapfen erhalten, dagegen wird bei gleichen Umdrehungszahlen die Arbeit der Reibung an Stahlzapfen eine in demselben Verhältnisse grössere sein, als $1^3/_4 . 0{,}95$ grösser als $^9/_8$ ist, d. h. eine 1,5fach grössere.

Wir sehen also ohne Weiteres ein, dass wenn neue gut angeordnete Versuche die in Tabelle XXIX angeführten Zahlen bestätigen werden, eine Verminderung der Zapfendurchmesser für Stahl im Vergleiche zu Eisen, wegen der grösseren Festigkeit des ersteren in der Absicht eine Verminderung der Arbeit der Reibung zu erzielen das entgegengesetzte Resultat ergeben wird.

Da nun die eben angeführte, bei der Construction der Zapfen gebräuchliche Verfahrungsweise, welche in der Praxis nur in Folge unserer mangelhaften Kenntnisse der Reibungsgesetze besteht, sehr wahrscheinlich überall die Arbeit der Reibung vergrössert, so bietet dieser Umstand an und für sich einen triftigen Grund, die gedachte Verfahrungsweise zu untersuchen und ein derartiges Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Kräften, den Geschwindigkeiten und den Abmessungen zu ermitteln, bei welchen die Zapfenreibung am geringsten ausfällt. —

Der Druck pro Einheit der Auflagerfläche wird gegenwärtig entweder rein empirisch, oder öfters auch ohne Regeln nach persönlicher Anschauung bestimmt. Die Frage ist aber keineswegs eine unwichtige. Es wurde bereits bewiesen, dass der Reibungscoefficient bei grösseren relativen Belastungen sehr oft, wenn nicht immer, ein geringerer wird. Der Werth der günstigsten relativen Belastung wird sich erst nach einer gründlichen Untersuchung der Frage über die Reibung ermitteln lassen. Die Untersuchungsweise wird die folgende sein.

Wir bezeichnen:

$\varphi(t)$ eine Function der Temperatur, welche die innere Reibung der gegebenen schmierenden Flüssigkeit ausdrückt;

$\psi(u, p, t, c)$ eine Function, welche die Dicke der Schmierschicht ε in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit u, vom relativen Drucke p, von der Temperatur t und vom Biegsamkeitsgrade des Zapfens c ausdrückt.

Es ist alsdann der Reibungscoefficient gleich

$$\frac{\varphi(t)\,u}{\psi(u, p, t, c)\,p}.$$

Es sei P die Kraft, welche das Lager an den Zapfen andrückt, dann ist die Arbeit der Reibung pro Secunde gleich

$$\frac{\varphi(t)\, u^2}{\psi(u, p, t, c)\, p} P.$$

Es sei ferner $\varDelta$ der Coefficient der Wärmeleitung des Maschinentheiles und t_0 die Lufttemperatur. Für den Beharrungszustand, wenn die durch Reibung entwickelte Wärmemenge der von der umgebenden Mitte absorbirten gleich wird, können wir also, wenn E das mechanische Wärmeäquivalent ist, die Gleichung

$$\varDelta(t - t_0) = \frac{\varphi(t)\, u^2 P}{\psi(u, p, t, c)\, E\, p}$$

schreiben.

Aus dieser Gleichung können wir t als Function von u, p, t, c, P, $\varDelta$ und t_0 ableiten, alsdann können wir den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck für t in die Formel für die Arbeit der Reibung, nämlich in die Formel

$$\frac{\varphi(t)\, u^2 P}{\psi(u, p, t, c)\, p}$$

einsetzen, und dann denjenigen Werth von p bestimmen, für welchen die Arbeit der Reibung die geringste wird. Wir sehen also ein, dass p nicht für alle vollen Belastungen P, nicht für alle Geschwindigkeiten u, nicht für alle Biegsamkeiten c, nicht für alle Lufttemperaturen t_0 denselben Werth besitzt. —

Die Frage in Betreff der Wahl des Lagermetalles wurde schon oft aufgeworfen, bis jetzt aber noch nicht gelöst; sie konnte dem Wesen der Sache nach auch nicht gelöst werden, weil die Wirkung des Lagermetalls sich gleichzeitig mit den anderen Wirkungen äussert und weil man ferner nicht verstand die verschiedenen Wirkungen von einander zu trennen. So gelangte man in verschiedenen Fällen zu widersprechenden Resultaten: Kirchweger erhielt bspw. für Stahl- und Eisenzapfen bei Rübölschmierung die folgenden Reibungscoefficienten: bei Anwendung von Zinncompositionslagern und Hartbleilagern 0,0090 bis 0,0099, bei Anwendung von Rothgusslagern im Mittel 0,0141. Hieraus ergiebt sich, dass der Reibungscoefficient bei Rothgusslagern ein 1,5 Mal grösserer als bei Zinnlagern ist. Die Göttinger Versuche (das Schmiermittel wird nicht angegeben) lieferten ein entgegengesetztes Resultat. Die Tabelle XXIX zeigt, dass die mittleren Werthe aller Reibungscoefficienten bei Anwendung von Rothgusslagern 0,00584, bei Zinncompositionslagern 0,00931 betragen. Die letzte Zahl ist eine 1,25 Mal grössere als die erstere. Da die Verhältnisse, unter welchen die Versuche von Kirchweger und die Göttinger gemacht wurden, sehr verschiedene waren, so ist es sehr schwer zu sagen, was eigentlich der Wirkung des Lagermetalls (obgleich dasselbe nach den gleichen Anweisungen bei beiden Versuchen gegossen wurde) und was anderen Wirkungen zuzuschreiben ist. —

Die Unvollständigkeit der bisherigen Versuche macht neue Versuche unzweifelhaft nothwendig. Was dabei zu bestimmen sein wird, haben wir bereits angegeben, was aber die Einrichtung dieser neuen Versuche anbelangt, so kann dieselbe im Wesentlichen leicht angegeben werden.

1) Das Abhängigkeitsverhältniss zwischen dem Coefficienten der inneren Reibung und der Temperatur kann entweder mittelst der Coulomb'schen Torsionswage nach dem Meyer'schen Verfahren oder mit Hilfe des Poiseuille'schen Apparates bestimmt werden; der letztere ist jedenfalls der einfachere. Bei der Bestimmung des Coefficienten der inneren Reibung für verschiedene Temperaturen mit Hilfe des Poiseuille'schen Apparates ist es unbedingt erforderlich genau zu untersuchen, ob das Poiseuille'sche Gesetz auf den gegebenen Fall genügend sicher angewandt werden kann.

2) Zur Untersuchung des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen der Dicke der Schmierschicht ε und dem relativen Drucke, ferner der Geschwindigkeit v und der Temperatur t, muss ein Apparat ähnlich wie der Thurston'sche construirt werden, in welchem der Zapfen unter der Wirkung der Belastung des Lagers nicht gebogen werden kann. Der Zapfen muss hohl construirt werden, um mit Hilfe eines Wasserstrahles von innen erwärmt oder abgekühlt werden zu können. Die Schmiermittel müssen durch besondere Canäle dem oberen und unteren Lager zugeführt werden. Es muss ferner die Möglichkeit gegeben sein die Schmiere reichlich an beide Lager gelangen zu lassen. Die Umdrehungsgeschwindigkeit des Zapfens muss während des Versuches mit möglichster Genauigkeit gemessen werden. Die Berührungsflächen der Lager mit dem Zapfen müssen möglichst genau aneinander geschliffen sein.

Mit diesem Apparate muss in erster Linie das Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Temperatur T des Thermometers, dessen Kugel in die Höhlung des Lagers eingestellt ist, und der Temperatur t

der Schmierschicht oder von der Temperatur an der Zapfenoberfläche, welche sich von der mittleren Temperatur der Schmierschicht wenig unterscheidet, sowie auch von der umgebenden Lufttemperatur t_0 bestimmt werden.

Mit Hilfe eines solchen Apparates, für welchen das Abhängigkeitsverhältniss zwischen den Temperaturen bekannt ist, kann die mittlere Dicke der Schmierschicht für verschiedene Flüssigkeiten und die Abhängigkeit derselben vom Drucke, von der Geschwindigkeit und von der Temperatur bestimmt werden. Es versteht sich von selbst, dass bei der Untersuchung der Wirkung dieser Variabeln dieselben einzeln verändert werden müssen, wobei die anderen unverändert gelassen werden. Bezeichnen wir bspw. die relativen Belastungen, die Geschwindigkeiten und die Temperaturen, bei welchen die Versuche beabsichtigt werden, mit

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots\dots\dots & p_i \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots\dots\dots & u_n \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots\dots\dots & t_m \end{matrix}$$

so wird die Zahl der Versuche durch

$$N = i \cdot m \cdot n$$

ausgedrückt.

Es ist klar, dass N sehr stark wächst, wenn die einzelnen Zahlen i, m, n grösser werden. Bezeichnen wir die Zahl der zu versuchenden Oele mit s und die Zahl der Lagermetalle mit w, so wird die Zahl der Versuche gleich

$$N_1 = w \cdot s \cdot i \cdot m \cdot n.$$

Man hat nur vorauszusetzen, dass eine jede der Zahlen w, s, i, m und n gleich 4 ist, um zu sehen, dass die für die Versuche erforderliche Zeit eine sehr lange ist, denn

$$N = 4^5 = 1024.$$

Die Zahl der wirklich auszuführenden Versuche muss freilich eine noch grössere sein, denn jede Versuchsreiche muss behufs Verificirung ihrer Richtigkeit wiederholt werden.

Nachdem die Dicke der Schmierschicht bei einer reichlichen Schmierung bekannt ist, müssen neue Versuche bei spärlicher Schmierung angestellt werden.

3) Die Wirkung der Durchbiegung der Zapfen muss an einem

Apparate mit nur einem Oberlager untersucht werden. In diesem Apparate muss wieder das Abhängigkeitsverhältniss zwischen der Temperatur der Schmierschicht und der umgebenden Lufttemperatur bestimmt werden. Man wird sodann Versuche mit solchen Kräften anstellen müssen, welche den Zapfen merklich biegen. Eine Vergleichung der Versuchsresultate für den Fall, wo der Zapfen eine Durchbiegung erleidet, mit den Versuchsresultaten für nicht gebogene Zapfen, gewährt dann die Möglichkeit, die Wirkung der Durchbiegung zu bestimmen.

Dies ist das Charakteristische der auszuführenden Versuche. —

Die eben so wie die wissenschaftlichen nothwendigen **technischen** Versuche werden zum Gegenstande der Untersuchung die Bestimmung der Wirkung der Wärmeleitung eines gegebenen Maschinentheiles, des ungenauen Anpassens der Reibungsflächen und des ungenügenden Zuflusses der Schmiermittel haben.

Die Wärmeleitung bedingt die Temperatur der Schmierschicht und hat immer eine sehr grosse Bedeutung, denn bei allen Schmierflüssigkeiten wechselt die innere Reibung bei selbst geringen Temperaturveränderungen sehr bedeutend. Da die Wärmecapacität eben so wie die Wärmeleitung der Maschinen und der Maschinentheile, mit welchen die Prüfungen der Schmiermittel angestellt wurden, völlig unbekannt waren, so liegt darin eben die Ursache, warum die Versuchsresultate mit einer bestimmten oder mit einer anderen Versuchsmaschine mit den praktischen Resultaten beim technischen Gebrauche einer gewissen Schmiere zuweilen in einem auffallendem Widerspruche stehen.

Verschiedene Maschinentheile haben je nach ihrer Construction eine sehr verschiedene Wärmecapacität und Wärmeleitung. Unter gleichen Umständen der Zuströmung von Wärme erhalten jene Theile sehr verschiedene Temperaturen. Ist bspw. in einer gewissen Maschine die Temperatur der Reibungsflächen gleich 20^0, in einer gewissen anderen gleich 30^0, so wird bei Rübölschmierung der Coefficient der inneren Reibung und in Folge dessen bei sonst gleichen Umständen auch der Reibungswiderstand in den zwei Fällen sich wie 1 zu 2 verhalten. Auf welche Weise die Wärmecapacität und die Wärmeleitung bestimmt werden müssen, darüber werden wir hier nicht sprechen; dies gehört nicht mehr unter das Charakteristische der Versuche, sondern schon zu den Versuchen selbst. Der mangelhafte Zufluss der Schmiere kommt daher, dass für gewisse Maschinentheile noch kein Apparat erfunden worden ist, welcher die Schmiere gleichmässig an die Reibungsfläche heranführt. Die Wirkung des ungleichmässigen Zuflusses des Schmiermittels wurde schon lange bemerkt, um jedoch dieselbe noch mehr hervorzuheben, wollen wir uns der Worte von Hirn bedienen.

Hirn untersuchte nämlich verschiedene Versuchsmethoden und giebt den Rath, die Untersuchungen der Eigenschaften der Schmiermittel in der Weise vorzunehmen, dass die Schmierung eine reichliche sei.

Dann sagt Hirn weiter: „Wir sehen aber, dass dieses Verfahren eigentlich mit den gewöhnlichen Verhältnissen, bei welchen die Reibung unserer Maschinentheile vor sich geht, nichts Gemeinschaftliches hat; kein Maschinentheil wird in dieser Weise (reichlich) geschmiert, und aus dem Umstande, dass ein gewisses Oel in solchen Verhältnissen sich als ein gutes erwies, haben wir gar kein Recht zu schliessen, dass dasselbe auch als Maschinenschmiere ein eben so gutes sein wird. Was sage ich! Wir dürfen nicht einmal behaupten, dass es als Maschinenschmiere verwendet werden kann. In der ersten Zeit meiner Versuche habe ich mich in diesem Punkte zu oft geirrt."

Die Wirkung des Anpassens wurde bereits zu wiederholten Malen gezeigt.

Bei den technischen Versuchen, nachdem die Wärmecapacität und die Wärmeleitung bestimmt worden sind, kann nach den Formeln der Reibungscoefficient für jede Oelsorte bei sehr reichlicher Schmierung und bei einer vollkommenen Genauigkeit der Anpassung bestimmt werden.

Es müssen dann nachträglich noch Massregeln getroffen werden, um bei den Versuchen möglichst genau all die in der Praxis vorkommenden Schmierungs- und Anpassungsverhältnisse nachzuahmen.

Diese Verhältnisse lassen sich gar keiner genauen Bestimmung unterwerfen, denn die einem einzelnen speciellen Falle entsprechenden Verhältnisse werden gewiss mehr oder weniger von denjenigen verschiedene sein, welche einem so zu sagen Durchschnittsfalle entsprechen. Jeder Versuch wird ein Resultat liefern, welches von dem Durchschnittsversuche in der einen oder anderen Richtung abweicht.

Die Wirkung dieser Fehler wird sich nur durch eine sehr grosse Zahl von Versuchen beseitigen lassen. Es ist hierbei nothwendig, dass jeder Umstand, welcher das Beobachtungsresultat zu alteriren vermag, auch effectiv wirksam gemacht werde, und dabei in demselben Verhältnisse zu den anderen Wirkungen, wie dies in der Praxis der Fall ist.

Auf die Einzelheiten der Versuche werden wir hier nicht näher eingehen.

Februar 1883.