

# **Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben**

Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Stirnrad-  
und Planetengetrieben

**Michael Karl Heider**

Vollständiger Abdruck der von der  
Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Stahl  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. B.-R. Höhn, i.R.  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. H. Ulbrich

Die Dissertation wurde am 02.07.2012 bei der Technischen Universität München eingereicht  
und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 20.09.2012 angenommen.

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8439-0767-5

© Verlag Dr. Hut, München 2012  
Sternstr. 18, 80538 München  
Tel.: 089/66060798  
[www.dr.hut-verlag.de](http://www.dr.hut-verlag.de)

Die Informationen in diesem Buch wurden mit großer Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden. Verlag, Autoren und ggf. Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für eventuell verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

Alle Rechte, auch die des auszugsweisen Nachdrucks, der Vervielfältigung und Verbreitung in besonderen Verfahren wie fotomechanischer Nachdruck, Fotokopie, Mikrokopie, elektronische Datenaufzeichnung einschließlich Speicherung und Übertragung auf weitere Datenträger sowie Übersetzung in andere Sprachen, behält sich der Autor vor.

1. Auflage 2012

## Vorwort

Vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente, Forschungsstelle für Zahnräder und Getriebebau (FZG) der Technischen Universität München. Grundlage dieser Arbeit bilden durch die Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. geförderte Forschungsvorhaben aus den Arbeitskreisen „Geräusche“ und „Berechnung und Simulation“.

Mein besonderer Dank gilt an dieser Stelle Allen, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben. Insbesondere danke ich ...

... meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd-Robert Höhn für die Möglichkeit an der FZG zu arbeiten und zu promovieren.

... Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich für die Durchsicht der Arbeit und die Übernahme des Koreferats.

... Herrn Prof. Dr.-Ing. Karsten Stahl für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes und die Möglichkeit weiterhin an der FZG zu arbeiten.

... meinem Forschungsgruppenleiter Dr.-Ing. Michael Otto für den Gestaltungsspielraum innerhalb seiner Forschungsgruppe, die freundschaftliche Atmosphäre und das entgegengebrachte Vertrauen.

... Herrn Dr.-Ing. Peter Oster für die Durchsicht der Arbeit, die zahlreichen fachlichen Gespräche und die Unterstützung, die er mir zukommen ließ.

... meinen Zimmerkollegen Thomas Griggel, Jens Bihl, Stoyan Radev und Benedikt Neubauer, für die zahlreichen gemeinsamen Diskussionen und die freundschaftliche Atmosphäre.

... allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern sowie Kolleginnen und Kollegen für das angenehme Arbeitsklima.

... meiner Familie, deren Förderung und Unterstützung mir erst die Möglichkeit gaben diesen Weg zu gehen.

Oberottmarshausen, im November 2012

*Michael Otto*



**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Problemstellung und Ziel der Arbeit</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand des Wissens</b> .....	<b>5</b>
2.1	Die Anregung als Ursache für Schwingungen und Geräusch ..	6
2.2	Einflussgrößen auf die Anregung einer Verzahnung .....	8
2.2.1	Einfluss der Verzahnungssteifigkeit .....	9
2.2.2	Einfluss der Verzahnungskorrekturen und -abweichungen .....	10
2.3	Rechnerische Kenngrößen zum Anregungsverhalten .....	14
2.3.1	Drehwegabweichung unter Last für $n \mapsto 0$ .....	14
2.3.2	Quasistatische Kraftanregung für $n \mapsto \infty$ .....	18
2.3.3	Dynamische Zahnkraft für Betriebsdrehzahl $n$ .....	24
2.4	Anregung mehrstufiger Getriebe .....	28
2.5	Anregung von Planetengetrieben .....	29
<b>3</b>	<b>Das Anregungsverhalten von Stirnrad- und Planetengetrieben</b> .....	<b>31</b>
3.1	Berechnungsgrundlagen für die Stirnradstufe .....	31
3.1.1	Zahnpaar- und Verzahnungssteifigkeit .....	31
3.1.2	Flankenfeingestalt aus Korrekturen und Abweichungen .....	33
3.1.3	Berechnung der Drehwegabweichung unter Last .....	34
3.1.4	Berechnung der Kraftanregung .....	37
3.1.5	Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen .....	39
3.1.6	Numerische Methode der dynamischen Simulation .....	41
3.2	Anwendung der Grundlagen auf die Planetenradstufe .....	48
3.2.1	Anregung der Planetenradstufe auf Grundlage der Kraftanregung .....	50
3.2.2	Anregung der Planetenradstufe auf Grundlage der Drehwegabweichung zwischen Sonne und Hohlrad .....	55
3.2.3	Eigenfrequenzen und Eigenformen der Planetenradstufe .....	64

<b>4</b>	<b>Messtechnische Ermittlung des Schwingungsverhaltens im FZG-Dynamikprüfstand .....</b>	<b>69</b>
4.1	Prüfaufbau und Messtechnik .....	69
4.2	Zahnrad- und Betriebsdaten .....	73
4.3	Auswertung der Messergebnisse hinsichtlich Anregung .....	74
4.3.1	Drehwegmessung unter Last bei kleiner Drehzahl .....	75
4.3.2	Beschleunigungsmessung bei veränderlichen Drehzahlen ....	78
<b>5</b>	<b>Der Anwendungskraftpegel als Kennwert zur anwen- dungsnahen Bewertung der Anregung .....</b>	<b>85</b>
5.1	Anwendungskraftpegel für die Stirnradstufe .....	86
5.2	Anwendungskraftpegel für die Lagerkraft- und Drehmomen- tenanregung der Planetenradstufe .....	95
<b>6</b>	<b>Auslegung anregungsarmer Stirnrad- und Planetenrad- stufen .....</b>	<b>97</b>
6.1	Optimierung der Anregung durch geeignete Wahl der Verzah- nungshauptgeometrie .....	98
6.1.1	Anwendung auf die Stirnradstufe .....	99
6.1.2	Übertragung auf die Planetenradstufe .....	106
6.2	Optimierung der Anregung durch geeignete Wahl der Verzah- nungsfeingeometrie .....	109
6.2.1	Verzahnungskorrekturen - Zielsetzung und Wirkungsweise ....	110
6.2.2	Erweiterte topologische Korrekturen .....	113
6.2.3	Zum Einfluss von Fertigungsabweichungen .....	118
6.2.4	Übertragung auf die Planetenradstufe .....	121
6.3	Topologische Korrekturen unter dem Blickwinkel optimaler Anregung, Tragfähigkeit und Wirkungsgrad .....	122
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>129</b>
7.1	Zusammenfassung .....	129
7.2	Ausblick .....	131
	<b>Literatur .....</b>	<b>133</b>

## Zeichen und Einheiten

Zeichen	Einheit	Benennung
$\bar{F}$ ( <i>ord</i> )	[N]	gemittelte Amplitude für die Ordnung <i>ord</i>
$D$	[-]	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$F_i$	[N]	Amplitude der Kraftanregung $F_z(t)$ der <i>i</i> -ten Ordnung
$F_z$	[N]	Verzahnungskraft (statisch)
$F_{Flin}$	[dB]	Anregungsamplitudenpegel für die <i>i</i> -te Ordnung
$F_{L^i_{ord}}$	[N]	Amplitude der Lagerkraftanregung $F_L(t)$ der <i>i</i> -ten Ordnung
$F_{Vz, PiH}$	[N]	Verzahnungskraft der Verzahnung zwischen dem <i>i</i> -ten Planeten und dem Hohlrad
$F_{Vz, SPi}$	[N]	Verzahnungskraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem <i>i</i> -ten Planeten
$F_{z, dyn, i}$	[N]	Amplitude der dynamischen Zahnkraft $F_{z, dyn}(t)$ der <i>i</i> -ten Ordnung
$F_{z, dyn}$	[N]	dynamische Verzahnungskraft
$F_z(t)$	[N]	Kraftanregung
$K_V$	[-]	Dynamikfaktor
$L_A$	[dB]	Anregungspegel
$L_{A, F}$	[dB]	Anwendungskraftpegel
$L_{Ai}$	[dB]	Anregungsamplitudenpegel für die <i>i</i> -te Ordnung
$L_{F, dyn}$	[dB]	dynamischer Kraftpegel
$L_{FL}$	[dB]	Lagerkraftpegel
$L_{FZ, dyn}$	[dB]	dynamischer Zahnkraftpegel
$L_{FZ}$	[dB]	Zahnkraftpegel
$N$	[-]	Dyn. Bezugsdrehzahl
$P(f)$	[W]	Amplitude der Schalleistung
$Sh_{\ddot{U}}$	$\left[ \frac{m^4}{(s \cdot N)^2} \right]$	Körperschallmaß
$V_i$	[-]	Vergrößerungsfunktion für die Frequenz der <i>i</i> -ten Ordnung
$V$	[-]	Vergrößerungsfunktion
$\Delta_0$	[-]	angestrebte max. Abweichung
$\Delta$	[-]	Abweichung
$\Phi$	[kgm <sup>2</sup> ]	Massenträgheitsmoment
$\eta$	[mPas]	Viskosität
$\hat{F}(f)$	[N]	Amplitude der strukturanregenden Kraft
$\omega_{eig, k}$	$\left[ \frac{1}{s} \right]$	Eigenkreisfrequenz
$\sigma(f)$	[-]	Abstrahlmaß
$\underline{F}(t)$	[N]	Äußerer Kraftvektor

wird fortgesetzt

Zeichen	Einheit	Benennung
$\ddot{x}(t)$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Beschleunigungsvektor
$\dot{x}(t)$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\underline{F}}(t)$	$[-]$	Kraftvektor im Zustandsraum
$k_i$	$[-]$	Runge-Kutta-Faktoren
$x(t)$	$[m]$	Ortsvektor
$z$	$[-]$	Zustandsvektor
$\underline{\underline{A}}$	$[-]$	Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{\underline{B}}$	$[-]$	Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{\underline{C}}(t)$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{EV}}$	$[-]$	Matrix der Eigenformen
$\underline{\underline{E}}$	$[-]$	Einheitsmatrix
$\underline{\underline{K}}(t)$	$\left[\frac{Ns}{m}\right]$	Dämpfungsmatrix
$\underline{\underline{M}}$	$[kg]$	Massenmatrix
$\varepsilon_\alpha$	$[-]$	Profilüberdeckung
$\varphi$	$[rad]$	Winkelposition eines Bauteils
$\varrho_L$	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Luftdichte
$a$	$[mm]$	Achsabstand
$b$	$[mm]$	Verzahnungsbreite
$c_\gamma$	$\left[\frac{N}{mm \cdot \mu m}\right]$	mittlere bezogene Verzahnungssteifigkeit
$c_k^*$	$[-]$	bezogene Kopplungssteifigkeit nach Sattelberger [100]
$c_L$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Schallgeschwindigkeit in Luft
$c_{PiH,j}$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeit der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt unter Berücksichtigung der Quersteifigkeit zwischen den Berührungspunkten eines Zahnpaars
$c_{SPi,j}$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeit der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt unter Berücksichtigung der Quersteifigkeit zwischen den Berührungspunkten eines Zahnpaars
$c_{verz,dyn}(t)$	$\left[\frac{N}{\mu m}\right]$	dyn. Verzahnungssteifigkeit
$c_{zi}(t)$	$\left[\frac{N}{\mu m}\right]$	lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$
$f_E$	$[Hz]$	Eigenfrequenz
$f_z$	$[Hz]$	Zahneingriffsfrequenz
$f_{Vz,PiH,j}$	$[N]$	Einzelkraft der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt
$f_{Vz,SPi,j}$	$[N]$	Einzelkraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt
$f$	$[Hz]$	Frequenz

wird fortgesetzt



Zeichen	Einheit	Benennung
$i_{ord}$	[–]	Zahneingriffsordnung
$i$	[–]	Übersetzung
$n_{Son}$	$[min^{-1}]$	Drehzahl der Sonne
$n_{Steg}$	$[min^{-1}]$	Drehzahl des Stegs
$n_{ord}$	[–]	maximale Zahneingriffsordnung
$n_o (ord)$	$[U/min]$	obere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_o$	$[U/min]$	obere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$n_{pl}$	[–]	Anzahl der Planeten
$n_u (ord)$	$[U/min]$	untere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_u$	$[U/min]$	untere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$n$	$[min^{-1}]$	Drehzahl
$ord$	[–]	Ordnung
$q$	[–]	Durchmesser Verhältnis $\frac{r_i}{r_a}$
$r_b$	$[m]$	Grundkreisradius
$s_{Vz}$	$[m]$	Verzahnungsauslenkung bezgl. Eingriffsrichtung
$s_{\varphi}(t)$	$[rad]$	Drehwegabweichung des Planetengetriebes in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt $t$
$v_t$	$[\frac{m}{s}]$	Umfangsgeschwindigkeit
$x(t)$	$[\mu m]$	Drehwegabweichung in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt $t$
$x_i$	$[\mu m]$	Amplitude der Drehwegabweichung der $i$ -ten Ordnung
$x_{Ai}$	$[mm]$	Anregungsamplitude
$x_{Rad}(t_n)$	$[\mu m]$	Position des Rades bez. auf die Eingriffsstrecke
$x_{Ritzel}(t_n)$	$[\mu m]$	Position des Ritzels bez. auf die Eingriffsstrecke
$x_{fi}(t)$	$[\mu m]$	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung
$z$	[–]	Zähnezahl



# 1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Zahnradgetriebe stellen wichtige Elemente der mechanischen Leistungsübertragung dar. Als Drehmoment- und Drehzahlwandlungselemente sind sie unverzichtbare Schlüsselemente in den vielfältigsten Anwendungsgebieten. Diese unterschiedlichen Anwendungsgebiete stellen neben einem zuverlässigen Betrieb auch immer höhere Anforderungen bezüglich der Schwingungs- und Geräuschanregung.

Neben Stirnradgetrieben werden in zahlreichen Anwendungen aufgrund ihrer höheren Leistungsdichte auch vermehrt Planetengetriebe eingesetzt. Durch die innere Leistungsverzweigung dieser Getriebe ist hier eine bessere Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Bauraums und ein geringeres Gewicht möglich. Die innere Leistungsverzweigung führt allerdings auch zu einer kinematischen Kopplung mehrerer Verzahnungsstufen im Planetengetriebe und somit zu einer gegenseitigen Beeinflussung dieser Stufen. Für die Beurteilung des Schwingungsverhaltens wird meist die Schwingungsanregung des Planetengetriebes auf andere Bauteile als relevant angesehen.

In der Auslegungsphase können heute Tragfähigkeit und Lebensdauer der Bauteile eines Getriebes bereits sehr gut rechnerisch ermittelt und somit zuverlässig ausgelegt werden. Gerade in dieser Phase ist auch eine Vorhersage der zu erwartenden Schwingungsemissionen des Gesamtgetriebes notwendig. Dies erfordert umfangreiche Erfahrungen im Bereich der Schwingungsanregung von Verzahnungen. Darüber hinaus ist es notwendig, das Anregungsverhalten unterschiedlicher Verzahnungen zu bewerten und durch den Vergleich des Anregungsverhaltens von Verzahnungen eine optimierte Verzahnungsauslegung zu ermöglichen.

Zur Beurteilung der Schwingungsanregung werden heute in zunehmendem Maße Softwareprogramme verwendet, die auf Basis unterschiedlich detaillierter Berechnungsansätze verschiedene Größen ermitteln, die zur

Beurteilung herangezogen werden können. Teilweise werden diese Berechnungsgrößen in Kenngrößen zur Verzahnungsanregung zusammengefasst, die dann zur Auslegung und Optimierung des Anregungsverhaltens verwendet werden. Die Randbedingungen und Bildungsparameter, die den Berechnungsalgorithmen sowie den Bildungsvorschriften zugrunde liegen und somit deren Aussage maßgeblich beeinflussen, sind in dieser Anwendung nicht immer präsent, so dass die aus den Berechnungsergebnissen gewonnenen Schlussfolgerungen unter Umständen nicht vollständig zutreffen.

Zur rechnerischen Beurteilung des Anregungsverhaltens von Getrieben ist es somit notwendig, die Bewertung des Anregungsverhaltens von Getrieben anschaulich und durchgängig zu gestalten, um in der Auslegungsphase die Anwendbarkeit zu verbessern. Hierzu ist es notwendig, die Berechnungsergebnisse zu unterschiedlichen Entwicklungsstadien aus unterschiedlichen Berechnungsmethoden bzw. einer Schwingungsmessung einheitlich zu bewerten. Die Parameter, die dieser Bewertung zugrundeliegen, sind hierbei möglichst anschaulich zu wählen.

Die Bewertung des Schwingungsverhaltens von Zahnradgetrieben, von den ersten Auslegungen einer Verzahnung bis hin zur Interpretation von Schwingungsmessdaten, stellt den Schwerpunkt dieser Arbeit dar. Die Vergleichbarkeit solcher Daten über den gesamten Entwicklungsprozess erfordert hierbei eine einheitliche Behandlung von Berechnungs- und Messergebnissen. Bislang erfolgt die Auslegung von Verzahnungen bezüglich Tragfähigkeit und Schwingungsanregung nahezu ausschließlich nach statischen Gesichtspunkten. Hierdurch werden fundamentale Eigenschaften dynamischer Schwingungssysteme vernachlässigt, die bereits durch einfache quasistatische Betrachtungen näherungsweise behandelt werden können.

Ziel dieser Arbeit ist es Beurteilungsgrößen zur anwendungsbezogenen Bewertung des Schwingungsverhaltens während der gesamten Entwick-

lungsphase und über dem gesamten Betriebsbereich einer Verzahnung zu erhalten. Diese Beurteilungsgrößen stellen eine erweiterte Möglichkeit dar, das Schwingungsverhalten von Getrieben zu beurteilen. Die Beurteilung erfolgt hierbei unter besonderer Berücksichtigung des Anwendungsfalles (Last, Drehzahlbereich, Frequenzbereich) im Getriebe. Durch die Weiterentwicklung vorhandener Rechenverfahren wird die Grundlage zur Bewertung der Schwingungsanregungen für Stirn- und Planetenradgetriebe sichergestellt. Durch die Anwendung dieser Rechenverfahren und die anschließende Bewertung der Ergebnisse mit dem entwickelten Bewertungsverfahren ist eine effiziente Optimierung des Schwingungsverhaltens von Verzahnungen möglich.

Die rechnerischen Ergebnisse der Anregungsbeurteilung und Optimierung wurden laufend durch experimentelle Untersuchungen an einem Messprüfstand validiert, wodurch eine Vergleichbarkeit der Berechnungsergebnisse mit experimentellen Untersuchungsergebnissen sichergestellt werden kann.

Zur Bewertung des Anregungsverhaltens wird ein Auswertungsalgorithmus auf der Datenbasis eines Campbelldiagramms verwendet, der eine Beurteilung des Schwingungsverhaltens für eine Last und einen Drehzahl- und Frequenzbereich erlaubt. Diese Datenbasis kann aus unterschiedlichen Berechnungsmethoden erstellt werden. Diese unterschiedlichen Berechnungsmethoden für Stirnrad- und Planetengetriebe werden dokumentiert und weiterentwickelt. Die Besonderheiten der Schwingungsanregung von Planetengetrieben, die aus der kinematischen Kopplung der Getriebestufen resultieren, werden dargestellt. Hierdurch ist es möglich Stirnrad- und Planetengetriebe mit einem einheitlichen Kennwert in allen Entwicklungsstufen bezüglich des Schwingungsanregungsverhaltens zutreffend zu beurteilen.

Die dargestellte Beurteilungsmethode stellt die Grundlage für die geeignete Auslegung anregungsarmer Verzahnungen dar. Im Rahmen dieser Ar-

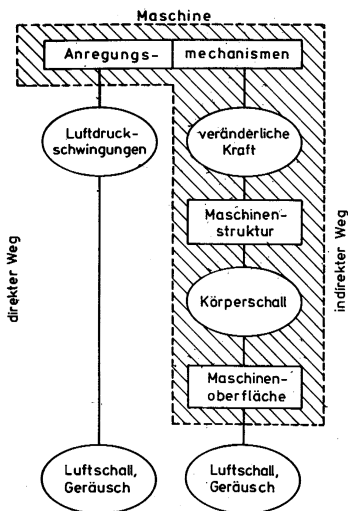
beit wird eine Vorgehensweise zur optimierten Auslegung von Verzahnungen entwickelt. Weiterhin werden die Auswirkungen wesentlicher Größen auf das Anregungsverhalten entwickelt und diskutiert. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Untersuchung der Korrelierbarkeit der Auslegungsgrößen mit den Ergebnissen von Messdaten, was die Empfindlichkeit unterschiedlicher Verzahnungen auf Fertigungsabweichungen als wesentlichen Punkt beinhaltet. Durch die Berücksichtigung solcher Empfindlichkeiten ist eine zuverlässig anregungsarme Auslegung von Verzahnungen möglich, deren Anregungseigenschaften auch messtechnisch nachvollzogen werden können bzw. die eine geeignete Toleranzauswahl für die Zeichnungsvorgabe ermöglichen.

Da die vielfältigen Ziele der Verzahnungsauslegung, die beispielsweise neben der Tragfähigkeit und der Anregung auch Wirkungsgradaspekte enthalten, teilweise unterschiedliche Forderungen an eine optimierte Verzahnungskorrektur stellen, besteht diese optimale Korrektur aus einem Kompromiss unterschiedlichster Anforderungen. Durch Aufweitung der vielfach verwendeten Standardkorrekturen zu topologischen Korrekturen über dem Eingriffsfeld bestehen erweiterte Möglichkeiten die unterschiedlichen Zielvorgaben in einer Verzahnungskorrektur zu vereinen. Zur Auslegung einer solchen optimierten topologischen Korrektur mit unterschiedlichsten Zielvorgaben sind zahlreiche bestehende Auslegungsmethoden miteinander zu kombinieren und zu verknüpfen.

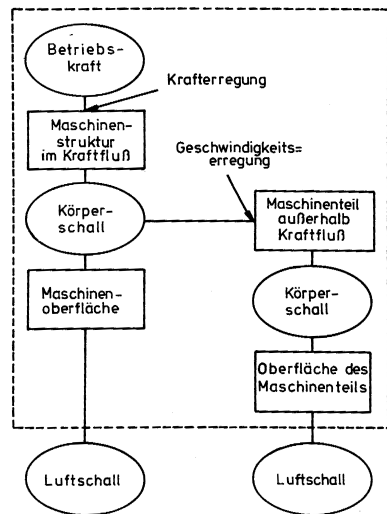
Somit werden im Rahmen dieser Arbeit die Berechnungsmöglichkeiten zur Anregungsbeurteilung von Stirn- und Planetengetrieben weiterentwickelt und eine Methodik zur zutreffenden anwendungsbezogenen Beurteilung dieser Rechenergebnisse formuliert. Hierdurch können Verzahnungen in Stirn- und Planetengetrieben bezüglich des Anregungsverhaltens optimiert ausgelegt werden.

## 2 Stand des Wissens

Untersuchungen des Geräuschverhaltens von Getrieben finden sich in zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten. Neben rechnerischen Analysen zur Ursache der Geräuschemission existieren auch zahlreiche empirische Untersuchungen zum Geräuschverhalten unterschiedlicher Getriebe. Schwerpunktmäßig sollen hier die Hauptursachen der Geräuscentstehung von Zahnradgetrieben, die Anregung aus den Verzahnungen und deren Auswirkungen in Form von Körperschallschwingungen betrachtet werden.



(a) Entstehungsmechanismen von Maschinengeräuschen

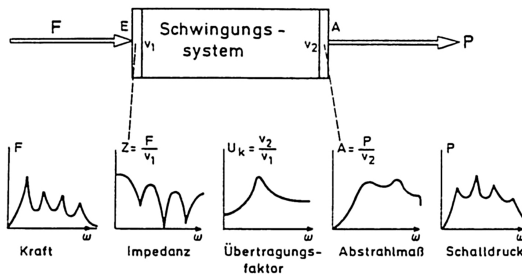


(b) Schema zur indirekten Entstehung von Maschinengeräuschen

**Bild 1:** Entstehungsmechanismen von Maschinengeräuschen (nach [30]).

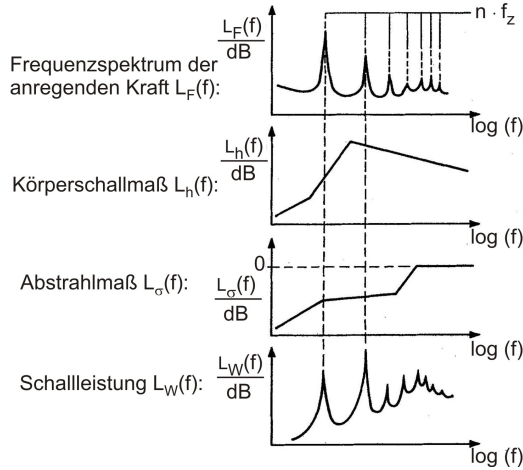
## 2.1 Die Anregung als Ursache für Schwingungen und Geräusch

Maschinengeräusche werden durch periodische Anregungsmechanismen verursacht. Nach Föller [30] (**Bild 1(a)**) führen diese auf direktem und indirektem Wege zu Geräuschen in Form von Luftschall. Beim direkten Weg verursacht eine Anregungsquelle unmittelbar Luftdruckschwankungen, die sich in Form von Luftschall ausbreiten können. Nach Linke [74] weisen diese direkten Schallabstrahlungsmechanismen für übliche Getriebe einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Geräuschverhalten auf, da diese durch das Getriebegehäuse abgeschirmt werden. Für das Geräuschverhalten von Getrieben kann demnach weitgehend der indirekte Weg aus **Bild 1(a)** als maßgeblich betrachtet werden. Bei dieser indirekten Schwingungsübertragung wird eine zeitlich veränderliche Betriebskraft in eine Maschinenstruktur eingeleitet, wo sie in Form von Körperschall zur Oberfläche, die den Luftschall abstrahlt, weitergeleitet wird (siehe **Bild 1(b)**). Diese Weiterleitung durch das Schwingungssystem wird von Föller [29] in die entsprechenden beeinflussenden Parameter aufgeteilt. So wird die einleitende Kraft  $F$  in Abhängigkeit der Eingangsimpedanz  $Z$  in eine Körperschallschnelle  $v_1$  umgesetzt. Diese wird in Abhängigkeit der Körperschallübertragungsfunktion  $U_k$  [108] bzw. des Übertragungsfaktors [29] bis zur Körperschallschnelle  $v_2$  an der Austrittsstelle weitergeleitet. Hier erfolgt die



**Bild 2:** Schwingungsübertragungskette nach Föller [29]





**Bild 3:** Schwingungsübertragungskette für Zahnradgetriebe nach Müller [80]

Abstrahlung in Abhängigkeit des Abstrahlmaßes [29] bzw. des Abstrahlgrades [108] in Luftschall, der in Form von Schalldruck wahrgenommen wird. Alle dargestellten Größen weisen eine ausgeprägte Frequenzabhängigkeit auf. Müller [80] und Linke [74] zeigen einen ähnlichen Zusammenhang für die Kraftanregung in Zahnradgetrieben und deren Übertragung bis hin zum Luftschall, der in **Bild 3** dargestellt ist. Storm [108] ermittelt für die dargestellten Übertragungsgrößen auf Basis experimenteller Untersuchungen entsprechende Werte, die das Übertragungsverhalten auch von Getriebegehäusen abbilden.

Die Maßnahmen zur Verminderung von Geräuschemissionen werden in primäre und sekundäre Maßnahmen unterteilt [73]. Während primäre Maßnahmen die Anregung an der Quelle reduzieren, wird bei sekundären Maßnahmen die Weiterleitung des Schalls beeinflusst.

Neben der direkten Anregung in der Verzahnung ist das dynamische Systemverhalten des Antriebsstranges eine wesentliche Einflussgröße für das zu erwartende Geräuschverhalten. Für parametererregte Schwingungssysteme wie Zahnradgetriebe können neben Parameterresonanzen

zen auch Kombinationsresonanzen mehrerer Eigenfrequenzen auftreten [26, 65, 67, 75, 78], wobei diese bei Zahnradgetrieben in der Regel geringe Wirkungen aufweisen [66]. In diesem Rahmen werden deshalb Kombinationsresonanzen sowie Stabilitätsuntersuchungen des parametererregten Schwingungssystems nicht weiter behandelt.

## 2.2 Einflussgrößen auf die Anregung einer Verzahnung

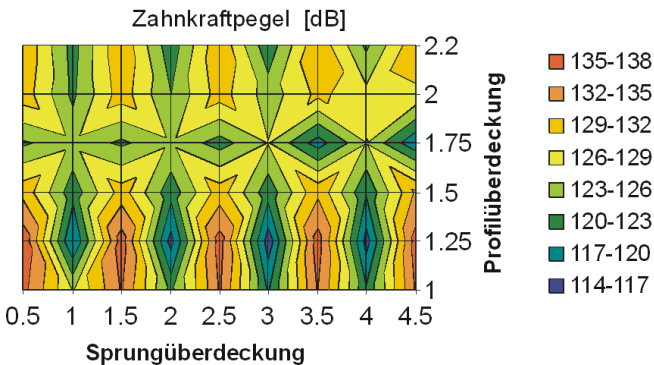
Das Geräuschverhalten von Zahnradgetrieben wird wesentlich von der Anregung der Laufverzahnungen beeinflusst. Alle Verzahnungen weisen eine Schwingungsanregung auf. Diese wird nach [39, 41, 48, 49, 51, 74, 80, 84, 91, 94, 99] maßgeblich durch folgende Punkte verursacht:

- die veränderliche Verzahnungssteifigkeit. Die Verzahnungssteifigkeit stellt das Verhältnis zwischen dem Last- und dem Verformungsverhalten innerhalb einer Verzahnung dar [104, 116].
- Abweichungen der Verzahnungskontur von der exakten Evolventengeometrie. Diese Abweichungen können gezielt in Form von Verzahnungskorrekturen oder durch Fertigung oder Montage des Getriebes entstehen.
- Verformungen und Verlagerungen der Zahnräder. Diese können beispielsweise durch lastbedingte Verformungen des Welle-Lager-Systems entstehen.
- die Oberflächenstruktur und Rauheit der Zahnflanken
- die Überdeckungsvergrößerung unter Last durch vor- und nachzeitigen Zahneingriff und dem hieraus resultierenden Ein- und Austrittsstoß
- die Reibkraftumkehr am Wälzkreis

## 2.2.1 Einfluss der Verzahnungssteifigkeit

Die Verzahnungssteifigkeit setzt sich aus den Steifigkeiten aller im Eingriff befindlichen Zahnpaare (Zahnpaarsteifigkeit) zusammen. Je nach Profilüberdeckung befinden sich für eine Verzahnung unterschiedlich viele Zähne im Eingriff. Für zeitlich konstante Drehmomentbelastung ergibt sich deshalb eine konstante Verzahnungskraft, somit ändern sich die Belastung und die Verformung der jeweils im Eingriff befindlichen Radpaare [84]. Die Schwankung der Verzahnungssteifigkeit hängt wesentlich von der Wahl der Überdeckungen ab, während die weiteren Verzahnungsgrößen nach Müller [80] einen geringen Einfluss aufweisen. Hierdurch kann auch das üblicherweise erheblich höhere Anregungsniveau von Geradverzahnungen im Vergleich zu Schrägverzahnungen erklärt werden.

Zur Berechnung der Zahnpaarsteifigkeit stellen Weber und Banaschek [116] einen analytischen Ansatz auf Basis der elastischen Theorie für die Verzahnungssteifigkeit von Geradverzahnungen auf. Kagawa [63], Schmidt [104] und Ziegler [123] entwickeln Ansätze zur Verzahnungssteifigkeit für Schrägverzahnungen. Müller [79] und Sattelberger [99] (**Bild 4**) untersu-



**Bild 4:** Einfluss der Profil- und Sprungüberdeckung auf den Zahnkraftpegel als Kenngröße für die Anregung. Rechnerische Untersuchung ohne Verzahnungskorrektur unter konstanter Belastung (Abb. entsprechend [99]).

chen das Anregungs- und Schwingungsverhalten von korrigierten Schrägverzahnungen mit unterschiedlichen Sprungüberdeckungen.

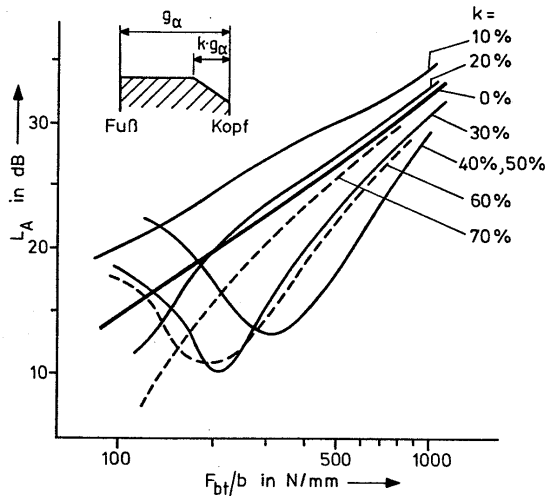
Für die Geräusch- und Schwingungsanregung stellt die Verzahnungssteifigkeit insbesondere bei Geradverzahnungen den bedeutendsten Anteil dar. So verglich bereits Graf Soden [44] den abgestrahlten Luftschall von Gerad- und Schrägverzahnungen. Unterberger [113] und Hösel [60] führen systematische Untersuchungen des Schalldruckpegels für Geradverzahnungen bzw. Schrägverzahnungen durch. Weitere Ansätze im Zusammenhang der Verzahnungssteifigkeit, der resultierenden Drehwegabweichungen und dem Getriebegeräusch stellt Baethge [5] anhand der messtechnischen Untersuchung der Drehwegabweichung auf.

### **2.2.2 Einfluss der Verzahnungskorrekturen und -abweichungen**

Die Zahnflanken von Zahnrädern sind in der praktischen Anwendung abweichungsbehaftet. Einerseits werden zur Sicherstellung der Tragfähigkeit oder zur Optimierung des Anregungsverhaltens Verzahnungskorrekturen aufgebracht. Andererseits führen Abweichungen in der Fertigung und der Montage zu resultierenden Abweichungen im Zahneingriff. Für das Anregungsverhalten ist die aus beiden Einflüssen resultierende Flankengestalt von maßgeblicher Bedeutung. Die unterschiedlichen Einflussgrößen wurden in zahlreichen Arbeiten untersucht.

#### **Korrektureinfluss**

Zum Ausgleich lastbedingter Verformungen schlägt Walker [115] Korrekturen der ideal evolventischen Zahnform wie die Kopfrücknahme vor. In Anwendung solcher Verzahnungskorrekturen als Möglichkeit zur Beeinflussung des Schwingungsverhaltens wurden von Unterberger [113] und Baetghe [5] Profilkorrekturen untersucht, die zur Beeinflussung des Anregungsverhaltens von Geradverzahnungen dienen. Beide schlagen eine Anregungsoptimierung durch Korrekturen in Form von Kopf- oder Fußrück-



**Bild 5:** Verlauf des Anregungspegels über der Last für Kopfrücknahmen an Ritzel und Rad mit konstantem Betrag ( $20\mu\text{m}$ ) und unterschiedlicher Länge. (Verzahnung  $m_n = 3\text{mm}$ ,  $\varepsilon_\alpha = 1.5$ ,  $\varepsilon_\beta = 1.5$ ) (Abb. aus [80])

nahmen vor, deren Betrag abhängig von der Zahnverformung ist. Baethge empfiehlt hierbei insbesondere die lange Rücknahme, mit einer Länge bis zum Einzeleingriffsgebiet. Sigg [105] schlägt eine lange Kopfrücknahme als ideale Flankenkorrektur vor. Müller [80] untersucht die Auswirkungen von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten auch an Schrägverzahnungen. In **Bild 5** ist der Einfluss der Kopfrücknahmelänge auf das Anregungsverhalten einer Schrägverzahnung dargestellt. Weitere Untersuchungen des Anregungsverhaltens von korrigierten Schrägverzahnungen führen Sattelberger [99] sowie Geiser / Mandt [40] durch.

Placzek [89] und Schäfer [101] definieren Vorgehensweisen zur Ermittlung von topologischen Flankenkorrekturen mit optimaler Flankentragfähigkeit und günstigem Anregungsverhalten.

Radev / Griggel [92, 93] entwickeln die periodische Korrektur, die die Optimierung des Anregungsverhaltens vollständig von der Tragfähigkeit ent-

koppelt. Die periodische Korrektur ist theoretisch in der Lage, das Drehwegverhalten unter einer bestimmten Last vollständig zu korrigieren. In der praktischen Anwendung gestaltet sich allerdings die prozesssichere Fertigung dieser Korrektur schwierig. Aus diesem Grund entwickelt Griggel [47, 48] eine Vorgehensweise, mit der anregungsoptimale Korrekturen aus einer Kombination von praxisüblichen Standardkorrekturen ermittelt werden können.

Die Auslegung von Korrekturen für Verzahnungen erfolgt häufig nach den Kriterien der Tragfähigkeit. Die hierfür eingesetzten Methoden und Berechnungsprogramme wie z.B. RIKOR [34] sind weit verbreitet. In zahlreichen Untersuchungen konnte festgestellt werden, dass Flankenkorrekturen zusätzlich eine gute Möglichkeit darstellen das Anregungsverhalten von Verzahnungen zu beeinflussen. In der praktischen Anwendung stellen diese beiden Ziele häufig einen Zielkonflikt dar, der in der Auslegung berücksichtigt werden muss. So erfolgen Betrachtungen der Tragfähigkeit in der Regel bei Nennlast, während bei der Auslegung von anregungsoptimalen Korrekturen meist ein Optimum unter Teillast angestrebt wird. Trotzdem ist eine Betrachtung des Anregungsverhaltens in der Korrekturauslegung nach erfolgter Auslegung der Tragfähigkeit in den allermeisten Fällen vorteilhaft, da meist eine erhebliche Reduktion des Anregungsniveaus möglich ist.

### **Abweichungseinfluss**

In Fertigung und Montage von Getrieben entstehen zwangsläufig Abweichungen bezüglich des Zahneingriffs. Zur Beurteilung der Wirkungen auf das Anregungsverhalten der geometrisch definierten Abweichungen sind deren Auswirkungen auf den Zahneingriff maßgeblich. Im Rahmen der gewöhnlichen Fertigungstolerierung werden die Abweichungen in den Verzahnungen selbst entsprechend DIN 3961 [19] und 3962 [20] festgelegt. Diese Normen bestimmen unterschiedliche Qualitätsstufen für Zahnräder. Ein jeweils höherer Zahlenwert bedeutet hier eine größere zulässige Abweichung. Für Formabweichungen werden in der Definition von DIN 3962

[20] jeweils die Abstände zweier zur Sollgeometrie paralleler Flächen, innerhalb derer sich die Istgeometrie befindet, beschrieben.

Untersuchungen zum Einfluss von Teilungsabweichungen werden u.a. von Rettig [94], Bosch [11], Lanzerath [71] und Opitz [85] durchgeführt. Es zeigen sich deutliche Einflüsse der Teilungsabweichungen auf das Schwingungs- und Geräuschverhalten der Verzahnungen. Teilungsabweichungen führen zu Seitenbändern [16] bezüglich der Zahneingriffsfrequenz, die nach Rettig besonders starke Auswirkungen im Resonanzgebiet aufweisen. Griggel [48] führt rechnerische Untersuchungen u.a. mit Teilungsfehlern behafteten Zahnradern durch.

Flankenformabweichungen haben weiterhin einen Einfluss auf die Schwingungs- und Geräuschregung von Verzahnungen. So stellt Hösel [60] einen steigenden Geräuschpegel mit zunehmenden Flankenwinkelabweichungen fest. Umezawa [112] führt umfangreiche experimentelle Versuche zu unterschiedlichen Abweichungsarten durch. Wittke [121] untersucht anhand von FEM-Berechnungen die optimale Lage von Toleranzfeldern für einen gleichmäßigen Drehwegverlauf. Radev / Griggel [92, 93] stellen bei der Entwicklung einer anregungsoptimalen Verzahnungskorrektur fest, dass es für eine gute Korrelation zwischen Rechnung und Messung von Schwingungs- und Anregungsverhalten notwendig ist die real vermessene Flankentopologie zu berücksichtigen. Griggel [46, 48] entwickelt systematische Vorgehensweisen zur Bewertung abweichungsbehafteter Verzahnungen, die auch im Rahmen der Qualitätsprüfung von Verzahnungen eingesetzt werden können. In diesem Zusammenhang stellt er ebenfalls fest, dass die genormten Abweichungsdefinitionen aus DIN 3961 und DIN 3962, sowie andere in der Zahnradokumentation üblicherweise verwendeten Toleranzvorgaben, zur Festlegung der geräuschbestimmenden Eigenschaften nicht ausreichend sind.

## 2.3 Rechnerische Kenngrößen zum Anregungsverhalten

Zur Beurteilung des Geräuschverhaltens von Zahnradgetrieben werden häufig rechnerische Beurteilungsmöglichkeiten verwendet. Teile dieser Beurteilungsmethoden liegen in Form von EDV-Rechenprogrammen vor.

Auf Basis der rechnerischen Ermittlungsmethoden der Verzahnungssteifigkeit stellen Schmidt [104] und Ziegler [123] Anforderungen für geräuscharme Verzahnungen auf. So fordert Schmidt für geräuscharme Verzahnungen eine ganzzahlige Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta$ , während Ziegler ganzzahlige Gesamtüberdeckungen  $\varepsilon_\gamma$  als anregungsoptimal bezeichnet. Die Unterschiede dieser beiden Bedingungen lassen sich auf die unterschiedlichen Steifigkeitsansätze zurückführen [39].

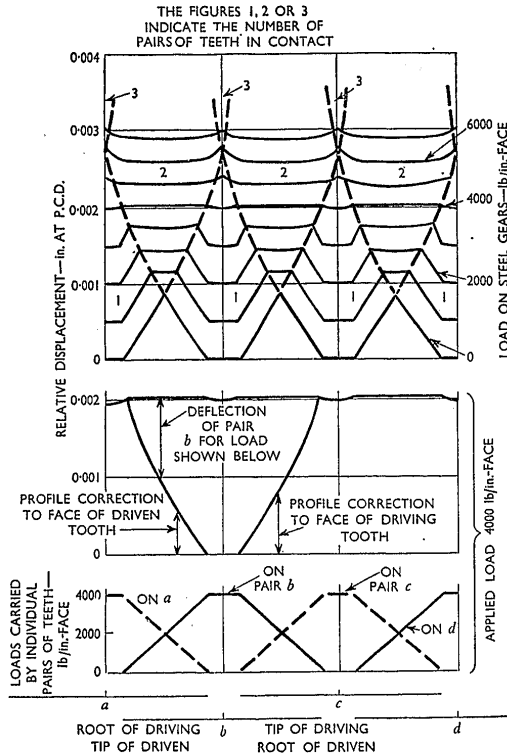
Weiterhin werden höherwertig abgeleitete Größen zur Beurteilung des Geräuschverhaltens verwendet:

- Drehwegabweichung
- Kraftanregung
- Dynamische Zahnkraft

### 2.3.1 Drehwegabweichung unter Last für $n \mapsto 0$

Eine weit verbreitete Möglichkeit zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen stellt die Berechnung des Drehwegverhaltens dar. Zur Berechnung des Drehwegverhaltens wird die Verformung der Verzahnungen für unterschiedliche diskrete Wälzstellungen unter Last berechnet und an den unterschiedlichen resultierenden Winkelstellungen der ungleichförmige Anteil der Bewegungsübertragung bewertet. Dieser wird als Drehwegabweichung unter Last oder Loaded Transmission Error (LTE) bezeichnet. In **Bild 6** ist die Drehwegabweichung für unterschiedliche Lasten in einer von Harris [53] vorgeschlagenen Darstellung abgebildet. In dieser Abbildung sind die Lasteffekte auf die Drehwegabweichung besonders gut zu erkennen.



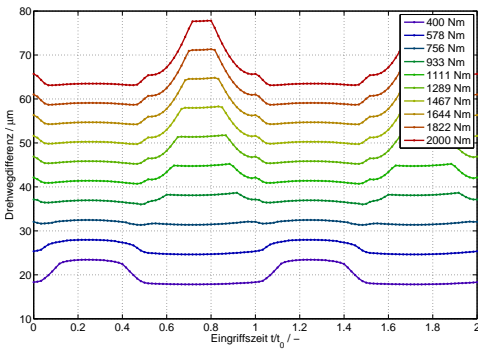


**Bild 6:** Darstellung der Drehwegabweichung (Transmission Error) nach Harris [53] (Harris-Mapping). Im oberen Teil der Abbildung ist der Drehwegabweichung für unterschiedliche Lasten, im mittleren Teil die für die Anregungsoptimierung bei  $4000 \frac{lb}{in}$  erforderliche Korrektur und im unteren Teil die Last auf die einzelnen Zahnpaare dargestellt.

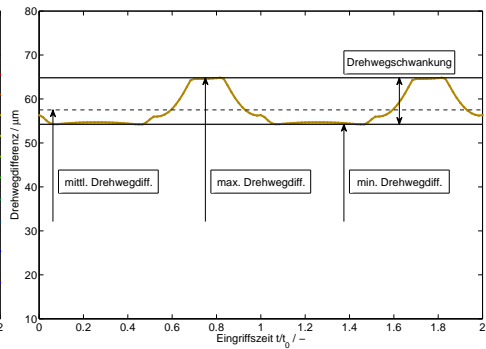
Die Drehwegabweichung als Maß für das Anregungsverhalten zu verwenden, wird von Gregory et al. [45] und Baethge [5] vorgeschlagen. In diesem Zusammenhang konnten die Verzahnungskorrekturen die von Walker [115], Rettig [94], Harris [53] und Baetge [5] als Verzahnungskorrekturen für anregungsarme Verzahnungen empfohlen werden, in ihrer Wirkungsweise bestätigt werden. Für Geradverzahnungen wird hier meist die lange Korrektur [84, 111] vorgeschlagen. Die Drehwegabweichung als Be-

urteilungsgröße zur Korrekturoptimierung wird zudem auch bei Geradverzahnungen häufig verwendet. So werden in den Vorschlägen für optimale topologische Korrekturen von Placzek [89], Radev [91] oder Schäfer [101] jeweils Randbedingungen mit konstantem Drehwegverhalten verwendet.

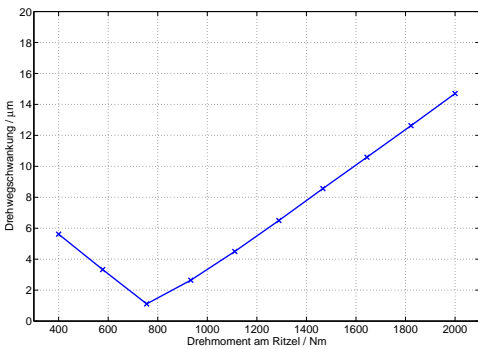
Zur Beurteilung des Anregungsverhaltens wird häufig die Schwankungsbreite der Drehwegabweichung [37,51,81,81,83,109] herangezogen. Aus-



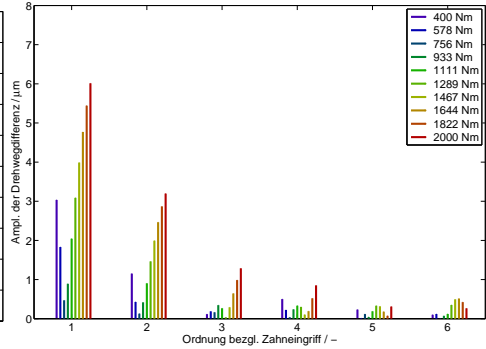
(a) Unterschiedliche Laststufen



(b) Abgeleitete Größen



(c) Drehwegschwankung über der Last



(d) Spektrum der Drehwegabweichung für unterschiedliche Lasten

**Bild 7:** Verläufe der Drehwegabweichung einer korrigierten Geradverzahnung und hieraus abgeleitete Größen.

gehend von den Verläufen der Drehwegabweichung, wie sie beispielhaft in **Bild 7(a)** dargestellt sind, wird die Differenz des maximalen und des minimalen Wertes ermittelt (siehe **Bild 7(b)**). Die Differenz wird als Schwanungsbreite der Drehwegdifferenz, Drehwegabweichung oder Peak-to-Peak Transmission Error (P2P TE) [17, 106, 111] bezeichnet und zur Beurteilung des Anregungsverhaltens verwendet. Hierzu werden üblicherweise Verläufe über dem Drehmoment, wie in **Bild 7(c)** dargestellt, herangezogen [52]. Für detaillierte Betrachtungen wird der Verlauf der Drehwegdifferenz mithilfe einer Fourier Transformation in die entsprechenden spektralen Anteile zerlegt. Die Spektren der Drehwegabweichung sind in **Bild 7(d)** dargestellt. In spektralen Darstellungen sind die jeweiligen harmonischen Anteile der Schwingungsanregung enthalten [76]. Hieraus sind die für die Schwingungsanregung maßgeblichen frequenzabhängigen Amplituden erkennbar und weiteren Analysen zugänglich [77].

Die Drehwegabweichung sowie davon abgeleitete Größen werden häufig zur Anregungsbeurteilung von Zahnrädern verwendet. So zeigt Baethge [5] im Vergleich mit Messungen des Luftschallpegels und Messungen der Drehwegabweichung einen Zusammenhang auf. Ähnliche Untersuchungen werden bei Harris [53], Gregory et al. [45], Munro [81], Mark [76, 77], Kubo [68], Smith [106], He [54], Davoli et al. [17], Harianto/Houser [52], Kissling [64] mithilfe experimenteller oder rechnerischer Betrachtungen durchgeführt. Zur Umsetzung dieser Ergebnisse in praktische Auslegungsberechnungen wird die Drehwegabweichung mithilfe geeigneter Softwareprogramme ermittelt. Auf dieser Grundlage ermitteln u.a. Placzek [89], Raddev [91], Schäfer [101] und Griggel [48] unter der Forderung der Minimierung der Drehwegabweichung für eine bestimmte Last anregungsoptimale Verzahnungskorrekturen. Schäfer verwendet für seine Untersuchungen den Summendrehsfehler, der die Addition der Drehwegabweichung unter Last und der Drehwegabweichung ohne Last darstellt. In experimentellen Untersuchungen konnte die Wirksamkeit der Kompensation der ersten Ordnung der Drehwegabweichung in Form einer periodischen Korrektur

durch Radev und Griggel [92] nachgewiesen werden.

### 2.3.2 Quasistatische Kraftanregung für $n \mapsto \infty$

Weiterhin kann die Kraftanregung zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen verwendet werden [79]. Die Kraftanregung stellt die rechnerische Lösung der allgemeinen Schwingungsdifferentialgleichung aus **Gleichung (1)** [59, 87] für das rotatorische System des Zahnradgetriebes unter speziellen Randbedingungen dar [39].

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{x}}}(t) + \underline{\underline{K}}(t) \cdot \underline{\underline{\dot{x}}}(t) + \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (1)$$

---

$\underline{\underline{M}}$	$[kg]$	Massenmatrix
$\underline{\underline{\ddot{x}}}(t)$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Beschleunigungsvektor
$\underline{\underline{K}}(t)$	$\left[\frac{Ns}{m}\right]$	Dämpfungsmatrix
$\underline{\underline{\dot{x}}}(t)$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\underline{C}}(t)$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{x}}(t)$	$[m]$	Ortsvektor
$\underline{\underline{F}}(t)$	$[N]$	Äußerer Kraftvektor

---

Zur rechnerischen Anregungsbeurteilung wird diese Differentialgleichung unter der Randbedingung unendlich großer Drehzahl verwendet. Bei stationärer Betrachtung unter dieser Randbedingung können die Massen des Schwingungssystems (inkl. Ritzel- bzw. Radmasse) keine Geschwindigkeitsänderung mehr ausführen, d.h. die Massen werden nicht beschleunigt [39, 80, 100]. Es gilt  $\underline{\underline{\ddot{x}}}(t) \stackrel{!}{=} 0$ . Aus **Gleichung (1)** ergibt sich somit **Gleichung (2)**.

$$\underline{\underline{K}}(t) \cdot \underline{\underline{\dot{x}}}(t) + \underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (2)$$

Ohne Berücksichtigung der Dämpfung kann somit **Gleichung (3)** hergeleitet werden.

$$\underline{\underline{C}}(t) \cdot \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (3)$$

Im weiteren Verlauf werden ausschließlich die beteiligten Verzahnungen betrachtet und diese über den Berührlinien in  $i$  Stützpunkten aufgelöst, wo-

bei die aus der zugrundeliegenden Plattentheorie [104, 116] resultierende Quersteifigkeit berücksichtigt wird [99]. Eine Umformung ergibt **Gleichung (4)**.

$$F_z(t) = \sum_i \{c_{zi}(t) \cdot [x + x_{fi}(t)]\} \quad (4)$$

---

$F_z(t)$	[N]	Kraftanregung
$c_{zi}(t)$	$\left[\frac{N}{\mu m}\right]$	lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$ unter Berücksichtigung der Quersteifigkeit zwischen den Berührungspunkten eines Zahnpaars
$x$	[ $\mu m$ ]	Verformung zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung
$x_{fi}(t)$	[ $\mu m$ ]	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung

---

Durch die Einführung von Randbedingungen für  $n \mapsto \infty$  und den entsprechenden Umformungen von **Gleichung (1)** bis **Gleichung (4)** kann die Kraftanregung als Größe zur Beurteilung der Verzahnungsanregung berechnet werden [39, 80, 100]. Durch die gewählten Randbedingungen ist hierfür kein aufwendiges Mehrmassenmodell erforderlich. Zudem eignet sich die Kraftanregung als Kraftgröße zur Beurteilung der Verzahnungsanregung in einigen Fällen besser als die häufig verwendeten Weggrößen wie die Drehwegabweichung [80].

Müller [80] untersucht die Schwingungs- und Geräuschanregung von Stirnradgetrieben und bewertet die Schwingungsanregung mithilfe der Kraftanregung sowie hieraus abgeleiteten Kennwerten wie dem Zahnkraft- oder dem Anregungspegel. Geiser [39] vergleicht die Anregungsbewertungen auf Basis der Drehwegberechnung mit denen, die auf der Kraftanregung basieren. Er stellt hierbei fest, dass Korrektur- und Abweichungseinflüsse mit beiden Größen gut bewertet werden können. Die Kraftanregung ist darüber hinaus dafür geeignet die Steifigkeitseinflüsse unterschiedlicher Hauptgeometrien besser in die Bewertung einzubeziehen. Im Rahmen experimenteller Untersuchungen von Geiser [40] und Radev/Griggel [92, 93] wird die Gültigkeit der Kraftanregung als Bewertungsgröße für die Anregung messtechnisch bestätigt. Nachdem die direkte Interpretation der Ergebnisse der Kraftanregung als Verzahnungskorrekturbetrag nicht wie bei

der Drehwegabweichung möglich ist, entwickelt Griggel [47, 50] das Softwareprogramm DZPop, das unter anderem eine Optimierung der Kraftanregung durch eine Kombination von Standardkorrekturen ermöglicht.

Ausgehend von der Kraftanregung definiert Müller [80] den Zahnkraftpegel  $L_{FZ}$  und den Anregungspegel  $L_A$ . Beide Kennwerte basieren auf dem Spektrum der Kraftanregung, das mittels Fourier-Analyse aus dem Verlauf der Kraftanregung ermittelt werden kann. Die Bildung des Zahnkraftpegels ist in **Gleichung (5)** dargestellt. Basierend auf der quadratischen Pegelsumme der Kraftanregungsamplituden erfolgt eine zusätzliche Gewichtung mit der anregenden Frequenz ( $i_{ord} \cdot f_z$ ), die größere Auswirkungen Höherharmonischer zur Folge hat. Diese Höhergewichtung lässt sich bei unterkritisch auslegten Getrieben dadurch begründen, dass Höherharmonische zwangsläufig im Betrieb in den Bereich Verzahnungseigenfrequenz kommen. Die Auswirkungen solcher Vorresonanzen werden im Zahnkraftpegel pauschal durch diese Gewichtungsfunktion berücksichtigt.

$$L_{FZ} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{(f_0 \cdot F_0)^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (i_{ord} \cdot f_z \cdot F_i)^2 \right] \quad dB \quad (5)$$

---

$L_{FZ}$	[dB]	Zahnkraftpegel
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$f_0$	[Hz]	Bezugsfrequenz ( $f_0 = 1Hz$ )
$f_z$	[Hz]	Zahneingriffsfrequenz
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_i$	[N]	Amplitude der Kraftanregung $F_z(t)$ der $i$ -ten Ordnung
$n_{ord}$	[-]	maximale Zahneingriffsordnung

---

Bezieht man die Kraftanregung  $F_z(t)$  auf die Zahnbreite  $b$  ( $F'_i = F_i/b$ ), so kann  $L_{FZ}$  nach Müller [80] in mehrere Anteile aufgespalten werden. Die einzelnen Anteile sind in **Gleichung (6)** dargestellt.

$$L_{FZ} = 10 \cdot \lg \underbrace{\sum_{i_{ord}=1}^n \left( \frac{i_{ord} \cdot F'_i}{F'_0} \right)^2}_{L_A} + 10 \cdot \lg \underbrace{\left( \frac{b^2}{b_0^2} \right)}_{L_b} + 10 \cdot \lg \underbrace{\left( \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2} \right)}_{L_{fz}} \quad (6)$$

---

$F'_0$	[N]	Bezugskraft ( $F'_0 = 1N$ )
$F'_i$	[N]	bezogene Kraftanregungsamplitude $F'_i = \frac{F_i}{b}$
$L_A$	[dB]	Einfluss der kinematischen Verzahnungsgrößen = Anregungspegel
$L_b$	[dB]	Einfluss der Zahnbreite
$L_{fz}$	[dB]	Einfluss der Drehzahl bzw. Zahneingriffsfrequenz
$b_0$	[mm]	Bezugsbreite ( $b_0 = 1mm$ )

---

Für den Anregungspegel  $L_A$  ergibt sich nach Müller [80] der in **Gleichung (7)** dargestellte Zusammenhang.

$$L_A = 10 \cdot \lg \sum_{i_{ord}=1}^n \left( \frac{i_{ord} \cdot F'_i}{F'_0} \right)^2 \quad (7)$$

Sattelberger [100] untersucht das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe und führt zu deren rechnerischer Beurteilung den Lagerkraftpegel  $L_{FL}$  ein. Der Lagerkraftpegel basiert auf der Kraftanregung der einzelnen Stufen. An Bauteilen mit mehreren Verzahnungen (z.B. eine Zwischenwelle bei einem mehrstufigen Stirnradgetriebe) werden die an diesem Bauteil angreifenden Kraftanregungskomponenten vektoriell addiert. Hieraus ergibt sich die Lagerkraft  $F_L(t)$  für dieses Bauteil. Zur Berücksichtigung mehrerer Stufen im Lagerkraftpegel  $L_{FL}$  entsprechend **Gleichung (8)** ist auf eine ausreichende Ordnungsaufösung zu achten, damit die maßgeblichen Amplituden aller Verzahnungen abgebildet werden können. Aus diesem Grund sind für die Ordnung  $i_{ord}$  in **Gleichung (8)** auch nicht ganzzahlige Ordnungsanteile erforderlich ( $i_{ord} \in \Re$ ).

$$L_{FL} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{(f_0 \cdot F_0)^2} \cdot \sum_{i_{ord}=0}^n (i_{ord} \cdot f_{z,1} \cdot F_{L i_{ord}})^2 \right] \quad dB \quad (8)$$

---

$L_{FL}$	[dB]	Lagerkraftpegel
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung (Stufe 1)
$f_0$	[Hz]	Bezugsfrequenz ( $f_0 = 1Hz$ )
$f_{z,1}$	[Hz]	Zahneingriffsfrequenz (Stufe 1)
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_{L i_{ord}}$	[N]	Amplitude der Lagerkraftanregung $F_L(t)$ der $i$ -ten Ordnung
$n$	[-]	maximale Zahneingriffsordnung (Stufe 1)

---

Zur Beurteilung einzelner Anregungskomponenten leitet Geiser [39] aus dem Zahnkraftpegel den Anregungsamplitudenpegel  $L_{Ai}$  her. Für die Bildung dieses Kennwerts wird die Pegeladdition im Zahneingriff nicht durchgeführt, sondern die einzelnen harmonischen Anteile des Zahneingriffes werden einzeln entsprechend **Gleichung (9)** gepegelt. In dieser Darstellung können einzelne spektrale Komponenten der Kraftanregung bewertet werden, was einer direkten Auswertung des Spektrums selbst nahe kommt. Zur Gesamtbeurteilung des Anregungsspektrums einer Verzahnung ist es erforderlich, die Anregungsamplitudenpegel für mehrere Ordnungen zu betrachten.

$$L_{Ai} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{F_0^2} \cdot F_{iord}^2 \right] \quad dB \quad (9)$$

---

$L_{Ai}$	[dB]	Anregungsamplitudenpegel für die i-te Ordnung
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_{iord}$	[N]	Amplitude der Kraftanregung $F_z(t)$ der i-ten Ordnung

---

Zur vereinfachten Berücksichtigung eines dynamischen Systems lässt sich die Vergrößerungsfunktion für Verzahnungen herleiten [39]. Diese Gleichung ist im Vergleich zur allgemeinen Vergrößerungsfunktion um die Berücksichtigung der Dämpfung im Einzel- und Doppelingriffsgebiet erweitert. Diese Vergrößerungsfunktion  $V$  für Verzahnungen ist in **Gleichung (10)** dargestellt:

$$V = \frac{N^2}{\sqrt{(1 - N^2)^2 + 4 \cdot (D \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \eta)^2}} \quad ; \quad N = \frac{f}{f_E} \quad (10)$$

---

$V$	[-]	Vergrößerungsfunktion
$N$	[-]	Dyn. Bezugsdrehzahl
$D$	[-]	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$f$	[Hz]	Frequenz
$f_E$	[Hz]	Eigenfrequenz
$\varepsilon_\alpha$	[-]	Profilüberdeckung

---



Durch die Anwendung der Vergrößerungsfunktion auf die Kraftanregung ermittelt Geiser [39] eine Verzahnungskraft, die eine Überhöhung aufgrund eines einfachen hinsichtlich der Zahnsteifigkeit linearisierten Schwingungssystems mit einer Eigenfrequenz enthält. Aus dem Spektrum dieser Verzahnungskraft entwickelt Geiser [39] den linearisierten Kraftpegel  $L_{Flin}$ , der in **Gleichung (11)** dargestellt ist. Zur Bildung des linearisierten Kraftpegels aus der Drehwegberechnung schlägt er alternativ die Berechnung der Verzahnungskraft nach **Gleichung (12)** vor.

$$L_{Flin} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{F_0^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^n (F_{i_{ord}} \cdot V_{i_{ord}})^2 \right] \quad dB \quad (11)$$

$$F_i = c_\gamma \cdot b \cdot x_i \quad (12)$$

---

$F_{Flin}$	[dB]	Anregungsamplitudenpegel für die i-te Ordnung
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_i$	[N]	Amplitude der Kraftanregung $F_z(t)$ der i-ten Ordnung
$V_i$	[-]	Vergrößerungsfunktion für die Frequenz der i-ten Ordnung
$x_i$	[ $\mu m$ ]	Amplitude der Drehwegabweichung der i-ten Ordnung
$c_\gamma$	[ $\frac{N}{mm \cdot \mu m}$ ]	mittlere bezogene Verzahnungssteifigkeit
$b$	[mm]	Verzahnungsbreite

---

Durch die Anwendung der frequenzabhängigen Vergrößerungsfunktion auf das Ordnungsspektrum der Kraftanregung in **Gleichung (11)** ist für die Bildung des linearisierten Kraftpegels  $L_{Flin}$  die Vorgabe einer Drehzahl notwendig, die die Zuordnung zwischen Frequenz und Drehzahl darstellt. Im Gegensatz zu den bislang gezeigten Kenngrößen, die auf der Drehwegabweichung (siehe **Abschnitt 2.3.1**) oder der Kraftanregung (siehe **Abschnitt 2.3.2**) basieren, ist  $L_{Flin}$  ein drehzahlabhängiger Kennwert. Bühr [7] erweitert den linearisierten Kraftpegel auf die Anwendbarkeit für mehrere Eigenfrequenzen und mehrdimensionale Eigenformen aus Mehrmassenmodellen von Getriebesystemen, indem er die Vergrößerungsfunktion  $V$  aus **Gleichung (10)** durch die Ergebnisse einer numerischen Mo-

dalanalyse ersetzt und anschließend  $L_{Flin}$  entsprechend **Gleichung (11)** berechnet.

### 2.3.3 Dynamische Zahnkraft für Betriebsdrehzahl $n$

Für die häufig angewendeten Beurteilungsgrößen Drehweg (**Abschnitt 2.3.1**) und Kraftanregung (**Abschnitt 2.3.2**) werden basierend auf der allgemeinen Schwingungsdifferentialgleichung (**Gleichung (1)**) Randbedingungen eingeführt, die die Modellierung und die Ermittlung der Berechnungsgrößen vereinfachen. Diese Randbedingungen führen allerdings auch zu einer Einschränkung der Aussagefähigkeit der Berechnungsgrößen. Zur Lösung des allgemeinen parametererregten Differentialgleichungssystems 2. Ordnung sind deshalb numerische Verfahren notwendig. Hierzu werden häufig numerische Integrationsverfahren im Zeit- oder Frequenzbereich zur schrittweisen Lösung des Differentialgleichungssystems durchgeführt.

Zur Durchführung der dynamischen Simulation sind die Parameter der Massenmatrix  $\underline{M}$ , Dämpfungsmatrix  $\underline{K}$  sowie der Steifigkeitsmatrix  $\underline{C}$  der Schwingungsdifferentialgleichung **Gleichung (1)** notwendig. Diese Daten stellen somit ein umfangreich zu modellierendes Mehrkörpersimulationsmodell dar, das im Regelfall manuell erstellt werden muss. Von Castillo/Wünsch [14, 15] wurde hierzu ein Operationskatalog zur Modellierung von Torsionsschwingungsmodellen erstellt. Ansätze zur rechentechnischen Lösung von Torsionsschwingungsmodellen von Getrieben verwenden Oster [86] und Rettig [95,96]. Gold [42] stellt Ansätze zur Lösung dynamischer Simulationen im Frequenzbereich auf, auf deren Basis von Diekhans [18] dynamische Berechnungen an Getrieben durchgeführt werden. Gerber [41] stellt umfangreiche Mehrmassenmodelle eines Getriebeprüfstands auf und ermittelt in experimentellen Versuchen den in **Gleichung (13)** dargestellten Ansatz zur Verzahnungsdämpfung.

$$D = 2.2 \cdot 10^{-4} \cdot \left( \frac{a}{[mm]} - 23 \right)^{0.55} \cdot \left( \frac{\eta}{[mPas]} + 39 \right)^{0.27} \cdot \left( \frac{v_t}{[\frac{m}{s}]} - 5 \right)^{0.53} \quad (13)$$

für:  $15 \frac{m}{s} < v_t < 50 \frac{m}{s}$  und  $50mm < a < 250mm$  und Mineralöl

---

$D$	$[-]$	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$a$	$[mm]$	Achsabstand
$\eta$	$[mPas]$	Viskosität
$v_t$	$[\frac{m}{s}]$	Umfangsgeschwindigkeit

---

Die Berechnungsansätze von Gerber [41] werden von Müller [80] und Geiser [39] weiterentwickelt, so dass die Wirkungen des dynamischen Systemverhaltens in der Verzahnung analysiert werden können. Neben dem Verlauf der dynamischen Verzahnungskraft werden hierbei auch Größen wie die dynamische Lastverteilung und der Dynamikfaktor  $K_{V,A}$  nach DIN 3990 [22] bzw. ISO 6336 [62] ermittelt. Radev [91] und Griggel [48] erweitern diese Berechnungsmethode um die Möglichkeit reale Flankentopologien simulationstechnisch zu berücksichtigen.

Weitere Ansätze zur dynamischen Verzahnungsberechnung werden mithilfe kommerzieller Mehrkörpersimulationsprogramme durchgeführt. Diese Softwarepakete stellen Rechenprogramme zur Lösung beliebiger mechanischer Schwingungsprobleme dar und berücksichtigen aufgrund ihrer Anwendungsbreite einzelne Elemente wie Verzahnungen nicht in der gleichen Detaillierung, wie dies in spezialisierten Programmsystemen möglich ist. Allerdings sind sie für grundsätzliche Schwingungsbetrachtungen komplexer Maschinenstrukturen gut geeignet. Insbesondere die veränderliche Verzahnungssteifigkeit kann hier meist nur grob angenähert werden oder wird auf einzelne Betriebspunkte linearisiert vorgegeben [88, 102, 103]. Dadurch kann das dynamische Verhalten eines komplexen dynamischen Systems bei äußerer Anregung gut abgebildet werden. Die aus der Verzahnung resultierende innere Anregung und deren Einflussgrößen werden hier meist nicht betrachtet.

Die dynamische Simulation eignet sich gut, das Anregungsverhalten von Verzahnungen rechnerisch abzubilden. Vor allem ist es im Gegensatz zur Beurteilung mit Hilfe von Drehweg- (**Abschnitt 2.3.1**) oder Kraftanregungsgrößen (**Abschnitt 2.3.2**) möglich, einzelne Betriebspunkte im Besonderen bezüglich der Drehzahl zu bewerten. Wechselwirkungen mit dem Schwingungssystem Antriebsstrang können in der dynamischen Simulation berücksichtigt werden. Aufgrund des höheren Rechenaufwands werden dynamische Simulationen zur Auslegung der Verzahnungsgeometrie kaum angewendet. Häufig wird die dynamische Simulation zum rechnerischen „Nachvollziehen“ messtechnischer Untersuchungen sowie zur Simulation der Wechselwirkung zwischen Struktur und Verzahnung (z.B. Vor- bzw. Hauptresonanzen) und deren Auswirkungen angewendet.

Aus der dynamischen Verzahnungskraft kann analog der Ermittlung des Zahnkraftpegels (siehe **Abschnitt 2.3.2**) der dynamische Zahnkraftpegel  $L_{FZ,dyn}$  [33] definiert werden, der in **Gleichung (14)** dargestellt ist.

$$L_{FZ,dyn} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{(f_0 \cdot F_0)^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (i_{ord} \cdot f_z \cdot F_{z,dyn,i})^2 \right] \quad dB \quad (14)$$

---

$L_{FZ,dyn}$	[dB]	dynamischer Zahnkraftpegel
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$f_0$	[Hz]	Bezugsfrequenz ( $f_0 = 1Hz$ )
$f_z$	[Hz]	Zahneingriffsfrequenz
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_{z,dyn,i}$	[N]	Amplitude der dynamischen Zahnkraft $F_{z,dyn}(t)$ der $i$ -ten Ordnung
$n_{ord}$	[-]	maximale Zahneingriffsordnung

---

Geiser [39] entwickelt aus dem dynamischen Zahnkraftpegel den dynamischen Kraftpegel  $L_{F,dyn}$ , der im Vergleich zum dynamischen Zahnkraftpegel keine höhere Gewichtung der Höherharmonischen enthält. Er interpretiert diese Höhergewichtung als vereinfachte Berücksichtigung eines dynamischen Systemverhaltens, das in der dynamischen Zahnkraft bereits enthalten ist. Nach Geiser [39] ergibt sich deshalb der dynamische Kraft-

pegel nach **Gleichung (15)**.

$$L_{F,dyn} = 10 \cdot \lg \left[ \frac{1}{(F_0)^2} \cdot \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} (F_{z,dyn,i})^2 \right] \quad dB \quad (15)$$

---

$L_{F,dyn}$	[dB]	dynamischer Kraftpegel
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$F_0$	[N]	Bezugskraft ( $F_0 = 1N$ )
$F_{z,dyn,i}$	[N]	Amplitude der dynamischen Zahnkraft $F_{z,dyn}(t)$ der i-ten Ordnung
$n_{ord}$	[-]	maximale Zahneingriffsordnung

---

Zur Tragfähigkeitsberechnung wird in Normen wie der DIN 3990 [22] oder der ISO 6336 [62] der Dynamikfaktor  $K_V$  definiert, der den möglichen Einfluss einer dynamischen Lastüberhöhung berücksichtigt. Allgemein ist der Dynamikfaktor in **Gleichung (16)** definiert.

$$K_V = \frac{\max(F_{z,dyn})}{F_z} \quad (16)$$

---

$K_V$	[-]	Dynamikfaktor
$F_{z,dyn}$	[N]	dynamische Verzahnungskraft
$F_z$	[N]	Verzahnungskraft (statisch)

---

In Rahmen der Normberechnung sind mehrere Methoden zur Ermittlung des Dynamikfaktors vorgesehen. Die Methoden B und C ermitteln diesen Faktor mit Hilfe von hinterlegten Gleichungen auf Grundlage einfacher maschinendynamischer Grundlagen wie z.B. einer Vergrößerungsfunktion. Für die Ermittlung des Dynamikfaktors aus dynamischer Simulation nach Methode A  $K_{V,A}$ , laut DIN/ISO [62], sind detaillierte dynamische Simulationsrechnungen wie die dynamische Integration oder Messungen der dynamischen Zahnkraft vorgeschrieben. Der Faktor  $K_V$  dient der Beurteilung des möglichen Tragfähigkeitseinflusses dynamischer Überlasten und ist für die Geräuschenstehung nur sehr bedingt aussagefähig.

## 2.4 Anregung mehrstufiger Getriebe

Die wesentliche Anregungsursache für das Geräuschverhalten von Stirnradgetrieben stellt die Verzahnungsanregung dar. Besonders bei einstufigen Stirnradgetrieben ist die Körperschalleinleitung ins Getriebegehäuse im wesentlichen proportional zur anregenden Verzahnungskraft. Aufgrund dieser Proportionalität wird zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Stirnradgetrieben auf die Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen zurückgegriffen. Die am häufigsten verwendete Beurteilungsgröße diesbezüglich stellt der in **Gleichung (5)** dargestellte Zahnkraftpegel  $L_{FZ}$  nach Müller [80] dar.

In diesem Zusammenhang untersucht Sattelberger [100] das Schwingungsverhalten mehrstufiger Getriebe. An einem zweistufigen Getriebe misst er den Einfluss der gegenseitigen Wechselwirkungen mehrerer Zahnradstufen auf das Anregungsverhalten. Er definiert eine bezogene Kopplungssteifigkeit  $c_k^*$  (vgl. **Gleichung (17)**) zwischen den beiden Verzahnungen auf der Zwischenwelle, die den Grad der gegenseitigen Beeinflussung quantifizieren.

$$c_k^* = \frac{c_k}{c_{z1}} \quad (17)$$

---

$c_k^*$	$[-]$	bezogene Kopplungssteifigkeit nach Sattelberger [100]
$c_k$	$\left[ \frac{Nm}{rad} \right]$	Torsionssteifigkeit zwischen den beiden Verzahnungen
$c_{z1}$	$\left[ \frac{Nm}{rad} \right]$	auf die Zwischenwelle bezogene Verzahnungssteifigkeit der 1. Stufe

---

Sattelberger [100] stellt fest, dass sich die Verzahnungen bei sehr weicher Ankopplung ( $c_k^* \leq 0.01$ ) praktisch nicht beeinflussen, während steifer angekoppelte Verzahnungen ( $c_k^* \geq 0.38$ ) miteinander wechselwirken können. Zur Berücksichtigung dieser Wechselwirkungen schlägt er den in **Gleichung (8)** dargestellten Kennwert des Lagerkraftpegels  $L_{FL}$  vor, der als Beurteilungsgrundlage die Lagerkraftanregung verwendet, die aus allen an der Zwischenwelle angreifenden Verzahnungsstufen resultiert.

## 2.5 Anregung von Planetengetrieben

Bei Planetengetrieben ist die kinematische Kopplung der Einzelstufen bezüglich der Anregungsbeurteilung deutlich komplexer. Die übliche Konzeption von Planetengetrieben sieht vor, dass sich die an Sonne und Hohlrad angreifenden Kräfte gegenseitig kompensieren. Für das Anregungsverhalten sind gerade die veränderlichen Anteile der entsprechenden Kräfte von Bedeutung. Im Gegensatz zur statischen Auslegung kann in diesem Fall nicht grundsätzlich von einer Kompensation der Anregungskräfte ausgegangen werden, weshalb die Anregungsbeurteilung einer differenzierteren Betrachtung bedarf.

Unter Tragfähigkeitsgesichtspunkten wird der Lastausgleich bzw. die Lastaufteilung in zahlreichen theoretischen und experimentellen Arbeiten untersucht. So untersucht Arnaudow [4] den Lastausgleich zwischen den Planeten für unterschiedliche Planetengetriebebauarten. In [8, 70, 82, 114, 120] wurden Berechnungsansätze zur Berechnung der Lastaufteilung von Planetengetrieben aufgestellt. In Erweiterung dieser Ansätze wurde in [97, 122] versucht, diese durch den Abgleich mit Schallpegelmessungen auf das Anregungsverhalten zu übertragen.

Auf Grundlage umfangreicher Mehrkörpersimulationsmodelle versuchen u.a. [3, 6, 61, 72, 107] das Anregungs- und Schwingungsverhalten rechnerisch zu beurteilen. Übereinstimmend zeigt sich, dass hierbei ein erheblicher Modellierungs- und Rechenaufwand notwendig ist, um die Ergebnisse der Mehrkörpersimulation mit Messdaten vergleichen zu können. Aus diesen Gründen ist die Anwendbarkeit dieser Berechnungsmethoden eher für eine detaillierte Nachrechnung von bestimmten Getrieben mit Geräusch- oder Schwingungsproblemen sinnvoll, als für die Auslegung von Getrieben.

Neben den Verzahnungen weisen bei Planetengetrieben insbesondere die Art und Ausführung der Planetenträger einen signifikanten Einfluss auf das Anregungsverhalten auf. Die theoretischen Ansätze zur Planetenträgerver-

formung nach Winkelmann und Naendorf [82, 119] versucht Rüschoff [97] in experimentellen Untersuchungen nachzuweisen. Ähnliche Untersuchungen werden von [10] durchgeführt und um den Einfluss von Fertigungsabweichungen ergänzt. Weitergehende Untersuchungen bezüglich des Einflusses der Planetenanordnung in Planetengetrieben stellt Gradu [43] an. Hierbei wird im Besonderen der Einfluss von ungleichmäßig über dem Umfang verteilten Planetenrädern untersucht.

Zum Einfluss von Flankenkorrekturen bei Planetengetrieben entwickelt Geiser [38] eine Berechnungsmethode, basierend auf den Methoden für Stirnräder, die zur Beurteilung und Optimierung verwendet werden kann. Hierbei überlagert er die Einzelanregungen der Stufen entsprechend der Kinematik des Planetengetriebes. Er definiert aus den Kraftanregungen der Einzelverzahnungen eines Planetengetriebes abgeleitete Größen als Beurteilungsgrößen:

- Lagerkraftanregung: Zur Beurteilung der translatorischen Anregung an Planetengetrieben werden die Kraftanregungen aller zu einem Zeitpunkt im Eingriff befindlichen Verzahnungen vektoriell addiert. Die Addition, die für jedes Bauteil (Sonne, Steg und Hohlrad) durchgeführt wird, ergibt die Lagerkraftanregung, deren Zeitverlauf für die translatorische Anregungsbeurteilung ausgewertet werden kann.
- Momentenanregung: Die rotatorische Anregung kann durch die Berechnung des aus den einzelnen Kraftanregungen an den Bauteilen angreifenden, resultierenden Drehmoments ermittelt werden. Die resultierende Größe wird nach Geiser [38] als Momentenanregung bezeichnet. Der Verlauf der Momentenanregung schwankt jeweils um den Wert des anliegenden statischen Moments am betreffenden Bauteil (Sonne, Steg und Hohlrad).



## 3 Das Anregungsverhalten von Stirnrad- und Planetengetrieben

Zur rechnerischen Beurteilung und Auslegung von Verzahnungen sind Berechnungsalgorithmen notwendig, die die wesentlichen Einflussfaktoren der Verzahnungsanregung im Getriebe berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Berechnungsalgorithmen des „Dynamische Zahnkräfte Programm“ (DZP) [35] verwendet und weiterentwickelt. Die wesentlichen Grundlagen dieser Berechnungsmethode werden hier beschrieben und sind in den Berechnungsprogrammen DZP [35] sowie ANPLA [36] implementiert.

### 3.1 Berechnungsgrundlagen für die Stirnradstufe

Für Stirnradverzahnungen wird ein Berechnungsansatz verwendet, der auf Grundlage der Berechnung der Lastverteilung Größen zur Beurteilung des Anregungsverhaltens sowie des dynamischen Verhaltens ermittelt. Die durchgeführte topologische Analyse der Verzahnung stellt die Grundvoraussetzung für eine detailtreue und zuverlässige Berechnung dar.

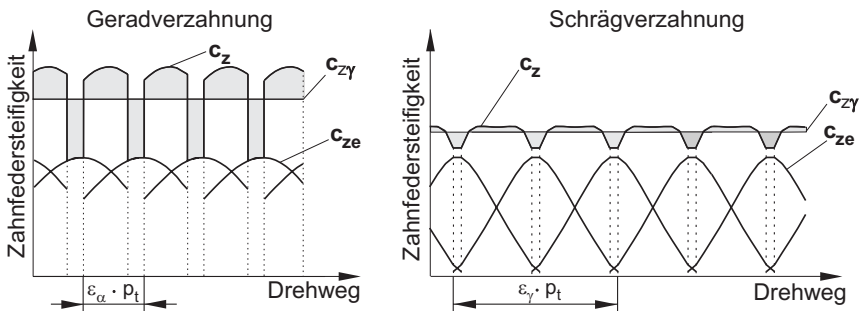
#### 3.1.1 Zahnpaar- und Verzahnungssteifigkeit

Auf Grundlage der analytischen Ansätze von Weber/Banaschek [116] und Schmidt [104] kann die Steifigkeit eines im Eingriff befindlichen Zahnpaars bestimmt werden. Hierbei werden die Zähne als einseitig im Radkörper eingespannte Platten modelliert und entsprechend der Kontaktverhältnisse belastet. Die Kontaktverformung kann entsprechend der Hertzschen Theorie [58] unter Berücksichtigung der Krümmungsradien im Kontaktpunkt ermittelt werden.

Aus den Steifigkeiten einzelner Zahnpaare kann dann die Steifigkeit der gesamten Verzahnung ermittelt werden. Durch die Betrachtung der Verzahnung als Anordnung parallel geschalteter Federn kann die Verzahnungssteifigkeit ermittelt werden. Bei korrigierten und abweichungsbehafteten

Verzahnungen sind die unterschiedlichen Abweichungsbeträge an den Berührstellen der unterschiedlichen Zähne bei dieser Berechnung zu berücksichtigen. Ebenso ist es aufgrund lastbedingter Verformungen möglich, dass sich bereits vor dem theoretischen Eingriffsbeginn bzw. nach dem theoretischen Eingriffsende Zähne berühren, was als vor- bzw. nachzeitiger Zahneingriff bezeichnet wird. Dieser kann entsprechend den Ansätzen von Baethge [5] und Thoma [110] berücksichtigt werden.

In **Bild 8** sind die Verläufe der Zahnpaar- und Verzahnungssteifigkeit beispielhaft für eine Gerad- und eine Schrägverzahnung über dem Eingriff dargestellt. Der zeitliche Mittelwert der Verzahnungssteifigkeit ist als mittlere Verzahnungssteifigkeit eingetragen. Im Gegensatz zu Betrachtungen in DIN/ISO [22, 62] und weiteren Arbeiten, die überwiegend die Verzahnungstragfähigkeit behandeln, wird die Verzahnungssteifigkeit nicht bezogen auf die Zahnbreite, sondern für die gesamte Verzahnung betrachtet. Dies ist sinnvoll, da sich die Steifigkeit der Verzahnung nicht nur auf die Verformungsbeträge, sondern über die Massen- und Steifigkeitsverteilung auch auf das Systemverhalten auswirkt. Gerade bei ungleichen Breiten von Verzahnungen und Radkörpern sind weitere Angaben bei der Verwendung von breitenbezogenen Größen notwendig, was durch die Verwendung von Absolutgrößen vermieden werden kann.



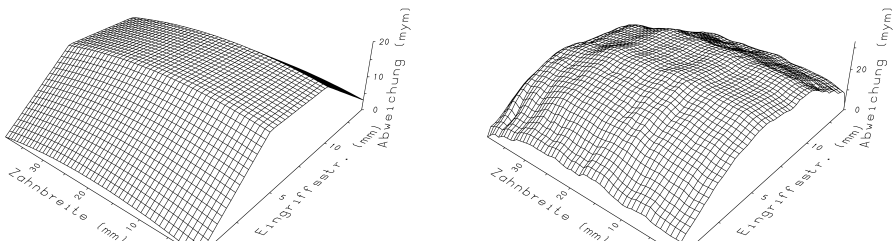
**Bild 8:** Steifigkeitsverläufe einer Verzahnung (Abb. aus [39]).  $C_{ze}$ : Zahnpaarsteifigkeit  $C_z$ : Verzahnungssteifigkeit  $C_{z\gamma}$ : mittl. Verzahnungssteifigkeit

### 3.1.2 Flankenfeingestalt aus Korrekturen und Abweichungen

Zur Berücksichtigung von Verzahnungskorrekturen und Abweichungen kann für jede Zahnflanke eines Rades die Gestalt in Form einer Abweichungsmatrix von der idealen Evolvente vorgegeben werden. Die Vorgabe kann hierbei auf unterschiedliche Arten geschehen:

- Kombination von Standardkorrekturen zur Beschreibung der Korrektur mit wenigen Parametern, die über hinterlegte Funktionen eine Flankentopologie beschreiben (vgl. **Bild 9(a)**)
- Matrixkorrektur
- Topologische Messdaten (z.B. aus einer topologischen 3D-Flankenmessung) (vgl. **Bild 9(b)**)
- Teilungsabweichungen

Diese vorgegebenen Korrekturdaten werden bei der Berechnung der 3D-Lastverteilung im Eingriffsfeld in Form von topologischen Daten berücksichtigt (vgl. **Bild 9**). Mit Flankenkorrekturen und Abweichungen ist häu-



(a) Korrekturvorgabe mit Standardkorrekturen      (b) Korrekturvorgabe aus topologischen Messdaten

**Bild 9:** Unterschiedliche Möglichkeiten der Feingetrieuvorgabe

fig eine signifikante Beeinflussung des Anregungsverhaltens verbunden. Durch die Vorgabe von Ist-Daten der Topologie können die Auswirkungen von Fertigungsabweichungen rechnerisch untersucht werden. Auch sehr kleine Abweichungsbeträge können zu einer erheblichen Erhöhung des Anregungsverhaltens führen.

### 3.1.3 Berechnung der Drehwegabweichung unter Last

Auf Basis der dargestellten Berechnungsgrundlagen kann in jeder einzelnen Eingriffsstellung eine Berechnung der Lastverteilung durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung der lastbedingten Verformungen der Welle und der Durchsenkung der Lagerung wird die Lastverteilung auf den Berührlinien errechnet. Die Wellenbiegung wird hierbei entsprechend des Übertragungsmatrizenverfahrens nach Falk [27] ermittelt. Zur Berechnung der Lagerdurchsenkungen werden die detaillierten Berechnungen aus dem Berechnungsprogramm LAGER2 [117] nach [12] angewendet, das eine Lastberechnung in den einzelnen Wälzkontakten durchführt.

Auf Grundlage der Steifigkeitsermittlung kann die Drehwegabweichung deshalb für eine einzelne Eingriffsstellung entsprechend **Gleichung (19)** ermittelt werden. In dieser Gleichung werden die aus der Paarung resultierenden Steifigkeiten  $c_{zi}(t)$  und Abweichungen  $x_{fi}(t)$  der Berührpunkte verwendet, um die Drehwegabweichung in einer Eingriffsstellung (zum Zeitpunkt  $t$ ) zu ermitteln. Hierzu wird die statische Federgleichung der Verzahnung in **Gleichung (18)** als Grundlage verwendet und nach dem Weg der Verzahnungsverformungen, der Drehwegabweichung, aufgelöst.

$$F = \sum_i [c_{zi}(t) \cdot (x(t) + x_{fi}(t))] \quad (18)$$

$$x(t) = \frac{F - \sum_i [c_{zi}(t) \cdot x_{fi}(t)]}{\sum_i c_{zi}(t)} \quad (19)$$

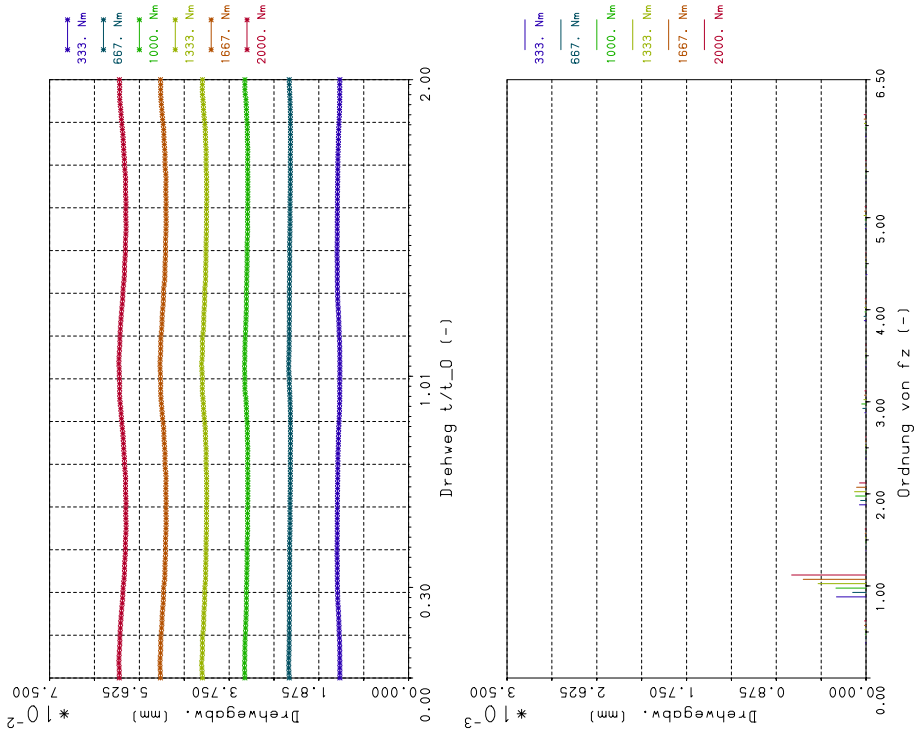
---

$x(t)$	$[\mu m]$	Drehwegabweichung in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt $t$
$F$	$[N]$	Verzahnungskraft
$c_{zi}(t)$	$\left[ \frac{N}{\mu m} \right]$	lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$
$x_{fi}(t)$	$[\mu m]$	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung am Punkt $i$

---

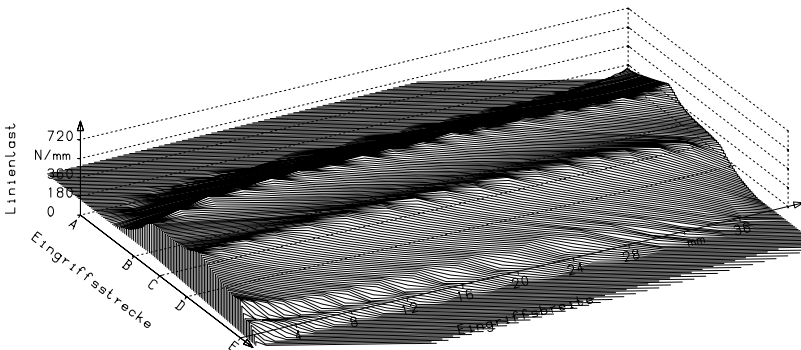
In **Bild 10** sind beispielhafte Ergebnisse einer solchen Drehwegberechnung dargestellt. Die Linienlastverteilung (**Bild 10(c)**) ist für die Beurteilung des Anregungsverhaltens eine weniger geeignete Größe, sondern wird zur Ermittlung von Tragfähigkeitskorrekturen verwendet. Im Gegensatz dazu sind die weiteren dargestellten Größen für die Anregungsbeurteilung wesentlich. Der Zeitverlauf der Drehwegabweichung (**Bild 10(a)**) stellt die Durchsenkung der Verzahnung bei der Berechnung der Lastverteilung über dem Eingriff dar. Jede zeitliche Veränderung der Drehwegabweichung stellt eine Anregung des Getriebes dar. Zur Analyse dieser Anregung wird die Drehwegabweichung in Form eines Spektrums (**Bild 10(b)**) dargestellt, wodurch die harmonischen Anregungsanteile aufgetrennt werden. Mit ergänzenden Größen wie der Überdeckung unter Last können sowohl anregungs- als auch tragfähigkeitsrelevante Aspekte einer Verzahnung analysiert werden. So deutet eine gegenüber dem Nennwert größere lastbedingte Überdeckung auf das Vorhandensein von tragfähigkeitskritischem Tragen der Kopfkanten in Form von vor- bzw. nachzeitigem Zahneingriff hin. Für ein günstiges Anregungsverhalten zeigt sich die praktische Wirksamkeit von ganzzahligen Überdeckungsgrößen, die in der Hauptgeometrieauslegung aufgrund der Lastabhängigkeit dieser Größen nur schwer anwendbar ist.

Die statische Berechnungsmethode der Drehwegabweichung ist gut geeignet, um Einflüsse des Getriebeumfeldes in der Verzahnung zu berücksichtigen und ermöglicht damit die Korrelation der Berechnungsergebnisse mit erforderlichen Verzahnungskorrekturen für Tragfähigkeit und Anregung. Aus diesem Grund ist die Drehwegberechnung zur Korrekturauslegung empfehlenswert.



(a) Verlauf der Drehwegabweichung

(b) Spektrum der Drehwegabweichung



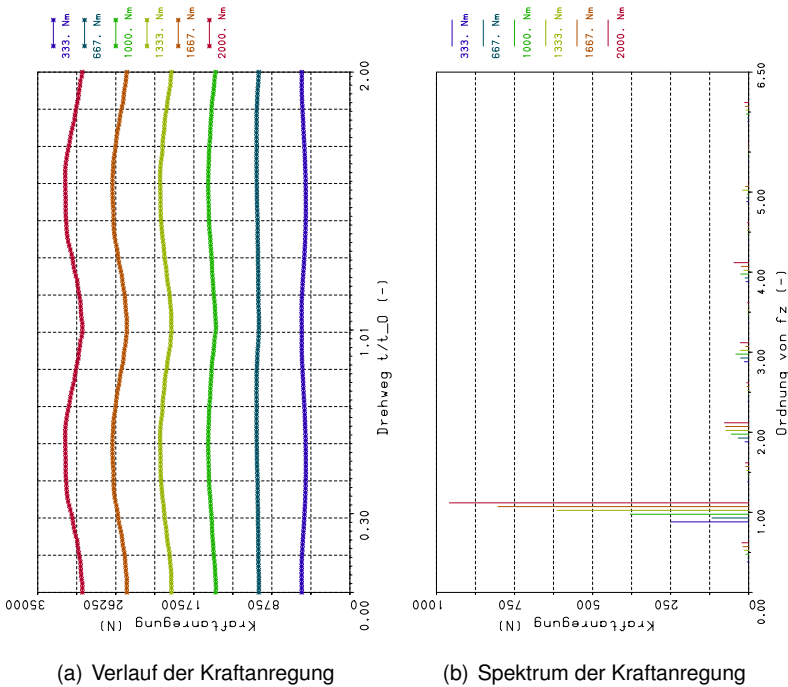
(c) Linienlastverteilung

**Bild 10:** Beispielhafte Berechnungsergebnisse der Drehwegberechnung anhand einer korrigierten Schrägverzahnung

### 3.1.4 Berechnung der Kraftanregung

Eine weitere Berechnungsmethode zur Beurteilung der Verzahnungsanregung stellt die Kraftanregung dar. Für diese Berechnungsmethode wird ein Betriebszustand mit unendlicher Drehzahl angenommen und die veränderliche Verzahnungskraft ausgewertet. Bei diesen Drehzahlverhältnissen können die Zahnräder aufgrund ihrer Trägheit keine Ausgleichsbewegung mehr durchführen, so dass sich die Anregungscharakteristika in Form einer Verzahnungskraftschwankung äußern (siehe **Abschnitt 2.3.2**). Durch die spezielle Auswahl der Randbedingungen ist für die Berechnung kein Mehrkörpersimulationsmodell notwendig. Außerdem ist diese Berechnungsmethode sehr effizient bezüglich der Rechenzeit.

Bei der Ermittlung der Kraftanregung sind die Verformungen und Verlagerungen des Welle-Lager-Systems in Form eines vorgelagerten Rechenschritts berechenbar, da die Wahl der Randbedingungen hier eine Beweglichkeit dieser Bauteile ausschließt. Deshalb ist eine Berechnung des Welle-Lager-Systems hier nicht in jeder Eingriffsstellung notwendig. Die mittleren Verformungen und Verlagerungen des Welle-Lager-Systems unter Belastung werden in Form konstanter Abweichungen bei der Berechnung berücksichtigt. In Verbindung mit den lokalen Steifigkeitswerten der Radpaarung  $c_{zi}(t)$  und den lokalen Abweichungen  $x_{fi}(t)$  kann mithilfe der **Gleichung (4)** die Verzahnungskraft für eine Eingriffsstellung  $F_z(t)$  ermittelt werden, dessen zeitlicher Verlauf als Kraftanregung bezeichnet wird. Der Verformungsbetrag  $x$  aus **Gleichung (4)** stellt die Durchsenkung der Verzahnung zwischen Ritzel und Rad dar und ist aufgrund der Randbedingungen über alle Eingriffsstellungen konstant. Im Rahmen der Berechnung erfolgt eine iterative Auswahl des Betrags  $x$ , so dass der zeitliche Mittelwert der Kraftanregung  $F_z(t)$  der statischen Verzahnungskraft entspricht. Eine grafische Darstellung beispielhafter Verläufe und der hieraus ermittelten Spektren der Kraftanregung für eine korrigierte Schrägverzahnung bei unterschiedlichen Lasten ist in **Bild 11** dargestellt. Für zahlreiche Anregungs-



(a) Verlauf der Kraftanregung

(b) Spektrum der Kraftanregung

**Bild 11:** Beispielhaftes Ergebnis der Kraftanregungsberechnung für eine korrigierte Schrägverzahnung

kennwerte bildet das Spektrum der Kraftanregung (**Bild 11(b)**) die Grundlage. So werden hieraus die Kennwerte Zahnkraftpegel nach **Gleichung (5)**, Anregungspegel nach **Gleichung (7)**, sowie Anregungsamplitudenpegel nach **Gleichung (9)** berechnet. Für die Berechnung des linearisierten Kraftpegels nach **Gleichung (11)** ist zusätzlich die Kenntnis der Verzahnungseigenfrequenz erforderlich, die aus der Verzahnungssteifigkeit und den Drehmassen der beteiligten Räder ermittelt werden kann.

Zur Eigenfrequenzberechnung wird eine Berechnung der dynamischen Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,dyn}$  (nach [39]) auf Basis der Kraftanregungsberechnung durchgeführt. Die dynamische Verzahnungssteifigkeit stellt die



Tangentensteifigkeit für das nicht-lineare Kraft-Verformungsverhalten von Verzahnungen am Betriebspunkt dar. Zur Berechnung wird der Verformungsbetrag  $x$  aus der Kraftanregungsberechnung für das berechnete Drehmoment linearisiert. In Verbindung mit den reduzierten Radmassen  $m_{red}$  nach [86] kann die Verzahnungseigenfrequenz bestimmt werden. Zur Berücksichtigung des Schwingungssystems Getriebe bei der Eigenfrequenzberechnung kann die Eigenfrequenz auch aus einem Mehrmassenmodell ermittelt werden. Im Rahmen von [7, 55] wurden Ansätze entwickelt und implementiert, mit denen ein Mehrmassenmodell aus der Getriebegeometrie ermittelt werden kann.

Die Kraftanregung eignet sich besonders für die Bewertung der Verzahnungsanregung von Verzahnungen. Die Formulierung der Anregung als Kraftgröße führt zu einer Vergleichbarkeit von unterschiedlichen Verzahnungshaupt- und -feingeometrien. Während sich die Drehwegabweichung (**Abschnitte 2.3.1 und 3.1.3**) für die Korrekturauslegung besser eignet als die Kraftanregung, bewertet die Kraftanregung das Anregungsverhalten von Verzahnungen unabhängig von weiteren Verzahnungsgrößen, wie beispielsweise der Verzahnungsteifigkeit. So führt eine steife Verzahnung mit gleich großen Drehwegabweichungen zu einer größeren Anregung des Schwingungssystems als eine weiche Verzahnung, da die Verformungen hier eine größere Kraft zur Folge haben. Die Kraftanregung und hieraus abgeleitete Kenngrößen berücksichtigen diesen Effekt als Kraftgröße zutreffender. Allerdings enthalten Kennwerte der Kraftanregung im Regelfall keine detaillierte Berücksichtigung der frequenzabhängigen Anregbarkeit des umgebenden Systems.

### 3.1.5 Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenformen

Die Anregung aus der Verzahnung wird durch das Schwingungsverhalten des Getriebes maßgeblich in der Wirkung beeinflusst. Jede reale Struktur weist ein dynamisches Systemverhalten mit spezifischen Eigenfrequenzen

auf. Treten Anregungen im Bereich dieser Eigenfrequenzen auf, so werden diese durch das System verstärkt. Das Aufeinandertreffen von Anregung und Eigenfrequenzen stellt häufig einen sehr kritischen Betriebspunkt bezüglich des Anregungs- und Geräuschverhaltens dar. Aus diesem Grund ist die Kenntnis der Lage der wichtigsten Eigenfrequenzen eines Systems notwendig.

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen ist eine Modellierung des Schwingungssystems in Form der systembeschreibenden Schwingungsdifferentialgleichung (**Gleichung (1)**) notwendig. Die Eigenfrequenzberechnung stellt den Sonderfall der homogenen Lösung dieser Differentialgleichung dar (Äußerer Kraftvektor  $\underline{F}(t) = 0$ ). Unter der für übliche Verzahnungsgetriebe gültigen Annahme geringer Dämpfungen kann der Einfluss der Dämpfung auf die Eigenfrequenzlage ebenfalls vernachlässigt werden. Für die Berechnung der Eigenfrequenzen sind also ausschließlich die Massen- und Steifigkeitsmatrizen ( $\underline{M}$  und  $\underline{C}$ ) notwendig. Die systembeschreibenden Matrizen können je nach Detaillierungsgrad unterschiedlich gewählt werden. So liefert ein Minimalmodell mit den Massenträgheiten beider Zahnräder und der in **Abschnitt 3.1.4** dargestellten mittleren Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,dyn}$  bereits gute Ergebnisse zur Verzahnungseigenfrequenz. Außerdem können Modelle zur dynamischen Simulation (siehe **Abschnitt 3.1.6**) unter Verwendung der mittleren Verzahnungssteifigkeit  $c_{z,dyn}$  anstatt der örtlichen Steifigkeit zur Berechnung der Eigenfrequenzen verwendet werden.

Auf Grundlage der Massen- und Steifigkeitsmatrizen ( $\underline{M}$  und  $\underline{C}$ ) können die Eigenwerte und Eigenvektoren [2] mit **Gleichung (20)** ermittelt und als Eigenfrequenzen und Eigenformen der Struktur interpretiert werden. Eine Analyse des Eigenschwingungsverhaltens ermöglicht ein grundsätzliches Verständnis des schwingfähigen Systems. Das Aufeinandertreffen von Eigenfrequenzen mit wesentlichen Anregungsamplituden der Verzahnung, wie Zahneingriffsfrequenzen und deren Harmonischer, sollte grund-

sätzlich vermieden werden.

$$\left[ \underline{\omega}_{eig,k}^2 \quad \underline{EV} \right] = eig \left( \underline{M}^{-1} \underline{C} \right) \quad f_E = \frac{\omega_{eig,k}}{2 \cdot \pi} \quad (20)$$

---

$\underline{M}$	$[kg]$	Massenmatrix
$\underline{C}$	$\left[ \frac{N}{m} \right]$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\omega}_{eig,k}$	$\left[ \frac{1}{s} \right]$	Vektor der Eigenkreisfrequenzen
$\underline{EV}$	$[-]$	Matrix der Eigenformen
$\omega_{eig,k}$	$\left[ \frac{1}{s} \right]$	Eigenkreisfrequenz
$f_E$	$[Hz]$	Eigenfrequenz

---

### 3.1.6 Numerische Methode der dynamischen Simulation

Während die Berechnungsmethoden der Drehwegabweichung (**Abschnitt 3.1.3**) und der Kraftanregung (**Abschnitt 3.1.4**) rechnerische Grenzbeobachtungen des realen Schwingungssystems darstellen, die eine schnelle und zuverlässige Bewertung und Optimierung des Anregungsverhaltens ermöglichen, stellt die dynamische Simulation die numerische Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung (siehe **Gleichung (1)**) für einen Betriebszustand dar.

$$\underline{M} \cdot \ddot{x}(t) + \underline{K}(t) \cdot \dot{x}(t) + \underline{C}(t) \cdot x(t) = \underline{F}(t) \quad (1)$$

Die Parametermatrizen der Schwingungsdifferentialgleichung in **Gleichung (1)** beinhalten die Informationen eines Mehrmassenmodells, das für die Simulation aufgestellt werden muss. Diese Modellierung besteht einerseits aus der Diskretisierung der Bauteile des Getriebes in Massenpunkte, die über Steifigkeiten miteinander verbunden sind und andererseits in der richtigen Auswahl der Parameter bezüglich Masse, Steifigkeit und Dämpfung. Bei der Ermittlung der Massenparameter erfolgt meist eine Zuordnung des Materials zu den einzelnen diskreten Massenpunkten für die Parameterermittlung. Steifigkeitswerte können durch statische Verformungsanalysen ermittelt werden. Dämpfungswerte sind nur schwierig bestimmbar. Für die Werkstoffdämpfung sind in [15] Anhaltswerte in Form Lehrscher Dämpfungswerte vorgegeben (hochfester

Stahl:  $D=0.0014$ ; Maschinen- und Baustahl:  $D=0.0008$ ; Guss:  $D=0.02$ ). Die Lehr'sche Verzahnungsdämpfung kann mit Hilfe von **Gleichung (13)** bestimmt werden.

Da die Parameter für die Dämpfungsmatrix  $\underline{K}(t)$  und Steifigkeitsmatrix  $\underline{C}(t)$  für die Verzahnung veränderlich sind, ist eine geschlossene Lösung dieses Differentialgleichungssystems nicht möglich. Aus diesem Grund wird eine numerische Zeitschrittintegration mit dem Runge-Kutta-Verfahren [69, 98] durchgeführt. Dieses Verfahren ermöglicht die numerische Lösung von Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung. Dabei werden Anfangswertprobleme der in **Gleichung (21)** dargestellten Form durch Zeitschrittintegration gelöst. In der klassischen Form des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung wird der Zustand für den jeweils nächsten Zeitschritt mithilfe der **Gleichungen (22) und (23)** aus dem vorangegangenen Zustand ermittelt.

$$\dot{z} = f(t, z) \quad \text{mit:} \quad z(t_0) = z_0 \tag{21}$$

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + \frac{1}{6} (\underline{k}_1 + 2 \cdot \underline{k}_2 + 2 \cdot \underline{k}_3 + \underline{k}_4) \quad \text{mit:} \quad t_{n+1} = t_n + h \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \text{mit:} \quad \underline{k}_1 &= h \cdot f[t_n, z(t_n)] \\ \underline{k}_2 &= h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, z(t_n) + \frac{\underline{k}_1}{2}\right] \\ \underline{k}_3 &= h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, z(t_n) + \frac{\underline{k}_2}{2}\right] \\ \underline{k}_4 &= h \cdot f[t_n + h, z(t_n) + \underline{k}_3] \end{aligned} \tag{23}$$

---

$z$	[–]	Zustandsvektor
$z_0$	[–]	Anfangszustand
$h$	[–]	Schrittweite
$\underline{k}_i$	[–]	Runge-Kutta-Faktoren
$t$	[–]	Eingriffszeit bezogen auf eine Teilung

---

Für dynamische Analysen an Getrieben ist zur Lösung des in **Gleichung (1)** dargestellten Systems 2. Ordnung eine Substitution nach **Gleichung (24)** notwendig. Durch Einsetzen der Parameter aus **Gleichung (1)** sowie

einer Entdimensionierung ergibt sich das dimensionslose Differentialgleichungssystem in **Gleichung (25)**. Durch weitere Umformung kann die Differentialgleichung in die Form von **Gleichung (26)** gebracht werden, die der Formulierung des Anfangswertproblems in **Gleichung (21)** entspricht.

$$z = \begin{pmatrix} \underline{x} / [m] \\ \underline{\dot{x}} / [\frac{m}{s}] \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{E} & 0 \\ 0 & \underline{M} / [kg] \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underline{\dot{z}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\underline{E} \\ \underline{C}(t) / [\frac{N}{m}] & \underline{K}(t) / [\frac{Ns}{m}] \end{pmatrix}}_{\underline{B}} \cdot z = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{F}(t) / [N] \end{pmatrix}}_{\underline{\hat{F}}} \quad (25)$$

$$\underline{\dot{z}} = \underline{A}^{-1} \underline{\hat{F}} - \underline{A}^{-1} \underline{B} \cdot z \quad (26)$$

---

$z$	$[-]$	Zustandsvektor
$\underline{x}(t)$	$[m]$	Ortsvektor
$\underline{\dot{x}}(t)$	$[\frac{m}{s}]$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{E}$	$[-]$	Einheitsmatrix
$\underline{M}$	$[kg]$	Massenmatrix
$\underline{K}(t)$	$[\frac{Ns}{m}]$	Dämpfungsmatrix
$\underline{C}(t)$	$[\frac{N}{m}]$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{F}(t)$	$[N]$	Äußerer Kraftvektor
$\underline{A}$	$[-]$	Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{B}$	$[-]$	Parametermatrix im Zustandsraum
$\underline{\hat{F}}(t)$	$[-]$	Kraftvektor im Zustandsraum

---

Bei der dynamischen Integration der Schwingungsdifferentialgleichung aus **Gleichung (26)** mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens (**Gleichung (22)** und **Gleichung (23)**) wird nach jedem Rechenschritt anhand der aktuellen Position der Verzahnung die Lastverteilung ermittelt. Auf Grundlage der Verzahnungssteifigkeit kann die Lastverteilung über den im Eingriff befindlichen Berührlinien unter Berücksichtigung der aktuellen Stellung der Zahnräder und der vorgegebenen Korrekturen bestimmt werden. Die Summe aller Einzelkräfte einer Eingriffsstellung ergibt hierbei entsprechend der **Gleichung (27)** die dynamische Zahnkraft  $F_{z,dyn}(t)$ , aus der mit **Gleichung**

(28) die linearisierte dynamische Verzahnungssteifigkeit  $c_{verz,dyn}$  ermittelt wird, die in die Steifigkeitsmatrix  $\underline{C}(t_n)$  eingeht. Durch die Ermittlung der Verzahnungssteifigkeit auf Grundlage der lokalen Lastverteilung sind alle maßgeblichen Anteile der nichtlinearen Verzahnungssteifigkeit berücksichtigt.

Zur Durchführung vergleichbarer Berechnungen in Mehrkörpersimulationsprogrammen ist es häufig notwendig, Kennfelder zur Berücksichtigung der Verzahnungssteifigkeit zu verwenden. Allerdings ermöglicht eine aufwendige Vorrechnung von Kennfeldern für die Verzahnungssteifigkeit weder die lokale Zuordnung der Ergebnisse z.B. für dynamische Lastverteilung noch die effiziente Berücksichtigung mehrerer nichtlinearer Einflussgrößen auf die Verzahnungssteifigkeit.

$$F_{z,dyn}(t_n) = \sum_i \{c_{zi}(t_n) \cdot [|x_{Ritzel}(t_n) - x_{Rad}(t_n)| + x_{fi}(t_n)]\} \quad (27)$$

$$\text{mit: } x_{Ritzel}(t_n), x_{Rad}(t_n) \quad \text{aus} \quad \underline{z}(t_n)$$

$$c_{verz,dyn}(t_n) = \frac{F_{z,dyn}(t_n)}{|x_{Ritzel}(t_n) - x_{Rad}(t_n)|} \quad (28)$$

---

$F_{z,dyn}$	[N]	dynamische Verzahnungskraft
$c_{zi}(t)$	$\left[\frac{N}{\mu m}\right]$	lokale Steifigkeit der Verzahnung am Punkt $i$
$x_{Ritzel}(t_n)$	[ $\mu m$ ]	Position des Ritzels bez. auf die Eingriffsstrecke
$x_{Rad}(t_n)$	[ $\mu m$ ]	Position des Rades bez. auf die Eingriffsstrecke
$x_{fi}(t)$	[ $\mu m$ ]	res. Abweichungsbetrag zwischen Ritzel und Rad in Eingriffsrichtung
$\underline{z}$	[–]	Zustandsvektor
$c_{verz,dyn}(t)$	$\left[\frac{N}{\mu m}\right]$	dyn. Verzahnungssteifigkeit

---

Bei der Verwendung des klassischen Runge-Kutta-Integrationsverfahrens, wie in **Gleichung (21)** bis **Gleichung (23)** beschrieben, ist die Schrittweite  $h$  ein wesentlicher Parameter, der über die gesamte Integration konstant bleibt. Für die Auswahl der optimalen Schrittweite gibt es hierbei folgende Randbedingungen: Je stärker die Nichtlinearitäten im betrachteten Modell, desto kleiner sollte die Schrittweite gewählt werden, da das Rechenverfahren innerhalb eines Rechenschritts ausschließlich lineare Zusammenhänge berücksichtigt. Andererseits können kleine Schrittweiten aufgrund der

begrenzten Genauigkeit von Fließkommazahlen auf Digitalrechnern zu immer größer werdenden Rundungsfehlern führen, die die Genauigkeit des Verfahrens negativ beeinflussen. In der Anwendung ist deshalb die richtige Wahl der Schrittweite ein Kompromiss zwischen diesen beiden Faktoren, der modellabhängig mühsam mithilfe von Mehrfachrechnungen ermittelt werden muss. Für die numerische Integration von Verzahnungen ist dieser Kompromiss für eine konstante Schrittweite nicht sinnvoll darstellbar, da sich der Grad der Nichtlinearität zwischen den Zeitpunkten des Eingriffsbeginns und des Eingriffsendes einzelner Zahnpaare und dem regulären Eingriff stark verändert. Aus diesem Grund ist die Verwendung von variablen Schrittweiten notwendig, was eine Anpassung der Schrittweite durch den Integrator erfordert [90]. Einfache Verfahren verwenden Kennzahlen, die aus den Runge-Kutta-Faktoren ermittelt werden, mit empirischen Grenzen anhand derer die Schrittweite verändert wird. Alternativ werden für jeden Rechenschritt zwei weitere Rechenschritte mit jeweils halbiertes Schrittweite durchgeführt und die Ergebnisse verglichen, um die Schrittweite anzupassen. All diese Verfahren erfordern entweder ebenfalls die Vorgabe von modellabhängigen empirischen Faktoren zur Schrittweitensteuerung oder führen zu einem Vielfachen der Rechenzeit. Aus diesem Grund entwickelt Fehlberg [28] ein Verfahren, das einen Rechenschritt zweimal mit unterschiedlichen Runge-Kutta-Ordnungen berechnet und aus dem Vergleich der Ergebnisse eine Schrittweitensteuerung herleitet. Zur Berücksichtigung von Rechenzeitaspekten werden die Runge-Kutta-Faktoren so gewählt, dass ein Großteil der Faktoren identisch für beide Rechenschritte ist und deshalb nur einmal berechnet werden müssen. Cash und Karp [13] entwickeln dieses Prinzip weiter und schlagen Faktoren (**Gleichung (31)**) vor, die aus einer Kombination der Berechnung von Runge-Kutta 5. (**Gleichung (29)**) und 4. Ordnung (**Gleichung (30)**) bestehen [90].

$$\underline{z}(t_{n+1}) = \underline{z}(t_n) + \frac{37}{378} \cdot \underline{k}_1 + \frac{250}{621} \cdot \underline{k}_3 + \frac{125}{594} \cdot \underline{k}_4 + \frac{512}{1771} \cdot \underline{k}_6 \quad (29)$$

$$\underline{z}^*(t_{n+1}) = \underline{z}(t_n) + \frac{2825}{27648} \cdot \underline{k}_1 + \frac{18575}{48384} \cdot \underline{k}_2 + \frac{13525}{55296} \cdot \underline{k}_3 + \frac{277}{14336} \cdot \underline{k}_4 + \frac{1}{4} \cdot \underline{k}_5 + \frac{1}{4} \cdot \underline{k}_6 \quad (30)$$

mit:

$$\begin{aligned} \underline{k}_1 &= h \cdot f [t_n, \underline{z}(t_n)] \\ \underline{k}_2 &= h \cdot f [t_n + \frac{1}{5} \cdot h, \underline{z}(t_n) + \frac{1}{5} \cdot \underline{k}_1] \\ \underline{k}_3 &= h \cdot f [t_n + \frac{3}{10} \cdot h, \underline{z}(t_n) + \frac{3}{10} \cdot \underline{k}_1 + \frac{9}{40} \cdot \underline{k}_2] \\ \underline{k}_4 &= h \cdot f [t_n + \frac{3}{5} \cdot h, \underline{z}(t_n) + \frac{3}{10} \cdot \underline{k}_1 - \frac{9}{10} \cdot \underline{k}_2 + \frac{6}{5} \cdot \underline{k}_3] \\ \underline{k}_5 &= h \cdot f [t_n + 1 \cdot h, \underline{z}(t_n) - \frac{11}{54} \cdot \underline{k}_1 + \frac{5}{2} \cdot \underline{k}_2 - \frac{70}{27} \cdot \underline{k}_3 + \frac{35}{27} \cdot \underline{k}_4] \\ \underline{k}_6 &= h \cdot f [t_n + \frac{7}{8} \cdot h, \underline{z}(t_n) + \frac{1631}{55296} \cdot \underline{k}_1 + \frac{175}{512} \cdot \underline{k}_2 + \frac{575}{13824} \cdot \underline{k}_3 + \frac{44275}{110592} \cdot \underline{k}_4 + \frac{253}{4096} \cdot \underline{k}_5] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\Delta = |\underline{z}(t_{n+1}) - \underline{z}^*(t_{n+1})| \quad (32)$$

$$h_{neu} = h \cdot \left| \frac{\Delta_0}{\Delta} \right|^{0.2} \quad (33)$$

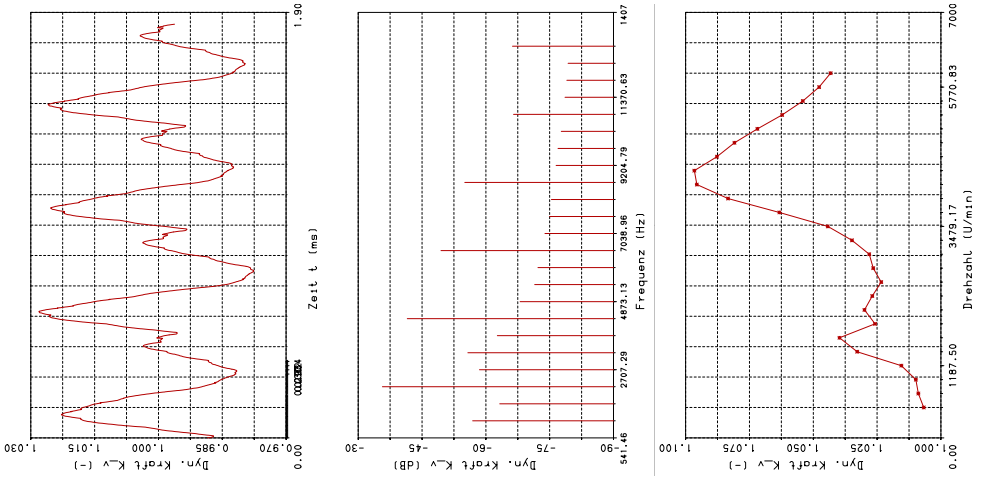
---

$\underline{z}$	[-]	Zustandsvektor (RK 5. Ordn.)
$\underline{z}^*$	[-]	Zustandsvektor (RK 4. Ordn.)
$h$	[-]	Schrittweite
$\underline{k}_i$	[-]	Runge-Kutta-Faktoren
$\Delta$	[-]	Abweichung
$\Delta_0$	[-]	angestrebte max. Abweichung
$h_{neu}$	[-]	angepasste Schrittweite

---

In **Bild 12** sind einige beispielhafte Berechnungsergebnisse aus der dynamischen Simulation dargestellt. So zeigt **Bild 12(a)** den Verlauf der dynamischen Zahnkraft  $F_{z,dyn}$  (**Gleichung (27)**) über vier Eingriffsteilungen. Das entsprechende Spektrum der dynamischen Zahnkraft ist in **Bild 12(b)** abgebildet. In der Resonanzkurve in **Bild 12(c)** werden die Maximalwerte der dynamischen Kraftverläufe für unterschiedliche Drehzahlen dargestellt. Diese Maximalwerte entsprechen nach **Gleichung (16)** dem Verlauf des Dynamikfaktors  $K_{V,A}$  entsprechend DIN 3990/ISO 6336 [22, 62]. Aus der dynamischen Zahnkraft können weitere Kennwerte, wie der dynamische Zahnkraftpegel nach **Gleichung (14)** ermittelt werden. In **Bild 12(d)** und **Bild 12(e)** sind die dynamische und statische Lastverteilung gegenübergestellt. Zwischen den statischen und dynamischen Lastverteilungen zeigen

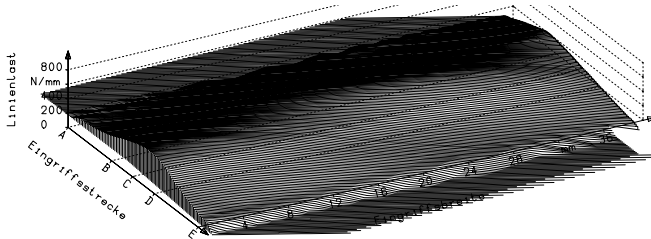




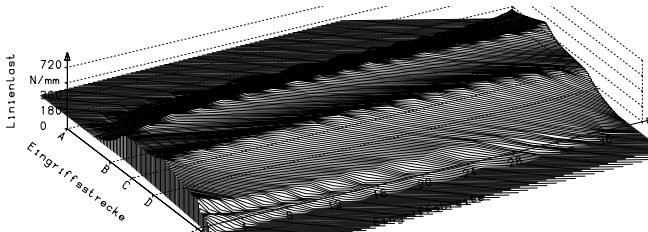
(a) Verlauf der dynamischen Zahnkraft (3000 U/min)

(b) Spektrum der dynamischen Zahnkraft (3000 U/min)

(c) Resonanzkurve



(d) Dynamische Lastverteilung (4000 U/min)



(e) Statische Lastverteilung

**Bild 12:** Beispielhafte Berechnungsergebnisse der dynamischen Simulation für eine korrigierte Schrägverzahnung (Lastverteilung im Vergleich mit den Ergebnissen der statischen Berechnung - Drehwegabweichung)

sich Unterschiede, die sich durch den Einfluss dynamischer Überlast erklären lassen. Für tieferegehende rechnerische Untersuchungen der Tragfähigkeit erscheint deshalb die Berücksichtigung des Einflusses des Schwingungsverhaltens in Form der dynamischen Last- und Pressungsverteilung sinnvoll.

Die dynamische Simulation stellt eine umfassende und detaillierte Möglichkeit der Berechnung des Anregungs- und Schwingungsverhaltens von Verzahnungen dar. Aufgrund des größeren Modellierungs- und Berechnungsaufwandes gegenüber der Drehweg- und Kraftanregungsberechnung (**Abschnitte 3.1.3** und **3.1.4**) eignet sich die dynamische Simulation eher für die detaillierte Nachrechnung einzelner Verzahnungsstufen als für die Auslegung von Verzahnungskorrekturen. Für die detaillierte Untersuchung der Ergebnisse einer Korrekturauslegung unter Berücksichtigung des Getriebschwingungsverhaltens oder zur Nachrechnung von abweichungsbehafteten Verzahnungen ist die dynamische Simulation jedoch sehr gut geeignet. Für die Analyse von Abweichungseinflüssen ist es möglich die Topologie- und Teilungsmessdaten für alle Zähne einzeln vorzugeben und die Verzahnung rechnerisch unter Last abzuwälzen. Gerade zur Analyse von Problemfällen ist die dynamische Simulation besonders gut geeignet. Durch die Auswertung der dynamischen Lastverteilung in Form einer Resonanzkurve wie in **Bild 12(c)** können die dynamischen Überlasten im Betriebszustand ermittelt werden und hierdurch Rückschlüsse auf deren Auswirkungen auf die Tragfähigkeit festgestellt werden.

### **3.2 Anwendung der Grundlagen auf die Planetenradstufe**

Planetengetriebe finden aufgrund ihrer kompakten Bauweise und ihrer flexiblen Einsatzmöglichkeiten immer stärkere Verwendung in Praxisgetrieben. Aufgrund der inneren Leistungsverzweigung überlagern sich jedoch die Anregungskomponenten der beteiligten Einzelverzahnungen und ergeben das spezifische Anregungsverhalten des Planetenradsatzes inner-

halb eines Gesamtgetriebes. Die rechnerische Analyse der Eigenschaften von Planetengetrieben ist insbesondere in der Auslegungsphase von Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Anregungsverhalten von einfachen Planetenradsätzen betrachtet. Spezielle Bauformen wie Stufen- oder Mehrfachplaneten oder mehrfach gekoppelte Planetengetriebe werden nicht betrachtet.

Auf Grundlage der Berechnungsmethoden von Stirnradgetrieben aus **Abschnitt 3.1** können erweiterte Berechnungsansätze hergeleitet werden, die die Beurteilung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben ermöglichen. Zur Verwendung der in **Abschnitt 3.1.1** beschriebenen Ansätze für Stirnradverzahnungen wurden von [38, 57] theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt, um deren Gültigkeitsbereich auf Innenverzahnungen zu erweitern und messtechnisch zu validieren. Die Implementierung dieser Erkenntnisse sowie die Übertragung der Möglichkeiten der Verzahnungskorrekturen und -abweichungen von Stirnrädern auf Innenverzahnungen erfolgt im Rahmen der Erstellung des FVA-Programms ANPLA [32, 36].

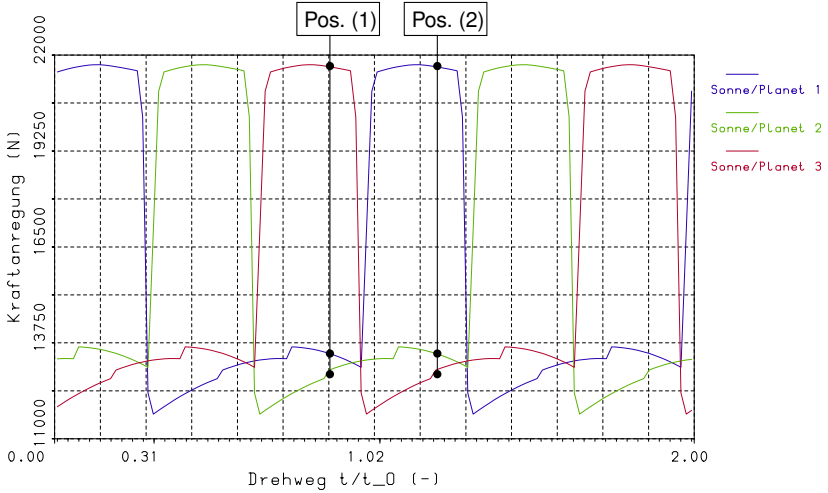
Da die kinematische Kopplung der einzelnen Verzahnungen in einem Planetengetriebe die Anregungseigenschaften der Einzelverzahnungen überlagert, sind zur Beurteilung dieser überlagerten Anregung eines Planetenradsatzes weitergehende Methoden erforderlich. Auf Grundlage einiger Berechnungsmethoden für Stirnradgetriebe wurden deshalb Beurteilungsmethoden für die überlagerten Anregungseffekte in Planetengetrieben entwickelt. Alle dargestellten Berechnungsansätze sind im EDV-Programm ANPLA [36] enthalten und sind dadurch für beliebige einfache Planetenradsätze anwendbar. Die Berechnung erfolgt hierbei im Koordinatensystem des Stegs, so dass auch vom Standgetriebe abweichende Planetenradsätze berechnet werden können.

### 3.2.1 Anregung der Planetenradstufe auf Grundlage der Kraftanregung

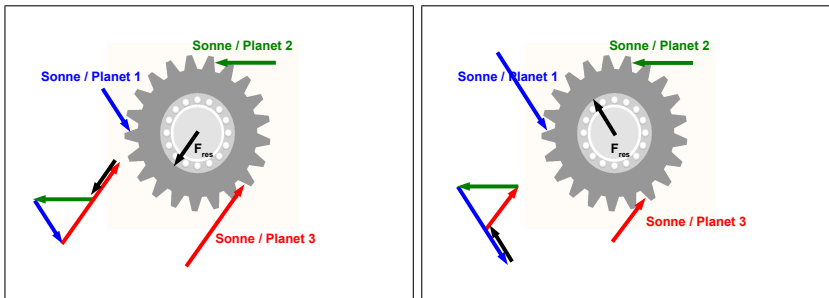
Die Anregungsbeurteilung auf Grundlage der Kraftanregungsberechnung der Einzelverzahnungen, wie sie für Stirnradstufen in **Abschnitt 3.1.4** dargestellt ist, bewertet die kinematische Überlagerung der Einzelanregung der Verzahnungen eines Planetengetriebes. Hierfür werden die Zeitverläufe der Kraftanregungen aller Einzelverzahnungen berechnet und eine Kraft- und Momentensummutation für alle Bauteile durchgeführt. Die vektorielle Kraftsummutation wird als Lagerkraftanregung [32] bezeichnet, während die Drehmomentensummutation nach [32] die Momentenanregung ergibt. Im Gegensatz zur Wirkung der Verzahnungsanregung einer Stirnradstufe, bei der sich die Lagerkraft- und die Momentenanregung jeweils proportional zur Kraftanregung der Verzahnung verhalten, sind die Anregungskomponenten bei Planetengetrieben durch die Überlagerung im Allgemeinen nicht proportional. Aus diesem Grund ist es erforderlich, beide Wirkrichtungen der Verzahnungsanregung für die Anregungsbeurteilung zu betrachten.

Für die Lagerkraftanregung werden die Kraftanregungen aller an einem Bauteil (Sonne, Steg, Hohlrad) angreifenden Verzahnungen vektoriell addiert. Es ergibt sich eine resultierende Lagerkraft, deren Richtung und Betrag zeitlich veränderlich ist. Dies stellt eine translatorische Anregung an diesem Bauteil dar. Über die Lagerungen werden diese Anregungskomponenten direkt ans Gehäuse übertragen, von dem die Geräuschabstrahlung ausgeht.

In **Bild 13** ist diese vektorielle Addition der Kraftanregung eines unkorrigierten, abweichungsfreien Planetengetriebes für zwei unterschiedliche Eingriffsstellungen dargestellt. Die Lagerkraft ist hierbei die Resultierende der Kraftaddition  $F_{res}$ . In den beiden dargestellten Eingriffsstellungen, deren Position sich um ein Drittel Eingriffsteilung unterscheidet, hat die Lagerkraft eine wesentlich unterschiedliche Wirkrichtung, was zu einer translati-



(a) Zeitverläufe der Kraftanregungen der an der Sonne angreifenden Verzahnungen



(b) Kräftegleichgewicht in Pos. (1)

(c) Kräftegleichgewicht in Pos. (2)

**Bild 13:** Grafische Darstellung zur Ermittlung der Lagerkraftanregung an der Sonne aus den Kraftanregungen bei einem Planetengetriebe für zwei beispielhafte Eingriffsstellungen

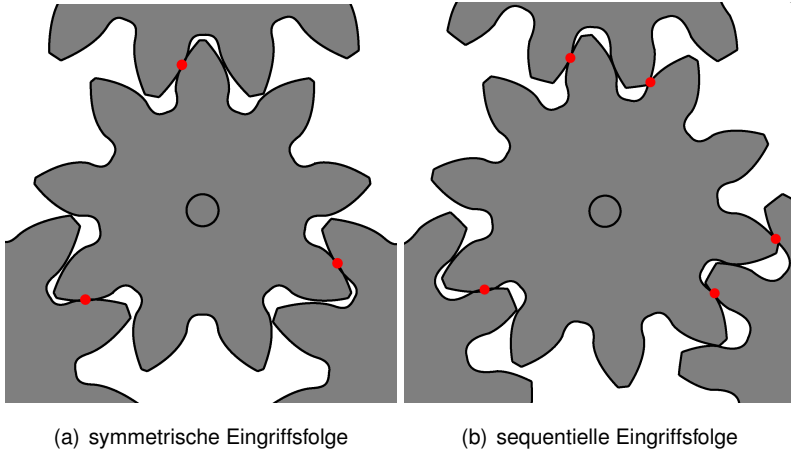
rischen Anregung der Sonne führt, die sich in Form einer translatorischen Bewegung der Sonne und einer Körperschallanregung an den Lagerstellen der Sonne äußert.

Die Momentenanregung stellt die rotarische Anregung eines belasteten Planetengetriebes innerhalb eines Antriebsstranges dar. Hierfür werden

die Drehmomente addiert, die durch die an einem Bauteil (Sonne, Steg, Hohlrad) angreifenden Kraftanregungen verursacht werden. Es ergibt sich ein zeitlich veränderliches Drehmoment, dessen Mittelwert dem statischen Drehmoment entspricht. Diese Drehmomentschwankung führt zu einer inneren Anregung des Antriebsstranges in Torsionsrichtung. Durch weitere Elemente im Antriebsstrang z.B. weitere Stirnradstufen oder die An- oder Abtriebsmaschine kann diese Drehschwingung schallabstrahlende Flächen zu Schwingungen anregen.

Die kinematische Überlagerung der Verzahnungsanregung zeigt bei Planetengetrieben eine Differenzierung der translatorischen und der rotatorischen Komponente. Durch gezielte Maßnahmen können allein über die Anordnung der Planeten bestimmte Anregungskomponenten beeinflusst werden. Hierzu wird angestrebt, dass sich die Anregungen mehrerer Verzahnungen gegenseitig kompensieren. So ist es theoretisch möglich, durch die synchrone Anordnung aller Zahneingriffe (symmetrische Eingriffsfolge) innerhalb eines idealen Planetengetriebes keine Lagerkraftanregung zu erhalten, da die Vektorsumme gleichgroßer Kräfte in regelmäßiger Anordnung keine resultierende Lagerkraft  $F_{res}$  zur Folge hat. Für die rotatorische Richtung führt diese synchrone Anordnung zu einer Anregung, da sich diese in dieser Anordnung nicht zwischen unterschiedlichen Verzahnungen ausgleichen kann.

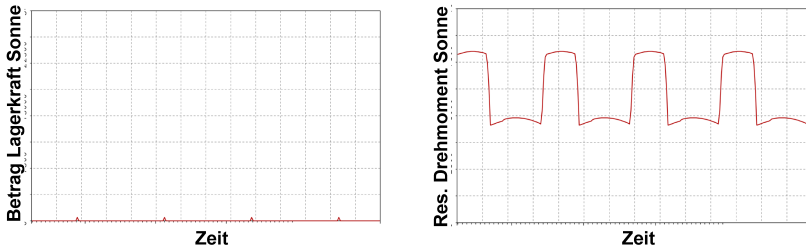
Für Planetengetriebe mit gleichmäßig am Umfang verteilten Planeten lässt sich dieses Verhalten durch die Eingriffsfolge charakterisieren. Ist die Zähnezahl von Sonne und Hohlrad durch die Planetenanzahl teilbar, so liegt unter Voraussetzung der Einbaubedingung eine symmetrische Eingriffsfolge vor. Die Verzahnungen befinden sich zu jedem Zeitpunkt in der gleichen Eingriffsstellung. Alle Berührungspunkte zwischen Sonne und Planet, die zu einem Zeitpunkt auftreten, sind in **Bild 14(a)** dargestellt. Für ein abweichungsfreies Planetengetriebe mit symmetrischem Zahneingriff ergibt sich eine geringe Lagerkraft- und eine hohe Momentenanregung. Wenn die



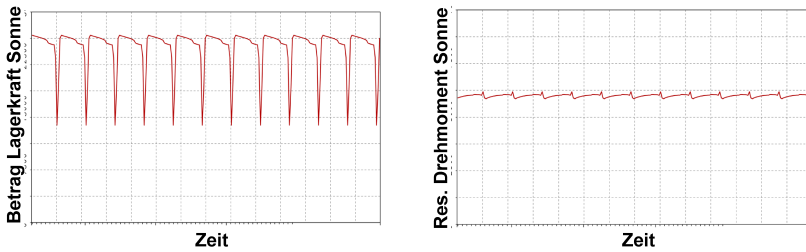
**Bild 14:** Berührungspunkte der Verzahnungen zwischen Sonne und Planeten bei unterschiedlichen Eingriffsfolgen.

Zähnezahlen der Sonne und des Hohlrads eines einbaubaren Planetenradsatzes nicht durch die Planetenanzahl teilbar sind, so liegt sequentieller Zahneingriff vor. Die Eingriffsstellungen der einzelnen Verzahnungen sind hierbei gleichmäßig über dem Umfang des Planetengetriebes verteilt. Die gleichzeitigen Berührungspunkte für ein geradzahntes Getriebe ( $\varepsilon_\alpha \sim 1.6$ ) sind hierfür in **Bild 14(b)** dargestellt, wo die Stellung einzelner Verzahnungen im Einzel- und Doppelingriffsgebiet deutlich wird. Durch die kinematischen Zusammenhänge weisen sequentielle Planetengetriebe üblicherweise eine hohe rotatorische und eine niedrige translatorische Anregung auf.

In **Bild 15** sind die resultierenden Anregungskomponenten für geradzahnte Planetengetriebe unterschiedlicher Eingriffsfolge dargestellt. Während die translatorische Anregung in Form der Lagerkraftanregung an der Sonne für die symmetrische Eingriffsfolge (**Bild 15(a)**) verschwindend gering ist, weist die rotatorische Anregung in Form der Momentenanregung eine starke Schwankung auf, was zu einer starken rotatorischen Anregung



(a) symmetrische Eingriffsfolge (links: Lagerkraftanregung – keine resultierende Querkraft an der Sonne; rechts Momentenanregung)



(b) sequentielle Eingriffsfolge (links: Lagerkraftanregung; rechts Momentenanregung)

**Bild 15:** Lagerkraft- und Momentenanregung für geradzahnante Planetengetriebe mit unterschiedlicher Eingriffsfolge (abweichungsfrei)

führt. Ein vergleichbares Planetengetriebe mit sequentiellm Zahneingriff (**Bild 15(b)**) zeigt hierbei die gegenläufige Tendenz mit einer starken translatorischen und einer geringen rotatorischen Anregung. Aufgrund der betragsmäßigen Darstellung der Lagerkraftanregung in **Bild 15** sei darauf hingewiesen, dass auch eine konstante, aber betragsmäßig hohe Lagerkraftanregung aufgrund wechselnder Wirkrichtungen im Regelfall zu einer Anregung führt.

Es lässt sich feststellen, dass sich die Einzelanregungen der Verzahnung in einem Planetengetriebe gegenseitig überlagern. Bei dieser Überlagerung können einzelne Komponenten der Anregung gezielt innerhalb des Planetengetriebes kompensiert werden. Für die translatorische Anregung ist hierfür ein in jeder Eingriffsstellung ausgeglichenes vektorielles Kräf-



tegleichgewicht bezüglich aller an einem Bauteil (z.B. Sonne) angreifenden Kraftanregungskomponenten notwendig. Für gleichmäßig an Umfang angeordnete Planeten ist dies bei jederzeit identischen Kraftanregungsverläufen, wie es bei abweichungsfreien Planetengetrieben mit symmetrischem Zahneingriff vorkommt, der Fall. Für eine geringe rotatorische Anregung ist ein möglichst gleichbleibendes, aus den Kraftanregungskomponenten resultierendes Drehmoment, erforderlich. Aufgrund der identischen Hebelarme (Grundkreisradius) wird demnach eine möglichst gering schwankende Betragssumme angestrebt, die am ehesten durch die am Umfang verteilte gleichmäßige zeitliche Verschiebung der Kraftanregungsverläufe wie beim sequentiellen Zahneingriff erreicht werden kann. In der Kombination beider Anforderungen heißt dies, dass die Minimierung des Anregungsverhaltens sowohl in rotatorischer als auch in translatorischer Richtung durch die Anordnung der Planeten grundsätzlich nicht erreicht werden kann. Die einzige Möglichkeit beide Anregungskomponenten kombiniert zu optimieren, stellt die Reduzierung der Anregung der zugrundeliegenden Einzelverzahnungen dar. In der praktischen Anwendung können hierfür Berechnungsmethoden zur Optimierung des Anregungsverhaltens von Stirnradstufen übertragen und angewendet werden.

### **3.2.2 Anregung der Planetenradstufe auf Grundlage der Drehwegabweichung zwischen Sonne und Hohlrad**

Zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Planetengetrieben können in Analogie zu den bewährten Methoden an Stirnradverzahnungen auch statische Berechnungsmethoden eingesetzt werden. Die Drehwegabweichung von Stirnrädern enthält die Schwankung der Momentanübersetzung von der theoretischen Übersetzung. Analog hierzu lässt sich das Drehwegverhalten von Planetengetrieben definieren:

Für die gesamte Planetenradstufe wird unter Last das Drehverhalten zwischen Sonne und Hohlrad ausgewertet. Da Sonne und Hohlrad nicht miteinander kämmen, ist ein Bezug auf die Eingriffsrichtung, wie bei Stirn-

rädern üblich, nicht möglich. Die Drehwegabweichung wird deswegen als relative Drehwinkelabweichung zwischen Sonne und Hohlrad angegeben.

Die Drehwegabweichung einer Planetenradstufe wird aufgrund der inneren Leistungsverzweigung von allen Verzahnungen und deren gegenseitigen Wechselwirkungen beeinflusst. Häufig sind einzelne Bauteile (z.B. Sonne) zur gleichmäßigeren Lastaufteilung zwischen den Planeten nicht oder sehr weich gelagert, so dass es aufgrund der hieraus resultierenden Ausgleichsbewegungen zu einer kinematischen Beeinflussung des Drehwegverhaltens kommt. Aus diesen Gründen sind bei der Ermittlung des Drehwegverhaltens die Wechselwirkungen der Einzelstufen nicht vernachlässigbar, so dass es notwendig ist, auf Grundlage der Lastaufteilungsbeziehung die Position der Zentralbauteile (Sonne und Hohlrad) unter Berücksichtigung der Lagerung so zu ermitteln, dass sich keine Querkräfte ergeben, die eine Verschiebung dieser Bauteile hervorrufen. Im Folgenden wird die Berechnung des Drehwegverhaltens von Planetengetrieben erläutert und auf Grundlage der Drehwegberechnung von Stirnrädern hergeleitet. Aufgrund der statischen Randbedingung dieses Berechnungsmodells sind Trägheits- und Dämpfungseinflüsse in dieser Methode nicht enthalten. Zunächst entspricht nach **Gleichung (34)** die Summe der an der Sonne angreifenden Verzahnungskräfte dem Drehmoment der Sonne. Die Lastaufteilung zwischen den Planeten ergibt sich hierbei aus Verhältnissen im Planetengetriebe selbst und muss als Ergebnis der rechnerischen Analyse nicht vorgegeben werden.

$$T_{Son} = r_{b,S} \cdot \sum_{i=1}^{n_{pl}} F_{Vz,SPi} \quad (34)$$

---

$T_{Son}$	[Nm]	Drehmoment an der Sonne
$r_{b,S}$	[m]	Grundkreisradius der Sonne
$n_{pl}$	[-]	Anzahl der Planeten
$F_{Vz,SPi}$	[N]	Verzahnungskraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten

---

Im Folgenden werden alle weiteren Gleichungen für ein Planetengetriebe

mit 3 Planeten dargestellt. Alle Gleichungen sind jedoch auch für Planetengetriebe mit beliebiger Planetenanzahl darstellbar.

Die Winkelpositionen zwischen den Einzelbauteilen und die Eingriffstrecken der Verzahnungen sind über die Planetenkinematik gekoppelt. Es ergibt sich der in **Gleichung (35)** dargestellte Zusammenhang.

$$\begin{pmatrix} r_{b,S} & -r_{b,P} & 0 & 0 & 0 \\ r_{b,S} & 0 & -r_{b,P} & 0 & 0 \\ r_{b,S} & 0 & 0 & -r_{b,P} & 0 \\ 0 & r_{b,P} & 0 & 0 & -r_{b,H} \\ 0 & 0 & r_{b,P} & 0 & -r_{b,H} \\ 0 & 0 & 0 & r_{b,P} & -r_{b,H} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_S \\ \varphi_{P1} \\ \varphi_{P2} \\ \varphi_{P3} \\ \varphi_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{Vz,SP1} \\ s_{Vz,SP2} \\ s_{Vz,SP3} \\ s_{Vz,P1H} \\ s_{Vz,P2H} \\ s_{Vz,P3H} \end{pmatrix} \quad (35)$$

---

$r_b$	[m]	Grundkreisradius
$s_{,P,H}$	[-]	Indexbezeichnung für die Einzelbauteile: S=Sonne, P=Planet, H=Hohlrاد
$\varphi$	[rad]	Winkelposition eines Bauteils
$s_{Vz}$	[m]	Verzahnungsauslenkung bezgl. Eingriffsrichtung

---

Auf jeden einzelnen Planeten wirken außer den Verzahnungskräften mit Sonne und Hohlrاد keine weiteren Kräfte und Momente. Das Momentengleichgewicht für die Planeten ist in **Gleichung (36)** dargestellt.

$$r_{b,P} \cdot \underline{F_{Vz,SP}} = r_{b,P} \cdot \underline{F_{Vz,PH}} \quad (36)$$

---

$r_b$	[m]	Grundkreisradius
$s_{,P,H}$	[-]	Indexbezeichnung für die Einzelbauteile: S=Sonne, P=Planet, H=Hohlrاد
$\underline{F_{Vz,SP}}$	[N]	Vektor der Verzahnungskräfte zwischen Sonne und Planet
$\underline{F_{Vz,PH}}$	[N]	Vektor der Verzahnungskräfte zwischen Planet und Hohlrاد

---

Bei der Berechnung der Verzahnungen werden topologische Berechnungsmodelle verwendet. Auf diese Art und Weise können detaillierte Einflüsse auf die Verzahnungen wie Verzahnungskorrekturen, Abweichungen, Verlagerungen u.ä. berücksichtigt werden. Für die topologische Betrachtung wird die Verzahnung durch zahlreiche Stützpunkte entlang der Berührlinien diskretisiert und hierdurch eine topologische Lastverteilung innerhalb

der Verzahnung ermittelt. Die Verzahnungskraft entspricht der Summe der Einzelkräfte der Lastverteilung einer Verzahnung nach **Gleichung (37)**.

$$F_{Vz,SPi} = \sum_{j=1}^{n_i} f_{Vz,SPi,j} \quad \text{bzw.} \quad F_{Vz,PiH} = \sum_{j=1}^{n_{n_{pl}+i}} f_{Vz,PiH,j} \quad (37)$$

---

$n_{pl}$	[-]	Anzahl der Planeten
$i$	[-]	Planetenindex
$n_x$	[-]	Anzahl der Stützpunkte auf der x-ten Verzahnung
$j$	[-]	Index der Stützpunkte
$F_{Vz,SPi}$	[N]	Verzahnungskraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten
$F_{Vz,PiH}$	[N]	Verzahnungskraft der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad
$f_{Vz,SPi,j}$	[N]	Einzelkraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt
$f_{Vz,PiH,j}$	[N]	Einzelkraft der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt

---

Durch Umformung der Gleichung für die Drehwegabweichung für Stirnradverzahnungen (**Gleichung (19)**) kann die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der topologischen Lastverteilung der einzelnen Verzahnungen formuliert werden. Dies ist in **Gleichung (38)** in Einzelpunktformulierung und in **Gleichung (39)** in vektorieller Formulierung für die Verzahnungen an der Sonne dargestellt.

$$c_{SPi,j} \cdot (s_{Vz,SPi} - x_{f,SPi,j}) = f_{Vz,SPi,j} \quad (38)$$

$$c_{PiH,j} \cdot (s_{Vz,PiH} - x_{f,PiH,j}) = f_{Vz,PiH,j}$$

$$\begin{pmatrix} c_{SPi,1} \\ \vdots \\ c_{SPi,n_i} \end{pmatrix} \cdot \left[ s_{Vz,SPi} - \begin{pmatrix} x_{f,SPi,1} \\ \vdots \\ x_{f,SPi,n_i} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f_{Vz,SPi,1} \\ \vdots \\ f_{Vz,SPi,n_i} \end{pmatrix} \quad (39)$$

---

$n_{pl}$	$[-]$	Anzahl der Planeten
$i$	$[-]$	Planetenindex
$n_x$	$[-]$	Anzahl der Stützpunkte auf der x-ten Verzahnung
$j$	$[-]$	Index der Stützpunkte
$f_{Vz,SPi,j}$	$[N]$	Einzelkraft der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt
$f_{Vz,PiH,j}$	$[N]$	Einzelkraft der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt
$c_{SPi,j}$	$[\frac{N}{m}]$	Steifigkeit der Verzahnung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt unter Berücksichtigung der Quersteifigkeit zwischen den Berührungspunkten eines Zahnpaars
$c_{PiH,j}$	$[\frac{N}{m}]$	Steifigkeit der Verzahnung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt unter Berücksichtigung der Quersteifigkeit zwischen den Berührungspunkten eines Zahnpaars
$x_{f,SPi,j}$	$[m]$	res. Abweichungsbetrag zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt in Eingriffsrichtung
$x_{f,PiH,j}$	$[m]$	res. Abweichungsbetrag zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt in Eingriffsrichtung
$s_{Vz,SPi}$	$[m]$	res. Verzahnungsauslenkung zwischen Sonne und dem i-ten Planeten am j-ten Stützpunkt auf der Eingriffsstrecke
$s_{Vz,PiH}$	$[m]$	res. Verzahnungsauslenkung zwischen dem i-ten Planeten und dem Hohlrad am j-ten Stützpunkt auf der Eingriffsstrecke

---

Aus den in den **Gleichungen (34) bis (39)** dargestellten Randbedingungen kann nun ein bestimmendes Gleichungssystem formuliert werden, das die Wechselwirkungen der Einzelverzahnungen untereinander enthält.



Das in **Gleichung (40)** in Matrizenform dargestellte System ist in der Form  $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$  zur Lösung der unbekanntenen Größen ( $\underline{x}$ ) aufgelöst. Diese enthalten neben den Winkelstellungen aller Bauteile ( $\varphi$ ) und den Durchsenkungen aller Verzahnungen ( $s_{Vz}$ ) auch die Verzahnungs- und Einzelkräfte ( $F_{Vz}$  und  $f_{Vz}$ ). Durch die Lösung dieses Gleichungssystems mit den für einzelne Eingriffsstellungen ermittelten Steifigkeits- und Korrekturgrößen ( $c$  bzw.  $x_f$ ) können Zeitverläufe für den Drehweg und alle Lastver- und -aufteilungen ermittelt werden. Zur Berücksichtigung der Verformungen und Verlagerungen der Bauteile des Planetengetriebes (Sonne, Planeten, Hohlrad, Steg) inkl. deren Lagerungen werden diese iterativ aus den Lastverteilungsergebnissen ermittelt und anschließend als zusätzliche topologische Abweichungen  $x_f$  dem Gleichungssystem zugeführt.

Die Drehwegabweichung lässt sich aus der **Gleichung (40)** entsprechend **Gleichung (41)** aus den Winkelpositionen von Sonne und Hohlrad bezogen auf die Sonnenwelle ermitteln.

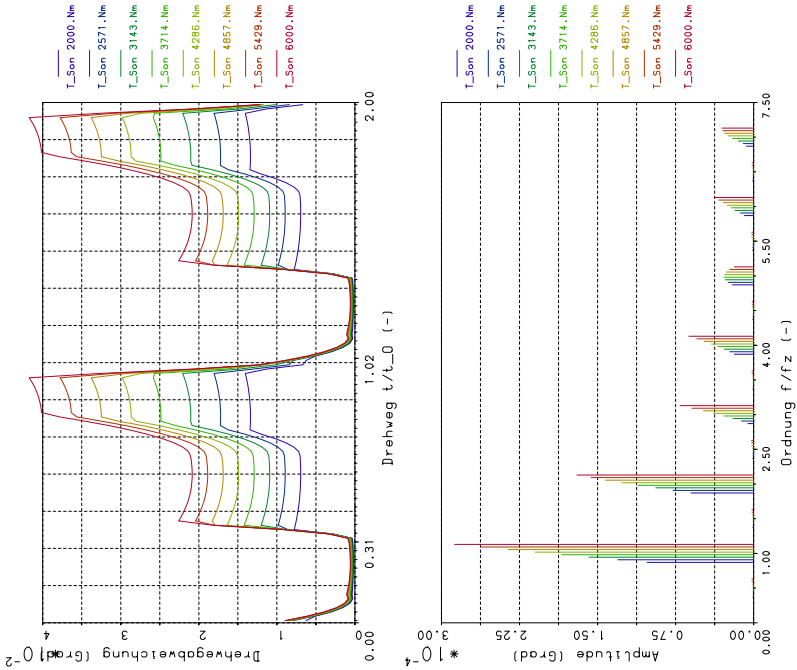
$$s_{\varphi}(t) = \varphi_H(t) \cdot \frac{z_H}{z_S} - \varphi_S(t) \quad (41)$$

---

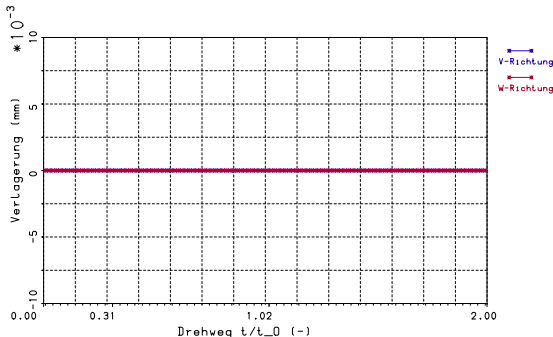
$s_{\varphi}(t)$	[rad]	Drehwegabweichung des Planetengetriebes in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt t
$\varphi_H(t)$	[rad]	Winkelposition des Hohlrads in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt t
$\varphi_S(t)$	[rad]	Winkelposition der Sonne in der Eingriffsstellung zum Zeitpunkt t
$z_S$	[-]	Zähnezahl der Sonne
$z_H$	[-]	Zähnezahl des Hohlrads

---

Die in **Gleichung (41)** ermittelte Drehwegabweichung für Planetengetriebe charakterisiert die rotatorische Anregung eines Planetengetriebes. Wie in **Abschnitt 3.2.1** dargestellt, entkoppelt sich diese bei Planetengetrieben von der translatorischen Anregung, die in der Drehwegberechnung durch Auswertung der Verlagerungsbahnen der einzelnen Bauteile charakterisiert werden kann. Aus den dargestellten Berechnungsergebnissen können weitere Größen zur Planetengetriebeauslegung, wie die Lastaufteilung auf die Planeten oder die Lastverteilungen in den einzelnen Ver-



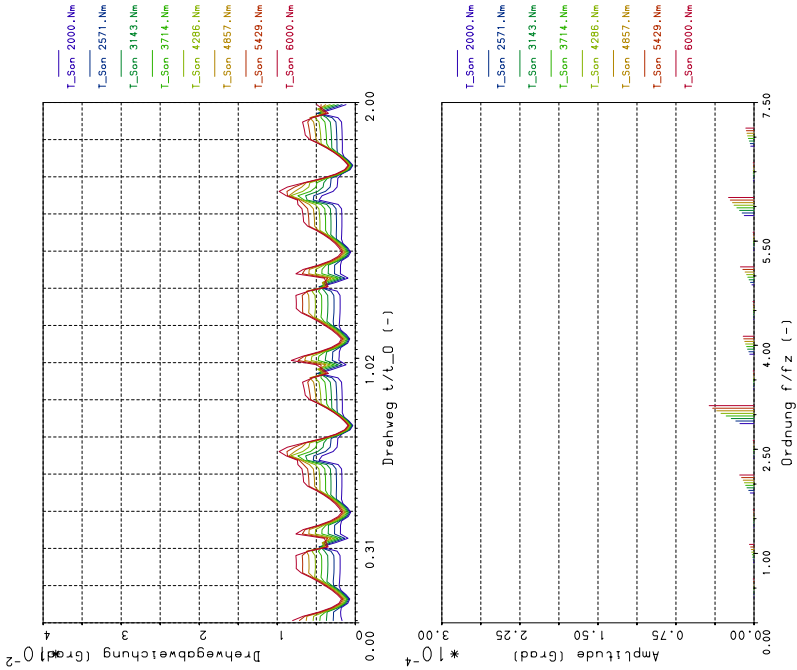
(a) Drehwegverlauf zwischen Sonne und Hohlrad (b) Drehwegspektrum zwischen Sonne und Hohlrad



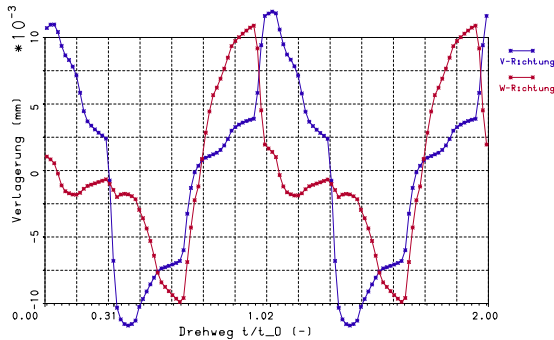
(c) Verlagerung des Sonnenrades

**Bild 16:** Beispielhafte Ergebnisse einer Drehwegberechnung für ein Planetengetriebe mit symmetrischem Zahneingriff.





(a) Drehwegverlauf zwischen Sonne und Hohlrad (b) Drehwegspektrum zwischen Sonne und Hohlrad



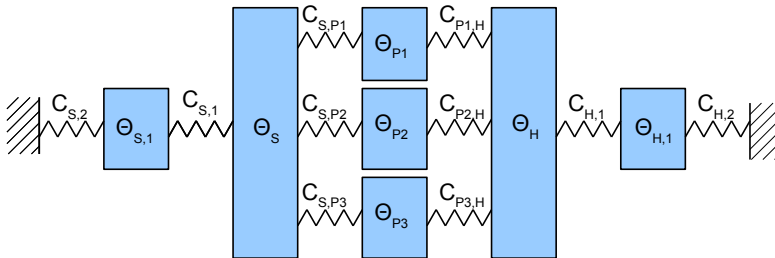
(c) Verlagerung des Sonnenrades

**Bild 17:** Beispielhafte Ergebnisse einer Drehwegberechnung für ein Planetengetriebe mit sequentiellm Zahneingriff.

zahnungen ausgewertet werden. Beispielhafte Ergebnisse der Drehwegberechnung von Planetengetrieben sind in **Bild 16** und **Bild 17** dargestellt. Die in **Abschnitt 3.2.1** beschriebenen Unterschiede bezüglich der Anregungscharakteristiken von Planetengetrieben mit symmetrischen und sequentiellen Eingriffsfolgen sind hierbei ebenfalls deutlich erkennbar. So weist das abweichungsfreie und unkorrigierte Getriebe mit symmetrischem Eingriff eine vergleichsweise große Drehwegabweichung und keine Sonnenradverlagerung auf, während das Getriebe mit sequentiellm Eingriff eine gering schwankende Drehwegabweichung und dafür stärkere Verlagerungen des Sonnenrades zeigt (vgl. **Bild 16** und **Bild 17**).

### 3.2.3 Eigenfrequenzen und Eigenformen der Planetenradstufe

Neben dem Anregungsverhalten ist das dynamische Systemverhalten von Getrieben ein entscheidendes Kriterium für das Schwingungs- und Geräuschverhalten. Eine Möglichkeit zur einfachen Überprüfung des Systemverhaltens ist die Analyse der Eigenfrequenzen innerhalb des Planetenradsatzes selbst. Über übliche Ansätze beispielsweise nach DIN/ISO [22, 62] hinausgehend, kann ein System unter Berücksichtigung des gesamten Planetengetriebes als Standgetriebe formuliert werden. Hierbei wird das gesamte Planetengetriebe in einem Schwingungssystem zusammengefasst. Eine grafische Darstellung des Schwingungssystems ist in **Bild 18**



**Bild 18:** Modell zur Berechnung der Eigenfrequenzen eines Standgetriebes

dargestellt. Es ist prinzipiell möglich, zusätzliche Massen an An- und Abtrieb zu berücksichtigen. In **Bild 18** ist jeweils eine Anschlussmasse ( $\Phi_{S,1}$  und  $\Phi_{H,1}$ ) dargestellt. Aus diesem Modell können nun Massen- und Steifigkeitsmatrizen für das Planetengetriebe aufgestellt werden, die die Steifigkeiten aller Verzahnungen und der Drehmassen der einzelnen Bauteile enthalten. In **Gleichung (42)** und **Gleichung (43)** sind diese Matrizen dargestellt.

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{r_{b,S}^2} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_{S,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{P1} \cdot \left(\frac{z_S}{z_P}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{P2} \cdot \left(\frac{z_S}{z_P}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{P3} \cdot \left(\frac{z_S}{z_P}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_H \cdot \left(\frac{z_S}{z_H}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{H,1} \cdot \left(\frac{z_S}{z_H}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \frac{c_{S,2} + c_{S,1}}{r_{b,S}} & \frac{-c_{S,1}}{r_{b,S}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-c_{S,1}}{r_{b,S}} & \frac{c_{S,1}}{r_{b,S}} + c_{S,P1} + c_{S,P2} + c_{S,P3} & -c_{S,P1} & -c_{S,P2} & -c_{S,P3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{S,P1} & c_{S,P1} + \frac{c_{P1,H}}{a} & 0 & 0 & \frac{-c_{P1,H}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{S,P2} & 0 & c_{S,P2} + \frac{c_{P2,H}}{a} & 0 & \frac{-c_{P2,H}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{S,P3} & 0 & 0 & c_{S,P3} + \frac{c_{P3,H}}{a} & \frac{-c_{P3,H}}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-c_{P1,H}}{a} & \frac{-c_{P2,H}}{a} & \frac{-c_{P3,H}}{a} & \frac{c_{P1,H} + c_{P2,H}}{a} + \frac{-c_{H,1}}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{P3,H}}{a} + \frac{c_{H,1}}{b} & \frac{-c_{H,1}}{b} & \frac{c_{H,1} + c_{H,2}}{b} \end{pmatrix} \quad (43)$$

mit:  $a = \left(\frac{z_P}{z_S}\right)^2$  und  $b = \left(\frac{r_{b,S} \cdot z_H}{z_S}\right)^2$

---

$\underline{\underline{M}}$	[kg]	Massenmatrix (bezogen auf den Grundkreisradius der Sonne)
$\underline{\underline{C}}$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	Steifigkeitsmatrix (bezogen auf den Grundkreisradius der Sonne)
$\Phi$	$[kgm^2]$	Massenträgheitsmoment
$c$	$\left[\frac{N}{m}\right]$ $\left[\frac{Nm}{rad}\right]$	Steifigkeit

---

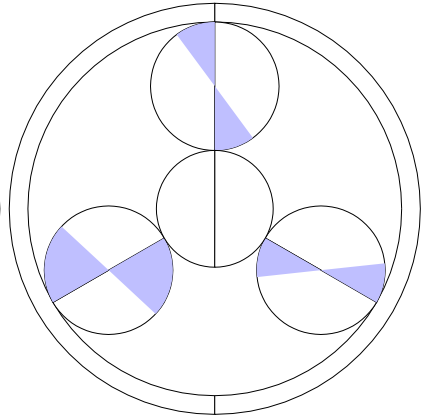
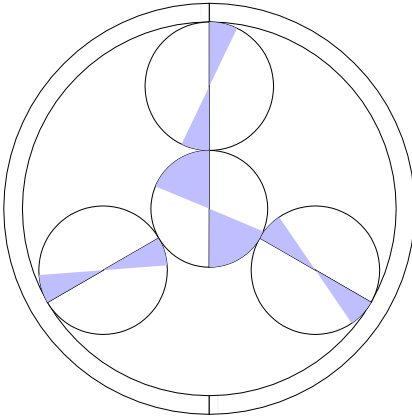
Entsprechend des in **Abschnitt 3.1.5** dargestellten Ansatzes können hieraus die Eigenfrequenzen und Eigenformen ermittelt werden (vgl. **Gleichung (20)**), wodurch eine einfache Analyse des Systemverhaltens (z.B. das Erkennen möglicher Resonanzstellen) möglich ist. Für ein beispielhaftes Planetengetriebe ergeben sich mit dem dargestellten An-

satz Eigenfrequenzen (**Bild 19**) bei 4000 Hz, 10.1 kHz sowie zweimal bei 9400 Hz mit den zugehörigen Eigenformen. In der ersten Eigenfrequenz schwingen die Planeten und die Sonne miteinander in den Hohlradverzahnungen, während bei der vierten Eigenfrequenz zusätzlich die Sonne gegenphasig zu den Planeten schwingt. Die beiden Eigenfrequenzen (2. und 3. EF), bei denen die Planeten in sich gegeneinander schwingen, weisen praktisch gleiche Eigenfrequenzen auf, was bei einigen Lösungsverfahren die numerische Stabilität beeinflussen kann.

Eine vergleichende Berechnung entsprechend Methode B aus DIN 3990 [22] ergibt Eigenfrequenzen bei 3700 Hz und 7000 Hz. Im Vergleich mit den berechneten Eigenfrequenzen kann festgestellt werden, dass die 1. Eigenfrequenz eine mit der Norm vergleichbare Größenordnung aufweist, während die weiteren Eigenfrequenzen durch die in der Norm hinterlegten einfachen Modelle nicht abgebildet werden können.

Eigenform:  $a = 105\text{mm}$   $i_0 = 3.20$  Eigenfrequenz = 3996Hz

Eigenform:  $a = 105\text{mm}$   $i_0 = 3.20$  Eigenfrequenz = 9411Hz

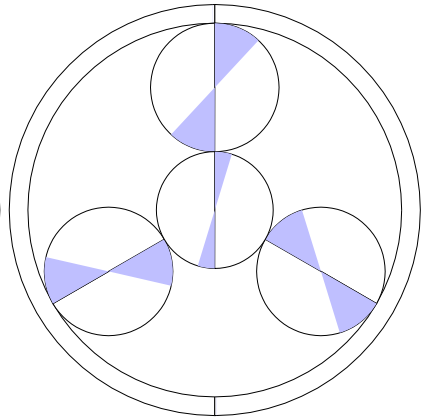
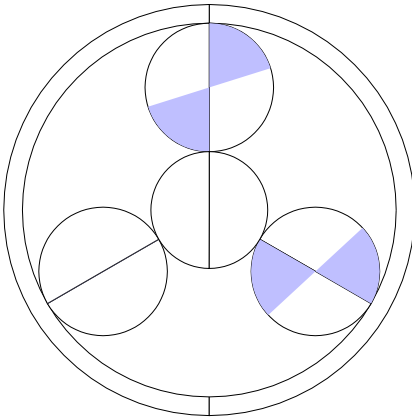


(a) 1. Eigenfrequenz: 3996.1 Hz

(b) 2. Eigenfrequenz: 9411.3 Hz

Eigenform:  $a = 105\text{mm}$   $i_0 = 3.20$  Eigenfrequenz = 9412Hz

Eigenform:  $a = 105\text{mm}$   $i_0 = 3.20$  Eigenfrequenz = 10183Hz



(c) 3. Eigenfrequenz: 9411.6 Hz

(d) 4. Eigenfrequenz: 10183.1 Hz

**Bild 19:** Beispielhafte Ergebnisse einer Eigenfrequenzberechnung für ein Planetengetriebe mit 3 Planeten ( $a = 105\text{mm}$ ,  $i_0 = 3.2$ ).



## 4 Messtechnische Ermittlung des Schwingungsverhaltens im FZG-Dynamikprüfstand

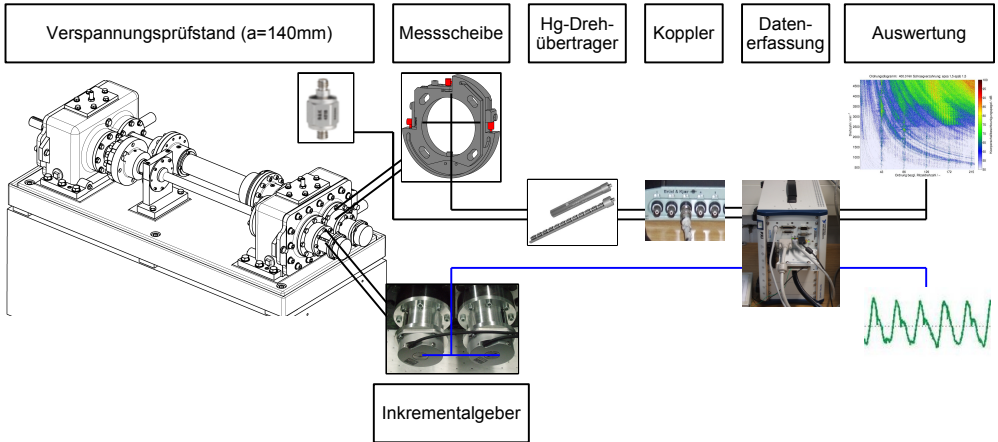
Neben den theoretisch rechnerischen Untersuchungen zur Verzahnungsanregung, die in **Abschnitt 3** dargestellt wurden, ist eine laufende Validierung der rechnerischen Zwischen- und Endergebnisse unerlässlich. Aus diesem Grund werden laufend Versuche an einem Messprüfstand durchgeführt, die die rechnerischen Ergebnisse bestätigen sollen. Hierzu werden neben Körperschall- und Torsionsbeschleunigungsmessungen im Drehzahlhochlauf auch Drehwegmessungen bei sehr niedrigen Drehzahlen durchgeführt. Insgesamt können die rechnerischen Ergebnisse mit den vorliegenden Versuchsergebnissen gut nachvollzogen und validiert werden.

### 4.1 Prüfaufbau und Messtechnik

Zur messtechnischen Untersuchung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen wurden Messversuche an einem Verspannungsprüfstand durchgeführt. Die Untersuchungen erfolgen mit zwei unterschiedlichen Messverfahren:

#### 1. Drehwegmessung:

Zur messtechnischen Erfassung des Drehwegverhaltens unter Last werden die beiden Zahnräder der zu untersuchenden Verzahnung jeweils mit einem hochauflösenden Inkrementalgeber ausgestattet. Bei Drehzahlen zwischen 5 und 10 U/min ist es möglich durch die Messungen der Winkelpositionen beider Räder die Abweichungen der lokalen Momentanübersetzung vom Zähnezahlverhältnis zu bestimmen. Durch Umrechnung dieser Messgröße in die Eingriffsebene der Verzahnung kann die Drehwegabweichung unter Last ermittelt werden. Aufgrund des Betriebs in einem äußerst niedrigen Drehzahlbereich ist eine Messung des Anregungsverhaltens möglichst ohne



**Bild 20:** Messaufbauten zur experimentellen Untersuchung des Anregungs- und Schwingungsverhalten von Verzahnungen.

Effekte des umgebenden Systems möglich.

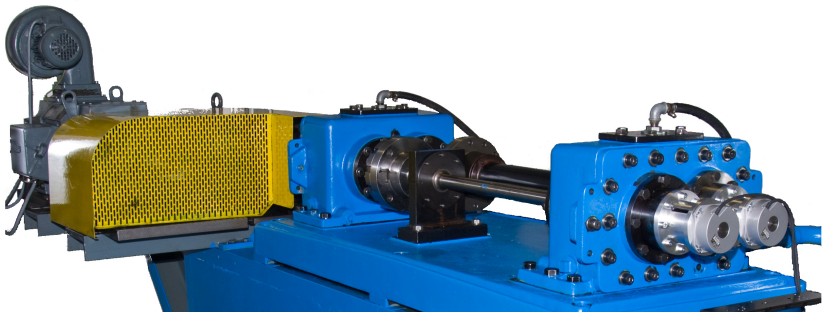
## 2. Beschleunigungsmessung:

Zur Erfassung des Verhaltens von Verzahnungen im Systemumfeld eines Getriebes werden Beschleunigungsmessungen im Drehzahlhochlauf durchgeführt. Über einem weiten Drehzahlbereich zwischen 500 und 5000 U/min werden mit Beschleunigungssensoren die Schwingungsamplituden an unterschiedlichen Stellen gemessen. Für die Erfassung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen werden hier Messungen der Torsionsbeschleunigung mit einer Messscheibe am Rad und Körperschallmessungen an einem Lagerschild des Prüfgetriebes verwendet. Bei unterschiedlichen Lasten und Drehzahlen werden an diesen Sensoren dann jeweils die Schwingungssignale aufgezeichnet und nachfolgend nach unterschiedlichen Methoden ausgewertet.



Eine schematische Darstellung der verwendeten Messaufbauten für die Drehweg- und Beschleunigungsmessung ist in **Bild 20** dargestellt. Der Messaufbau setzt sich insgesamt aus folgenden Komponenten zusammen:

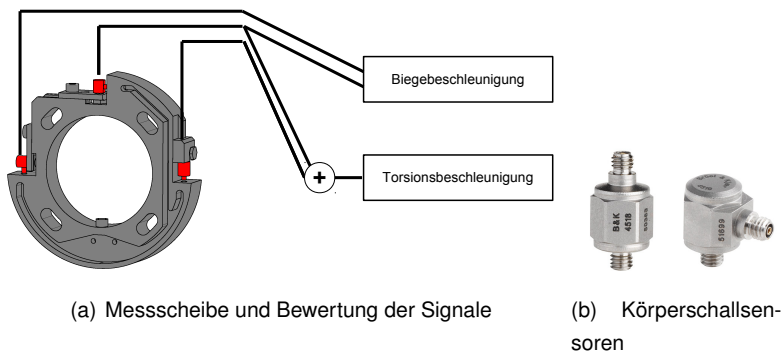
- FZG-Verspannungsprüfstand: In einem FZG-Verspannungsprüfstand werden sowohl Ritzel als auch Rad zweier Zahnradstufen identischer Zähnezahle miteinander verbunden. Über eine statische Verspannkupplung kann in diesen mechanischen Kreis eine Vorspannung eingebracht werden, so dass über einen Antriebsmotor lediglich die Verluste eingebracht werden müssen. Solche Prüfstände werden in zahlreichen Baugrößen meist für Tragfähigkeitsversuche eingesetzt. Für die Untersuchungen zum Schwingungsverhalten wurde ein Prüfstand mit Achsabstand 140 mm speziell zur Durchführung experimenteller Forschungsvorhaben [46, 79] umgerüstet. So kann der Antrieb über zwei unterschiedliche drehzahlvariable Motoren erfolgen, damit ein Drehzahlbereich zwischen 1 und 100 U/min und zwischen 400 und 5500 U/min unter voller Last abgedeckt werden kann. Zudem sind die Wellen im Verspannkreislauf des Prüfstandes möglichst torsionsweich ausgeführt, um durch die torsionsweiche Anbindung beider Getriebe eine möglichst gute Entkopplung zu erreichen. Die



**Bild 21:** Verspannungsprüfstand zur messtechnischen Untersuchung des Anregungs- und Schwingungsverhaltens von Verzahnungen.

Verspannung erfolgt durch eine mechanische Verspannkupplung um Anregungseinflüsse aus den Verspannelementen wie z.B. eine geregelte hydraulische Verspannkupplung auszuschließen. Die Wellen des Prüfstandes sind für die Anbringung von Messtechnik auf den rotierenden Wellen und am Radkörper vorbereitet, so dass eine zuverlässige und breitbandige Signalübertragung möglich ist.

- Beschleunigungssensoren Brüel & Kjær 4518 und 4519: Diese Sensoren arbeiten nach dem piezoelektrischen Prinzip und haben eine Empfindlichkeit von 10 mV/g. Durch die hohe Resonanzfrequenz von 45 kHz kann der Messbereich ein breites Spektrum zwischen 1 bis 20000 Hz abdecken.
- Torsionsmessscheibe zur Montage am Radkörper: Zur Schwingungsmessung möglichst nahe am anregenden Zahneingriff wird eine Messscheibe am Radkörper der eingreifenden Zahnräder montiert. Diese Messscheibe enthält drei Beschleunigungssensoren. Durch die Auswertung der Signale dieser Sensoren können die Torsions- und Biegebeschleunigung am Radkörper ermittelt werden. Eine Darstellung einer solchen Messscheibe und der verwendeten



**Bild 22:** Messscheibe zur Messung der Torsions- und Biegebeschleunigung am Radkörper, sowie die verwendeten Beschleunigungssensoren.

Sensoren ist in **Bild 22** abgebildet. Bislang wurde eine Messscheibe am Radkörper des Rades montiert und somit ausschließlich die Radbewegung aufgezeichnet. Unter der Annahme von Symmetrie zwischen Ritzel und Rad kann dann aus der Torsionsbeschleunigung am Rad auf die dynamische Zahnkraft geschlossen werden. Zur Vermeidung der Notwendigkeit dieser Randbedingung sollte zukünftig eine Messung mit zwei Messscheiben an Ritzel und Rad angestrebt werden.

- Quecksilberdrehübertrager Magtrol 4-MTA: Zur rauscharmen Ausleitung der Messsignale von der rotierenden Welle werden Quecksilberdrehübertrager verwendet.
- Messverstärker Brüel & Kjær 2694: Zur Spannungsversorgung und Signalverstärkung von bis zu 16 Beschleunigungssensoren wird ein Messverstärker verwendet, der die Beschleunigungssignale zur Datenerfassung aufbereitet.
- Inkrementalgeber Heidenhain ROD 260: Zur Drehwegmessung werden Inkrementalgeber mit 18000 Inkrementen (Strichen) verwendet. Durch eine integrierte Auswerteelektronik wird ein Rechtecksignal (TTL) erzeugt, das vom Datenerfassungssystem aufgezeichnet wird.
- Messsystem National Instruments: Zur Datenerfassung wird ein Messrechner NI PXI 8110 mit den Messkarten NI PXI 6123 und NI PXI 6221 verwendet. Auf diesem Rechner werden in LabView [1] programmierte Messprogramme zur Datenaufzeichnung und zur Kommunikation mit der Prüfstandssteuerung angewandt.

## 4.2 Zahnrad- und Betriebsdaten

Zur Durchführung messtechnischer Untersuchungen werden für die Verwendung im FZG-Verspannungsprüfstand mehrere Prüfverzahnungen verwendet. Die Hauptgeometriedaten der zur Verfügung stehenden Verzäh-

			Schrägverzahnung				Geradverzahnung			
			Normalverz.		Hochverz.		Normalverz.		Hochverz.	
Geometriegröße		Einh.	Ritzel	Rad	Ritzel	Rad	Ritzel	Rad	Ritzel	Rad
Normalmodul	$m_n$	mm	3,00		3,00		3,21		3,21	
Eingriffswinkel	$\alpha_n$	°	20,00		17,50		20,00		20,00	
Schrägungswink.	$\beta$	°	21,00	-21,00	21,00	-21,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Zähnezahl	$z$	-	43	45	43	45	43	45	43	45
Profilverschieb.-fkt.	$x$	-	-0,21	-0,24	-0,22	-0,22	-0,17	-0,20	-0,17	-0,20
Kopfnutzkr.	$d_{N\alpha}$	mm	142,3	148,5	144,5	150,5	142,5	148,0	144,2	150,5
Fußkreisdu.	$d_F$	mm	128,3	134,6	125,7	132,1	127,6	133,9	127,6	133,9
Zahnbreite	$b$	mm	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5	39,5
Achsabstand	$a$	mm	140		140		140		140	
Profilüberdeck.	$\varepsilon_\alpha$	-	1,50		2,20		1,50		2,00	
Sprungüberdeck.	$\varepsilon_\beta$	-	1,50		1,50		0,00		0,00	

**Tabelle 2:** Hauptgeometrie der Versuchsverzahnungen

nungen sind in **Tabelle 2** dargestellt. Unterschiedliche Varianten dieser Verzahnungen wurden in mehreren Forschungsvorhaben messtechnisch untersucht und dokumentiert. Im Wesentlichen unterscheiden sich die Varianten in der Verzahnungsfeingeometrie (unterschiedliche Verzahnungskorrekturen). Von den Schrägverzahnungen liegen zudem abweichende Verzahnungsbreiten (19,5 mm und 50,9 mm) zur Variation der Sprungüberdeckung vor.

Alle Prüfverzahnungen sind aus dem Werkstoff 18CrNiMo7-6 und werden einsatzgehärtet und geschliffen. Im Prüfbetrieb werden die Verzahnungen mit dem Schmierstoff FVA 3 (ISO VG 100) mit 4% Anglamol bei einer Einspritzung in die Verzahnung mit einer Temperatur von 60°C betrieben.

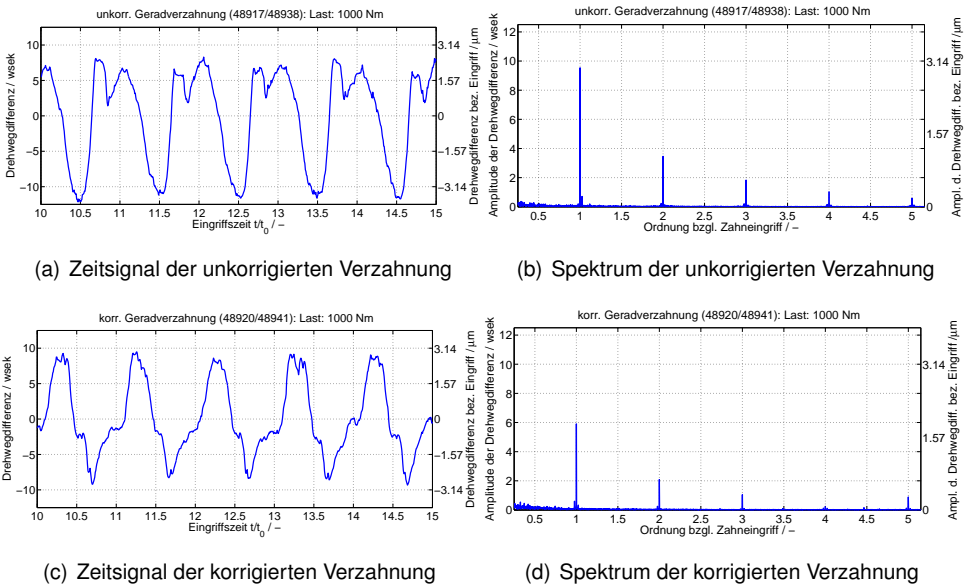
### 4.3 Auswertung der Messergebnisse hinsichtlich Anregung

Bei der messtechnischen Untersuchung von Prüfverzahnungen werden über die entsprechende Sensorik Daten in unterschiedlicher Weise aufgezeichnet. Zur Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen sind diese Daten erst nach einer entsprechenden Auswertung und Datenaufbereitung zugänglich.

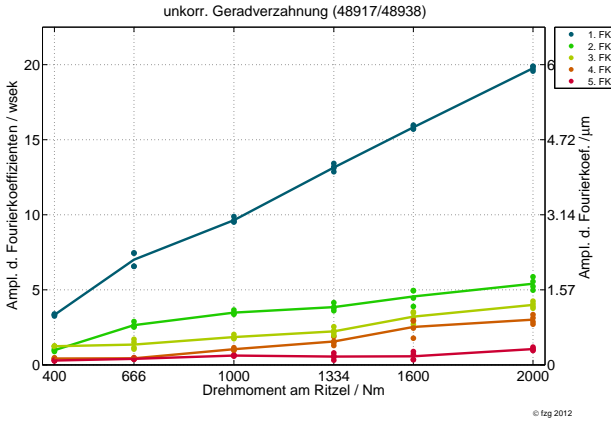
### 4.3.1 Drehwegmessung unter Last bei kleiner Drehzahl

Bei der Messung der Drehwegabweichung werden mit hochauflösenden Inkrementalgebern (18000 Inkremente) die Winkelpositionen von Ritzel und Rad bei einer Drehzahl von 5 - 10 U/min unter Last gemessen und aufgezeichnet. Durch die Auswertung der jeweils gleichzeitig ermittelten Messwerte und deren örtlicher Zuordnung auf den Zahnrädern durch eine Referenzmarke kann die örtliche Momentanübersetzung der Verzahnung ermittelt werden. Die Differenz der Momentanübersetzung mit dem Zähnezahnradsverhältnis kann in die Drehwegabweichung unter Last umgerechnet werden.

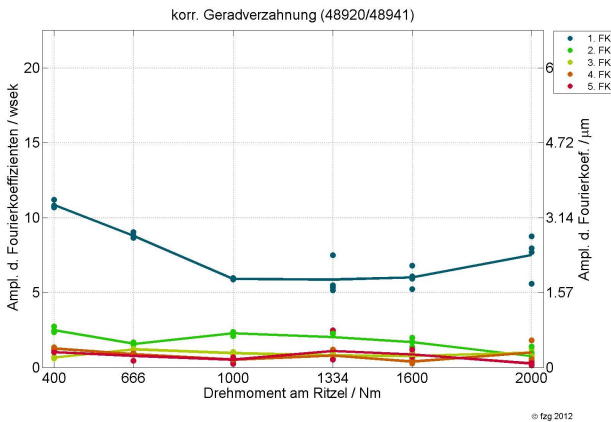
In **Bild 23** sind die Ergebnisse der Drehwegmessung an einer unkorrigierten Geradverzahnung beispielhaft dargestellt. In der Darstellung des Zeit-



**Bild 23:** Ergebnisse der Messung der Drehwegabweichung bei Geradverzahnungen aus **Tabelle 2** mit Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha} = 1.50$ .



(a) Unkorrigierte Verzahnung

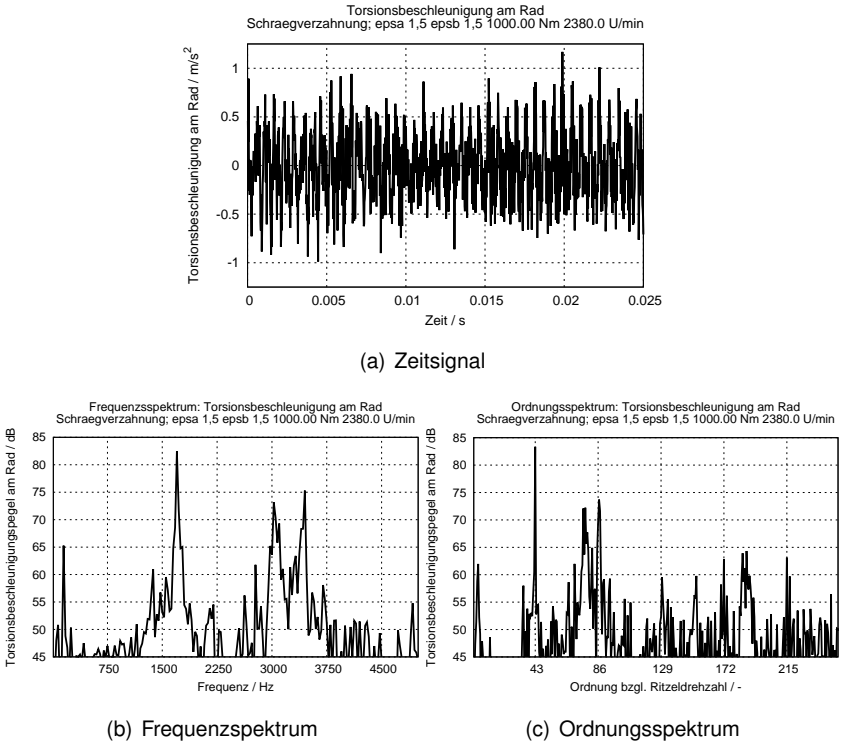


(b) Korrigierte Verzahnung

**Bild 24:** Darstellung der Amplituden der Messung der Drehwegabweichung über dem Drehmoment für mehrere Wiederholungsmessungen bei Geradverzahnungen aus **Tabelle 2** mit Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = 1.50$ .

verlaufs (**Bild 23(a)**) wurden langwellige Bestandteile bis zur 2. Wellenordnung gefiltert, um den aus der Verzahnung resultierenden Drehwegfehler anschaulich darstellen zu können. Das zugehörige Spektrum ist in **Bild 23(b)** dargestellt. Zur anschaulichen Darstellung dieser Amplituden über

dem Drehmomentenbereich einer Verzahnung können nun die Amplituden der Drehwegabweichung über dem Drehmoment aufgetragen werden (**Bild 24**). Hier ist die Anregungscharakteristik messtechnisch gut nachvollziehbar.



**Bild 25:** Messsignal einer Beschleunigungsmessung und dessen Frequenz- und Ordnungsspektrum für die Torsionsbeschleunigungsmessung einer unkorrigierten Schrägverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profil- und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1.50$

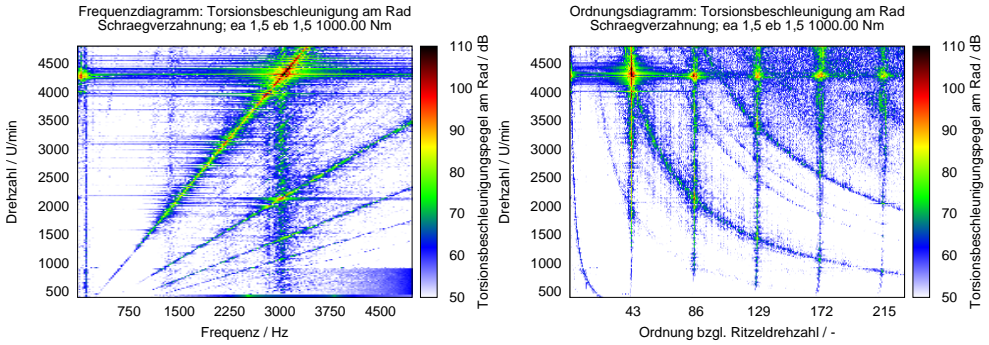
### 4.3.2 Beschleunigungsmessung bei veränderlichen Drehzahlen

Gemessene Beschleunigungswerte, sei es aus Körperschall- oder Torsionsbeschleunigungsmessungen, werden in Form von Zeitverläufen aufgezeichnet (**Bild 25(a)**). Zur detaillierten Auswertung werden diese in spektraler Form analysiert. In **Bild 25(b)** und **Bild 25(c)** sind diese in Form eines Frequenzspektrums und eines Ordnungsspektrum dargestellt. Ordnungsspektren und hieraus abgeleitete Größen sind zur Analyse der Verzahnungsanregung in der Regel besser geeignet als Frequenzspektren.

Diese Spektren werden nun zur übersichtlichen Darstellung in Form von Campbelldiagrammen zusammengestellt. Hierbei werden die Spektren für unterschiedliche Drehzahlen in einem Diagramm dargestellt (siehe **Bild 26(a)** und **Bild 26(b)**). Durch diese Zusammenstellung, die auch als Wasserfalldiagramm bezeichnet wird, können Anregungs- und Systemeinflüsse in Form spezifischer Muster identifiziert und im weiteren Verlauf entsprechend gefiltert werden. So ergeben sich bei Campbelldiagrammen in Frequenzdarstellung (**Bild 26(a)**) Systemeigenfrequenzen als senkrechte Linien und drehzahlabhängige Anregungseffekte als Ursprungsgeraden, während sich in Ordnungsdarstellung (**Bild 26(b)**), die Anregungen in Form senkrechter Linien und Eigenfrequenzen in Form von Hyperbeln zeigen.

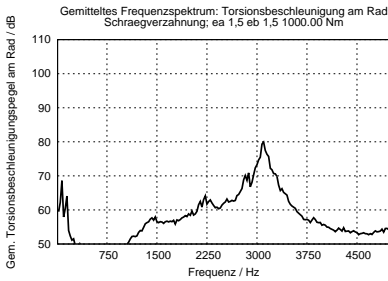
Zur Auftrennung der nicht separat messbaren Schwingungseffekte aus Anregung und Systemverhalten werden die sich ergebenden Muster bei der Messung über einen Drehzahlbereich genutzt. Hierzu werden die Messdaten, die über einen ausreichend großen Drehzahl- und Frequenzbereich vorliegen, jeweils in Form gemittelter Spektren (siehe **Bild 26(c)** und **Bild 26(d)**) betrachtet. Bei der Mittelung dieser Spektren über dem Drehzahlbereich bleiben die jeweils als senkrechte Linien dargestellten Effekte im gemittelten Spektrum erhalten, während der Einfluss der jeweils anderen (Ursprungsgeraden oder Hyperbeln) im resultierenden Spektrum idealerweise stark abgeschwächt werden. Auf diese Weise sind Anregungs- und



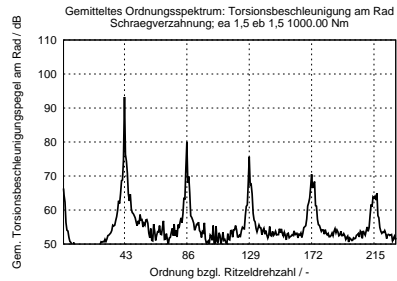


(a) Campbelldiagramm in Frequenzdarstellung

(b) Campbelldiagramm in Ordnungsdarstellung



(c) Gemitteltetes Frequenzspektrum

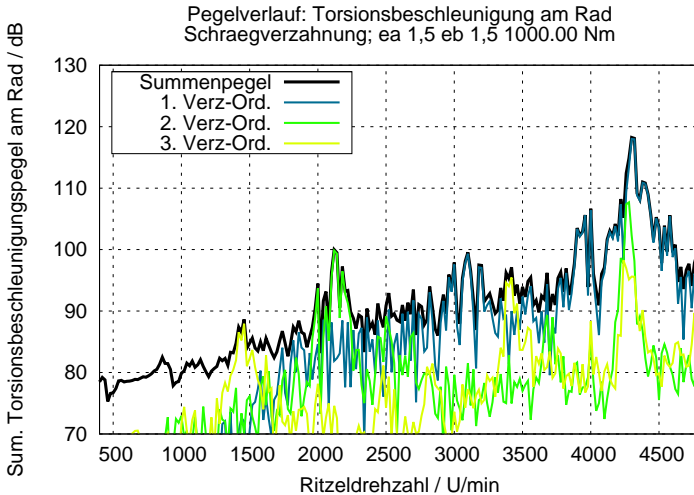


(d) Gemitteltetes Ordnungsspektrum

**Bild 26:** Campbelldiagramme in Frequenz- und Ordnungsdarstellung, sowie die hieraus abgeleiteten gemittelten Spektren für eine Torsionsbeschleunigungsmessung einer unkorrigierten Schrägverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profil- und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1.50$ .

Systemeinflüsse aus einer Betriebsschwingungsmessung getrennt identifizierbar, was für die Ableitung geeigneter Maßnahmen zur Schwingungsreduktion notwendig ist.

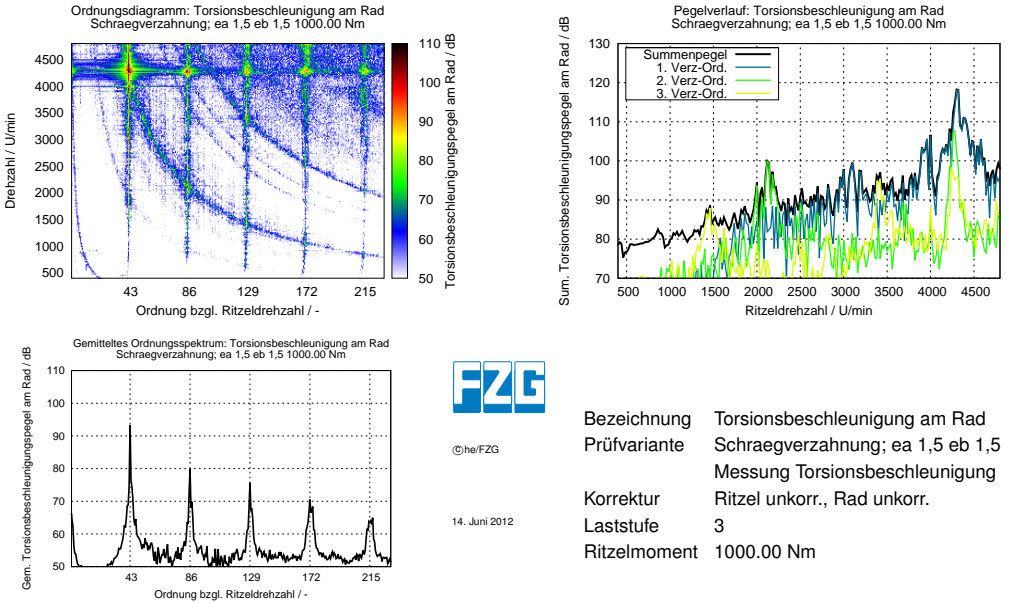
Zur Bewertung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen eignen sich aus den dargestellten Gründen die Diagramme in Ordnungsdarstellung besser, als die in Frequenzdarstellung, die eher für die Betrachtung von Systemeigenschaften zielführender sind.



**Bild 27:** Darstellung des Verlaufes des Summenpegels sowie der Amplituden der Zahneingriffsordnung über der Drehzahl für die Torsionsbeschleunigungsmessung einer unkorrigierten Schrägverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profil- und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1.50$ .

Werden Messungen im realen Systemumfeld der anregenden Verzahnungen durchgeführt, sind neben den dargestellten Auswertungen, die eine Auftrennung der Einflüsse durch Anregung und Systemverhalten enthalten, weitere Auswertemöglichkeiten üblich. Durch Pegeladdition aller Schwingungsamplituden des bei einer Drehzahl gemessenen Spektrums kann der Summenpegel ermittelt werden. In **Bild 27** ist ein Verlauf des Summenpegels über der Drehzahl dargestellt. Zusätzlich sind in **Bild 27** die Verläufe der Amplituden einiger Zahneingriffsordnungen dargestellt. Hierdurch können kritische Drehzahlbereiche einfacher identifiziert werden. Je geringer der Abstand des Summenpegels zur Kurve einer Zahneingriffsordnung in diesem Diagramm ist, desto stärker wird das gesamte Schwingungsverhalten bei dieser Drehzahl von dieser Ordnung dominiert.

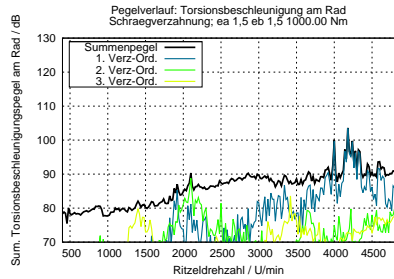
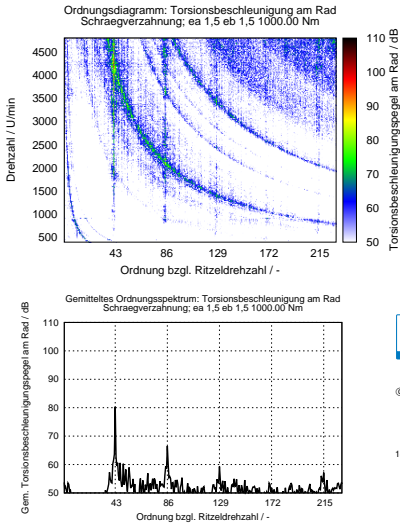
Zur übersichtlichen Darstellung der wichtigsten Diagramme zur Bewertung der Verzahnungsanregung hat sich eine Zusammenstellung des Campbell-



**Bild 28:** Übersichtblatt zur Analyse der Verzahnungsanregung für die Torsionsbeschleunigungsmessung einer unkorrigierten Schrägverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profil- und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1.50$

diagramms (**Bild 26(b)**), des gemittelten Ordnungsspektrums (**Bild 26(d)**), sowie des Pegelverlaufes (**Bild 27**) über der Drehzahl in einer Übersicht wie in **Bild 28** bewährt.

In den **Bildern 28 bis 31** sind Ergebnisse von Torsionsbeschleunigungsmessungen von Gerad- und Schrägverzahnungen jeweils mit und ohne Verzahnungskorrektur für eine mittlere Last (50% Nennlast) dargestellt. Bei beiden Verzahnungen zeigt sich durch eine Optimierung der Verzahnungskorrekturen ein erhebliches Potenzial zur Verringerung der Anregungsamplituden, das in den betrachteten Fällen ca. 10 bis 15 dB beträgt. Gleichzeitig wird deutlich, dass diese Verringerung nicht ausreicht, um den Unterschied zwischen Gerad- und Schrägverzahnungen bezüglich des Anregungsver-



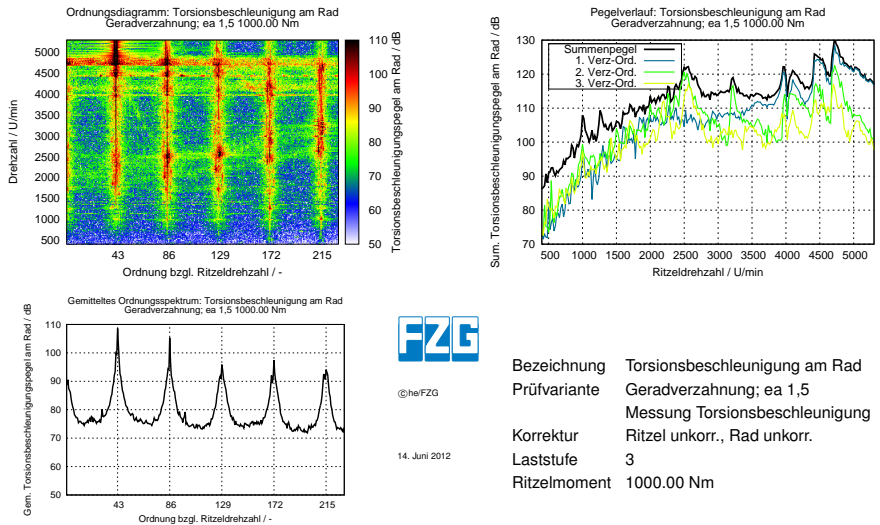
©he/FZG

14. Juni 2012

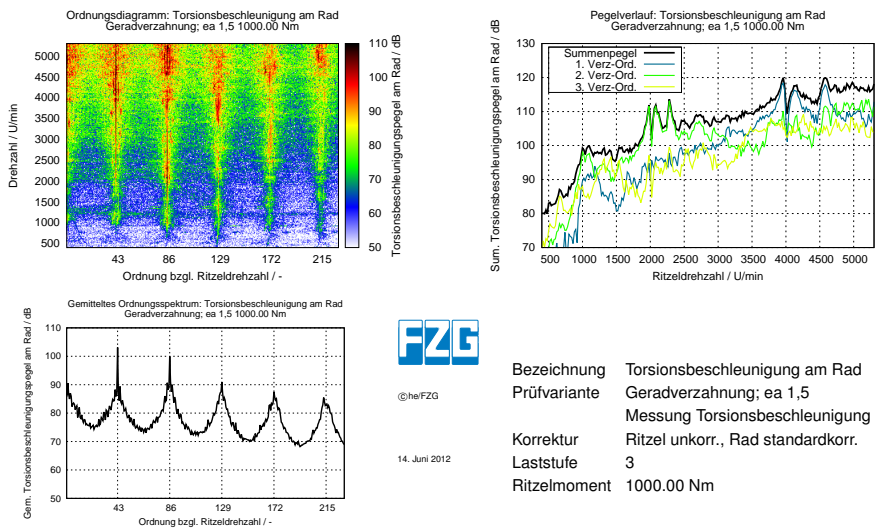
Bezeichnung	Torsionsbeschleunigung am Rad
Prüfvariante	Schraegverzahnung; ea 1,5 eb 1,5 Messung Torsionsbeschleunigung
Korrektur	Ritzel unkorrr., Rad standardkorr.
Laststufe	3
Ritzelmoment	1000.00 Nm

**Bild 29:** Torsionsbeschleunigungsmessung einer korrigierten Schrägverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profil- und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1.50$

haltens auszugleichen (vgl. **Bild 28** und **Bild 31**). Zudem ist feststellbar, dass sich die Eigenfrequenzen bei den Messungen an den Geradverzahnungen weniger stark auswirken als bei den Schrägverzahnungen, bei denen die Amplituden an den Resonanzstellen erhebliche Überhöhungen zeigen. Hieraus lässt sich schließen, dass anregungsärmere Verzahnungen bezüglich ihres Schwingungsverhaltens empfindlicher reagieren als Verzahnungen, die ohnehin ein bereits hohes Anregungsniveau aufweisen.



**Bild 30:** Torsionsbeschleunigungsmessung einer unkorrigierten Geradverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha} = 1.50$



**Bild 31:** Torsionsbeschleunigungsmessung einer korrigierten Geradverzahnung aus **Tabelle 2** mit Profilüberdeckung  $\varepsilon_{\alpha} = 1.50$



## 5 Der Anwendungskraftpegel als Kennwert zur anwendungsnahen Bewertung der Anregung

Die Bewertung des Anregungsverhaltens von Stirnradverzahnungen auf Grundlage rechnerischer und messtechnischer Größen ist die Voraussetzung zur Optimierung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen. Neben der eingehenden Analyse der Berechnungs- und Messdaten sind hierfür auch anschauliche Kennwerte erforderlich, die den wesentlichen Informationsgehalt auch aus detaillierten Darstellungsformen in einfach verständliche Form bringen. Zudem ermöglichen geeignete skalare Kennwerte eine gezielte Anwendung von Optimierungsmethoden bei der Auslegung.

Für einen aussagefähigen Kennwert ist es notwendig, die maßgeblichen Einflussgrößen in Bezug auf das Anregungsverhalten hinsichtlich ihrer Auswirkungen im Getriebe in der Bildungsvorschrift eines Kennwertes zu berücksichtigen.

Erfolgt die Bewertung auf Grundlage rechnerischer Größen, so ist die zutreffende Berücksichtigung der entsprechenden Einflussgrößen in der verwendeten Berechnungsmethode Voraussetzung für eine Berücksichtigbarkeit dieser Einflussgröße in der resultierenden Kenngröße. Auf messtechnischer Grundlage ist die Identifikation und Separierung der Einzeleffekte schwierig. Diese Auftrennung ist allerdings für eine gezielte Beeinflussung des Schwingungsverhaltens notwendig.

Ziel einer Bewertungsmethode für das Anregungsverhalten von Verzahnungen ist es, die Auswirkungen der Anregung im Getriebe unter den vorherrschenden Betriebsbedingungen zu bewerten. Hierfür ist es gerade für die Anwendbarkeit in der frühesten Auslegungsphase notwendig, die weitere Systemumgebung mit sehr wenigen Mitteln zutreffend zu beschreiben. Sofern im Laufe der Produktentwicklung vertiefende Rechenergebnisse vorliegen, so ist dies ebenfalls in das Bewertungskriterium integrierbar.

Durch die Beschränkung der Bewertung auf Bereiche, die im Betrieb des Getriebes vorkommen, wird die Aussagefähigkeit des Kennwerts für den Betrieb des Getriebes sichergestellt.

## 5.1 Anwendungskraftpegel für die Stirnradstufe

In der Auslegungsphase von Verzahnungen werden aus der Drehwegberechnung (**Abschnitt 2.3.1** und **Abschnitt 3.1.3**) oder aus der Kraftanregungsberechnung (**Abschnitt 2.3.2** und **Abschnitt 3.1.4**) Kenngrößen zur Bewertung des zu erwartenden Anregungsverhaltens abgeleitet. Zur detaillierten Nachrechnung von Problemfällen werden auch vereinzelt dynamische Simulationsergebnisse (**Abschnitt 2.3.3** und **Abschnitt 3.1.6**) als Grundlage verwendet.

Die üblicherweise aus diesen Berechnungsmethoden verwendeten Kennwerte sind im Einzelnen:

- Schwankung der Drehwegabweichung (Peak to Peak Transmission Error, P2P-TE):  
Differenz zwischen Maximal- und Minimalwerten des Drehwegabweichungsverlaufes (siehe Drehwegschwankung **Bild 7(b)**).
- Zahnkraftpegel  $L_{FZ}$ :  
Aus dem Spektrum der Kraftanregung abgeleiteter Kennwert nach **Gleichung (5)**.
- Dynamischer Zahnkraftpegel  $L_{FZ,dyn}$ :  
Aus dem Spektrum der dynamischen Zahnkraft analog zum Zahnkraftpegel abgeleiteter Kennwert nach **Gleichung (14)**.
- Dynamikfaktor  $K_{V,A}$ :  
Bezogener Maximalwert der dynamischen Zahnkraft nach **Gleichung (16)**.

Die Schwankung der Drehwegabweichung und der Dynamikfaktor werden



durch Extremwertbetrachtungen aus den Zeitverläufen abgeleitet und enthalten somit keinerlei Information über die spektrale Zusammensetzung der Anregung und des Schwingungsverhaltens. Aufgrund des stark frequenzabhängigen Schwingungs- und Abstrahlverhaltens sollte dieses Frequenzverhalten berücksichtigt werden. Die beiden Zahnkraftpegel werden zwar aus den Kraftspektren hergeleitet, allerdings ist die Gewichtung der einzelnen Amplituden zueinander fest vorgegeben, so dass diese nicht für jeden Anwendungsfall zutreffend sein können. In allen Kennwerten erfolgt keine vollständige Berücksichtigung der Betriebsbedingungen des Getriebes (v.a. bzgl. der Drehzahl). Zur Verzahnungsauslegung sind die dynamischen Größen aufgrund des größeren Berechnungsaufwandes kaum anwendbar.



**Bild 32:** Schallübertragungskette für ein Zahnradgetriebe

Zur Bewertung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen wird ein Vorgehen vorgeschlagen, das sich an der Übertragungskette für Zahnradgetriebe (**Bild 32**) orientiert. Es wird versucht wesentliche Einflussfaktoren dieser Übertragungskette in einer rechnerischen Beurteilung entsprechend zu berücksichtigen. Für eine praktikable Handhabung dieser Größen werden für einzelne Einflussgrößen vereinfachte Näherungen vorgeschlagen, so dass eine einfache und zuverlässige rechnerische Ermittlung mit geringem Aufwand möglich ist, ohne dass Detailberechnungen vorliegen.

Ausgangspunkt der rechnerischen Ermittlung des Anregungsverhaltens der Verzahnung stellt nach **Bild 32** die anregende Kraft dar. Diese anregende Kraft wird durch die Berechnungsmethoden der Kraftanregung oder der Drehwegabweichung ermittelt. Bei Verwendung des Drehwegspektrums muss dieses durch Multiplikation mit der Verzahnungssteifigkeit in eine Kraftgröße umgewertet werden (siehe **Gleichung (44)**).

$$F_i = c_\gamma \cdot b \cdot x_{Ai} \quad (44)$$

---

$F_i$	[N]	Amplitude der Kraftanregung $F_z(t)$ der $i$ -ten Ordnung
$c_\gamma$	$\left[ \frac{N}{mm \cdot \mu m} \right]$	mittlere bezogene Verzahnungssteifigkeit
$b$	[mm]	Verzahnungsbreite
$x_{Ai}$	[mm]	Anregungsamplitude

---

Entsprechend **Bild 32** führt die anregende Verzahnungskraft zu einem dynamischen Systemverhalten des Antriebsstranges. Durch diese dynamischen Einflüsse können bestimmte Anregungsanteile (z.B. an Resonanzstellen) verstärkt werden. Eine Berücksichtigung dieser Anteile erfolgt durch dynamische Simulation des gesamten Antriebsstranges inkl. numerischer Zeitschrittintegration oder der näherungsweise Berücksichtigung des Systemverhaltens durch Vergrößerungsfunktionen, die die Kenntnis über die Lage der Eigenfrequenzen voraussetzt.

Die sich hieraus ergebende dynamische Verzahnungskraft stützt sich in den Lagerungen des Getriebes ab. Dies stellt eine translatorische Kraft-

anregung für die Maschinenstruktur des Getriebes dar. Die Maschinenstruktur besteht aus Wellen, Lagern, Gehäuse sowie weiteren Anbauteilen bis hin zur Fundamentierung. Für Getriebegehäuse können rechnerische Abschätzungen des Körperschallmaßes mit dem Expertensystem MASAK [9] durchgeführt werden. Neben den darin enthaltenen Methoden auf Grundlage der Plattentheorie sind in [118] auch Näherungsmethoden zur Ermittlung des Körperschallmaßes mit Linienzügen beschrieben. Das Körperschallmaß stellt hierbei den Zusammenhang zwischen der strukturanregenden Kraft und dem Körperschall dar. Die Darstellung eines berechneten Körperschallmaßes ist in **Bild 33** abgebildet. Entsprechend der maschinenakustischen Grundgleichung nach [29], die in **Gleichung (45)** dargestellt ist, werden die grundsätzlichen Zusammenhänge der Schallübertragung bis hin zum Luftschall quantifiziert.

$$P(f) = \rho_L \cdot c_L \cdot \sigma(f) \cdot Sh_{\dot{U}}^2(f) \cdot \hat{F}^2(f) \quad (45)$$

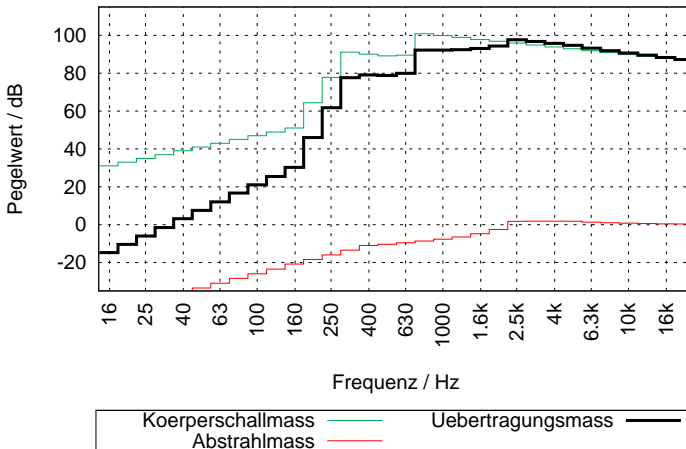
---

$P(f)$	$[W]$	Amplitude der Schalleistung
$\rho_L$	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Luftdichte
$c_L$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Schallgeschwindigkeit in Luft
$\sigma(f)$	$[-]$	Abstrahlmaß
$Sh_{\dot{U}}$	$\left[\frac{m^4}{(s \cdot N)^2}\right]$	Körperschallmaß
$\hat{F}(f)$	$[N]$	Amplitude der strukturanregenden Kraft

---

An der schwingenden Oberfläche wird der Körperschall abgestrahlt, so dass er sich in Form von Luftschall ausbreitet. Vereinfachte Abschätzgrößen hierzu können ebenfalls mit MASAK [9] ermittelt werden. Die theoretischen Grundlagen auf Basis der Plattentheorie und Näherungsgrößen zur Ermittlung des Abstrahlgrades sowie deren experimentelle Validerungsergebnisse sind im FKM Heft 78 [31] dokumentiert. **Bild 33** zeigt eine Darstellung des Abstrahlgrades. Das ebenfalls dargestellte Übertragungsmaß stellt die Summe des Körperschallgrades und des Abstrahlgrades dar.

Auch die Wahrnehmung des Schalls im menschlichen Ohr erfolgt nach bestimmten Charakteristika. Um diese in der Messtechnik abzubilden, existieren entsprechend charakteristische Kurven in Normen und Richtlinien,



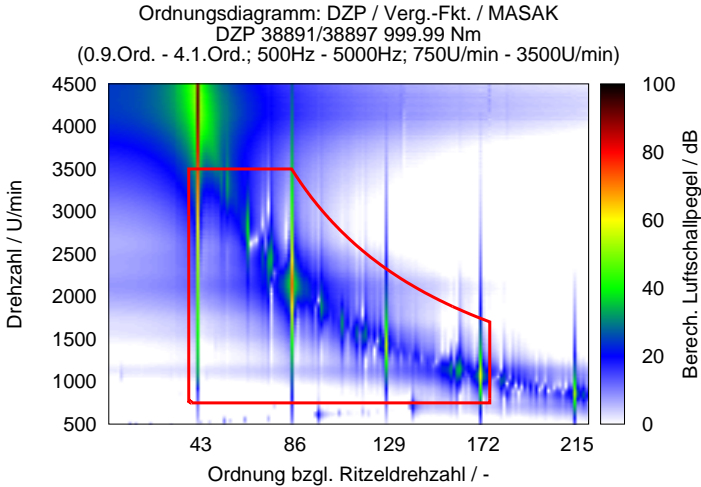
**Bild 33:** Für das Gehäuse des Prüfgetriebes mit MASAK [9, 31] ermittelte Kurven für das Körperschall- und das Abstrahlmaß.

wie beispielsweise in der DIN EN 61672-1 [25] (A, C oder Z-Bewertung) oder die Lautheit nach DIN ISO 226 [23].

Für die Berechnung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen werden die in **Bild 32** dargestellten Größen als Grundlage verwendet und für ein Drehmoment im betrachteten Drehzahlbereich ermittelt. Der berücksichtigte Detaillierungsgrad sowie die Länge des verwendeten Übertragungspaths sind dabei nicht festgelegt. Es kann für einfache Aussagen ausreichend sein, bereits die mit Vergrößerungsfunktionen ermittelte dynamische Verzahnungskraft als Grundlage zu verwenden.

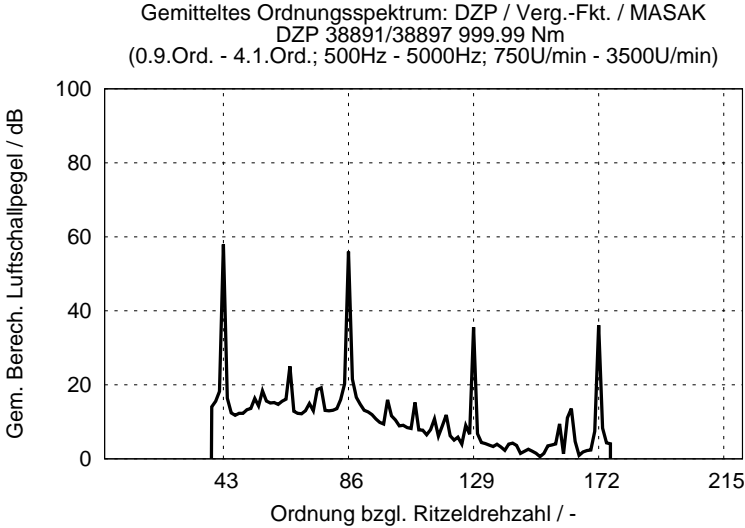
Zur Ermittlung des skalaren Kennwerts des Anwendungskraftpegels zur Bewertung wird hiernach folgendes Vorgehen verwendet:

Ausgehend von den zu beurteilenden Spektren im Drehzahlbereich wird zunächst ein beurteilungsrelevanter Bereich definiert. Eine beispielhafte Darstellung dieser Datengrundlage mit den relevanten Drehzahl-, Frequenz- und Ordnungsbereichen ist in **Bild 34** dargestellt. Ausschließlich Amplituden innerhalb dieses Bereiches gehen in die Bewertung ein.



**Bild 34:** Darstellung der Eingrenzung des relevanten Drehzahl-, Frequenz- und Ordnungsbereichs.

Die Amplituden innerhalb des in **Bild 34** rot umrandeten Bereichs werden nun über der Drehzahl gemittelt. Dies bedeutet es wird der arithmetische Mittelwert der ungepegelten Amplituden zwischen den Amplituden gleicher Ordnung aber unterschiedlicher Drehzahl gebildet. Dieser Mittelwert wird zusätzlich mit dem Verhältnis der Breite des für diese Ordnung relevanten Drehzahlbandes zur Breite des gesamten betrachteten Drehzahlbandes gewichtet. Dies wird für alle Ordnungen gleichermaßen durchgeführt. Es ergibt sich ein gemittelttes Ordnungsspektrum, das in **Bild 35** dargestellt ist. Hierin sind ausschließlich die Anregungsamplituden enthalten, die im betrachteten Betriebs- und Frequenzbereich relevant sind. Außerdem fließt zusätzlich die Häufigkeit des Vorkommens einzelner Anregungsordnungen im dem betrachteten Drehzahlbereich im gewichteten Ordnungsspektrum ein. Hierdurch können die Betriebsparameter in der Kennwertermittlung berücksichtigt werden.



**Bild 35:** Darstellung der Eingrenzung des relevanten Drehzahl-, Frequenz- und Ordnungsbereichs.

Eine formelmäßige Darstellung dieser gewichteten Mittelung ist in **Gleichung (46)** dargestellt.

$$\bar{F}(ord) = \frac{\sum_{i=n_u(ord)}^{n_o(ord)} F_i(ord)}{n_o(ord) - n_u(ord)} \cdot \frac{n_o(ord) - n_u(ord)}{n_o - n_u} = \frac{\sum_{i=n_u(ord)}^{n_o(ord)} F_i(ord)}{n_o - n_u} \quad (46)$$

---

$\bar{F}(ord)$	[N]	gemittelte Amplitude für die Ordnung $ord$
$ord$	[-]	Ordnung
$n_u(ord)$	[U/min]	untere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_o(ord)$	[U/min]	obere Grenzdrehzahl im Betriebs- und Frequenzbereich für die Ordnung $ord$
$n_u$	[U/min]	untere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$n_o$	[U/min]	obere Grenzdrehzahl für alle Ordnungen
$F_i(ord)$	[N]	Amplitude der Ordnung $ord$ für die Drehzahl $i$

---

Die Mittelung der Amplituden bewertet den Anteil resonanzüberhöhter Amplituden über dem gesamten Drehzahlband. Die Kombination dieser bei-

den Methoden der Mittelung und Gewichtung führt zu einer Berücksichtigung des ausgewählten Betriebsbereiches im gemittelten Ordnungsspektrum, das in **Bild 35** dargestellt ist und zur weiteren Kennwertentwicklung verwendet wird.

Die ungepegelten Kraftamplituden werden quadratisch aufsummiert, anschließend wird die Summe auf eine quadrierte Bezugskraft  $F_{bez}$  bezogen gepegelt. Der formelmäßige Zusammenhang dieses Bildungsgesetzes ist in **Gleichung (47)** dargestellt. In Anlehnung an die üblichen Größen zur Geräuschbeurteilung wie z.B. dem Schalldruckpegel [25] wird der zehnfache dekadische Logarithmus der bezogenen quadratischen Pegelsumme der Kraftamplituden aus dem ermittelten gewichteten Ordnungsspektrum verwendet. Als Bezugskraft  $F_{bez}$  wird der genormte Wert nach DIN EN ISO 1683 [24] verwendet. Für Kraftgrößen beträgt dieser  $1\mu N = 1 \cdot 10^{-6} N$ .

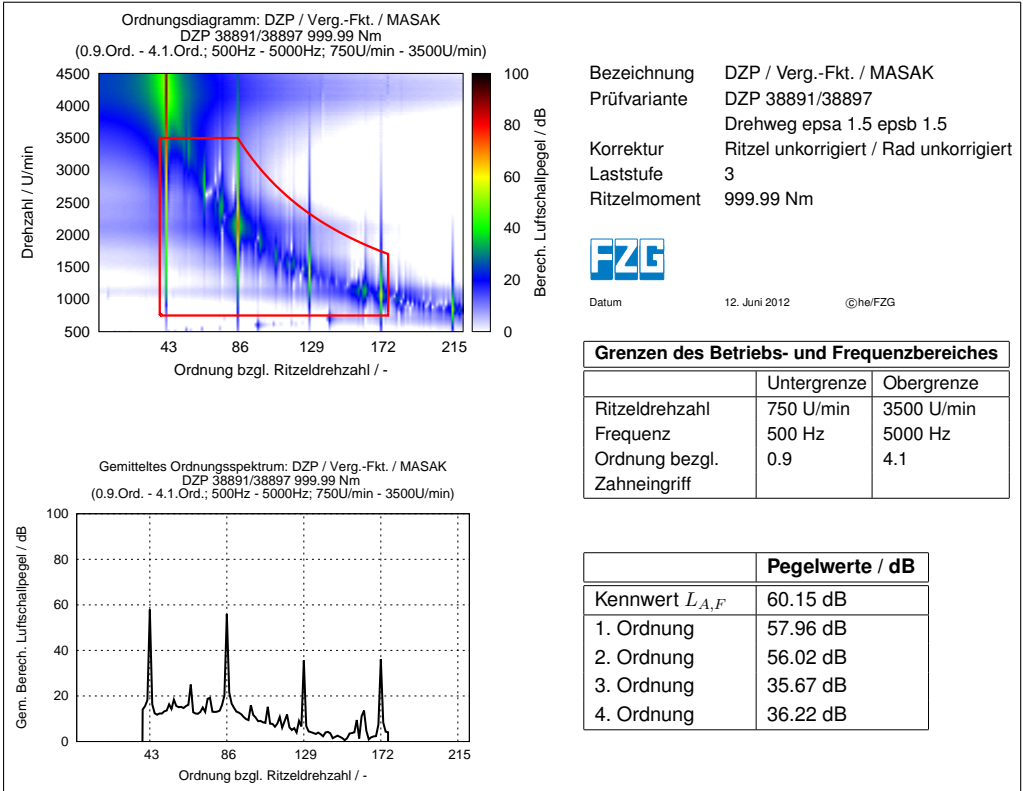
$$L_{A,F} = 10 \cdot \log \left[ \frac{1}{F_{bez}^2} \sum_{i_{ord}=1}^{n_{ord}} \overline{F}(ord)^2 \right] dB \quad (47)$$

---

$L_{A,F}$	[dB]	Anwendungskraftpegel
$F_{bez}$	[N]	Bezugskraft
$i_{ord}$	[-]	Zahneingriffsordnung
$n_{ord}$	[-]	maximale Zahneingriffsordnung
$\overline{F}(ord)$	[N]	Amplitude des gemittelten, betriebsbereichsbewerteten Ordnungsspektrums ( $\overline{F}(ord)$ aus <b>Gleichung (46)</b> )

---

Im Vergleich mit bestehenden Kennwerten wie dem Zahnkraftpegel aus **Gleichung (5)**, die in Arbeiten wie [40, 56, 80, 99] definiert wurden, wird bei der Kennwertermittlung des Anwendungskraftpegels zusätzlich der Betriebs- und Frequenzbereich im zugrundeliegenden Ordnungsspektrum berücksichtigt. In vergleichbarer Vorgehensweise zu Geiser [39] für den  $L_{f,lin}$  nach **Gleichung (11)** ist das dynamische Systemverhalten entweder durch die Verwendung von Ergebnissen dynamischer Simulationen oder in vereinfachter Weise durch die Verwendung von Vergrößerungsfunktionen bereits in den Kraftamplituden enthalten. Deshalb wird auf die Höhergewichtung höherharmonischer Ordnungen zur Berücksichtigung eines



**Bild 36:** Übersichtsblatt zur Bildung des Anwendungskraftpegels (enthält die Grafiken aus **Bild 34** und **Bild 35**).

Systemverhaltens verzichtet. Diese Gewichtung mit der jeweiligen quadratischen Anregungsfrequenz ( $i_{ord}^2 \cdot \omega_z^2$ ) wurde in den rein quasistatisch berechneten Größen wie dem Zahnkraftpegel nach Müller [80] dazu verwendet, die Resonanzgefährdung höherer Ordnungen bei unterkritisch betriebenen Getrieben zu berücksichtigen, was bei einer direkten Berücksichtigung durch Vergrößerungsfunktionen oder dynamischer Simulationsergebnisse zutreffender erreicht werden kann.

Zur grafischen Darstellung der zugrundeliegenden Größen wurde ein



Übersichtsblatt erstellt, das die Bildung des Anwendungskraftpegels durch grafische Darstellungen und weitere Informationen verdeutlichen soll. Diese Übersichtsdarstellung für das in **Bild 34** und **Bild 35** gezeigte Beispiel ist in **Bild 36** abgebildet. In Anlehnung an das Übersichtsblatt zur Messdatenauswertung in **Bild 28** befindet sich das Campbelldiagramm in Ordnungsdarstellung links oben. In diesem Ordnungsdiagramm sind allerdings zusätzlich die berücksichtigten Betriebs- und Frequenzgrenzen mit einem roten Rahmen eingezeichnet. Links unten wurde das gemittelte Ordnungsspektrum plaziert. Hierbei ist zu beachten, dass dieses gemittelte Ordnungsspektrum im Gegensatz zum Messdatenauswertebblatt (**Bild 28**) ein gemitteltes Ordnungsspektrum unter Berücksichtigung der Betriebs- und Frequenzgrenzen enthält. Auf der rechten Seite sind allgemeine Daten zur dargestellten Verzahnungsvariante, eine Tabelle mit den eingegebenen Betriebs- und Frequenzgrenzen und eine Tabelle mit den Zahlenwerten des Anwendungskraftpegels sowie den Amplituden aus dem betriebsbereichsgemittelten Ordnungsspektrum dargestellt. Dieses Übersichtsblatt soll die Aussagefähigkeit des Anwendungskraftpegels verständlicher und transparenter machen und somit die Anwendbarkeit in der Praxis verbessern.

## 5.2 Anwendungskraftpegel für die Lagerkraft- und Drehmomentenanregung der Planetenradstufe

Grundsätzlich gelten für Planetengetriebe ähnliche Mechanismen der Verzahnungsanregung wie bei Stirnradgetrieben. Allerdings kommt es durch die Überlagerungen der in einem Planetengetriebe beteiligten Verzahnungsstufen zu besonderen Überlagerungseffekten, die das spezielle Anregungsverhalten von Planetengetrieben ausmachen.

Wie in **Abschnitt 3.2** beschrieben, führt die kinematische Überlagerung der Anregungen in einem Planetengetriebe zu einer Entkoppelung der rotatorischen und der translatorischen Anregungsanteile. Für die Beurteilung müssen diese somit entsprechend unterschieden werden.

Auf Grundlage der Kraftanregungsberechnung von Planetengetrieben (**Abschnitt 3.2.1**) werden durch die Überlagerung der Anregungen die Verläufe der translatorischen Lagerkraftanregung und der rotatorischen Momentenanregung ermittelt. Als Beurteilungskenngrößen werden hierzu aus den entsprechenden Spektren mit dem Bildungsgesetz des Zahnkraftpegels (**Gleichung (5)**) der Lagerkraft- (translatorisch) und Momentenpegel (rotatorisch) gebildet.

Bei der Drehwegberechnung von Planetengetrieben (**Abschnitt 3.2.2**) wird das rotatorische Anregungsverhalten unmittelbar durch die Drehwegabweichung zwischen Sonne und Hohlrاد repräsentiert. Das translatorische Anregungsverhalten kann hierbei durch eine Auswertung der translatorischen Bauteilbewegungen erfolgen.

Zur Bewertung der Auswirkungen der Anregungsmechanismen ist es wichtig, für die jeweils maßgebliche Anregungskomponente die relevanten Anregungsamplituden zu identifizieren und zu bewerten. Die Kennwertermittlung des Anwendungskraftpegels, die in **Abschnitt 5.1** dargestellt wurde, leistet dies. Gerade Planetengetriebe werden oft bei extremen Drehzahlbedingungen eingesetzt, so dass die Einbeziehung des Drehzahlbereiches für eine zielgerichtete Optimierung wichtig ist. Zur Bewertung der translatorischen Anregung wird hierzu die Lagerkraftanregung oder das Verlagerungsverhalten als Datengrundlage bei der Bildung des Anwendungskraftpegels verwendet. Die rotatorische Anregung wird dann aus dem Momentenpegel bzw. der Drehwegabweichung von Planetengetrieben berechnet. Die in **Abschnitt 3.2.3** dargestellte Ermittlung der Dreheigenfrequenzen kann in der rotatorischen Anregungsbeurteilung ebenfalls mit berücksichtigt werden.

## 6 Auslegung anregungsarmer Stirnrad- und Planetenradstufen

Die in **Abschnitt 5** dargestellten Bewertungsmöglichkeiten dienen im Wesentlichen zur Bewertung und Optimierung des Anregungsverhaltens bei der Auslegung von Verzahnungen. Für die Ermittlung solcher Optimalvarianten ist es notwendig, die Grundgrößen wie die Drehwegabweichung oder die Kraftanregung in Form einfacher skalarer Größen zu bringen, die eine einfache und schnelle vergleichende Bewertung einzelner Varianten zulassen.

Eine optimal ausgelegte Verzahnung hat mehrere unterschiedliche, teilweise widersprüchliche Zielsetzungen zu erfüllen. Grundvoraussetzung einer Verzahnungsauslegung stellt die Sicherstellung ausreichender Verzahnungstragfähigkeit dar, die im Regelfall neben einer Normrechnung der Verzahnungshauptgeometrie über eine durch Verzahnungskorrekturen optimierte gleichmäßige Lastverteilung sichergestellt wird. Einen weiteren wichtigen Aspekt stellt die Optimierung des Anregungsverhaltens dar. Diese beiden Optimierungsziele können jeweils durch weitere Ziele wie einem günstigen Wirkungsgrad ergänzt werden, was durch die Lastübertragung in Flankenbereichen mit geringem Gleitanteil erreicht werden kann. Diese unterschiedlichsten Ziele spiegeln sich nicht nur in unterschiedlichen zu verwendenden Kenngrößen wieder, sondern wirken sich maßgeblich auf grundlegende Randbedingungen wie beispielsweise die in der Auslegungsrechnung zugrundegelegte Belastung aus. So wird die Tragfähigkeitsberechnung ausschließlich mit hohen Belastungen im Bereich der Nenn- oder Maximallast durchgeführt, weil dieser Lastbereich für die Verzahnungstragfähigkeit maßgeblich ist und in der Regel unter dieser Tragfähigkeitslast auch die größten lastbedingten Verformungen im Getriebe entstehen. Bei einer Optimierung des Anregungsverhaltens jedoch ist in vielen Fällen ein anregungsarmes Laufverhalten im Teillastbereich wich-

tiger als im Nennlastbereich, wo das Anregungsverhalten des Getriebes aufgrund weiterer Anregungsquellen (z.B. Verbrennungsmotor) von geringerer Bedeutung ist. Für die Optimierung des Anregungsverhaltens ist die Auswahl des als Anregungslast bezeichneten Lastbereichs von maßgeblicher Bedeutung.

Wesentlich bei der Optimierung der Anregung eines Getriebes sind zwei Punkte, die in der Verzahnungsauslegung beachtet werden müssen: Die Vermeidung von Resonanzbereichen im gesamten Betriebsbereich, soweit möglich, und die Minimierung der Anregung aus der Verzahnung bei Anregungslast unter Berücksichtigung des im Betrieb vorkommenden Lastbereichs.

### **6.1 Optimierung der Anregung durch geeignete Wahl der Verzahnungshauptgeometrie**

Die Auslegung der Verzahnungshauptgeometrie erfolgt im Wesentlichen nach Gesichtspunkten der Verzahnungstragfähigkeit. Allerdings wird das Schwingungsverhalten eines Getriebes durch die Wahl der Verzahnungshauptgeometrie bereits zu einem erheblichen Teil festgelegt. Diese Beeinflussung des Schwingungsverhaltens eines Getriebes durch die Hauptgeometrie erfolgt hauptsächlich über zwei unterschiedliche Mechanismen – das Anregungsverhalten der Verzahnung selbst und die Lage der Anregung innerhalb des dynamischen Systems (Resonanzlage).

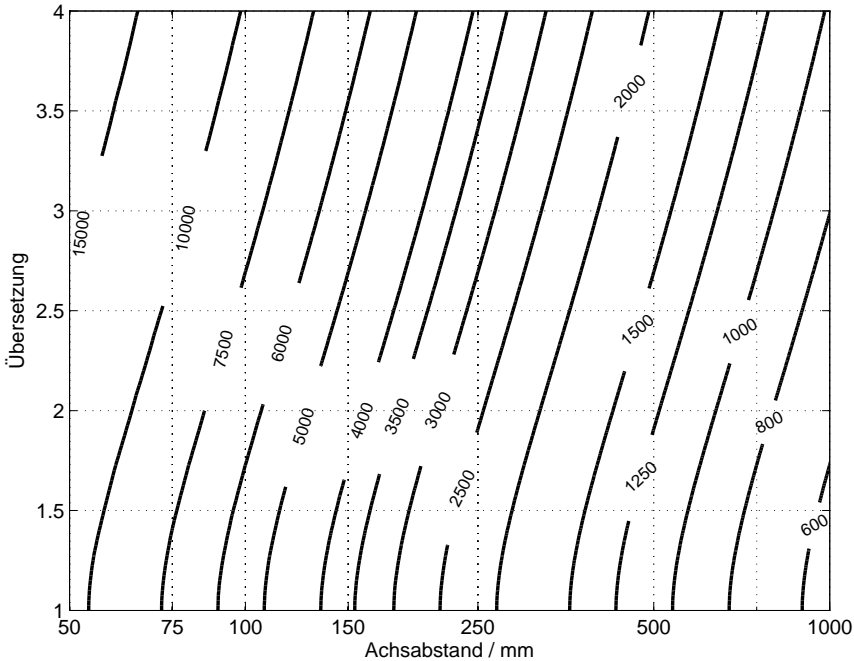
- **Beeinflussung des Anregungsverhaltens:**  
Die Schwingungsanregung aus einer Verzahnung wird durch die Auslegung der Hauptgeometrie maßgeblich beeinflusst. So weisen Schrägverzahnungen grundsätzlich ein erheblich günstigeres Anregungsverhalten im Vergleich zu Geradverzahnungen auf.
- **Beeinflussung des dynamischen Betriebspunktes der Verzahnung:**  
Die Wirkung der Verzahnungsanregung innerhalb eines Getriebes hängt stark von der Anregbarkeit des umgebenden Systems ab. Für

eine schwingungsgünstige Auslegung sind aus diesem Grund insbesondere Resonanzstellen, bei denen das System besonders stark durch die Verzahnung anregbar ist, zu vermeiden. Die Hauptgeometrieauslegung hat diesbezüglich zweierlei Einfluss: Einerseits wird die Lage der Eigenfrequenzen durch das Zusammenspiel der Verzahnungshauptgeometrie und dem umgebenden System bestimmt. Andererseits wird über die Zähnezahl die Größenordnung der wesentlichen Anregungsfrequenzen (Zahneingriffsfrequenz- und Höherharmonische) festgelegt. Es ist hierbei eine Vermeidung von Verzahnungsresonanzen im kompletten Drehzahlbereich anzustreben. Vorresonanzen, bei denen die Eigenfrequenzen auf höherharmonische Anregungen treffen, sind praktisch kaum vermeidbar, müssen aber bei der Auslegung mit berücksichtigt werden.

Nachdem die Verzahnungsanregung neben der Hauptgeometrie auch maßgeblich durch die Feingeometrie (Verzahnungskorrekturen) beeinflussbar ist, stellt die Beeinflussung des dynamischen Betriebspunktes den wichtigeren Teil der Hauptgeometrieauslegung dar, da diese durch andere Maßnahmen kaum mehr beeinflusst werden kann.

### 6.1.1 Anwendung auf die Stirnradstufe

Eine wichtige Größe der Auslegung von Getrieben stellt der Achsabstand dar. Neben den Gesichtspunkten Bauraum und Tragfähigkeit, die wichtige Randbedingungen bei der Auswahl des Achsabstands sind, hat diese Größe ebenfalls einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines Getriebes. Denn mit der Festlegung des Achsabstands und der Übersetzung werden die Hauptabmessungen der beteiligten Zahnräder festgelegt. Es ist somit möglich, aus diesen Daten auf die Trägheiten der beteiligten Räder zu schließen, so dass zusammen mit der in DIN 3990 [22] bzw. ISO 6336 [62] dargestellten Verzahnungssteifigkeit ( $c_\gamma = 20 \frac{N}{\text{mm} \cdot \mu\text{m}}$ ) eine Abschätzung der Eigenfrequenz für übliche Verzahnungen aus Stahl möglich ist. In **Gleichung (48)** ist eine Näherungslösung für die Ermittlung der



**Bild 37:** Näherung der Eigenfrequenzen einer Stirnradpaarung (in Hz) in Abhängigkeit von Achsabstand und Übersetzung. Gültig für Radkörper und Verzahnungen aus Stahl, Vollscheibenräder in Verzahnungsbreite mit Verzahnungsteifigkeit  $c_\gamma = 20 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$ .

Verzahnungseigenfrequenz einer Stirnradstufe in Abhängigkeit von Achsabstand und Übersetzung für Vollscheibenräder aus Stahl dargestellt. Mit Hilfe des Diagramms in **Bild 37** ist eine grafische Ermittlung der Eigenfrequenzen möglich. Hierzu ist die Position des Schnittpunktes, der durch den Achsabstand und die Stufenübersetzung festgelegt wird, im Diagramm zu bestimmen und dann anhand der gezeichneten Linien gleicher Frequenzen die Lage der Verzahnungseigenfrequenz abzulesen. So ergibt sich beispielsweise für ein Stirnradgetriebe mit einem Achsabstand von  $250\text{mm}$  und einer Stufenübersetzung von  $|i| = 2.0$  eine Lage der Eigenfrequenz im Bereich von  $2600\text{Hz}$ . Zur Berücksichtigung von Radkörpereinflüssen ist

die Eigenfrequenzermittlung in **Gleichung (49)** für Zahnradern mit Bohrung dargestellt. Mit dem Verhältnis  $q$  des Bohrungsdurchmessers zum Außendurchmessers der Zahnradern ergibt sich eine Erhöhung der Eigenfrequenzlage um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{1-q^4}}$ . Für ein Durchmesser Verhältnis von  $q = \frac{3}{4}$  entspricht dies einer Steigerung der Eigenfrequenz von ca. 20% gegenüber der von Vollscheibenradern.

$$f_E \text{ in Hz} = 190.35 \cdot \frac{1000}{\frac{a}{\text{mm}}} \cdot \frac{i+1}{i} \sqrt{i^2+1} \approx 190 \frac{1000}{\frac{a}{\text{mm}}} \cdot (i+1.5) \quad (48)$$

$$f_E \text{ in Hz} = 190.35 \cdot \frac{1000}{\frac{a}{\text{mm}}} \cdot \frac{i+1}{i} \sqrt{i^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-q^4}} \quad (49)$$

---

$a$	[mm]	Achsabstand
$i$	[-]	Übersetzung
$f_E$	[Hz]	Eigenfrequenz
$q$	[-]	Durchmesser Verhältnis $\frac{r_i}{r_a}$

---

Wie in **Bild 37** dargestellt, weist die Verzahnungseigenfrequenz eine starke Abhängigkeit vom Achsabstand auf. So sinkt die Eigenfrequenz mit zunehmendem Achsabstand ab, während eine Erhöhung der Stufenübersetzung zum Ansteigen der Eigenfrequenz führt. Für die Auslegung von Getrieben bedeutet dies, dass durch die Festlegung des Achsabstandes bereits die Größenordnung der Verzahnungseigenfrequenz festgelegt wird. Bei gegebener Übersetzung kann somit ein resonanzgefährdeter Frequenzbereich identifiziert werden. Dieser kritische Bereich kann bei der Auswahl der Zähnezahlen berücksichtigt werden und so eine Resonanz im Betriebsbereich vermieden werden. Bei mehrstufigen Stirnradgetrieben ergibt sich neben der Beeinflussungsmöglichkeit der Eigenfrequenz durch den Achsabstand auch die Möglichkeit einer Anpassung der Übersetzungsaufteilung zur Verschiebung der Eigenfrequenzen.

Der Achsabstand hat kaum Auswirkungen auf das Anregungsverhalten von anregungsoptimal ausgelegten Verzahnungen, so dass der Achsabstand

eine wesentliche Größe ist, um das Schwingungsverhalten durch die Vermeidung von Verzahnungsresonanzen zu verbessern.

Die Wahl der Zähnezahl und des bei gegebenem Achsabstand und Übersetzung hiermit festgelegten Moduls hat einen untergeordneten Einfluss auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen, sofern die weiteren Auslegungsgrößen (z.B. Überdeckungen) vergleichbar sind. Allerdings ist die Zähnezahl die maßgebliche Größe zur Beeinflussung der Anregungsfrequenzen einer Verzahnung, die im Wesentlichen der Zahneingriffsfrequenz und deren Vielfachen entspricht. In **Gleichung (50)** ist die Ermittlung der Zahneingriffsfrequenz dargestellt. Nach DIN/ISO [22, 62] kann die in **Gleichung (51)** dargestellte dynamische Bezugsdrehzahl  $N$  definiert werden, bei der Betriebspunkte zwischen 0.85 und 1.15 als Resonanzgebiete aus Tragfähigkeitsgründen zu vermeiden sind.

$$f_z = \frac{n}{60 \frac{s}{min}} \cdot z \quad (50)$$

$$N = \frac{f_z}{f_E} \quad (51)$$

---

$n$	$[min^{-1}]$	Drehzahl
$z$	$[-]$	Zähnezahl
$f_z$	$[Hz]$	Zahneingriffsfrequenz
$f_E$	$[Hz]$	Eigenfrequenz
$N$	$[-]$	Dyn. Bezugsdrehzahl

---

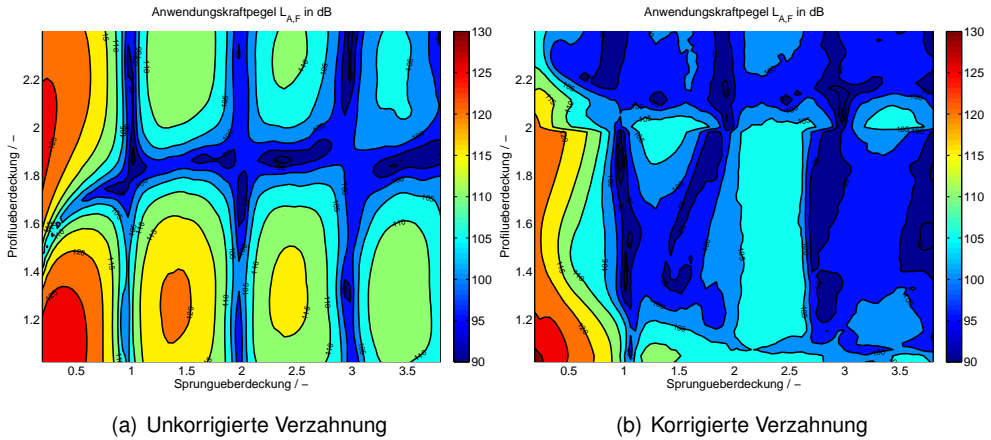
Bei der Wahl der Zähnezahl bzw. des Moduls ist auf die Vermeidung von Resonanzstellen zu achten. Für unterkritische Auslegungen ( $f_z < f_E$ ) lässt ein größerer Modul mit der hieraus resultierenden kleineren Zähnezahl ein günstigeres Schwingungsverhalten erwarten. Aufgrund der Anregung von Höherharmonischen (Vielfache der Zahneingriffsfrequenz) können Vorresonanzen ( $N = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ) auftreten, die das Schwingungsverhalten beeinflussen können. Tendenziell weisen die Anregungsamplituden der Höherharmonischen allerdings geringere Amplituden als die Zahneingriffs-



frequenz auf, so dass eine Vergrößerung des Abstands von Anregungsfrequenz zur Eigenfrequenz zu einem günstigeren Schwingungsverhalten führt. Für überkritische Auslegungen ( $f_z > f_E$ ) dürfte ein kleinerer Modul mit der damit verbundenen größeren Zähnezahzahl den maßgeblichen Abstand zur Eigenfrequenz vergrößern und damit ein günstigeres Schwingungsverhalten in diesem Betriebsbereich ermöglichen.

Die Auslegung der Überdeckungen hat Einfluss auf das Anregungsverhalten der Verzahnungen. Tendenziell weisen Verzahnungen mit höheren Überdeckungen ein günstigeres Anregungsverhalten auf. Insbesondere Schrägverzahnungen führen zu einer deutlich geringeren Anregung als Geradverzahnungen. Nachdem das Anregungsverhalten von Verzahnungen neben den Überdeckungsverhältnissen auch maßgeblich von der Verzahnungsfeingeometrie abhängig ist, müssen bei der Auslegung anregungsarmer Verzahnungen jeweils beide Einflüsse gemeinsam beachtet werden. So ist in **Bild 38** das Anregungsverhalten von Verzahnungen für unterschiedliche Profil- und Sprungüberdeckungen sowohl für unkorrigierte Verzahnungen als auch für korrigierte Verzahnungen dargestellt.

Für die unkorrigierte Verzahnung in **Bild 38(a)** sind deutliche Minima für ganzzahlige Werte der Sprungüberdeckung und Profilüberdeckungen von ca. 1.8 erkennbar. Die Ursache für die anregungsgünstigen Zonen der unkorrigierten Verzahnung liegt in der über dem Eingriff konstanten Berührlinienlänge für Verzahnungen mit ganzzahliger Sprung- oder Profilüberdeckung, was üblicherweise zu einer geringen Schwankung der Verzahnungssteifigkeit führt. Die Ursache für die Lage der Minima bei Profilüberdeckungswerten von 1.8 statt beim ganzzahligen Wert um zwei liegt in der Überdeckungsvergrößerung unter Last durch den vor- und nachzeitigen Zahneingriff, der die wirksame Überdeckung für die betrachtete Belastung vergrößert. An den Minimalpunkten weisen die Verzahnungen mit einer theoretischen Profilüberdeckung von 1.8 eine wirksame Profilüberdeckung unter Last im Bereich von 2.0 auf. Für die praktische Anwendung



(a) Unkorrigierte Verzahnung

(b) Korrigierte Verzahnung

**Bild 38:** Anregungsverhalten von Schrägverzahnungen unterschiedlicher Überdeckungen charakterisiert durch den Anwendungskraftpegel ( $n = 500 \text{min}^{-1} - 4500 \text{min}^{-1}$ ,  $f = 50 \text{Hz} - 10 \text{kHz}$ ,  $\text{ord} = 1 - 5$ ). Die Variation der Profilüberdeckungen erfolgt durch unterschiedliche Kopfkreise und die Variation der Sprungüberdeckung durch unterschiedliche Zahnbreiten. Als Verzahnungskorrektur wurde eine lange Kopf- und Fußrücknahme mit dem Betrag der Zahnverformung verwendet. (Rechnerische Untersuchung bei konstantem Drehmoment).

dieser Werte in der Verzahnungsauslegung ist deshalb gerade die Profilüberdeckung kaum geeignet, da die starke Lastabhängigkeit der wirksamen Werte die optimale Wahl dieser Größe erschwert.

Für korrigierte Verzahnungen ergibt sich das in **Bild 38(b)** dargestellte Anregungsverhalten. Die ausgeprägten Minima für spezielle Werte der Profil- oder Sprungüberdeckung sind hierin kaum mehr vorhanden. Es sind teilweise Minimalwerte bei ganzzahligen Sprungüberdeckungen erkennbar, die jedoch bei weitem nicht so ausgeprägt sind, wie bei der unkorrigierten Verzahnung (**Bild 38(a)**). Angesichts der Tatsache, dass zur Sicherstellung der Tragfähigkeit ohnehin Verzahnungskorrekturen erforderlich sind, hat die Wahl der Überdeckung bei der anregungsgünstigen Verzahnungs-

auslegung nur einen geringeren Einfluss, der durch gezielte Anregungskorrekturen weiter verringert werden kann. Eine Ausnahme hierzu stellt ein Bereich der Profilüberdeckung um 2.0 dar. Hier ist die Auslegung geeigneter Profilkorrekturen sehr schwierig, da die erforderlichen Längen der Kopf- bzw. Fußrücknahmen praktisch nicht darstellbar sind. In **Bild 38(b)** ist deshalb im Bereich von Profilüberdeckung 2.0 in weiten Teilen eine Zunahme des Anregungsverhaltens feststellbar, die sich mit noch größeren Profilüberdeckungen wieder zum erwartungsgemäß geringen Anregungsverhalten von Hochverzahnungen entwickelt. Dies bedeutet für die praktische Anwendung, dass Profilüberdeckungen zwischen 1.9 und 2.1 aus Anregungsgesichtspunkten möglichst vermieden werden sollten, um eine praktikabel anregungsarm korrigierbare Verzahnung zu erhalten.

Die weiteren Größen, die bei der Auslegung der Hauptgeometrie festgelegt werden, wie der Eingriffswinkel oder die Profilverschiebung, haben einen untergeordneten Einfluss auf das Anregungs- und Geräuschverhalten von Verzahnungen. Diese und weitere Größen können jedoch Auswirkungen auf die Steifigkeit einer Verzahnung haben, die einen indirekten Einfluss auch auf das Schwingungsverhalten hat. So weisen beispielsweise Verzahnungen mit kleinen Eingriffswinkeln üblicherweise größere Verformungsbeträge und somit eine geringere Steifigkeiten auf, als solche mit großen Eingriffswinkeln.

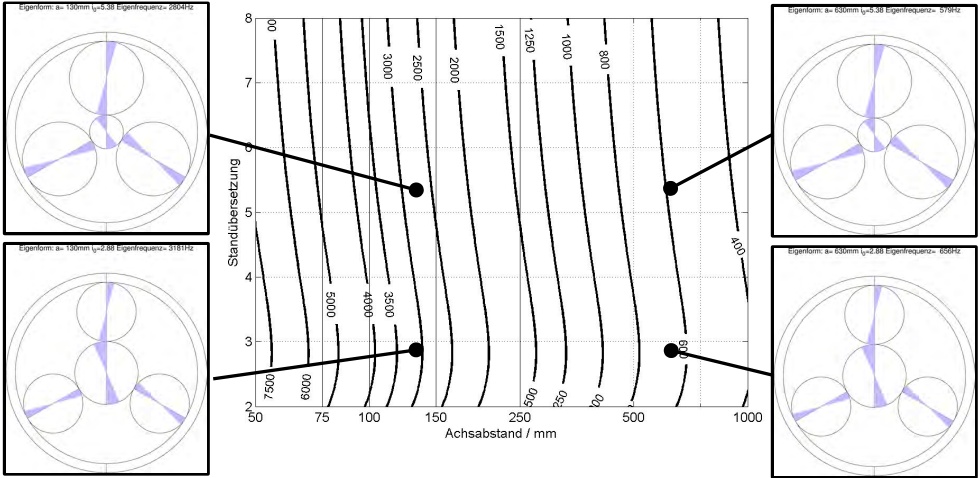
Die Verzahnungssteifigkeit hat einen Einfluss auf das Schwingungsverhalten von Getrieben, da sie bei der Ermittlung der Eigenfrequenz verwendet wird, die in **Abschnitt 6.1.1** dargestellt wurde. Allerdings ist die Beeinflussbarkeit der Eigenfrequenz durch die Verzahnungssteifigkeit aufgrund des Einflusses unter der Wurzel (vgl. **Gleichung (20)**) gering und reicht häufig nicht für eine signifikante Verschiebung der Eigenfrequenz zur Lösung von Resonanzproblemen aus. Zudem beeinflusst die Verzahnungssteifigkeit maßgeblich die Größenordnung der Zahnverformung unter Last, die die Größenordnung notwendiger Verzahnungskorrekturbeträge und somit

deren Fertigbarkeit maßgeblich beeinflusst, da die Abweichungsempfindlichkeit maßgeblich vom Verhältnis der Abweichungsbeträge zu den Korrekturbeträgen bzw. zu den Zahnverformungsbeträgen abhängt (vgl. **Abschnitt 6.2.3**). In der Verzahnungsauslegung kann durch eine steifere Verzahnung der Abstand der Zahneingriffs- zur Eigenfrequenz eines sonst identischen unterkritisch betriebenen Getriebes vergrößert werden, gleichzeitig nehmen die Beträge anregungsgünstiger Verzahnungskorrekturen mit entsprechenden Anforderungen an eine prozesssichere Fertigung ab.

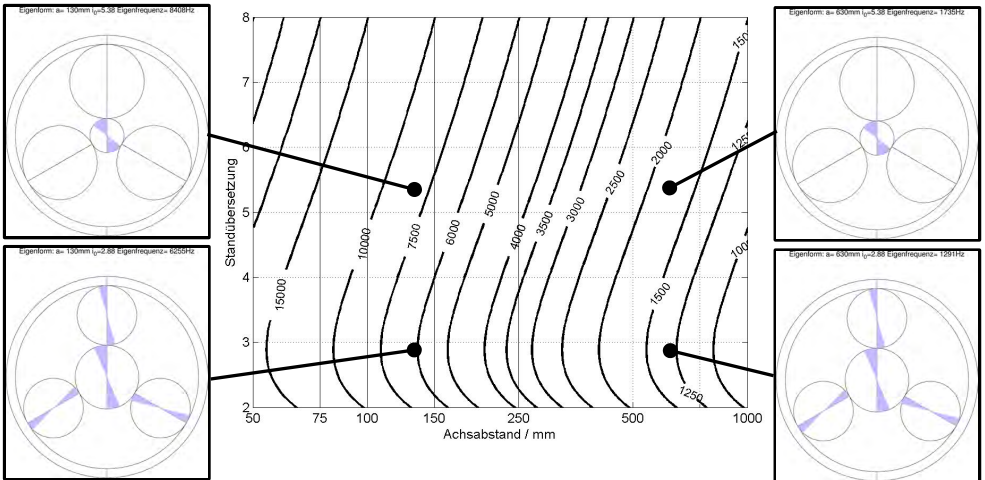
### 6.1.2 Übertragung auf die Planetenradstufe

Grundsätzlich gelten alle Überlegungen zur anregungsarmen Auslegung von Stirnradstufen ebenso für die Auslegung von Planetengetrieben. Die Verwendung von anregungsarmen Einzelverzahnungen innerhalb eines Planetengetriebes ist die am besten geeignete Methode zur Auslegung anregungsarmer Planetengetriebe.

Analog zu Stirnradgetrieben in **Bild 37** können Eigenfrequenzen auch für Planetengetriebe in Abhängigkeit von Achsabstand und Übersetzung dargestellt werden. Es ergeben sich allerdings bei einem Planetengetriebe jeweils 2 charakteristische Verzahnungseigenfrequenzen (vgl. **Abschnitt 3.2.3**), die in der Verzahnungsauslegung maßgeblich berücksichtigt werden sollten. Diese beiden Eigenfrequenzen sind in **Bild 39** für Planetengetriebe mit drei und in **Bild 40** mit fünf Planeten dargestellt. Die erste Eigenfrequenz (**Bild 39(a)** und **Bild 40(a)**) stellt eine Schwingung mit einer maßgeblichen Differenzamplitude in den Hohlradverzahnungen dar. Bei der zweiten Eigenfrequenz befindet sich die größte Differenzamplitude in den Sonnenradverzahnungen. Für beide Eigenfrequenzen lässt sich eine deutliche Abnahme der Eigenfrequenz mit steigendem Achsabstand feststellen. Die Standübersetzung weist für beide Eigenfrequenzen jeweils einen geringen Einfluss mit unterschiedlichen Tendenzen auf. Ein Vergleich der Eigenfrequenzen für Planetengetriebe mit 3 und 5 Planeten zeigt einen geringfügigen Anstieg beider Eigenfrequenzen für eine zunehmende An-

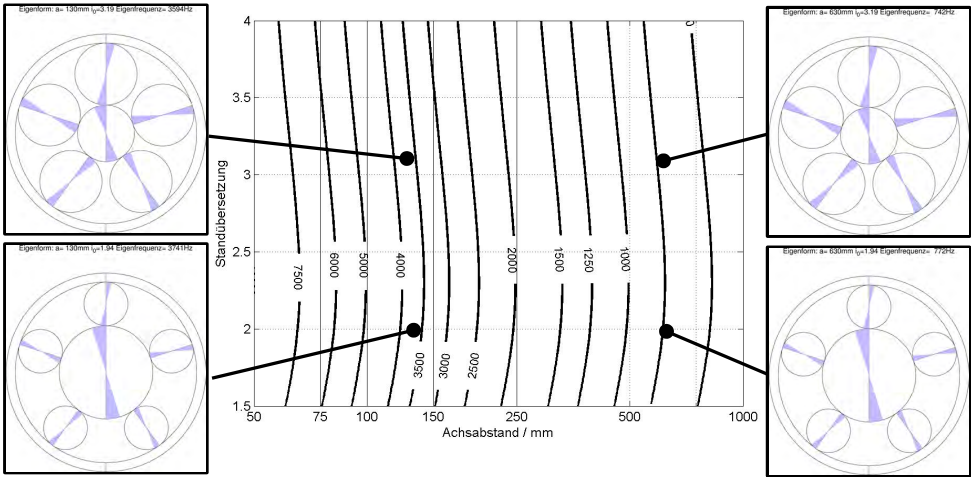


(a) 1. Eigenfrequenz

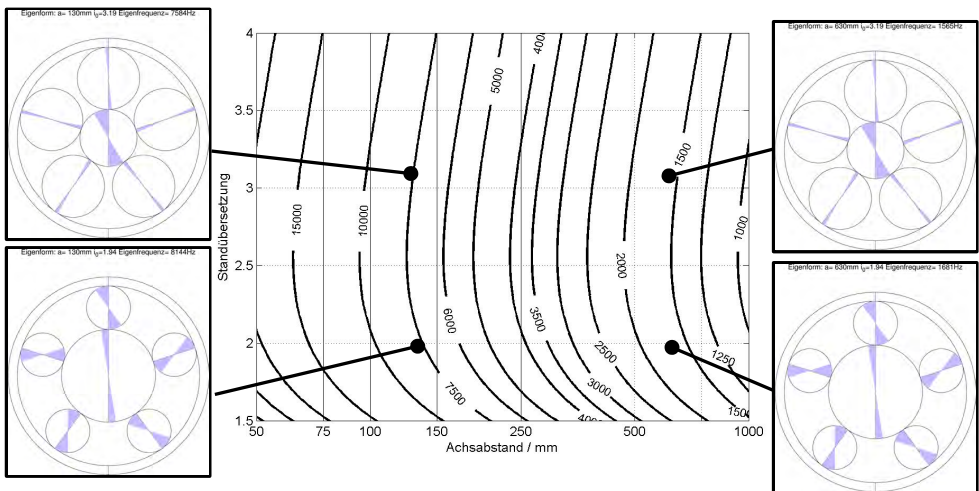


(b) 2. Eigenfrequenz

**Bild 39:** Näherung der Eigenfrequenzen (in Hz) für Standardplanetengetriebe mit 3 Planeten in Abhängigkeit von Achsabstand und Standüberetzung. Gültig für Radkörper und Verzahnungen aus Stahl, Vollscheibenräder in Verzahnungsbreite mit den Verzahnungssteifigkeiten  $c_{\gamma,SP} = 20 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$  und  $c_{\gamma,PH} = 25 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$ .



(a) 1. Eigenfrequenz



(b) 2. Eigenfrequenz

**Bild 40:** Näherung der Eigenfrequenzen (in Hz) für Standardplanetengetriebe mit 5 Planeten in Abhängigkeit von Achsabstand und Standübersetzung. Gültig für Radkörper und Verzahnungen aus Stahl, Vollscheibenräder in Verzahnungsbreite mit den Verzahnungsteifigkeiten  $c_{\gamma,SP} = 20 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$  und  $c_{\gamma,PH} = 25 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$ .

zahl von Planeten.

Die Auslegung der Zähnezahlen von Planetengetrieben beeinflusst neben den dargestellten Zusammenhängen für Stirnradstufen (Einfluss auf die Zahneingriffsfrequenz und die Resonanzdrehzahlen) auch wesentlich die Art der Eingriffsfolge in Planetengetrieben (vgl. **Bild 14**). Unterschiedliche Eingriffsfolgen führen, wie in **Abschnitt 3.2** beschrieben, über die Richtungsentkoppelung der Anregungskomponenten bei sequentiellm Zahneingriff zu einer stärkeren translatorischen Anregung und bei symmetrischem Zahneingriff zu einer stärkeren rotatorischen Anregung. Bei gleichmäßiger Anordnung der Planeten zeichnet sich symmetrischer Zahneingriff durch die Teilbarkeit der Zähnezahlen von Sonne und Hohlrad durch die Planetenanzahl aus, während anderenfalls sequentieller Zahneingriff vorliegt. Aufgrund der Einbaubedingung für Planetengetriebe, die eine Teilbarkeit der Summe der Zähnezahlen von Sonne und Hohlrad durch die Planetenanzahl vorschreibt, liegen in Sonnen- und Hohlradverzahnungen für Standardplanetenstufen immer die gleiche Eingriffsfolge vor.

Für Planetengetriebe wird die Zahneingriffsfrequenz für beide Verzahnungen jeweils entsprechend **Gleichung (52)** bestimmt.

$$f_z = \frac{(n_{Son} - n_{Steg})}{60 \frac{s}{min}} \cdot z_{Son} \quad (52)$$

---

$n_{Son}$	$[min^{-1}]$	Drehzahl der Sonne
$n_{Steg}$	$[min^{-1}]$	Drehzahl des Stegs
$f_z$	$[Hz]$	Zahneingriffsfrequenz
$z_{Son}$	$[-]$	Zähnezahl der Sonne

---

## 6.2 Optimierung der Anregung durch geeignete Wahl der Verzahnungsfeingeometrie

Die Verzahnungsfeingeometrie weist einen großen Einfluss auf das Anregungsverhalten von Verzahnungen auf. Nachdem eine veränderte Feingeometrie weder die Verzahnungssteifigkeit noch die Massenverhältnisse

maßgeblich ändert, ist hierdurch keine signifikante Beeinflussung des dynamischen Betriebspunktes zu erwarten.

### **6.2.1 Verzahnungskorrekturen - Zielsetzung und Wirkungsweise**

Verzahnungskorrekturen sind gezielte Modifikationen von der idealen Evolvente, die im Regelfall bei der Hartfeinbearbeitung der Verzahnung eingebracht werden. Diese werden zur Sicherstellung der Tragfähigkeit und zur Beeinflussung des Anregungsverhaltens verwendet. Eine optimale Verzahnungskorrektur stellt deshalb einen Kompromiss aus beiden Zielsetzungen dar.








Tragfähigkeitskorrekturen sollen die Maximalwerte der Flankenpressung bei Nennlast im Betrieb begrenzen. Hierfür wird eine möglichst gleichmäßige Lastverteilung über dem Eingriffsfeld mit entlasteten Randbereichen angestrebt. Für die Auslegung solcher Korrekturen werden die lastbedingten Verformungen und Verlagerungen des Verzahnungsumfelds (Wellen, Lager, ...) berechnet und deren Auswirkungen auf die Lastverteilung im Zahneingriff ermittelt. Die hieraus abgeleiteten Korrekturen sind dann vornehmlich Breitenkorrekturen zum Ausgleich der aus der Verkippung beider im Eingriff befindlichen Zahnräder resultierenden Abweichung der Flankenlinien. Bei der Auslegung ist zudem das Verformungsverhalten in Teillastbereichen zu berücksichtigen. Weiterhin sind zur Vermeidung von Pressungsüberhöhungen durch die Lastübertragung an den Kopfkanten der Verzahnungen im Rahmen des vor- und nachzeitigen Zahneingriffs Profilkorrekturen vorzusehen, die dies verhindern oder zumindest in der Ausprägung erheblich reduzieren.

Anregungskorrekturen sollen in einem Lastbereich zu einer in allen Eingriffsstellungen konstanten Durchsenkung der Verzahnung unter Last führen. Nachdem Verzahnungen unter anderem aufgrund der wechselnden Anzahl im Eingriff befindlicher Zähne (Überdeckung) eine veränderliche



Verzahnungssteifigkeit aufweisen, ist es notwendig diese durch geeignete Korrekturen auszugleichen. Dies bedeutet, dass die Verzahnungsdurchsenkung in Bereichen hoher Verzahnungssteifigkeit zusätzlich durch eine Korrektur (=Wegnahme von Material) erhöht werden muss. Idealerweise würde die Korrektur demnach veränderliche Beträge in einer Richtung, die zur Berührlinienrichtung senkrecht steht, aufweisen.

In der praktischen Anwendung werden Verzahnungskorrekturen durch die Parametrisierung vorgegebener Korrekturformen definiert. Die Verwen-

Breitenkorrekturen		
Breitenballigkeit		Betrag, ...
Schrägungswinkelkorrektur		Betrag, ...
Endrücknahme		Betrag, Länge, ...
Profilkorrekturen		
Höhenballigkeit		Betrag, ...
Profilwinkelkorrektur		Betrag, ...
Kopfrücknahme		Betrag, Länge, ...
Fußrücknahme		Betrag, Länge, ...
Profil- und Breitenkorrekturen		
Gewälzte Kopf- und Fußrücknahme		Betrag, Länge, ...
Verschränkung		Betrag, ...

**Tabelle 3:** Übersicht über die wichtigsten Standardkorrekturen mit ihren beschreibenden Hauptparametern. Für alle Korrekturtypen können weitere Parameter definiert werden, die die Ausprägung der Korrekturform, der Übergangsbereiche oder bestimmter Flankenbereiche näher spezifizieren.

dung dieser Standardkorrekturen zeichnet sich durch eine besonders kompakte Darstellung der Korrekturvorgabe in wenigen Parameterwerten aus, was die Anschaulichkeit der Korrekturformen sowie deren Übertragbarkeit zwischen Auslegung, Dokumentation und Fertigung unter der Voraussetzung einheitlicher Parameterdefinitionen erleichtert. Die meisten dieser Standardkorrekturen werden in Profil- und Breitenrichtung ausgewiesen. Eine Übersicht über die wichtigsten Standardkorrekturformen und deren beschreibende Hauptparameter ist in **Tabelle 3** dargestellt.

Eine gezielte Optimierung einer Korrektur unter Berücksichtigung beider Korrekturziele kann durch folgendes Vorgehen erreicht werden:

1. Ermittlung der lastbedingten Verformungen und Verlagerungen der Verzahnungen und Ableitung von Breitenkorrekturen:

Es werden Breitenkorrekturen ausgelegt, die ein möglichst gleichmäßiges Breitentragen der Verzahnung bei Nennlast sicherstellen und über dem gesamten Lastbereich das Tragen der Stirnkanten vermeiden. Üblicherweise wird dies durch die Kombination von Schrägungswinkelkorrektur und Breitenballigkeiten oder Endrücknahmen erreicht.

2. Auslegung von anregungsoptimalen Verzahnungskorrekturen:

Zur Optimierung des Anregungsverhaltens werden nun weitere Verzahnungskorrekturen ausgelegt. Der Schwerpunkt dieser Verzahnungskorrekturen liegt bei Profilkorrekturen (Kopf- und Fußrücknahme, Höhenballigkeit, gewälzte Korrekturen), da diese Korrekturen einen wesentlichen Wirkanteil senkrecht zur Berührlinienrichtung aufweisen. Für große Schrägungswinkel können auch zusätzliche Breitenkorrekturen mit in Betracht gezogen werden. In einer Variationsrechnung werden nun diese Kombinationen aus den ausgewählten Korrekturarten bezüglich ihres Anregungsverhaltens bei einer gewählten Anregungslast im Teillastbereich untersucht und bewertet. Bei dieser Bewertung ist es notwendig, die spektralen Kom-

ponenten der Anregung entsprechend des späteren Betriebsverhaltens zutreffend zu bewerten. Für die rechenstechnische Umsetzung ist hierfür meist eine skalare Größe notwendig, wie dies die Kennwerte des Zahnkraftpegels (**Gleichung (5)**) oder des Anwendungskraftpegels (**Gleichung (47)**) sind.

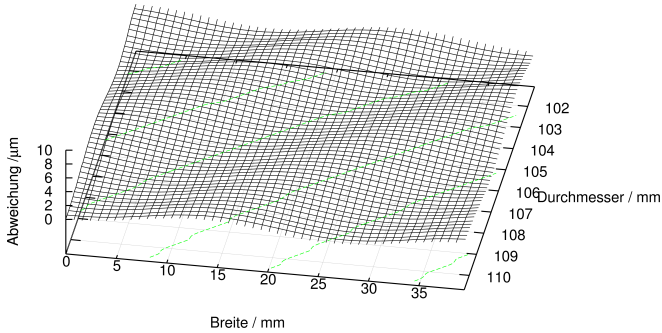
3. Nachrechnung der ermittelten Korrekturkombination bezüglich Tragfähigkeit und Anregungsverhalten

Für gewöhnliche Verzahnungen führt die dargestellte Auslegungsmethode dazu, dass im Bereich des Doppeleingriffsgebiets (bei Hochverzahnungen: Dreifacheingriffsgebiet) Korrekturen ausgeführt werden. Dies entspricht dann gerade den Flankenbereichen am Rand der Eingriffsstrecke, so dass die Forderung der Tragfähigkeitskorrektur der Entlastung der Kopfkanten Rechnung getragen werden kann. Bei ganzzahligen Profilüberdeckungen insbesondere im Bereich zwischen 1.9 und 2.1 ist eine solche Ausführung der Korrektur kaum möglich, da die Korrekturbereiche auf den Flanken zu klein oder zu groß werden, so dass eine entsprechende Korrekturauslegung für Anregung und Tragfähigkeit problematisch ist.

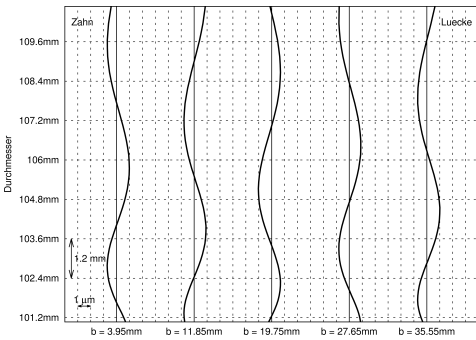
### 6.2.2 Erweiterte topologische Korrekturen

Die einfache parametrische Beschreibung von Standardkorrekturen weist neben ihren Vorteilen der Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit den Nachteil auf, dass die hierdurch möglichen Korrekturen in Art, Form und Ausprägung durch die parametrische Definition begrenzt sind. Durch eine topologische Korrekturbeschreibung ergeben sich somit erweiterte Korrekturmöglichkeiten, die unter anderem auch eine unabhängige Verzahnungskorrektur bezüglich Tragfähigkeit und Anregung ermöglichen kann. Raddev [91] weist nach, dass durch teilungsperiodische Welligkeiten in Berührlinienrichtung das Drehwegverhalten ohne Auswirkung auf die Lastverteilung beeinflusst werden kann. Im Rahmen dieser Untersuchungen werden hieraus periodische Verzahnungskorrekturformen zur Kompensati-

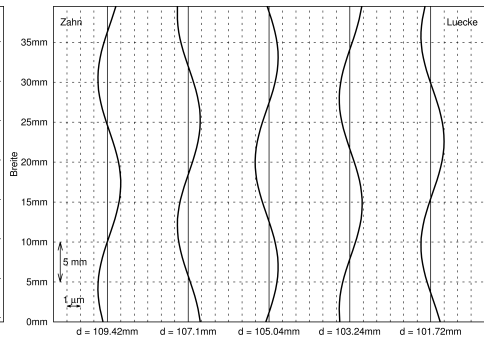
on wesentlicher Anteile der Anregung durch den Ausgleich der Drehwegamplitude erster Ordnung entwickelt, deren Wirksamkeit nach schwieriger fertigungstechnischer Umsetzung experimentell bestätigt werden konnte. In der praktischen Anwendung treten wellige Strukturen meist als besonders geräuschkritische Strukturen innerhalb der Flankenformabweichung gefertigter Zahnräder auf, die aufgrund ihrer Amplituden oder Phasenlage nicht zur Kompensation, sondern zur Erhöhung der Anregung führen.



(a) Topologie Ritzel

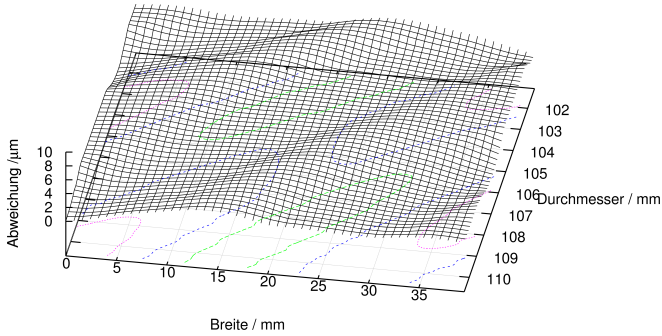


(b) Profillinien Ritzel

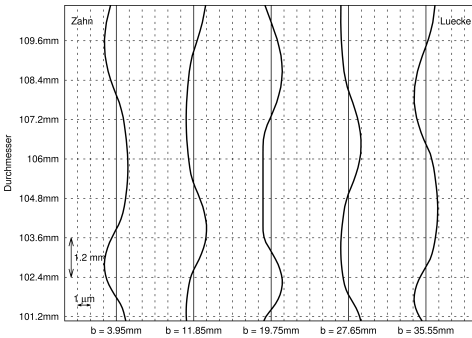


(c) Flankenlinien Ritzel

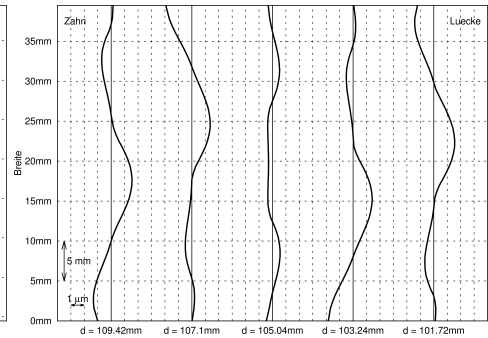
**Bild 41:** Periodische Korrektur nach Radev [91] zur Kompensation des Anregungsverhaltens einer Verzahnung mit tragfähigkeitskorrigiertem Gegenrad. Der maximale Abweichungsbetrag dieser Korrektur beträgt  $1.8\mu m$ .



(a) Topologie Ritzel



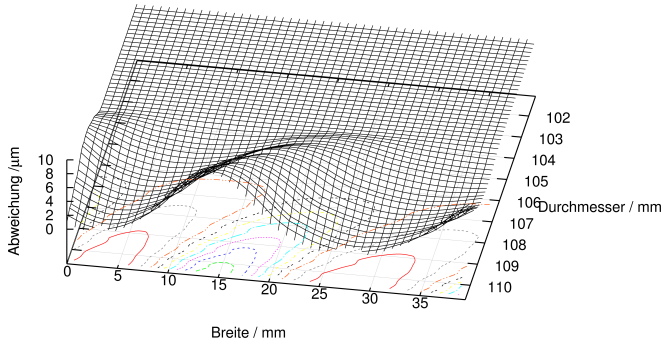
(b) Profillinien Ritzel



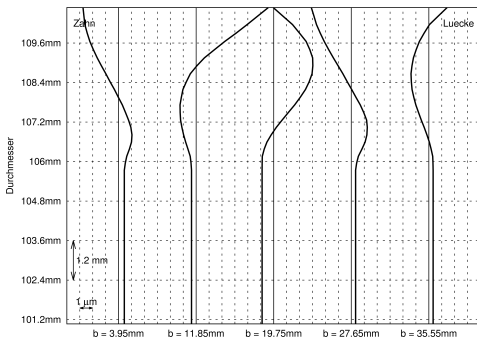
(c) Flankenlinien Ritzel

**Bild 42:** Periodische Berührlinienballigkeit zur Kompensation des Anregungsverhaltens einer Verzahnung mit tragfähigkeitskorrigiertem Gegenrad. Der maximale Abweichungsbetrag dieser Korrektur beträgt  $3.5\mu\text{m}$ .

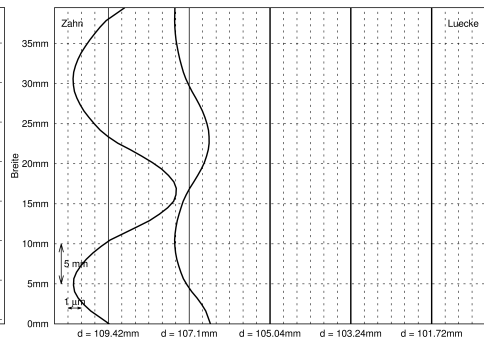
Durch die weite Verbreitung numerisch gesteuerter Fertigungsmaschinen ist es prinzipiell möglich nahezu jede beliebige topologische Zahnflankenkorrektur zu fertigen. Neben der dargestellten Möglichkeit, das Anregungsverhalten unabhängig von der zuvor mit Standardkorrekturen auf Tragfähigkeit optimierten Flanke zu beeinflussen sind weitere sinnvolle topologische Korrekturmöglichkeiten denkbar: Statt der Aufbringung der periodischen Korrekturkomponenten, die zur Kompensation des Anregungsverhaltens erforderlich sind, auf der gesamten Berührlinie, werden diese



(a) Topologie Ritzel



(b) Profillinien Ritzel



(c) Flankenlinien Ritzel

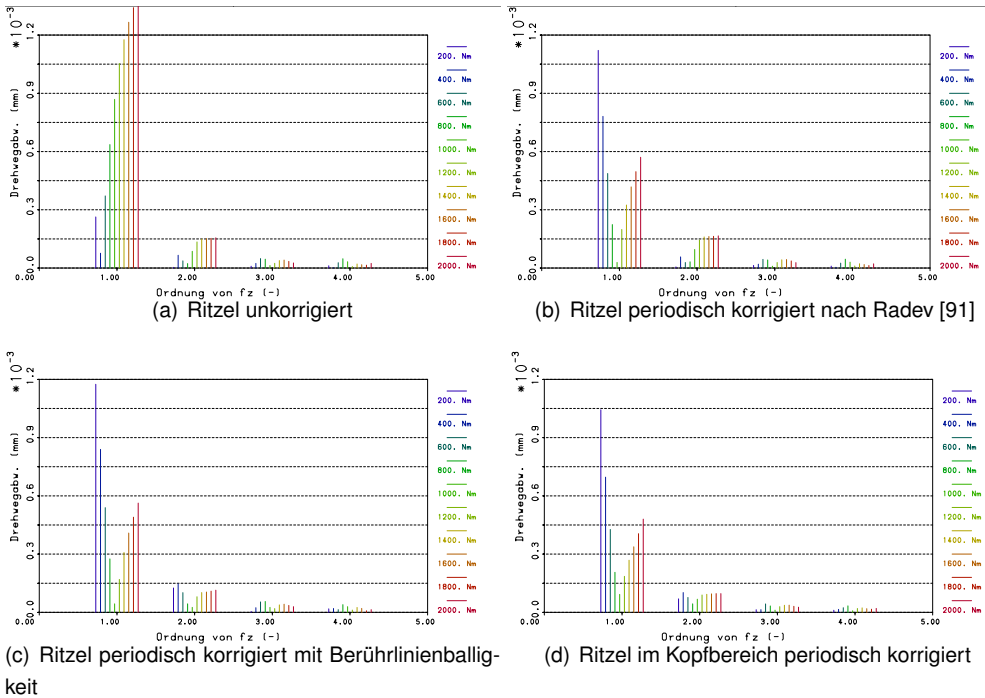
**Bild 43:** Periodische Berührlinienkorrektur im Kopfbereich zur Kompensation des Anregungsverhaltens einer Verzahnung mit tragfähigkeitskorrigiertem Gegenrad. Der maximale Abweichungsbetrag dieser Korrektur beträgt  $10.0\mu\text{m}$ .

Anteile in Teilbereichen des Eingriffsfelds mit entsprechend größeren Korrekturbeträgen aufgebracht. Hierdurch kann das Problem der sehr kleinen Korrekturbeträge bei periodischen Korrekturen nach Radev [91] abgemildert werden. Durch die Kombination dieser in Teilbereichen aufbrachten periodischen Korrekturen mit Tragfähigkeitskorrekturen sind die hierdurch entstehenden Auswirkungen auf die tragfähigkeitsrelevante Lastverteilung gering. In **Bild 41** ist die Topologie der periodischen Korrektur nach Ra-

dev [91] dargestellt. Für die dargestellte Schrägverzahnung (vgl. **Tabelle 2**  $\varepsilon_\alpha = 1.5$ ;  $\varepsilon_\beta = 1.5$ ) mit nach Tragfähigkeitsgesichtspunkten standard-korrigiertem Rad ergibt sich eine periodische Korrektur am Ritzel mit einer Doppellamplitude von  $1.8\mu\text{m}$ . Durch die Anwendung der periodischen Korrektur auf Teilbereiche der Berührlinien können die erforderlichen Korrekturbeträge erhöht werden, allerdings hat dies im Gegensatz zur Korrektur nach Radev [91] Auswirkungen auf die Lastverteilung. In **Bild 42** ist der periodische Korrekturbetrag in Form einer Balligkeit über der Berührlinie aufgeführt und in **Bild 43** wurden ausschließlich Bereiche im Zahnkopf periodisch korrigiert. Es ergeben sich komplexe topologische Korrekturformen, die lokal um den Faktor 2 bis 5 größere Korrekturbeträge aufweisen, was für geringe Anforderungen an die lokale Fertigungsgenauigkeit sorgt.

**Bild 44** zeigt einen rechnerischen Vergleich der resultierenden Drehwegspektren für die in **Bild 41** bis **Bild 43** dargestellten Topologievarianten mit einer unkorrigierten Variante als Referenz. Durch die topologische Korrektur nach Radev [91] ist eine nahezu vollständige Kompensation der Drehwegamplitude bei einer Auslegungslast möglich, ohne die tragfähigkeitsrelevante Lastverteilung zu verändern (vgl. **Bild 44**(a) und (b)). Durch die Topologievarianten der periodischen Berührlinienballigkeit (**Bild 42**) und der periodischen Korrektur im Kopfbereich (**Bild 43**) wird eine vergleichbare Wirkung (vgl. **Bild 44**(b), (c) und (d)) bezüglich des Anregungsverhaltens mit lokal deutlich größeren Korrekturbeträgen erzielt.

Im Vergleich zu Standardkorrekturen bieten topologische Verzahnungskorrekturen erheblich mehr Möglichkeiten zur Verzahnungsoptimierung. In der praktischen Anwendung sind topologische Korrekturen bisher kaum verbreitet, da deren Handhabung in Auslegung, Fertigung und Qualitätskontrolle schwierig ist, da die hierfür eingesetzten Werkzeuge eine durchgängige Behandlung topologischer Korrekturen meist nicht erlauben.



**Bild 44:** Spektrum der Drehwegabweichung für die in **Bild 41** bis **Bild 43** dargestellten Korrekturvarianten im Vergleich mit einem unkorrigiertem Ritzel (Rechnerische Untersuchung mit einem tragfähigkeitskorrigiertem Gegenrad).

### 6.2.3 Zum Einfluss von Fertigungsabweichungen

Bei der Fertigung von Zahnrädern entstehen unvermeidbare Differenzen zwischen der ausgelegten Sollgeometrie und der tatsächlichen Flankenform. Die in der Qualitätskontrolle von Verzahnungen üblichen Richtlinien wie die DIN 3962 [20] basieren auf der Definition von Parallelebenen, zwischen denen die Istgeometrie liegt. Über den Abstand dieser Ebenen wird eine Einstufung in unterschiedliche Qualitätsstufen vorgenommen. Dabei wird üblicherweise der Abstand zweier paralleler Ebenen einer Flanke zur



Bewertung der Flankenform herangezogen und der Abstand zwischen unterschiedlichen Flanken zur Bewertung der Teilung verwendet.

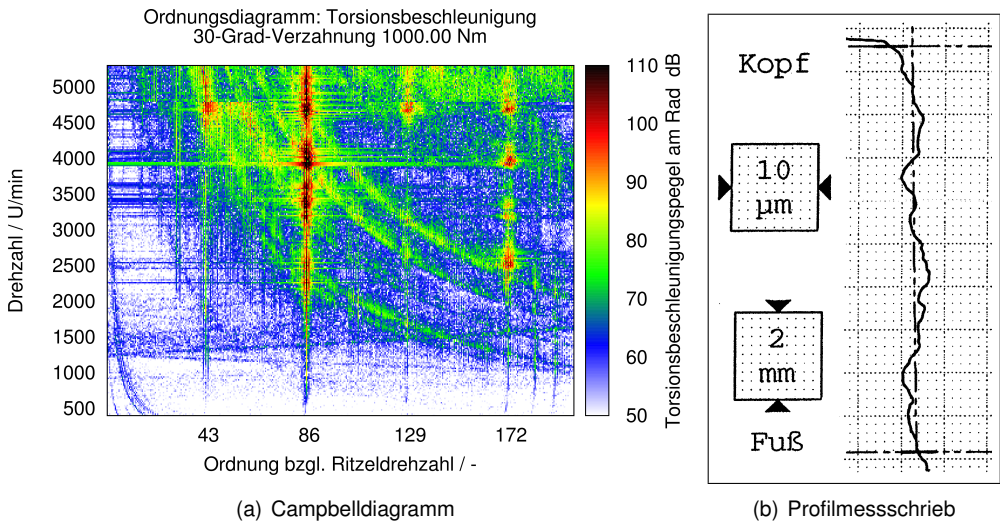
Teilungsabweichungen führen primär zu niederfrequenten Anregungen im Bereich der Wellenordnung und deren Vielfacher, die insbesondere durch das Vorhandensein spezieller Muster in den Teilungsabweichungen aller Zähne bis zur halben Zahneingriffsordnung reichen können. Die niederfrequenten Anregungsbestandteile werden durch die Zahneingriffsfrequenz und deren Harmonische moduliert, was zu Seitenbändern mit dem Abstand der niederfrequenten Anregung um die Zahneingriffsfrequenz und deren Vielfachen führen kann.

Eine generelle Bewertung von Abweichungen der Flankenform für Verzahnungen hängt stark von der Charakteristik der Abweichungen ab. Hierzu ist es notwendig, die Abweichungsbestandteile in ihre Wirkrichtungen bezüglich des Zahneingriffes aufzuteilen. Abweichungen mit einem veränderlichen Betrag in Berührlinienrichtung haben geringeren Einfluss auf das Anregungsverhalten als solche mit veränderlichen Beträgen in Eingriffsrichtung. In Eingriffsrichtung wirksame Abweichungen wie beispielsweise Welligkeiten im Sinne der DIN 4760 [21] können bereits bei sehr kleinen Amplitudenbeträgen eine erhebliche Steigerung des Anregungsverhaltens zur Folge haben. Sofern die welligen Bestandteile in ihrer Wellenlänge teilungsperiodisch sind, können diese ähnlich einer periodischen Anregungskorrektur direkt das Anregungsverhalten beeinflussen. Da die Amplituden und Phasenlage solcher Abweichungen nicht gezielt definiert werden können, führen solche Abweichungen im Regelfall zu einer erheblichen Erhöhung der Anregungsamplituden der Verzahnung. Durch die Definition der Verzahnungsqualität in DIN 3962 [20] können solche Abweichungsbestandteile nicht sinnvoll erfasst werden, weshalb diese Abweichungsbestandteile in der Verzahnungsqualitätseinstufung meist keine Auswirkungen haben. Eine detaillierte Studie zu den Auswirkungen unterschiedlicher Abweichungsformen auf das Anregungsspektrum wurde von Griggel [48]

durchgeführt.

Bei unterschiedlichen Verzahnungsgeometrien können vergleichbare Abweichungen durchaus unterschiedliche Anregungen für ein Getriebesystem darstellen. Betrachtet man die Abweichungen als zusätzlich aufgeprägte Drehweganregung, so hängt es wesentlich von der Größenordnung der Verzahnungssteifigkeit ab, wie groß die daraus resultierende Systemanregung ist. Vereinfacht kann diese resultierende Systemanregung als Kraftschwankung, die durch die Weganregung hervorgerufen wird, angesehen werden. Aus diesem Grund reagieren steifere Verzahnungen im Allgemeinen empfindlicher auf Abweichungen als weiche Verzahnungen.

**Bild 45(a)** zeigt das Ergebnis einer Messung der Torsionsbeschleunigung



**Bild 45:** Messung der Torsionsbeschleunigung für eine ungewöhnlich steife Verzahnung ( $c_\gamma = 27.5 \frac{N}{mm \cdot \mu m}$ ) mit Profilüberdeckung  $\varepsilon_\alpha = 1.1$  und Sprungüberdeckung  $\varepsilon_\beta = 2.2$ . Im Profilmessschrieb der insgesamt nach Q4 nach DIN 3962 gefertigten Verzahnung ist eine wellige Ausprägung der Abweichungen zu erkennen.

für eine extrem steife Verzahnungsvariante, abgeleitet aus den in **Tabelle 2** dargestellten Schrägverzahnungsgeometrien mit einem Eingriffswinkel von  $30^\circ$ . Für die Amplitude der zweiten Verzahnungsordnung (86. Ordnung) zeigen sich erheblich überhöhte Amplituden, die das Schwingungsverhalten der Verzahnung über weite Teile des betrachteten Drehzahlbereichs dominieren. Bei der Auslegung der abweichungsfreien Verzahnung lagen die Anregungsamplituden für die erste Verzahnungsordnung (43. Ordnung) und die zweite Verzahnungsordnung in der gleichen Größenordnung. Die Ursache für den festgestellten erheblichen Unterschied konnte in der Abweichungscharakteristik gefunden werden. **Bild 45(b)** zeigt einen für das Ritzel der Verzahnung typischen Profilmessschrieb, bei dem eine wellige Abweichungsstruktur mit ungefähr zwei Sinuswellen über dem Profil zu erkennen ist. Unter Berücksichtigung der Profilüberdeckung ( $\varepsilon_\alpha = 1.1$ ) führt diese Welligkeit in diesem Fall zur Anregung der zweiten Ordnung. Durch die hohe Verzahnungssteifigkeit wirken sich die geringen Amplituden der Welligkeit ( $1 - 2\mu\text{m}$ ) stark auf das Schwingungsverhalten aus. Die wellige Abweichungsstruktur wird durch übliche Qualitätsklassifikationen wie die DIN 3962 nicht hinreichend berücksichtigt, so dass sich für dieses Zahnrad mit Verzahnungsqualität 4 bereits eine formal hohe Verzahnungsqualität ergibt.

#### 6.2.4 Übertragung auf die Planetenradstufe

Das Anregungsverhalten von Planetengetrieben wird wesentlich von der in **Abschnitt 3.2.1** dargestellten kinematischen Überlagerung der Einzelanregungen der Verzahnungsstufen bestimmt. Durch diese Überlagerung der Anregung ergeben sich für Planetengetriebe zusätzlich zu den dargestellten Effekten weitere typische Eigenschaften.

Durch die kinematische Überlagerung der Verzahnungen weisen die rotatorische und translatorische Anregungsrichtung im Allgemeinen keine übereinstimmende Charakteristik auf. Für eine Stirnradstufe ergeben sich hier zueinander proportionale Anregungen, weshalb in der Auslegungs-

phase keine Unterscheidung der Einzelstufen getroffen wird. In der Auslegung von Planetengetrieben ist es meist erforderlich beide Anregungsrichtungen gleichermaßen zu optimieren, wofür sowohl die translatorische als auch die rotatorische Anregung gleichzeitig betrachtet werden müssen.

Bei der Auslegung insbesondere der Feingeometrie (Verzahnungskorrekturen) ist ein Ausgleich der Anregungen der Einzelverzahnungen für beide Richtungen nicht gleichzeitig möglich. Für anregungsarme Planetengetriebe bedeutet dies, dass die Einzelverzahnungen eines Planetengetriebes möglichst anregungsarm auszuführen sind. Aus diesem Grund können alle Mechanismen zur Anregungsoptimierung von Stirnradgetrieben sowohl für die Hauptgeometrie (**Abschnitt 6.1**) als auch für die Feingeometrie (**Abschnitt 6.2**) auf die Einzelstufen eines Planetengetriebes übertragen werden.

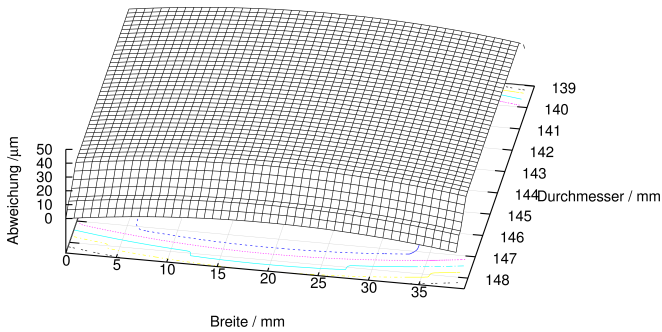
Aufgrund der Überlagerung der Einzelanregung haben Abweichungen in den Verzahnungen bei Planetengetrieben einen stärkeren Einfluss auf das Anregungsverhalten. Durch Abweichungen (Teilung oder Flankenform) wird zur Anregung einer jeden Einzelverzahnung ein zusätzlicher Anteil überlagert, der im Allgemeinen nicht an allen gleichzeitig im Eingriff befindlichen Verzahnungen gleich ist, wodurch die Kompensation der Einzelanregungen erschwert wird.

### **6.3 Topologische Korrekturen unter dem Blickwinkel optimaler Anregung, Tragfähigkeit und Wirkungsgrad**

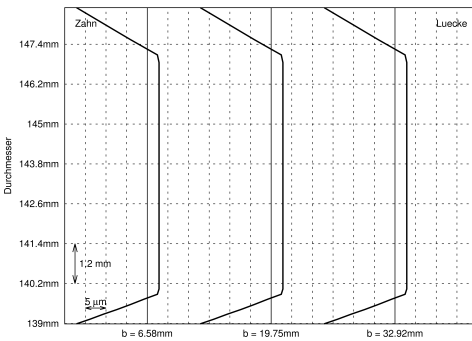
Neben den in **Abschnitt 6.2.2** dargestellten Möglichkeiten der Aufbringung unterschiedlicher periodischer Korrekturen, eröffnet eine freiere Gestaltung der Flankentopologie eine Reihe weiterer Optimierungsmöglichkeiten, die mit gewöhnlichen Standardkorrekturen bislang nicht denkbar sind. Gerade in jüngster Zeit ist in der Verzahnungsauslegung zu den Zielen der Tragfähigkeit und der Anregung auch der Wirkungsgrad hinzugekommen. Diesem Ziel kann auch in der Korrekturauslegung Rechnung getragen werden,

so dass eine veränderte Verzahnungskorrektur zu einer Verbesserung des Wirkungsgrades ohne weitere konstruktive Änderungen am Getriebe führen kann.

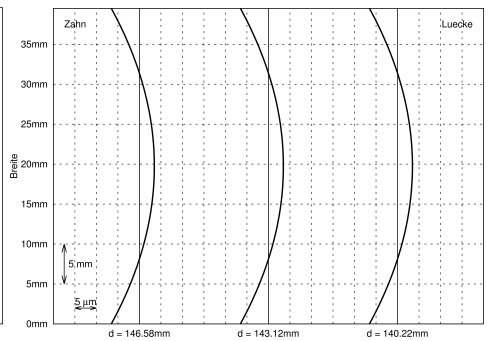
Zunächst erfolgt zur Sicherstellung adäquater Kontaktverhältnisse eine Auslegung der Breitenlastverteilung. Unter Berücksichtigung der Verformungen und Verlagerungen des Welle-Lager-Systems über den gesamten Lastbereich wird ein Kompromiss gesucht, der eine möglichst gleich-



(a) Topologie Rad



(b) Profillinien Rad

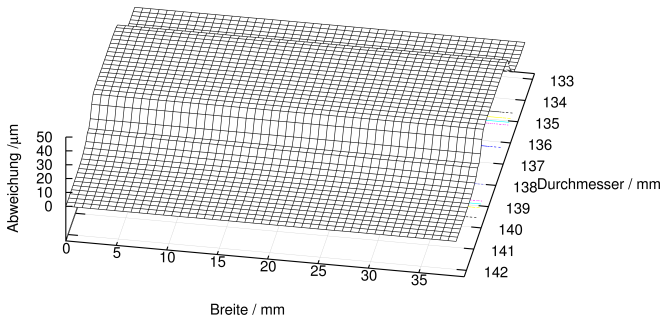


(c) Flankenlinien Rad

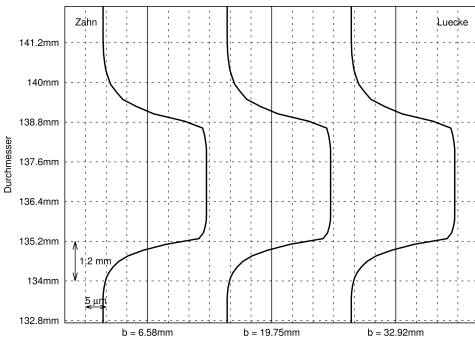
**Bild 46:** Verzahnungskorrektur am Rad zur Sicherstellung der Tragfähigkeit durch Entlastung der Randbereiche mit Breitenballigkeit und Kopf- und Fußrücknahmen.

mäßige Breitenlastverteilung mit einer Vermeidung des Kantentrags bei allen Betriebsdrehmomenten enthält. Je weniger stark sich lastabhängige Verformungen auf die Verkippungen der im Eingriff befindlichen Zahnräder auswirken, desto besser ist diese Forderung erfüllbar. In **Bild 46** sind diese Korrekturen als Standardkorrekturen auf dem Rad ausgeführt, für das im Folgenden eine topologische Ritzelkorrektur entwickelt wird.

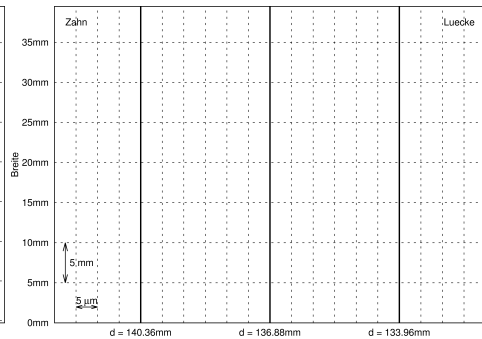
Im nächsten Schritt wird ein Bereich um den Wälzkreis ausgewählt, in dem die Lastübertragung für Niedriglast ausschließlich stattfinden soll. Durch die Lastübertragung in diesen Bereichen geringer Gleitgeschwindigkeit er-



(a) Topologie Ritzel

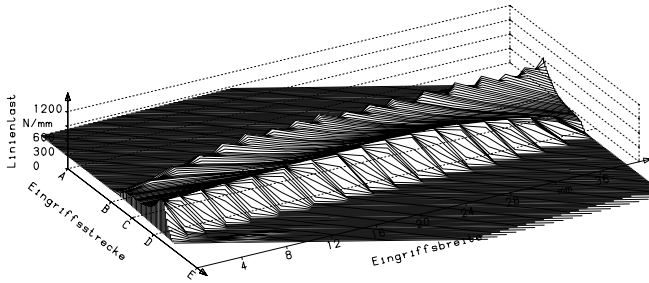


(b) Profilinien Ritzel

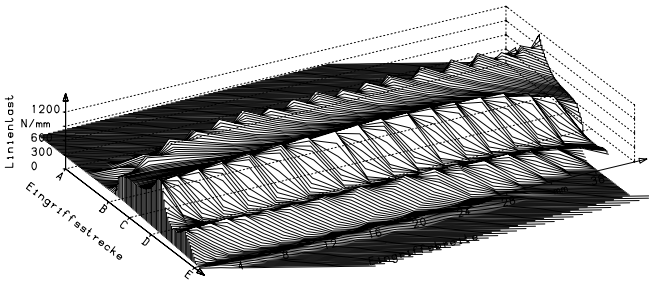


(c) Flankenlinien Ritzel

**Bild 47:** Verzahnungskorrektur zur Begrenzung des tragenden Bereiches um den Wälzkreis bei niedriger Last.



(a) 40 % Nennlast



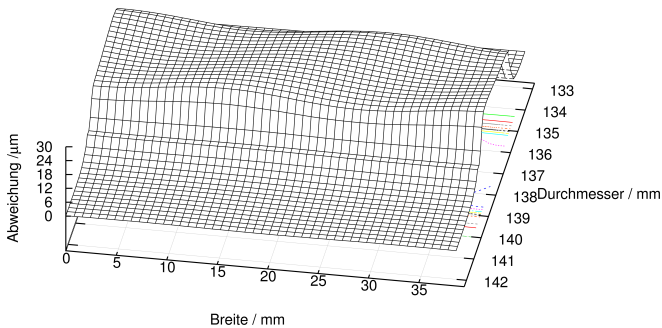
(b) 100 % Nennlast

**Bild 48:** Linienlastverteilung für eine Verzahnung mit den in **Bild 46** und **Bild 47** dargestellten Korrekturen für unterschiedliche Lasten.

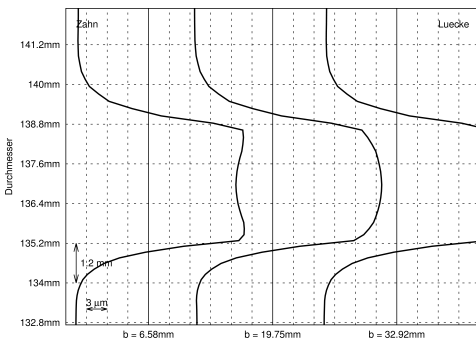
geben sich besonders geringe Lastverluste, so dass der Wirkungsgrad im Niedriglastbereich durch diese Maßnahme verbessert werden kann. Außerdem ermöglicht die Einschränkung des tragenden Bereiches auf einen Teilbereich des Eingriffsfelds eine periodische Anregungskorrektur für den Niedriglastbereich. Der ausgewählte Flankenbereich wird hierbei so korrigiert, dass sich die Teillast möglichst gleichmäßig innerhalb des eingeschränkten Bereiches aufteilt. Bei Überschreiten des Teillastbereiches wird versucht, möglichst die gesamte Eingriffsfläche für die Lastübertragung zu nutzen, um die Lastüberhöhung bei Nennlast mit diesem Korrekturtyp weitest möglichst zu begrenzen. Hierdurch ergibt sich ein Korrekturbetrag, der der Zahnverformung bei Teillast entspricht. In **Bild 47** ist eine solche Ver-

zahnungskorrektur für das Ritzel, zur Paarung mit dem Rad entsprechend **Bild 46** dargestellt. Die sich hieraus ergebenden Lastverteilungen bei Voll- und Teillast sind in **Bild 48** abgebildet.

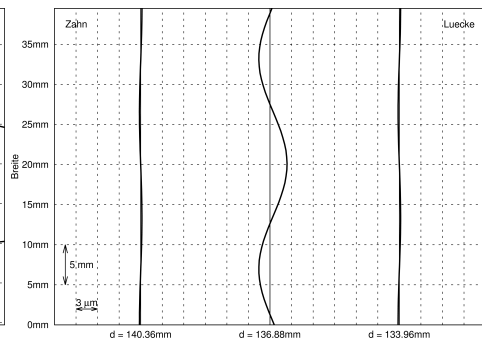
Zur Anregungsoptimierung der Korrektur bei Teillast kann nun eine der Drehwegabweichung bei Niedriglast entsprechende periodische Korrektur auf das Plateau in der Mitte des Eingriffsfeldes aufgebracht werden, wodurch die Minimierung des Anregungsverhaltens bei Niedriglast ermöglicht wird. Durch die Auslegung einer weiteren periodischen Korrektur, die



(a) Topologie Ritzel



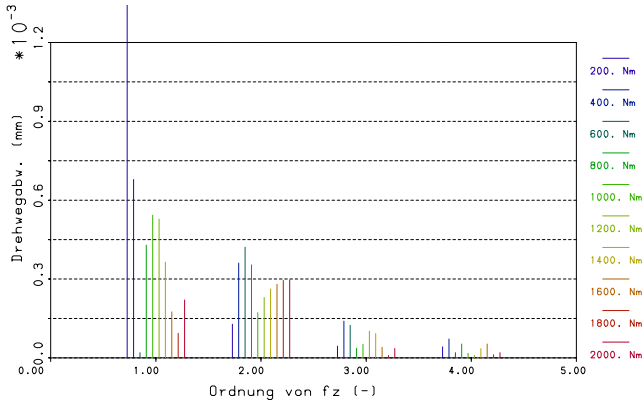
(b) Profillinien Ritzel



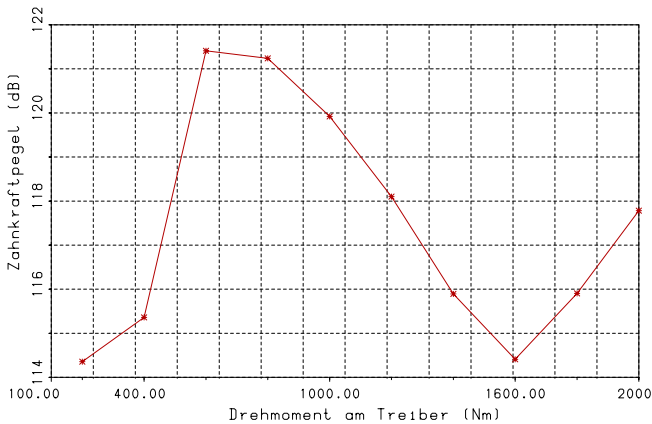
(c) Flankenlinien Ritzel

**Bild 49:** Verzahnungskorrektur entsprechend **Bild 47** mit überlagerten periodischen Korrekturen für 2 unterschiedliche Lasten.





(a) Drehwegspektrum



(b) Verlauf des Zahnkraftpegels

**Bild 50:** Anregungscharakteristik über dem Drehmoment dargestellt durch das Spektrum der Drehwegabweichung und den Zahnkraftpegel für die Verzahnungskorrektur aus **Bild 49** am Ritzel und **Bild 46** am Rad (Rechnung).

ausschließlich in den Hochlastbereichen des Eingriffsfeldes aufgebracht wird, kann für diesen Lastbereich ein weiteres Anregungsminimum ausgelegt werden. Aufgrund der Beeinflussung der Anregung bei hoher Last durch die periodische Korrektur für Niedriglast ist die Auslegung des Hoch-

lastminimums nicht ausschließlich durch phasenrichtiges Aufbringen der Drehweggrößen möglich. Durch gezielte Variation einer überlagerten periodischen Korrektur in den Randbereichen des Eingriffsfelds kann ein zweites Anregungsminimum ohne Beeinflussung des Teillastbereiches erzielt werden. Es ergibt sich eine Flankenkorrektur wie in **Bild 49** dargestellt, die zwei kombinierte periodische Korrekturen zur Optimierung des Anregungsverhaltens bei unterschiedlichen Lasten gleichzeitig enthält. Durch die Ausführung der Korrekturen auf Teilbereichen der Verzahnungen sind höhere lokale Korrekturbeträge möglich, wodurch die Genauigkeitsanforderungen an den lokal auszuführenden Korrekturbetrag etwas reduziert werden. Allerdings stellt die in **Bild 49** dargestellte Korrektur weiterhin eine sehr komplexe Geometrie dar, die insbesondere für heute übliche Herstellverfahren mit Linienkontakt zwischen Werkstück und Werkzeug nur schwierig realisierbar ist.

Eine solche Auslegung weist eine durch herkömmliche Verzahnungskorrekturen bislang nicht mögliche Anregungscharakteristik mit zwei Minima über dem Drehmoment auf. Das Spektrum der Drehwegabweichung und der Verlauf des Zahnkraftpegels in **Bild 50** zeigen jeweils zwei Optimalpunkte über der Last. Gleichzeitig weist die dargestellte Verzahnungskorrektur durch die Lastkonzentration in Flankenbereichen mit geringem Gleitanteil erhebliche Potenziale zur Verringerung der lastbedingten Verzahnungsverluste auf.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Zahnradgetriebe sind Maschinenelemente zur Drehzahl- und Drehmomentenwandlung mit höchsten Ansprüchen an Leistungsdichte, Tragfähigkeit und Wirkungsgrad. Allerdings führt die formschlüssige Kraftübertragung über die Zähne eines Zahnrads zu einer unvermeidbaren Schwingungsanregung. Aus diesem Grund ist es Ziel der Entwicklung moderner Leistungsgetriebe, diese Anregung aus dem Zahneingriff in allen Betriebsbereichen zu optimieren. Für dieses Auslegungsziel ist die zutreffende rechnerische Beschreibung des Anregungsverhaltens unerlässlich. Die Ergebnisse der rechnerischen Untersuchung werden dann für die Auslegung als anschauliche Kennwerte dargestellt, so dass darauf aufbauend unterschiedliche Optimierungen ausgelegt werden können.

Zunächst werden die möglichen rechnerischen Bewertungsmöglichkeiten in unterschiedlichen Detaillierungsgraden für Stirn- und Planetengetriebe dargestellt. In der Auslegungsphase sind Bewertungen auf Grundlage der statischen Beurteilung der Drehwegberechnung und der quasistatischen Methode der Kraftanregung sowohl bei Stirn- als auch bei Planetengetrieben verbreitet. Die theoretischen Grundlagen zur Bestimmung dieser Beurteilungsgrößen mit dem detaillierten Einfluss beliebiger Verzahnungstopologien werden in dieser Arbeit zusammengestellt. Zur weitergehenden Untersuchung werden die Berechnungsmöglichkeiten für Stirnräder um eine numerische Zeitschrittintegration zur dynamischen Simulation erweitert. Ergänzend werden Berechnungsmethoden zur Ermittlung der Verzahnungseigenfrequenzen für Stirn- und Planetengetriebe dargestellt. Die Grundlagen zur Anregungsberechnung wurden hierbei laufend an einem Messprüfstand validiert.

Zur vereinfachten Anwendbarkeit und Optimierung ist es vielfach notwendig die rechnerischen Beurteilungsgrößen der Verzahnungsanregung, die

in Form von Zeitverläufen oder Spektren vorliegen, in Kennwerten zu komprimieren, die den wesentlichen Informationsgehalt übersichtlich idealerweise in Skalarform darstellen. Auf Grundlage bewährter Kennwerte wurde die Bildungsvorschrift eines weiteren Verzahnungskennwerts, des Anwendungskraftpegels, entwickelt, der im Gegensatz zu allen bisherigen Kennwerten die Betriebsgrößen des Getriebes bei der Kennwertermittlung berücksichtigt. Hierdurch kann eine größere Empfindlichkeit gerade der relevanten und maßgeblichen Anregungsbestandteile erreicht und über eine vergleichbare Vorgehensweise in der Messdatenauswertung auch einfach mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden. Zudem kann ergänzend zum Anregungsverhalten der Verzahnung auch dessen Zusammenwirken mit einem einfachen dynamischen System in der Beurteilung berücksichtigt werden.

Bei Planetenradstufen sind wegen der kinematischen Überlagerung der Einzelanregungen aller beteiligten Stufen separate Betrachtungen der translatorischen und der rotatorischen Anregung notwendig. Aufgrund der Überlagerungskinematik ist eine gleichzeitige Optimierung beider Anregungskomponenten durch die Planetenradanordnung, Eingriffsfolge o.ä. sehr schwierig, so dass sich die Verwendung anregungsarmer Einzelverzahnungen mit geeigneten Verzahnungskorrekturen als Optimum erweist.

Zur optimalen Auslegung von Verzahnungen sind zwei wesentliche Aspekte, die Anregungscharakteristik der Verzahnungen und deren dynamischer Betriebszustand (Lage von Resonanzen), zu beachten. Hierzu werden die wesentlichen Geometrieparameter untersucht und deren gegenseitiger Einfluss zusammengestellt. Es zeigt sich, dass die Auslegung der Hauptgeometrie wesentlich zur Lage der Anregungs- und Eigenfrequenzen beiträgt und zudem die Möglichkeiten zur Auslegung von Verzahnungskorrekturen signifikant beeinflusst. Die Verzahnungsmikrogeometrie jedoch weist maßgebliche Einflüsse auf das Anregungsverhalten auf. Aus diesem Grund ist es notwendig, gerade den dynamischen Betriebszustand eines

Getriebes bereits in frühester Auslegungsphase (Hauptgeometrie) zu berücksichtigen, während die Aspekte des Anregungsverhaltens im Laufe der weitergehenden Optimierung mehr und mehr in den Vordergrund gerückt werden sollten. Einen weiteren wesentlichen Einfluss stellen die Flankenformabweichungen auf den Zahnflanken dar, deren periodische Struktur in Eingriffsrichtung für das Anregungsverhalten maßgeblich ist. Durch moderne Fertigungsmöglichkeiten sollte in zunehmendem Maße auch eine flexible Auswahl von Verzahnungskorrekturen bis hin zu topologischen Korrekturen ermöglicht werden. In weiteren Schritten werden die Potenziale dargestellt, die durch die Ausweitung der üblichen Standardkorrekturen ermöglicht werden. Neben der Möglichkeit durch die Vergrößerung der lokalen Korrekturbeträge die Fertigbarkeit zu erleichtern, eröffnet die topologische Auslegung der Korrekturen im Zahnkontakt eine Vielzahl neuer Möglichkeiten. Hierzu zählt neben der Berücksichtigung weiterer Auslegungsziele in der Korrekturauslegung (Wirkungsgrad) auch die Auslegung von Verzahnungskorrekturen mit Optimalpunkten bei unterschiedlichen Drehmomenten.

Insgesamt ist es für schwingungs- und geräuschoptimal ausgelegte Getriebe notwendig, mit der Hauptgeometrieauswahl Resonanzgebiete zu vermeiden und bei der Feingeometrieauslegung ein geringes Anregungsverhalten sicherzustellen. Durch die Kombination dieser beiden Anforderungen und deren adäquate praktische Umsetzung ist eine zuverlässige Auslegung von optimierten Zahnradgetrieben sichergestellt.

## 7.2 Ausblick

Die Zusammenhänge der geräuschoptimierten Auslegung von Zahnradgetrieben zeigen als maßgebliche Einflussgrößen, die Lage in der dynamischen Betriebsdrehzahl, die durch die Systemumgebung bestimmt wird, sowie die Optimierung der Verzahnungskorrekturen nach vielfältigen Methoden. In beiden Aspekten besteht weiterhin Entwicklungspotenzial.

Bei der rechnerischen Ermittlung der dynamischen Systemumgebung ist

bislang über einfache Modelle hinaus, die aus den Zahnradmassen der im Eingriff befindlichen Verzahnung bestehen, eine manuelle Modellierung eines dynamischen Modells aus Federn und Massen notwendig. Eine Ermittlung solcher Mehrmassenmodelle aus den geometrischen Beziehungen im Antriebsstrang unter Berücksichtigung von über den Torsionsfreiheitsgrad hinausgehender Freiheitsgrade kann einen weiteren Detaillierungsschritt darstellen. Die sich dadurch ergebenden Eigenformen und Eigenfrequenzen können dann eine umfangreiche dynamische Systembetrachtung über die reine Verzahnungseigenfrequenz hinaus ermöglichen. Eine Ableitung aus der Antriebsstranggeometrie ermöglicht außerdem die Berücksichtigung dieser Ergebnisse bereits in der frühen Entwicklungsphase während der Auslegung der Verzahnungshauptgeometrie.

Verzahnungskorrekturen als wesentlicher Bestandteil der Anregungsoptimierung von Verzahnungen werden heute zumeist als Kombination weniger Standardkorrekturformen ausgeführt. Wesentliches Auslegungskriterium ist zunächst die Verzahnungstragfähigkeit, nach deren Anforderungen sich der Katalog der üblichen Standardkorrekturen orientiert. Es wird versucht, durch die Variation der Beschreibungsparameter der Tragfähigkeitskorrekturen ein optimiertes Anregungsverhalten zu erzielen, was zumeist für eine spezielle Belastung gut funktioniert. Eine Auslegung topologischer Korrekturen erweitert zunächst die Möglichkeiten und auch die Anzahl der beschreibenden Parameter erheblich, wodurch eine veränderte Auslegungssystematik erforderlich ist. Ausgehend von den funktionellen Anforderungen an die Verzahnungskorrektur im Zahneingriff, die sich für die Auslegungsziele Tragfähigkeit, Anregung und Wirkungsgrad auch teilweise unterscheiden können, wird eine topologische Korrektur abgeleitet, die einen Kompromiss aus diesen Anforderungen entspricht. Die Aspekte der einfachen Beschreibbarkeit der Korrekturen mit wenigen Parametern auf Grundlage analytischer Funktionen (Standardkorrekturen) oder durch die einfache Parametrisierung der Werkzeugmaschinenkinematik treten dabei durch die zunehmende Verwendung von Rechner Technik in Entwicklungs- und Fertigungsprozessen in den Hintergrund.

## Literatur

- [1] *LabVIEW Benutzerhandbuch, Version 6.8.1. : LabVIEW Benutzerhandbuch, Version 6.8.1.* <http://www.ni.com/labview/d/>, 2009. – Programmdokumentation
- [2] ANDERSON, E. ; BAI, Z. ; BISCHOF, C. ; BLACKFORD, S. ; DEMMEL, J. ; DONGARRA, J. ; DU CROZ, J. ; GREENBAUM, A. ; HAMMARLING, S. ; MCKENNEY, A. ; SORESENSEN, D.: *LAPACK Users' Guide (Software, Environments and Tools)*. 3. Society for Industrial Mathematics, 1987
- [3] ANTONY, G.: *Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Planetengetrieben*, RWTH Aachen, Diss., 1984
- [4] ARNAUDOW, K.: *Untersuchung des Lastausgleiches in Planetengetrieben*, TU Dresden, Diss., 1968
- [5] BAETHGE, J.: *Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern*, TH München, Diss., 1969
- [6] BAHK, C. ; PARKER, R.: A Study on Planetary Gear Dynamics With Tooth Profile Modification. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47346*, 2011
- [7] BIHR, J.: FVA-Heft 1013: FVA-Forschungsvorhaben 565 I, Drehzahleinfluss Getriebedynamik, Untersuchung des Drehzahleinflusses auf das Geräusch- und Schwingungsverhalten von mehrstufigen Getrieben unter Berücksichtigung der Kopplung der Getriebestufen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2012. – Abschlussbericht
- [8] BLÜMM, A.: FVA-Heft 766: FVA-Forschungsvorhaben 51 V, Simplex V - Erweiterung eines Programms zur dynamischen Analyse von Pla-

- netengetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2005. – Abschlussbericht
- [9] BOCK, G.: Softwareprogramm Maschinenakustik (MASAK): Programm zur Abschätzung des akustischen Übertragungsmaßes von Platten-, Kasten- und Zylinderstrukturen, Version 3.0 / Fachgebiet Maschinenelemente und Getriebe, TH Darmstadt. Darmstadt, 1990. – Softwareprogramm
- [10] BODAS, A. ; KAHRAMAN, A.: Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets. In: *JSME International Journal*, Vol. 47, No. 3, S. 908 - 915, JSME, 2004
- [11] BOSCH, M.: *Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*, RWTH Aachen, Diss., 1965
- [12] BREUER, M.: *Theoretische und experimentelle Bestimmung der Wälzlagersteifigkeit*. Hannover : VDI Fortschrittberichte, Reihe 1, Nr. 241, 1994
- [13] CASH, J. ; KARP, A.: A Variable Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides. In: *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 16, S. 201 - 222, 1990
- [14] CASTILLO DEL, G. ; WÜNSCH, D.: FVA-Heft 213: FVA-Forschungsvorhaben 95 Teil A, Modellfindung, Experimentelle und modellhafte Ermittlung dynamischer Belastungen torsionsschwingungsfähiger Systeme / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1986. – Abschlussbericht
- [15] CASTILLO DEL, G. ; WÜNSCH, D.: FVA-Heft 214: FVA-Forschungsvorhaben 95 Teil B, Modellfindung, Lösungs- und Operationskatalog zur Modellfindung mechanischer Torsionsschwingungs-



- systeme / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1986. – Abschlussbericht
- [16] DALE, A.: Gear Noise and the Sideband Phenomenon. In: *Gear Technology* S. 26 - 33, 1987
- [17] DAVOLI, P. ; GORLA, C. ; ROSSA ; F, F Rossi ; BONI, G.: Transmission error and noise excitation of spur gears. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34099*, 2007
- [18] DIEKHANS, G.: *Numerische Simulation von parametererregten Getriebeschwingungen*, RWTH Aachen, Diss., 1981
- [19] DIN (Hrsg.): *DIN 3961: Toleranzen für Stirnradverzahnungen - Grundlagen*. DIN, 1978
- [20] DIN (Hrsg.): *DIN 3962: Toleranzen für Stirnradverzahnungen, Teile 1-3*. DIN, 1978
- [21] DIN (Hrsg.): *DIN 4760: Gestaltabweichungen - Begriffe und Ordnungssystem*. DIN, 1982
- [22] DIN (Hrsg.): *DIN 3990: Trägfähigkeitsberechnung von Stirnrädern, Einführung und allgemeine Einflussfaktoren*. DIN, 1987
- [23] DIN (Hrsg.): *DIN ISO 226: Akustik - Normalkurven gleicher Lautheit*. DIN, 2006
- [24] DIN (Hrsg.): *DIN EN ISO 1683: Akustik - Bevorzugte Bezugswerte für Pegel in der Akustik und Schwingungstechnik*. DIN, 2008
- [25] DIN (Hrsg.): *DIN EN 61672-1: Elektroakustik - Schallpegelmesser - Teil 1: Anforderungen*. DIN, 2010
- [26] EICHER, N.: *Parametererregte Schwingungen in Theorie und Praxis*. Berlin : TUB - Dokumentation Weiterbildung, Heft 6, 1982

- [27] FALK, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. In: *Ingenieur-Archiv* 24, S. 216-232, Ingenieur-Archiv, 1955
- [28] FEHLBERG, E.: Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme. In: *Computing (Arch. Elektron. Rechnen)*, Jg. 6, S. 61 - 71, 1970
- [29] FÖLLER, D.: *Untersuchung der Anregung von Körperschall in Maschinen und der Möglichkeiten für eine primäre Lärmbekämpfung*, TU Darmstadt, Diss., 1972
- [30] FÖLLER, D.: FKM-Heft 26: FKM-Forschungsvorhaben 7, Geräuscharme Maschinenteile - Die Entstehung von Maschinengeräuschen und konstruktive Maßnahmen zu ihrer Verminderung / Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (FKM). Frankfurt/Main, 1976. – Abschlussbericht
- [31] FÖLLER, D.: FKM-Heft 78: FKM-Forschungsvorhaben 36, Das Geräuschverhalten typischer Maschinenstrukturen, Die Geräuschabstrahlung von Platten und kastenförmigen Maschinengehäusen. / Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (FKM). Frankfurt/Main, 1979. – Abschlussbericht
- [32] FORSCHUNGSVEREINIGUNG ANTRIEBSTECHNIK E.V. (FVA) (Hrsg.): *FVA-Heft 623: Benutzeranleitung zum EDV-Programm „Anregungspegel Planetenradstufe ANPLA, Version 1.0“*. Frankfurt / Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), 2001. – Benutzeranleitung
- [33] FORSCHUNGSVEREINIGUNG ANTRIEBSTECHNIK E.V. (FVA) (Hrsg.): *FVA-Heft Nr. 635: Dynamische Zahnkräfte Programm (DZP), Version 4.0*. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), 2001. – Programmdokumentation

- [34] FORSCHUNGSVEREINIGUNG ANTRIEBSTECHNIK E.V. (FVA) (Hrsg.): *FVA-Heft Nr. 914: Ritzelkorrektur (RIKOR), Version I*. RIKOR I. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), 2009. – Programmdokumentation
- [35] FORSCHUNGSVEREINIGUNG ANTRIEBSTECHNIK E.V. (FVA) (Hrsg.): *FVA-Heft Nr. 937: DZP, Version 5.0 und DZPopt, Version 2.0*. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), 2010. – Programmdokumentation
- [36] FORSCHUNGSVEREINIGUNG ANTRIEBSTECHNIK E.V. (FVA) (Hrsg.): *FVA-Heft Nr. 968: Programm Anregung Planetenradstufe (ANPLA), Version 2.0*. Frankfurt/Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA), 2011. – Programmdokumentation
- [37] FUENTES, A. ; GONZALEZ-PEREZ, I. ; NAGAMOTO, H. ; HAYASAKA, K.: Gear Whine Noise Spectra Caused by Transmission Errors. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-48126*, 2011
- [38] GEISER, H.: FVA-Heft 620: FVA-Forschungsvorhaben 292, Anregung Planetenradsatz, Berechnung der Anregung bei Planetenradstufen - Erstellung eines EDV-Programms auf der Basis des FVA-Programms DZP / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2001. – Abschlussbericht
- [39] GEISER, H.: *Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern*, TU München, Diss., 2002
- [40] GEISER, H. ; MANDT, D.: FVA-Heft 634: FVA-Forschungsvorhaben 338 I+II, Anregungsverhalten bei Flankenkorrekturen, Anregungsverhalten schrägverzahnter Stirnradpaarungen unter Last und Drehzahl bei Berücksichtigung der verfahrensbedingten Verzahnungs-

- abweichungen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2001. – Abschlussbericht
- [41] GERBER, H.: *Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1984
- [42] GOLD, P.W.: *Statisches und dynamisches Verhalten mehrstufiger Zahnradgetriebe*, RWTH Aachen, Diss., 1979
- [43] GRADU, M.: *Planetengeräte mit ungleichmäßig auf dem Umfang angeordneten Planetenrädern*, U Stuttgart, Diss., 1996
- [44] GRAF SODEN, A.: *Das Zahnrad als Lärmquelle*. Bd. 77. S. 231-238. VDI, 1933
- [45] GREGORY, R. ; HARRIS, S. ; MUNRO, R.: Dynamic behaviour of spur gears. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 178 Pt I No 8, S. 207-226*, Inst. Mech. Eng, 1963-64
- [46] GRIGGEL, T.: Geräuschdiagnose Wälzprüfung. In: *Jahresbericht zur Bayerischen Forschungsstiftung 2007* Bayerische Forschungsstiftung, 2007. – Jahresbericht
- [47] GRIGGEL, T.: FVA-Heft 857: FVA-Forschungsvorhaben 338 IV, DZ-Popt, Anregungsoptimierte Flankenkorrektur durch Kombination von Standardkorrekturen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2008. – Abschlussbericht
- [48] GRIGGEL, T.: *Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern*, TU München, Diss., 2010
- [49] GRIGGEL, T. ; GACKA, A.: FVA-Heft 831: FVA-Forschungsvorhaben 487 I, Kennwerte Anregungsverhalten, Kennwertdefinition zum Geräuschphänomen Verzahnungsheulen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2007. – Abschlussbericht

- [50] GRIGGEL, T. ; HEIDER, M. ; BIHR, J.: FVA-Heft 937: FVA-Forschungsvorhaben 338 V, DZP / DZPopt, DZP Version 5.0 und DZPopt Version 2.0 / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2010. – Abschlussbericht
- [51] GRIGGEL, T. ; HEIDER, M. ; GACKA, A. ; RÖTHLINGSHÖFER, T. ; INGELI, J.: FVA-Heft 936: FVA-Forschungsvorhaben 487 II, Kennwerte Anregungsverhalten, Analyse der Berechnungsprogramme DZP4, RIKOR H und FE-Stirnradkette 3.1 / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2010. – Abschlussbericht
- [52] HARIANTO, J. ; HOUSER, A.: A methodology for obtaining optimum gear tooth microtopographies for noise and stress minimization over a broad operating torque range. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34655*, 2007
- [53] HARRIS, S.: Dynamic loads on the teeth of spur gears. In: *Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 172, S. 87-112*, Inst. Mech. Eng, 1958
- [54] HE, S. ; SINGH, R.: Dynamic interactions between sliding friction and tip relief in spur gears. In: *Proceedings of the ASME 2007 10th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Las Vegas - DETC2007-34077*, 2007
- [55] HEIDER, M.: *Dynamische Modellierung und Simulation der Torsionsschwingungen eines Antriebsstranges in DZP*, TU München, Diplomarbeit, 2006
- [56] HEIDER, M. ; INGELI, J.: FVA-Heft 983: FVA-Forschungsvorhaben 487 III, Neue Kennwerte zur rechnerischen Beurteilung des Anregungsverhaltens von Verzahnungen / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2011. – Abschlussbericht

- [57] HERTTER, T.: *Untersuchung der Zahnpaarsteifigkeit von Innenverzahnungen*, TU München, Semesterarbeit, 1996
- [58] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Jg. 92, S. 156 - 171, 1882
- [59] HOLZWEISSIG, F. ; DRESIG, H.: *Lehrbuch der Maschinendynamik: Grundlagen und praxisorientierte Beispiele*. Leipzig : Fachbuchverlag, 1994
- [60] HÖSEL, T.: *Geräuschuntersuchungen an schrägverzahnten Stirnrädern*, TU München, Diss., 1965
- [61] HUANG, K. ; ZHANG, S.: A Finite Element Investigation to Modal and Dynamic Behaviors of Planetary Gearing Concerning the Effect of Bearing and Carrier Stiffnesses. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47136*, 2011
- [62] ISO (Hrsg.): *ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears*. : ISO, 2006
- [63] KAGAWA, T.: Deflection and Moments Due to a Concentrate Edge-load on an Cantilever Plate of Finite Length, 11th Japan National Congress for Appl. Mech., 1961
- [64] KISSLING, U.: Effects of Profile Corrections on Peak-to-Peak Transmission Error. In: *GearTechnology, July 2010*, pp. 52 - 61, 2010
- [65] KÜÇÜKAY, F.: *Über das dynamische Verhalten von einstufigen Zahnradgetrieben*, TU München, Diss., 1981
- [66] KÜÇÜKAY, F.: Stabilitätsuntersuchungen an einstufigen Zahnradgetrieben. In: *ZAMM 63, T68-T71*, 1983
- [67] KÜÇÜKAY, F.: *Dynamik der Zahnradgetriebe*, TU München, Diss., 1985. – Habilitationsschrift

- [68] KUBO, A. ; KIYONO, S.: Vibrational Excitation of Cylindrical Involute Gears Due To Tooth Form Error. In: *Bulletin of the JSME, Vol. 23, No. 183, September 1980, pp. 1536 - 1543, 1980*
- [69] KUTTA, W.: Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jg. 46, S. 435 - 456, 1901*
- [70] LAMPARSKI, C.: FVA-Heft 486: FVA-Forschungsvorhaben 51 IV, Leichtbauplanetengetriebe, Einfache Berechnungsgleichungen für Lastüberhöhungen in Leichtbauplanetengetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1996. – Abschlussbericht
- [71] LANZERATH, G.: *Untersuchungen über das Geräusch- und Schwingungsverhalten schnelllaufender Stirnradgetriebe*, RWTH Aachen, Diss., 1970
- [72] LEE, H. ; KANG, K. ; KIM, M. ; HUR, J.: A Research for the Planetary Gear Noise Development in FF 6th Speed Automatic Transmission. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-47129, 2011*
- [73] LERCH, R. ; SESSLER, G. ; WOLF, D: *Technische Akustik - Grundlagen und Anwendungen*. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2009
- [74] LINKE, H.: *Stirnradverzahnung*. München, Wien : Carl Hauser Verlag, 1999
- [75] MAGNUS, K. ; POPP, K. ; SEXTRO, W.: *Schwingungen: Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. 8, überarb. Aufl. 2008. Vieweg+Teubner Verlag, 2008

- [76] MARK, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems: Basic theory. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 63(5), May 1978, pp. 1409 - 1430, 1978
- [77] MARK, W.: Analysis of the vibratory excitation of gear systems. II: Tooth error representations, approximations, and application. In: *J. Acoust. Soc. Am.* 66(6), Dec 1979, pp. 1758 - 1787, 1979
- [78] MÜLLER, A. ; MÜLLER, P.: Parameter- und Konbinationsresonanzen bei Rotorsystemen mit Unsymetrien. In: *Ingenieur-Archiv* 48, S. 65-22, Ingenieur-Archiv, 1979
- [79] MÜLLER, R.: FVA-Heft 326: FVA-Forschungsvorhaben 133 I, Sprungüberdeckung, Einfluss von Verzahnungsabweichungen und -korrekturen auf die Schwingungsanregung schrägverzahnter Getriebe / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1990. – Abschlussbericht
- [80] MÜLLER, R.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1991
- [81] MUNRO, R.: Effect of geometrical errors on the transmission of motion between gears. In: *Proc. Conference on Gearing in 1970, Cambridge*, pp. 79 - 84, 1970
- [82] NAENDORF, B.: FVA-Heft 386: FVA-Forschungsvorhaben 51 III, Planetengetriebe - Lastverteilung, Lastverteilung in Industrieplanetengetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1993. – Abschlussbericht
- [83] NAESCHER, J.: *Die rechnerische Simulation und Messung der Einflanken-Wälzabweichung geradverzahnter Sirnräder*, Universität Bochum, Diss., 1977
- [84] NIEMANN, G. ; WINTER, H.: *Maschinenelemente*. Bd. 2. 2. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer Verlag, 1989



- [85] OPITZ, H.: Fertigungsgenauigkeit und Geräusch,. In: *Internationale Konferenz Zahnräder und Zahnradgetriebe am 18./19. Oktober 1960* Essen, 1960
- [86] OSTER, P.: *Untersuchungen von Ein- und Zweimassen-Getriebeschwingungssystemen auf dem Analogrechner*, TH München, Diplomarbeit, 1965
- [87] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. Teubner Verlag, 1997
- [88] PFLEGER, E.: Parameter-Excited Vibrations in Rail Vehicle Drives. In: *Simpack User Meeting 2007, Bonn - Bad Godesberg*, 2007
- [89] PLACZEK, T.: *Lastverteilung und Flankenkorrektur*, TU München, Diss., 1988
- [90] PRESS, W. ; TEUKOLSKY, S. ; VETTERLING, W. ; FLANNERY, B.: *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3. Cambridge University Press, 2007
- [91] RADEV, S.: *Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad - und schrägverzahnter Stirnradpaarungen*, TU München, Diss., 2007
- [92] RADEV, S. ; GRIGGEL, T.: FVA-Heft 739: FVA-Forschungsvorhaben 338 IIb, Anregungsoptimierte Flankenkorrektur für konstante und veränderliche Last / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2004. – Abschlussbericht
- [93] RADEV, S. ; GRIGGEL, T.: FVA-Heft 789: FVA-Forschungsvorhaben 338 III, Anregungsoptimierte Flankenkorrektur (FLAKOR) / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2006. – Forschungsbericht
- [94] RETTIG, H.: *Dynamische Zahnkraft*, TH München, Diss., 1957

- [95] RETTIG, H.: Zahnkräfte und Schwingungen in Stirnradgetrieben. In: *Konstruktion 17, Heft 2, S. 41-53*, 1965
- [96] RETTIG, H.: Innere dynamische Zusatzkräfte bei Zahnradgetrieben. In: *Antriebstechnik 16 Nr. 11, S. 655-663*, Frankfurt am Main, 1977
- [97] RÜSCHOFF, R.: FVA-Heft 675: FVA-Forschungsvorhaben 254 II, Mehrfacheingriffe, Analyse der Wechselwirkungen von Mehrfacheingriffen am Beispiel Planetengetriebe / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 2003. – Abschlussbericht
- [98] RUNGE, C.: Über angewandte Mathematik. In: *Mathematische Annalen, Jg. 44, S. 437 - 448*, 1894
- [99] SATTELBERGER, K.: FVA-Heft 459: FVA-Forschungsvorhaben 133 II, Sprungüberdeckung, Einfluss von Verzahnungsabweichungen und -korrekturen auf die Schwingungsanregung schrägverzahneter Getriebe / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1995. – Abschlussbericht
- [100] SATTELBERGER, K.: *Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben*, TU München, Diss., 1997
- [101] SCHÄFER, J.: *Erweiterung des Linienkontaktmodells für die Finite-Elemente-basierte Zahnkontaktanalyse von Stirnradverzahnungen*, RWTH Aachen, Diss., 2008
- [102] SCHLECHT, B. ; SCHULZE, T.: Simulation of Drive Trains in Wind Turbines with SIMPACK. In: *Simpack User Meeting 2003, Freiburg*, 2003
- [103] SCHLECHT, B. ; SCHULZE, T. ; ROSENLÖCHER, T.: Simulation of heavy drive trains with multimegawatt transmission power in SimPACK. In: *Simpack User Meeting 2006, Baden-Baden*, 2006

- [104] SCHMIDT, G.: *Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung*, TU München, Diss., 1973
- [105] SIGG, H.: Profile and Longitudinal Corrections on Involute Gears. In: *Semi Annual Meeting of the AGMA, Paper 109.16* AGMA, 1965
- [106] SMITH, J. ; SMITH, D.: *Gear Noise and Vibration*. Marcel Dekker Inc, 1999
- [107] STARK, T. M. W. M. Wasfy: Multibody Dynamics Model for Predicting the Vibration Response and Transient Tooth Loads for Planetary Gear Systems. In: *Proceedings of the ASME 2011 - 11th ASME International Power Transmission and Gearing Conference, Washington DC - DETC2011-48814*, 2011
- [108] STORM, R.: *Untersuchung der Einflussgrößen auf das akustische Übertragungsverhalten von Maschinenstrukturen*. 1980
- [109] TESCH, T.: *Der fehlerhafte Zahneingriff und seine Auswirkungen auf die Geräuschabstrahlung*, RWTH Aachen, Diss., 1969
- [110] THOMA, F.: *Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad, Berechnung der Lastverteilung im Zahnkontakt unter Berücksichtigung des Welle-Lagersystems als Teil der Zahnradstufe*, TU München, Diss., 2011
- [111] TOWNSEND, D.: *Dudley's Gear Handbook: The Design, Manufacture and Application of Gears*. 2. McGraw-Hill Inc.,US, 1991
- [112] UMEZAWA, K.: The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission. In: *Bulletin of the JSME, Vol. 16, No.92, S. 407-413*, JSME, 1973
- [113] UNTERBERGER, M.: *Geräuschuntersuchungen an geradverzahnten Zahnradern*, TH München, Diss., 1958

- [114] WAGNER, T.: FVA-Heft 82: FVA-Forschungsvorhaben 51, Lastausgleich in Planetengetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1979. – Abschlussbericht
- [115] WALKER, H.: Gear Tooth Deflection and Profile Modification. In: *The Engineer*, S. 102-104, Office for Publ. and Advertisements, 1940
- [116] WEBER, C. ; BANASCHEK, K.: *Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern*. Bd. 11. Schriftenreihe Antriebstechnik. Braunschweig : Vieweg-Verlag, 1955
- [117] WEITL, R.: *Erweiterung der FVA-Programme RIKOR und LAGER2 zur Bestimmung der Lebensdauer von Wälzlagern in Industriegetrieben*. Frankfurt am Main : FVA Informationsblatt Nr. 364/2, 2007
- [118] WELP, E.: FKM-Heft 70: FKM-Forschungsvorhaben 17 und 31, Untersuchung des Körperschallverhaltens von Platten- und Kastenstrukturen mit der Methode der finiten Elemente. / Forschungskuratorium Maschinenbau e.V. (FKM). Frankfurt/Main, 1976. – Abschlussbericht
- [119] WINKELMANN, L.: *Lastverteilung an Planetenradgetrieben; Schriftenreihe des Instituts für Konstruktionstechnik, Heft Nr. 87.3*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1987
- [120] WINKELMANN, L.: FVA-Heft 267: FVA-Forschungsvorhaben 51 II, Planetengetriebe - Lastverteilung in schrägverzahnten Planetenradgetrieben / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1988. – Abschlussbericht
- [121] WITTKKE, W.: *Beanspruchungsgerechte und geräuschoptimierte Stirnradgetriebe - Toleranzvorgaben und Flankenkorrekturen. Dissertation RTWH Aachen, RWTH Aachen, Diss., 1994*

- [122] WITTOR, R.: FVA-Heft 519: FVA-Forschungsvorhaben 254, Planetengetriebe - Geräusche, Berechnungsgleichungen für den Schallleistungspegel von Industrie-Planetengerieben mit gehäusefesten Hohlrädern / Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA). Frankfurt/Main, 1997. – Abschlussbericht
- [123] ZIEGLER, H.: *Gesamt-Zahnfedersteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder*, TH Aachen, Diss., 1971



## Dissertationen der FZG

1. PERRET, H. Übertragung konstanter Leistung durch stufenlos mechanische Regeltriebe. TH Braunschweig 1935.
2. BELLMANN, H. Beiträge zur Prüfung von Bremsbelägen. TH Braunschweig 1939.
3. HIERSIG, H.M. Der Zusammenhang von Gestaltung und Beanspruchung bei Schneckengetrieben mit Evolventenverzahnung. TH Braunschweig 1943.
4. HELBIG, F. Walzenfestigkeit und Grübchenbildung von Zahnrad- und Wälzlagerwerkstoffen. TH Braunschweig 1943.
5. ARF, D. Pendelrollenlager mit symmetrischen und unsymmetrischen Rollen. TH Braunschweig 1944.
6. OESMANN, W. Entwicklung einer Stahlsand-Schalt- und Regelkupplung. TH Braunschweig 1945.
7. RUBO, E. Ermittlung der Achsfehler-Empfindlichkeit verschiedener Zylinder-Schneckengetriebe mit Hilfe des Einlauf-Abschliffvolumens. TH Braunschweig 1948.
8. GLAUBNITZ, H. Drehmomentmessungen zum Wendevorgang bei Raupenfahrwerken. TH Braunschweig 1948.
9. TALKE, H. Beiträge zur hydrodynamischen Schmiertheorie des ebenen Gleitschuhes auf ebener Fläche. TH Braunschweig 1948.
10. CRAMER, H. Über die Reibung und Schmierung feinmechanischer Geräte. TH Braunschweig 1949.
11. THOMAS, W. Reibscheiben-Regelgetriebe mit Linienberührung. TH Braunschweig 1949.
12. MAUSHAKE, W. Theoretische Untersuchung von Schneckengetrieben mit Globoidschnecke und Stirnrad. TH Braunschweig 1950.
13. KRAUPNER, K.W. Das plastische Verhalten umlaufender Stahlrollen bei Punktberührung. TH Braunschweig 1951.
14. BANASCHEK, K. Die Gleitreibung geschmierter Flächen kleiner Schmiegun. Einfluß von Werkstoffpaarung, Krümmung, Oberfläche und Schmierstoff. TH Braunschweig 1951.
15. HEYER, E. Versuche mit Zylinderschneckengetrieben. Einfluß von Zahnform, Modul, Durchmesser und Schmierstoff auf Verlustleistung und Tragfähigkeit. TH München 1952.
16. HENTSCHEL, G. Der Hochleistungswälztrieb. Entwicklungsstand und Entwicklungsmöglichkeiten. TH München 1952.
17. WINTER, H. Tragfähigste Evolventengeradverzahnung. TH München 1954.
18. ROY, A.K. Spannungsoptische Untersuchung eines schrägverzahnnten Stirnrades. TH München 1957.
19. RETTIG, H. Dynamische Zahnkraft. TH München 1957.
20. OHLENDORF, H. Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern. TH München 1958.

21. UNTERBERGER, M. Geräuschuntersuchungen an geradverzahnten Zahnrädern. TH München 1958.
22. LOOMAN, J. Das Abrichten von profilierten Schleifscheiben zum Schleifen von schrägverzahnten Stirnrädern. TH München 1959.
23. JARCHOW, F. Versuche an Stirnrad-Globoidschneckentrieben. TH München 1960.
24. POPOVIC, L. Einfluß von Zahnform und Bearbeitung auf die Zahnfußfestigkeit. TH München 1960.
25. EHRENSPIEL, K. Die Festkörperreibung von geschmierten und ungeschmierten Metallpaarungen mit Linienberührung. TH München 1962.
26. PITTROFF, H. Riffelbildung infolge Stillstandserschütterungen bei Wälzlagern. TH München 1962.
27. SCHREIBER, H. Zur Auswertung von Lebensdauerversuchen an Wälzlagern. TH München 1962.
28. ROTH, K. Untersuchungen über die Eignung der Evolventenzahnform für eine allgemein verwendbare feinwerktechnische Normverzahnung. TH München 1963.
29. NARUSE, Ch. Verschleiß, Tragfähigkeit und Verlustleistung bei Schraubenradgetrieben. TH München 1964.
30. GARTNER, F. Die Mischreibung bei Linienberührung. TH München 1964.
31. ASSMANN, H. Vergleichende Untersuchung von Getriebeölen im FZG-Stirnrad- und Esso-Hypoidprüfstand. TH München 1965.
32. REISTER, D. Einseitiges Breitentragen bei Stirnrädern. TH München 1965.
33. KORRENN, H. Gleitreibung in den Kontaktstellen zwischen den Wälzkörpern und den Laufbahnen der Ringe von Wälzlagern. TH München 1965.
34. HÖSEL, Th. Geräuschuntersuchungen an schrägverzahnten Stirnrädern mit Evolventenverzahnung. TH München 1965.
35. LANGENBECK, K. Die Verschleiß- und Freißgrenzlast der Hypoidgetriebe. TH München 1966.
36. MEMMEL, M. Untersuchungen über die Tragfähigkeit und Gebrauchsdauer von Gelenklagern. TH München 1966.
37. BÖTSCH, H. Der Einfluß der Oberflächenbearbeitung und -behandlung auf die Flankenfestigkeit von Stirnrädern aus Vergütungsstahl. TH München 1966.
38. LECHNER, G. Die Freißlastgrenze bei Stirnrädern aus Stahl. TH München 1966.
39. LANGE, S. Untersuchungen von Helicon- und Spiroidgetrieben mit abwickelbaren Schneckenflanken nach der hydrodynamischen und nach der Hertzschen Theorie. TH München 1967.
40. SCHWÄGERL, D. Untersuchung von Helicon- und Spiroidgetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil nach der Hertzschen und nach der hydrodynamischen Theorie. TH München 1967.
41. MICHELS, K. Schneckengetriebe mit Werkstoffpaarung Stahl/Grauguß. TH München 1968.
42. GACKSTETTER, G. Verlustarme Verzahnung. TH München 1968.



- 
43. GEUPEL, H. Flüssigkeitsreibung bei Punktberührung. TH München 1969.
  44. GREKOUSSIS, R. Vergleichende Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Stirnrädern. TH München 1969.
  45. BAETHGE, J. Zahnfederhärte, Drehwegfehler und Geräusch bei Stirnrädern. TH München 1969.
  46. SCHULZ, H.D. Untersuchung über Tragfähigkeiten und Verlustleistung von Schneckengetrieben mit trapezförmigem Schneckenprofil und kegelliger Schnecke. TH München 1969.
  47. STÖLZLE, K. Leistungsübertragung in Planetengetrieben bei statischem und dynamischem Betrieb. Berechnung, Optimierung und Versuchsergebnisse. TH München 1970.
  48. SEITZINGER, K. Die Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Freßtragfähigkeit. TU München 1971.
  49. STÖSSEL, K. Reibungszahlen unter elasto-hydrodynamischen Bedingungen. TU München 1971.
  50. SCHMIDT, G. Berechnung der Wälzpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. TU München 1972.
  51. HIRT, M. Einfluß der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. TU München 1974.
  52. WILKESMANN, H. Berechnung von Schneckengetrieben mit unterschiedlichen Zahnprofilformen (Tragfähigkeits- und Verlustleistung für Hohlkreis-, Evolventen- und Geradlinienprofil). TU München 1974.
  53. RICHTER, M. Der Verzahnungswirkungsgrad und die Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Schraubenradgetrieben - Versuchsergebnisse und Berechnungsmethoden. TU München 1976.
  54. RÖSCH, H. Untersuchungen zur Wälzfestigkeit von Rollen - Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Schlupf. TU München 1976.
  55. GAGGERMEIER, H. Untersuchungen zur Reibkraftübertragung in Regel-Reibradgetrieben im Bereich elasto-hydrodynamischer Schmierung. TU München 1977.
  56. KÄSER, W. Beitrag zur Grübchenbildung an gehärteten Zahnrädern. Einfluß von Härte-tiefe und Schmierstoff auf die Flankentragfähigkeit. TU München 1977.
  57. KNABEL, W. Geräusche und Schwingungen an Stirnradgetrieben. Untersuchungen geometrischer Einflüsse bei hohen Drehzahlen und Belastungen. TU München 1977.
  58. WIRTH, X. Über den Einfluß von Schleifkerben auf die Zahnfußtragfähigkeit und das Schädigungsverhalten oberflächengehärteter Zahnräder. TU München 1977.
  59. HUBER, G. Zylinderschneckengetriebe, ein Beitrag zur Berechnung von Grübchen- und Gleitverschleiß und Angaben zum Wirkungsgradverhalten aus Versuchen. TU München 1978.
  60. BROSSMANN, U. Über den Einfluß der Zahnfußausrundung und des Schrägungswinkels auf Beanspruchung und Festigkeit schrägverzahnter Stirnräder. TU München 1979.

61. PLEWE, H.-J. Untersuchungen über den Abriebverschleiß von geschmierten, langsam laufenden Zahnrädern. TU München 1980.
62. FRESEN, G. Untersuchungen über die Tragfähigkeit von Hypoid- und Kegelradgetrieben (Grübchen, Ridging, Rippling, Graufleckigkeit und Zahnbruch). TU München 1981.
63. OSTER, P. Beanspruchung der Zahnflanken unter Bedingungen der Elastohydrodynamik. TU München 1982.
64. HORNUNG, K. Zahnräder aus Bainitischem Gusseisen mit Kugelgraphit. TU München 1983.
65. WEISS, T. Zum Festigkeits- und Verzugverhalten von randschichtgehärteten Zahnrädern. TU München 1983.
66. VOJACEK, H. Das Reibungsverhalten von Fluiden unter elastohydrodynamischen Bedingungen. Einfluß der chem. Struktur des Fluides, der Werkstoffe und der Makro- und Mikrogeometrie der Gleit/Wälzkörper. TU München 1984.
67. SCHÖNNENBECK, G. Einfluß der Schmierstoffe auf die Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit und Grübchenbildung) hauptsächlich im Umfangsgeschwindigkeitsbereich 1...9 m/s. TU München 1984.
68. WIENER, H. Untersuchung der Rollenkinematik im Axial-Pendelrollenlager. TU München 1984.
69. MATHIAK, D. Untersuchungen über Flankentragfähigkeit, Zahnfußtragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinderschneckengetrieben. TU München 1984.
70. STRASSER, H. Einflüsse von Verzahnungsgeometrie, Werkstoff und Wärmebehandlung auf die Zahnfußtragfähigkeit. TU München 1984.
71. JOACHIM, F.-J. Untersuchungen zur Grübchenbildung an vergüteten und normalisierten Zahnrädern (Einfluß von Werkstoffpaarung, Oberflächen- und Eigenspannungszustand). TU München 1984.
72. GERBER, H. Innere dynamische Zusatzkräfte bei Stirnradgetrieben - Modellbildung, innere Anregung und Dämpfung. TU München 1984.
73. SIMON, M. Messung von elasto-hydrodynamischen Parametern und ihre Auswirkung auf die Grübchentragfähigkeit vergüteter Scheiben und Zahnräder. TU München 1984.
74. SCHMIDT, W. Untersuchungen zur Grübchen- und zur Zahnfußtragfähigkeit geradzahneter evolventischer Innenstirnräder. TU München 1984.
75. FUNCK, G. Wärmeabführung bei Getrieben unter quasistationären Betriebsbedingungen. TU München 1985.
76. PAUL, M. Einfluß von Balligkeit und Lageabweichungen auf die Zahnfußbeanspruchung spiralverzahnter Kegelräder. TU München 1986.
77. HOPPE, F. Das Abschalt- und Betriebsverhalten von mechanischen Sicherheitskupplungen. TU München 1986.
78. MICHAELIS, K. Die Integraltemperatur zur Beurteilung der Freßtragfähigkeit von Stirnradgetrieben. TU München 1987.
79. WECH, L. Untersuchungen zum Wirkungsgrad von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 1987.

- 
80. KNAUER, G. Zur Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Einfluß von Werkstoff, Schmierstoff und Betriebstemperatur. TU München 1988.
  81. PLACZEK, T. Lastverteilung und Flankenkorrektur in gerad- und schrägverzahnten Stirnradstufen. TU München 1988.
  82. PFLAUM, H. Das Reibungsverhalten ölgeschmierter Kegelreibkupplungen in Synchronisationseinrichtungen von Kraftfahrzeug-Schaltgetrieben. TU München 1988.
  83. BRINCK, P. Zahnfußtragfähigkeit oberflächengehärteter Stirnräder bei Lastrichtungsumkehr. TU München 1989.
  84. entfallen
  85. NEUPERT, K. Verschleißtragfähigkeit und Wirkungsgrad von Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1990.
  86. PREXLER, F. Einfluß der Wälzflächenrauheit auf die Grübchenbildung vergüteter Scheiben im EHD-Kontakt. TU München 1990.
  87. SCHALLER, K.-V. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Grübchenbildung an einsatzgehärteten Stirnradflanken. TU München 1990.
  88. COLLENBERG, H.-F. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit schnellaufender Stirnradgetriebe. TU München 1991.
  89. MÜLLER, R. Schwingungs- und Geräuschanregung bei Stirnradgetrieben. TU München 1991.
  90. ANZINGER, M. Werkstoff- und Fertigungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, insbesondere im hohen Zeitfestigkeitsgebiet. TU München 1991.
  91. KAGERER, E. Messung von elasto-hydrodynamischen Parametern im hochbelasteten Scheiben- und Zahnkontakt. TU München 1991.
  92. HASLINGER, K. Untersuchungen zur Grübchentragfähigkeit profilkorrigierter Zahnräder. TU München 1991.
  93. VOLLHÜTER, F. Einfluß der Achsversetzung auf die Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit von spiralverzahnten Kegelrädern. TU München 1992.
  94. PINNEKAMP, B. Das Schaltverhalten von PKW-Getriebesynchronisierungen. TU München 1992.
  95. SCHUBERT, M. Einfluß der Befestigungsart und Radkranzdicke auf die Zahntragfähigkeit von Innenstirnrädern. TU München 1993.
  96. STEINGRÖVER, K. Untersuchung zu Verschleiß, Verlustgrad und Fressen bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1993.
  97. ELSTORPFF, M.-G. Einflüsse auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder bis in das höchste Zeitfestigkeitsgebiet. TU München 1993.
  98. EMMERT, S. Untersuchungen zur Zahnflankenermüdung (Graufleckigkeit, Grübchenbildung) schnellaufender Stirnradgetriebe. TU München 1994.
  99. SUCHANDT, Th. Betriebsfestigkeitsuntersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder und zur Bruchfestigkeit vergüteter Laschenketten. TU München 1994.
  100. HÄMMERL, B. Lebensdauer- und Temperaturverhalten ölgekühlter Lamellenkupplungen bei Lastkollektivbeanspruchung. TU München 1994.

101. WEISS, R. Einfluß der Ölalterung auf die Zahnflankentragfähigkeit. TU München 1994.
102. SCHLENK, L. Untersuchungen zur Freßtragfähigkeit von Großzahnradern. TU München 1995.
103. MANN, U. Schmierfilmbildung in elasto-hydrodynamischen Kontakten, Einfluß verschiedener Grundöle und Viskositäts-Index-Verbesserer. TU München 1995.
104. RUDZEWSKI, S. Systemtechnische Verknüpfung eingeführter Getrieberechnungsprogramme. TU München 1995.
105. RANK, R. Untersuchungen zur Lebensdauerprüfung von Synchronisierungen. TU München 1995.
106. EBERSPÄCHER, C. Reihenfolgeeffekte bei der Grübchen-Betriebsfestigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 1995.
107. RANK, B. Untersuchungen zur Grübchenbildung bei Zylinder-Schneckengetrieben. TU München 1996.
108. SATTELBERGER, K. Schwingungs- und Geräuschanregung bei ein- und mehrstufigen Stirnradgetrieben. TU München 1997.
109. HIRSCHMANN, V. Tragfähigkeitsuntersuchungen an stufenlosen Umschlingungsgetrieben. TU München 1997.
110. THOMAS, J. Flankentragfähigkeit und Laufverhalten von hartfeinbearbeiteten Kegelrädern. TU München 1998.
111. WIKIDAL, F. Berechnung der Flankenpressung gerad- und schrägverzahnter Stirnräder für last- und fertigungsbedingte Abweichungen. TU München 1998.
112. PERPONCHER, V., CH. Einflüsse von Reibflächentopographie und Beanspruchungen auf das Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen. TU München 1998.
113. SCHEDL, U. Einfluß des Schmierstoffs auf die Grübchenlebensdauer einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 1998.
114. VOLLMER, T. Methodik zur Entwicklung einer Fahrstrategie für Fahrzeuge, ausgeführt am Beispiel des Autarken Hybrids. TU München 1998.
115. HEITMANN, A. Entwicklung des  $i^2$ -Getriebes für den Autarken Hybrid-Antriebsstrang. TU München 1998.
116. PFLEGER, F. Schalt- und Lebensdauerverhalten von Lamellenkupplungen. TU München 1998.
117. KERSCHL, S. Der Autarke Hybrid - Optimierung des Antriebsstrangs hinsichtlich Energieverbrauch und Bestimmung des Einsparpotentials, TU München 1998.
118. DÖBEREINER, R. Tragfähigkeit von Hochverzahnungen geringer Schwingungsanregung, TU München 1998.
119. WEIGAND, U. Werkstoff- und Wärmebehandlungseinflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, TU München 1999.
120. SCHRADER, U. Einfluß von Verzahnungsgeometrie und Betriebsbedingungen auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben, TU München 2000.
121. KÖLL, J. Konstruktion des Getriebes für ein Pkw-Hybridantriebssystem, TU München 2000.

- 
122. FÖRSTER, W. Der Lastschaltvorgang beim stufenlosen  $i^2$ -Getriebe des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs, TU München 1999.
123. LANGE, N. Hoch feresstragfähige Schneckengetriebe mit Rädern aus Sphaeroguß, TU München 2000.
124. LUTZ, M. Methoden zur rechnerischen Ermittlung und Optimierung von Tragbildern an Schneckengetrieben, TU München 2000.
125. KOPATSCH, F. Wirksamkeit von Viskositätsindex-Verbesserern im EHD-Zahnradkontakt, TU München 2000.
126. BAYERDÖRFER, I. Einfluß von betriebsbedingten Schmierstoffveränderungen auf die Flanken-tragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2000.
127. TOBIE, T. Zur Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder, TU München 2001.
128. STAHL, K. Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Gerad- und Schrägverzahnungen unter besonderer Berücksichtigung der Pressungsverteilung, TU München 2001.
129. NEUMÜLLER, M. Einfluß der Ölalterung auf Reibungs- und Verschleißverhalten von Synchronisierungen, TU München 2001.
130. MOSBACH, C. Das Reibungs- und Reibschwing-Verhalten nasslaufender Lamellenkupplungen, TU München 2002.
131. DYLA, A. Modell einer durchgängig rechnerbasierten Produktentwicklung, TU München 2002.
132. GRASWALD, C. Reibung im elastohydrodynamischen Kontakt von Reibradgetrieben, TU München 2002.
133. GEISER, H.. Grundlagen zur Beurteilung des Schwingungsverhaltens von Stirnrädern, TU München 2002.
134. SCHINAGL, S. Zahnfußtragfähigkeit schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung, TU München 2002.
135. DOLESCHEL, A. Wirkungsgradberechnung von Zahnradgetrieben in Abhängigkeit vom Schmierstoff, TU München 2003.
136. ANNAST, R. Kegelrad-Flankenbruch, TU München 2003
137. SÜSSMUTH, J.-F. Eignungsbeurteilung von Schmierstoffen für stufenlose Umschlingungsgetriebe, TU München 2003.
138. MATTEN, D. Methode zur Entwicklung ingenieurwissenschaftlicher Berechnungsprogramme, TU München 2003.
139. GEIER, N. Untersuchung des Reibungs- und Verschleißverhaltens nasslaufender Kupplungen in Abhängigkeit ihrer Reibflächentopographie, TU München 2003
140. HERTTER, T. Rechnerischer Festigkeitsnachweis der Ermüdungstragfähigkeit vergüteter und einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2003.
141. KRIEGER, H. Alterung von Schmierstoffen im Zahnradprüfstand und in Praxisgetrieben, TU München 2004.
142. STEUTZGER, M. Einfluß der Baugröße auf die Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder, TU München 2004.

143. SCHMIDBAUER, T. Aufbau und Erprobung des Autarken Hybrid-Antriebsstrangs im Versuchsfahrzeug. TU München 2004.
144. LIU, W. Einfluss verschiedener Fertigungsverfahren auf die Graufleckentragfähigkeit von Zahnradgetrieben. TU München 2004.
145. FEHLING, R. Höhere Tragfähigkeit bei Zahnradflanken durch eine nichtevolventische Profilmodifikation. TU München 2004.
146. GUTTENBERG, P. Der autarke Hybrid am Prüfstand - Funktion, Kraftstoffverbrauch und energetische Analyse. TU München 2004
147. WIMMER, T. Einflüsse auf das Lastübernahmeverhalten von nasslaufenden Lamellenkupplungen. TU München 2004.
148. RADEV, T. Einfluss des Schmierstoffes auf die Grübchentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder - Entwicklung des Praxisnahen Pittingtests. TU München 2005
149. KRASDEV, I. Optimierung des Lastschaltvorgangs im  $i^2$ -Getriebe. TU München 2005
150. HEILEMANN, J. Tragfähigkeit und Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Schnecken-Zahnflankenformen unter Berücksichtigung der Oberflächenhärte und Härtetiefe. TU München 2005.
151. HEIZENRÖTHER, M. Das Stirnraddifferenzial mit Innenverzahnung im Vergleich zum Kegelraddifferenzial inklusive einer Sperrwertanalyse. TU München 2005.
152. WIMMER, A. Lastverluste von Stirnradverzahnungen - Konstruktive Einflüsse, Wirkungsgradmaximierung, Tribologie. TU München 2006.
153. BRUCKMEIER, S. Flankenbruch bei Stirnradgetrieben. TU München 2006.
154. HAUSER, C. Einfluss der Ölalterung auf Reibcharakteristik und Reibschwingverhalten von Lamellenkupplungen. TU München 2007.
155. GROSSL, A. Einfluss von PVD-Beschichtungen auf die Flanken- und Fußtragfähigkeit einsatzgehärteter Stirnräder. TU München 2007.
156. STEINBERGER, G. Optimale Grübchentragfähigkeit von Schrägverzahnungen. TU München 2007.
157. JAROS, M. Integration des STEP-Produktmodells in den Getriebeentwicklungsprozess. TU München 2007.
158. RADEV, S. Einfluss von Flankenkorrekturen auf das Anregungsverhalten gerad- und schrägverzahnter Stirnradpaarungen. TU München 2007.
159. BRAYKOFF, C. Tragfähigkeit kleinmoduliger Zahnräder. TU München 2007.
160. STANGL, M. Methodik zur kinematischen und kinetischen Berechnung mehrwelliger Planeten-Koppelgetriebe. TU München 2007.
161. STENICO, A. Werkstoffmechanische Untersuchungen zur Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 2007.
162. SCHWIENBACHER, S. Einfluss von Schleifbrand auf die Flankentragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. TU München 2008.
163. WINKLER, J. Tribologischer Schichtaufbau bei Synchronisierungen und sein Einfluss auf Reibung und Verschleiß. TU München 2008.
164. WIRTH, C. Zur Tragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 2008.

- 
165. KREIL, O. Einfluss der Oberflächenstruktur auf Druckverteilung und Schmierfilmdicke im EHD-Kontakt. TU München 2009.
166. OTTO, H.-P. Flank load carrying capacity and power loss reduction by minimised lubrication. TU München 2009.
167. OTTO, M. Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern. TU München 2009.
168. TOMIC, D. Zum Verschleiß von Kegelreibkupplungen - Einflüsse von Belastung und Schmierstoff auf Reibschichteigenschaften. TU München 2009.
169. WEISEL, C. Schneckengetriebe mit lokal begrenztem Tragbild. TU München 2009.
170. WEITL, R. Zur Tragfähigkeitsberechnung von Wälzlagern und Stirnrädern. TU München 2010.
171. MULZER, F. Systematik hochübersetzender coaxialer Getriebe. TU München 2010.
172. SCHUDY, J. Untersuchungen zur Flankenragfähigkeit von Außen- und Innenverzahnungen. TU München 2010.
173. BRETLE, N. Einflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit einsatzgehärteter Zahnräder im Bereich hoher Lastspielzahlen. TU München 2010.
174. GRIGGEL, T. Einfluss von Korrekturen und Fertigungsabweichungen auf die Schwingungsanregung von Stirnrädern. TU München 2010.
175. LAYHER, M. Einfluss der Schmierstoffadditivierung auf das Reibungsverhalten nasslaufender Reibschaltelemente. TU München 2011.
176. HOCHMANN, M. Zahnradtragfähigkeit bei Schmierung mit Getriebefließölen. TU München 2011.
177. DETZEL, J. Tribologische Untersuchungen an Achsgetrieben zur Verbesserung des Wirkungsgrads. TU München 2011.
178. ZIEGLER, A. Zur verkürzten Systemlebensdauerprüfung von Zahnradgetrieben. TU München 2011.
179. THOMA, F. Lastübertragung im verformten System Lager-Welle-Zahnrad. TU München 2012.
180. FRÜHE, T. Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLos-Verzahnungen. TU München 2012.
181. WITZIG, J. Flankenbruch - Eine Grenze der Zahnradtragfähigkeit in der Werkstofftiefe. TU München 2012.
182. KLEIN, M. Zur Fresstragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. TU München 2012.
183. KURTH, F. Efficiency Determination and Synthesis of Complex-Compound Planetary Gear Transmissions. TU München 2012.
184. WOHLLEBER, F. Thermischer Haushalt nasslaufender Lamellenkupplungen. TU München 2012.
185. HEIDER, M. Schwingungsverhalten von Zahnradgetrieben - Beurteilung und Optimierung des Schwingungsverhaltens von Stirnrad- und Planetengetrieben. TU München 2012.