

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Lehrstuhl für Regelungstechnik

**Robuste nichtlineare Regelung mittels
geschwindigkeitsbasierter Linearisierung
für eine aktive Radaufhängung**

Michael Markus Herrnberger

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Georg Wachtmeister

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

Die Dissertation wurde am 10.04.2012 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 26.11.2012 angenommen.

Vorwort

Die Ergebnisse der vorliegenden Dissertation wurden während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Technischen Universität München in den Jahren 2005 bis 2010 erarbeitet.

Vor allem möchte ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann danken, der mich durch seine Offenheit und seine wertvollen Ratschläge stets in bestmöglicher Weise unterstützt und gefördert hat. Neben den fachlichen Herausforderungen hat mir vor allem auch große Freude bereitet, von Anfang an am Aufbau des neuen Lehrstuhls mitwirken zu dürfen.

Weiterhin gilt ein besonderer Dank Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel, der nicht nur freundlicherweise das Koreferat übernommen hat, sondern meine Begeisterung an der Regelungstechnik bereits als Student bzw. Semestrand durch seine gewinnbringende Art nachhaltig geprägt hat.

Frau Regine Brammer, Herrn Ralf-Georg Hübner sowie allen ehemaligen Kollegen am Lehrstuhl, speziell meinen langjährigen Zimmerkollegen Herrn Dr.-Ing. Ahmad Akbari und Herrn Dipl.-Ing. Benjamin Berger, danke ich für die überaus angenehme Zusammenarbeit und die anregenden Diskussionen.

In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch explizit bei all meinen Semestranden, Diplomanden und studentischen Hilfskräften bedanken, die durch ihr Engagement und ihre Kreativität einen wichtigen Beitrag zu meiner Forschung geleistet haben.

Besonders herzlich bedanke ich mich bei meinen Eltern und meiner Schwester für ihre fortwährende persönliche Unterstützung und Beratung, nicht zuletzt auch für die aufopferungsvolle Korrekturlesung der vorliegenden Ausarbeitung.

Ein ganz spezieller Dank gilt aber meiner Partnerin Katharina, die nicht nur große Geduld während der Arbeit an meiner Dissertation bewies, sondern es auch stets verstand, mich auf intelligente und inspirierende Art zu motivieren.

Kurzfassung

Im Fokus der Arbeit steht die geschwindigkeitsbasierte Linearisierung (GBL), mit deren Hilfe ein neues nichtlineares Reglerentwurfsverfahren für eine aktive Radaufhängung entwickelt wird. Auf Grund der Eigenschaften der GBL gelingt es, hierbei weitestgehend bewährte lineare Analyse- und Design-Methoden zum Einsatz kommen zu lassen. Die Ableitung eines nichtlinearen Stellgesetzes erfolgt dabei iterativ über einen referenzregler-orientierten polynomialen Entwurf. Dieser lässt sich leicht mit robusten Regelungsmethoden kombinieren, weshalb das System einer speziellen GBL-Unsicherheitsmodellierung sowie einer μ -Analyse zur Sicherstellung robuster Stabilität unterzogen wird. Eine Validierung der gewonnenen Regelgesetze wird durch Simulationen und Prüfstandtests durchgeführt. Für kritische Situationen werden abschließend zwei Ersatzregleriterationen mit den Zielen globale Stabilität bzw. erhöhte Robustheit vorgestellt.

Abstract

With the help of the velocity-based linearisation (VBL), which is in the main focus of the work, a new nonlinear control design approach for an active suspension is developed. The properties of the VBL allow for established linear analysis and design methods to be applied in almost all steps of the process. In order to iteratively derive a nonlinear control law, a reference control orientated, polynomial approach is presented which can also be easily combined with robust control methods. Thus, a special VBL uncertainty modelling and a μ -analysis are applied to the system in order to check for robust stability. The created control laws are validated in simulations and on a test rig. For critical situations, at the end two default controller iterations are introduced which aim for global stability and enhanced robustness respectively.

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG	1
1.1	MOTIVATION UND STATUS QUO AKTIVER RADAUFHÄNGUNGEN	1
1.1.1	Motivation und Konzepte.....	1
1.1.2	Ziele und Randbedingungen.....	3
1.1.3	Bewertungskriterien und Gütemaße.....	4
1.1.4	Gängige aktive Regelungsverfahren	6
1.2	ZIELE, HAUPTASPEKTE UND ERRUNGENSCHAFTEN DER ARBEIT	7
2	VIERTELFAHRZEUGMODELL UND PRÜFSTAND.....	11
2.1	NICHTLINEARES VIERTELFAHRZEUGMODELL.....	11
2.2	TEILLINEARES PRÜFSTANDSMODELL.....	16
3	THEORIE ZUR MODERNEN ROBUSTEN REGELUNG.....	21
3.1	NORMEN UND SINGULÄRWERTE.....	22
3.1.2	Vektor- und Matrixnormen	23
3.1.3	Signalnormen und -räume	24
3.1.4	Räume und Normen für Übertragungsfunktionen.....	24
3.2	DEFINITION VON UNSICHERHEITEN	25
3.2.1	Parametrische Unsicherheiten	25
3.2.2	Dynamische Unsicherheiten.....	26
3.3	UNSICHERHEITSMODELLIERUNG ÜBER LFRS	29
3.3.1	Linear Fractional Representations (LFRs)	29
3.3.2	LFR-Operationen	32
3.4	ROBUSTHEITSTEST MIT DEM MAXIMALEN SINGULÄRWERT (H_∞ -ANALYSE)	33
3.4.1	Robuster Stabilitätstest mit dem maximalen Singulärwert (SISO).....	35
3.4.2	Nomineller Performanztest mit dem maximalen Singulärwert (SISO)	36
3.4.3	Robuster Performanztest und grafischer Überblick (SISO)	37
3.4.4	Mixed-Sensitivity-Problem MSP	39
3.4.5	H_∞ -Analyse im MIMO-Fall.....	40
3.5	REGLERENTWURF MIT DER H_∞ -METHODIK.....	41
3.6	ROBUSTE REGELUNG MITTELS μ -ANALYSE.....	44
3.6.1	Strukturierte Unsicherheitsmatrizen.....	44
3.6.2	Definition des strukturierten Singulärwerts	45
3.6.3	Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts	47
3.6.4	Robuster Stabilitätstest mittels μ -Analyse	48
3.6.5	Robuster Performanztest mittels μ -Analyse.....	50

3.6.6	Robuster Reglerentwurf mittels μ -Synthese	52
3.7	ROBUSTE REGELUNG MIT INTEGRAL QUADRATIC CONSTRAINTS	53
3.7.1	Überblick über die IQC-Analyse.....	53
3.7.2	IQC-Bedingung für ein zeitvariantes Skalar	55
3.7.3	Vergleich mit der μ -Analyse	56
4	GESCHWINDIGKEITSBASIERTE LINEARISIERUNG, ANALYSE UND ENTWURFSMETHODIK	58
4.1	THEORIE ZUR GESCHWINDIGKEITSBASIERTEN LINEARISIERUNG (GBL).....	58
4.1.1	Herleitung der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung	58
4.1.2	Approximationsgüte durch die GBL	63
4.2	STABILITÄTSANALYSE UND ABGRENZUNG.....	70
4.2.1	Abgrenzung der GBL-Methodik zu gängigen Verfahren	70
4.2.2	Stabilitätsanalyse innerhalb der linearisierten GBL-Familie	71
4.2.3	Stabilitätsanalyse mittels gemeinsamer Lyapunov-Funktionen.....	72
4.2.4	Stabilitätsanalyse mittels Worst Case Gain.....	73
4.3	REGLERENTWURF MIT GBD	75
4.3.1	Geschwindigkeitsbasierte Design-Plattform	75
4.3.2	Spezielle GBD-Entwurfsverfahren und qualitative Bewertung	77
4.3.3	GBL-Methodik als robustes Regelungsverfahren	80
5	NICHTLINEARE ROBUSTE REGELUNG DES VIERTELFahrzeugs.....	82
5.1	MOTIVIERENDES BEISPIEL ZU SYSTEMEN MIT SCHNELLER ADAPTION/SCHALTUNG.....	82
5.2	ÜBERBLICK UND ZIELE DER REGELUNGSMETHODIK ROPE	87
5.3	INNERE REGELSCHLEIFE.....	89
5.4	GB-LINEARISIERUNG DES TEILLINEAREN VIERTELFahrzeugMODELLS	94
5.5	UNSICHERHEITSMODELLIERUNG VIERTELFahrzeug.....	97
5.5.1	Definition parametrischer und dynamischer Modellunsicherheiten	98
5.5.2	Definition von fiktiven Unsicherheiten und Trimpunktunsicherheiten	102
5.5.3	Frequenzgewichte und LFR-Generierung.....	108
5.5.4	LFR-Erstellung für Strecke, Regler und Regelkreis	109
5.6	REFERENZREGLERITERATION	113
5.6.1	Gewichte für den LQR-Entwurf.....	113
5.6.2	Iterativer Robustheitstest mit dem maximalen Singulärwert	115
5.7	NICHTLINEARER GBL-REGLERENTWURF MIT LOKALER STABILITÄTSANALYSE	118
5.7.1	Iteratives ROPE-Prinzip	118
5.7.2	1. Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_3^2)$	120
5.7.3	2. Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_i^2)$	122
5.7.4	Finaler Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_i)$	123

5.8	GBL-ROBUSTHEITSANALYSE MIT DEM STRUKTURIERTEN SINGULÄRWERT	126
6	VALIDIERUNG DURCH SIMULATIONEN UND PRÜFSTANDSTESTS	130
6.1	ERWEITERTER KALMAN-FILTER FÜR DIE PRÜFSTANDSREGELUNG	130
6.2	ERGEBNISSE KOMFORTORIENTIERTER REGLER (RK).....	134
6.3	ERGEBNISSE SICHERHEITSORIENTIERTER REGLER (RS)	142
6.4	ERGEBNISSE ROBUSTHEITSORIENTIERTER REGLER (RR).....	146
6.5	VERIFIZIERUNG AM VIERTELFahrZEUGPRÜFSTAND	148
7	ALTERNATIVE REGLERENTWÜRFE.....	151
7.1	GLOBAL STABILE ERSATZREGLERITERATION MITTELS IQC-ANALYSE.....	151
7.2	ROBUSTE ERSATZREGLERITERATION MITTELS MODIFIZIERTER μ -SYNTHESE	154
7.3	ERWEITERUNG AUF EIN SEMI-AKTIVES VIERTELFahrZEUGMODELL	157
8	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK.....	160
9	LITERATURVERZEICHNIS	162

1 Einleitung

Die Ansprüche an moderne Kraftfahrzeuge gehen heutzutage weit über das Merkmal der Fahrtüchtigkeit hinaus. Neben Motorleistung und Zuverlässigkeit rücken Aspekte des Fahrkomforts und der Fahrsicherheit immer stärker in den Vordergrund. Während passive Maßnahmen zur Steigerung dieser Aspekte speziell im PKW-Bereich längst zur Standardausstattung gehören, nehmen auch aktive Systeme inzwischen eine immer dominantere Rolle ein. Unter aktiv wird verstanden, dass ein Steuerungs- oder Regelungssystem gezielt dynamisch auf das Fahrzeug einwirkt und dadurch zu einem verbesserten Fahrverhalten oder Fahrgefühl beiträgt. Prinzipiell lassen sich diese Hilfssysteme – teils überschneidend und ohne Anspruch auf Vollständigkeit – folgenden Bereichen zuordnen:

- ✦ Fahrerassistenz / Längsdynamik / Querdynamik: z.B. Tempomat, Spurwechselassistent, ESP, ABS, Torque Vectoring, Einparkhilfe, adaptives Kurvenlicht, usw.,
- ✦ Kommunikation: z.B. Navigator, iPhone-Interface, Head-Up-Display, usw.,
- ✦ aktive Chassissysteme / Schwingungsdämpfung: z.B. aktive Stabilisatoren, aktive Aggregatlager, semi-aktive und aktive Radaufhängungen, usw.

Diese Arbeit befasst sich primär mit aktiven Radaufhängungen, wobei das Augenmerk auf der Vertikaldynamik des Fahrzeugs liegen soll. Die Haupterrungenschaften, welche in Kapitel 1.2 beschrieben werden, liegen hierbei in der Weiterentwicklung systemtheoretischer Grundlagen sowie zugehöriger Regelungsmethoden. Vor allem die Einführung eines neuen Reglerentwurfsverfahrens auf Basis einer speziellen Linearisierungsform sowie dessen erstmalige Anwendung auf ein Viertelfahrzeug stellen Hauptaspekte der Arbeit dar. Als Einstieg, um die Motivation und die charakteristischen Eigenschaften der Anwendung besser zu verstehen, soll im folgenden Kapitel 1.1 aber zuerst ein Überblick über den Status quo aktiver Radaufhängungen gegeben werden. Eine umfassende, allgemeine Zusammenfassung zu Fahrzeugdynamik und Fahrzeugsystemen ist z.B. in [Wong01] oder [Mits04] zu finden.

1.1 Motivation und Status quo aktiver Radaufhängungen

1.1.1 Motivation und Konzepte

Schwingungen im Fahrzeug können an verschiedenen Orten induziert werden und ganz unterschiedliche Gründe haben, z.B.

- ✦ im Motoraggregat, dem Getriebe und der Abgasanlage durch den Antrieb,
- ✦ in der Karosserie durch aerodynamische Kräfte,
- ✦ in der Radaufhängung / dem Federbein durch die Straßenanregung.

Vor allem die straßeninduzierte Anregung in der Radaufhängung ist hierbei als kritisch einzustufen, da sie sich, neben Aspekten des Fahrkomforts, auch besonders negativ auf die Fahrsicherheit auswirken kann. Gleichzeitig erweist sie sich als äußerst schwer zu antizipieren, da sie einen stochastischen Charakter besitzt und direkt abhängig von der Fahrbahnbeschaffenheit ist. Passive Systeme erreichen bei der Lösung dieser Probleme ihre Grenzen, weshalb es sich anbietet, aktive Systeme im Federbein zum Einsatz kommen zu lassen.

Aktive und semi-aktive Radaufhängungen können dabei auf unterschiedliche Weise realisiert werden, u.a. durch die folgenden Konfigurationen bzw. beliebige Kombinationen davon:

- ✦ semi-aktiv mit diskret oder kontinuierlich verstellbarem Dämpfer,
- ✦ langsam-aktiv durch Federfußpunktverstellung,
- ✦ vollaktiv durch hydraulisches Element parallel zu Feder und Dämpfer,
- ✦ vollaktiv durch Elektromotor parallel zu Feder und Dämpfer.

Detaillierte Ausführungen zum Gebiet der aktiven Radaufhängungen sowie allgemein zur aktiven Schwingungsdämpfung sind in [KuoS96], [Mits04] und [Ven93] zu finden, auf die hier ausdrücklich für alle Grundlagenfragen verwiesen sei. Ein Überblick über bewährte Konzepte und Regelungsverfahren ist in [Hrov97] gegeben.

In dieser Arbeit soll im Rahmen einer Prinzipstudie vor allem die vollaktive Variante mit E-Motor untersucht werden, welche maximale Regelungsfreiheitsgrade und eine hohe Bandbreite bietet. Da sie aber nach heutigem Stand der Technik auch einige gewichtige Nachteile mit sich bringt – vor allem einen hohen Energieverbrauch, eine große Masse und Einschränkungen durch begrenzte Aktorleistung – wird am Ende der Arbeit ein kurzer Exkurs über die Anwendung der Ergebnisse auf semi-aktive Elemente folgen. Erweiterungen auf langsam-aktive Systeme sind ebenfalls möglich, werden hier aber nicht näher untersucht.

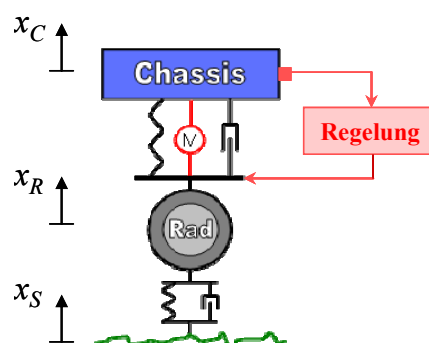


Abbildung 1-1: Grundkonzept aktives Viertelfahrzeug

Das Grundkonzept eines vollaktiven Federbeins (mit E-Motor „M“) ist in Abbildung 1-1 für ein abstrahiertes Viertelfahrzeug skizziert. Das Chassis steht dabei für die anteilige, gefederte Masse, das Rad für die entsprechende ungefederte. Über eine Sensorik werden Messsignale ermittelt, durch eine Regelung in Stellsignale für den Linearmotor umgewandelt und von diesem letztendlich in eine gewünschte Kraft zwischen Chassis und Rad umgesetzt.

1.1.2 Ziele und Randbedingungen

Wie bereits oben erwähnt verfolgen derartige aktive Radaufhängungen vor allem zwei Ziele: Erhöhung von Fahrkomfort und von Fahrsicherheit. Der gefühlte Fahrkomfort ist im abstrahierten Modell primär von der Chassisbeschleunigung $\ddot{x}_c(t)$ abhängig, im Idealfall sollte diese gleich 0 sein. Für gute Fahrsicherheit sollte das Rad stets ausreichend Bodenkontakt halten, was oft als „Grip“ bezeichnet wird. Als Kenngröße kann hierfür die dynamische Radlast verwendet werden, die gleich Null ist, wenn das Rad ideal dem Straßenprofilverlauf folgt. Darüber hinaus spielt als Randbedingung der maximale Federhub eine kritische Rolle: sollte dieser überschritten werden, so können die resultierenden Stöße stark negative Auswirkungen auf Komfort, Fahrsicherheit und Strukturintegrität haben. Erschwerend zu den genannten Anforderungen kommt hinzu, dass die Ziele Fahrkomfort und Fahrsicherheit bzw. Einhaltung des Federhubs in Konflikt zueinander stehen. Die folgende Abbildung soll dies veranschaulichen.

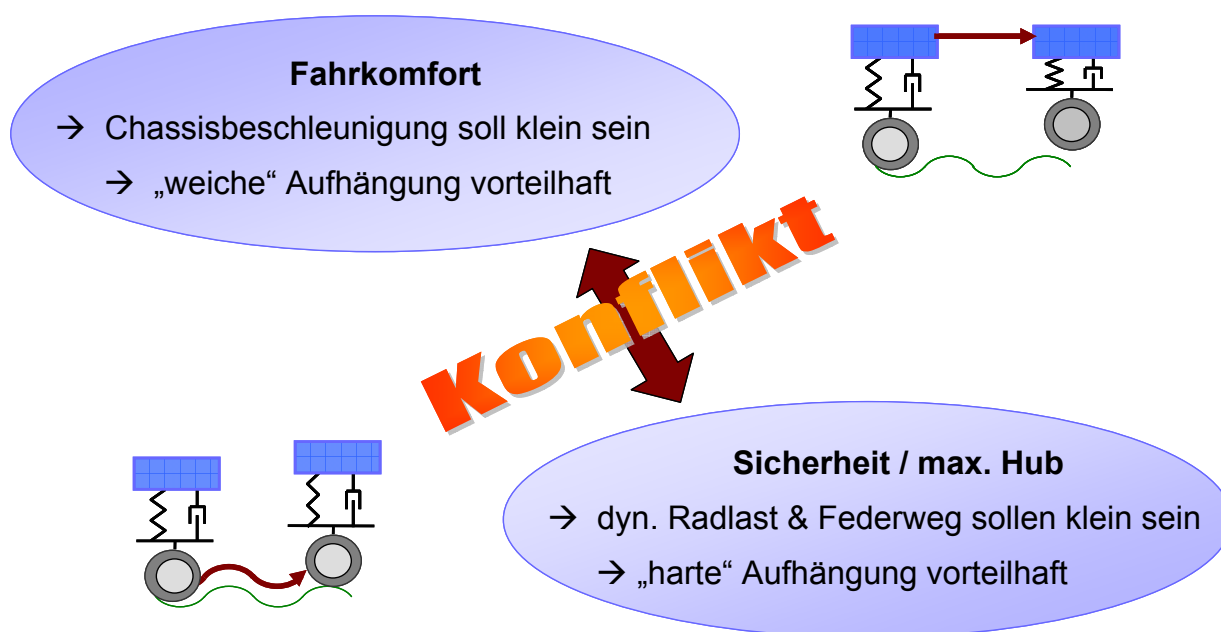


Abbildung 1-2: Konflikt Fahrkomfort – Fahrsicherheit / max. Hub

Neben den erwähnten Punkten dürfen auch die maximale Aktorkraft und die elektrische Durchschnittsleistung des Aktors nicht außer Acht gelassen werden, da eine Überschreitung dieser den Elektromotor bzw. in Form von Spritverbrauch den Geldbeutel des Fahrzeuginhabers empfindlich überlasten kann. Wie beschrieben weisen vollaktive Systeme zwar von Natur aus einen vergleichsweise hohen Energieverbrauch auf, dennoch soll dieser Punkt in den folgenden Betrachtungen nicht komplett ignoriert werden. Zusammengefasst lassen sich – ohne Berücksichtigung konstruktiver Aspekte – folgende, teils konkurrierende Hauptziele und Bedingungen für die Auslegung einer aktiven Radaufhängungsregelung formulieren.

Typische Ziele und Randbedingungen einer aktiven Radaufhängung:

- ✦ Minimierung der Chassisbeschleunigung,
- ✦ Minimierung der dynamischen Radlast bzw. Halten des Bodenkontakts,
- ✦ Berücksichtigung des maximalen Federhubs,
- ✦ Begrenzung der Aktorhöchstkraft,
- ✦ Begrenzung der Aktordurchschnittsleistung.

1.1.3 Bewertungskriterien und Gütemaße

Um die Ziele im Abschnitt oben mathematisch greifbarer zu machen, sollen einige Gütemaße definiert werden, um die Bewertung der Aufhängungsauslegung für Messungen oder Simulationen im Zeitbereich zu vereinfachen und vergleichbar zu gestalten. Ein bewährtes mathematisches Hilfsmittel ist hierbei das Root Mean Square (RMS).

Der menschliche Körper ist vor allem im Bereich 4 bis 8 Hz empfindlich gegenüber Schwingungen, weshalb dieser Bereich gemäß [VIng87] über $G_{Komf}(s)$ besonders gewichtet wird, siehe Abbildung 1-3. Grundlagen zur System- und Regelungstheorie seien im Folgenden vorausgesetzt bzw. können in [Föll94] oder [Lunz07] nachgelesen werden.

$$G_{Komf}(s) = \frac{1,1261 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{1}{2,2\pi} s + 1\right)}{\left(\frac{1}{0,24\pi} s + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4\pi} s + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{30\pi} s + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{200\pi} s + 1\right)} \quad (1-1)$$

Damit ergibt sich das Komfort-Gütemaß aus der Faltung der Laplace-Rücktransformierten von $g_{Komf}(t)$ aus (1-1) mit der (gemessenen) Chassisbeschleunigung zu

$$J_{Komf} = \sqrt{\int_0^t \left(g_{Komf}(t) * \ddot{x}_c(t)\right)^2 \cdot dt} \quad (1-2)$$

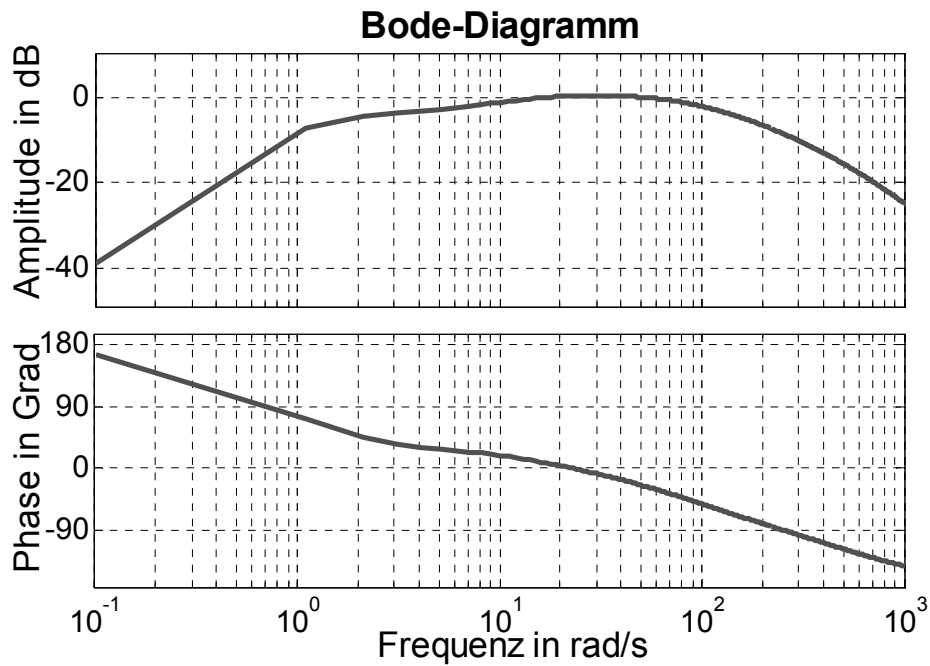


Abbildung 1-3: Komfortgewichtungsfunktion

Für die dynamische Radlast $F_{dyn}(t)$ lässt sich in ähnlicher Weise ein RMS-Sicherheitskennwert definieren, wobei hier teils auch anstatt des Quadrats die 4. Potenz verwendet wird, falls einzelne hohe Peak-Werte stärker gewichtet werden sollen.

$$J_{Sich} = \sqrt{\int_0^t (F_{dyn}(t))^2 \cdot dt} \quad (1-3)$$

Da eine kleine dynamische Radlastschwankung an sich kein Problem darstellen muss, sondern primär ein Abheben ($LO = \text{Lift-Off}$) verhindert werden soll, kann hierfür ein eigener Kennwert $\tau_{\kappa LO}$ eingeführt werden. Dieser gibt an, wie lange (in Sekunden) die Reifenausfederung weniger als κ mm vom Abheben entfernt war. Zur Berechnung werden die Einheitssprungfunktion $\sigma(\cdot)$ und die maximale Reifenausfederung Δx_{LO} verwendet. Die verwendeten vertikalen Positionen von Rad und Straße wurden in Abbildung 1-1 eingeführt.

$$\tau_{\kappa LO} = \sqrt{\int_0^t \sigma((x_R - x_s) - (\Delta x_{LO} - \kappa / 1000)) \cdot dt}, \quad \Delta x_{LO} > \kappa / 1000 \quad (1-4)$$

Zu den obigen Kriterien ist vor allem noch die Einhaltung des maximalen Federhubs wichtig, der in Kapitel 2 definiert wird. Falls dieser verletzt wird, hat dies im Sinne der Strukturintegrität natürlich Auswirkungen auf die Sicherheit, aber ebenfalls auf den Komfort,

da in diesem Fall ein „Schlag“ zum Fahrersitz weitergeleitet wird. Durch Zusatz- und Zuganschlagfedern kann dieser Effekt geschwächt, sollte jedoch dennoch möglichst vermieden werden.

$$\{x_C - x_R\}_{\max} = H_{\max} \leq 0,05 \text{ m} \quad (1-5)$$

Die maximal zugelassene Aktorkraft (entnommen aus Kapitel 2)

$$F_{Akt, \max} := 2 \text{ kN} , \quad (1-6)$$

die hier trotz eines Kraftpotentials von über 3 kN aus Sicherheitsgründen auf 2 kN beschränkt ist, stellt an sich schon einen Kennwert dar.

Für die Leistungsbewertung des Aktors wird hier der RMS-Wert der mechanischen Leistung verwendet, da dieser über eine Kraft- (F_{Akt}) und Weg-Messung meist einfach zugänglich ist (die elektrische Leistung kann näherungsweise z.B. auch über den entsprechenden Wirkungsgrad berechnet werden).

$$j_{P_{Akt}} = \sqrt{\int_0^t (F_{Akt} \cdot (\dot{x}_C - \dot{x}_R))^2 \cdot dt} \quad (1-7)$$

1.1.4 Gängige aktive Regelungsverfahren

Aufgrund der komplexen Zeitbereichsdefinitionen und des konkurrierenden Charakters der in Kapitel 1.1.3 vorgestellten Gütemaße werden für die Reglerentwicklung vollaktiver Fahrwerke oft optimale Entwurfsverfahren wie LQR-, H_2 - oder H_∞ -Methoden verwendet. Eine allgemeine Einführung in den optimalen Radaufhängungsentwurf ist z.B. in [Hrov93] zu finden, während [Hrov97] einen umfangreichen Überblick über gängige, bewährte Entwurfsmethoden bietet. Einige grundlegende, beispielhafte Veröffentlichungen zu den aktuell relevanten Regelungsmethoden aktiver Viertelfahrzeuge sollen im Folgenden zusammengefasst werden; Erweiterungen auf das Gesamtfahrzeug werden unter Verwendung ähnlicher Methoden z.B. in [Yama90] diskutiert.

Eine der wichtigsten aktuellen Verfahren stellen die LPV-Methoden dar, wie sie in [Fial00] oder in Verbindung mit Gain Scheduling in [Fial02] beschrieben werden. Diese Methodik ist teilweise verwandt mit den in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren, die wesentlichen Unterschiede zu LPV und Gain Scheduling werden in Kapitel 4.2.1 erörtert.

Weitere dominante Entwicklungen stellen spätestens seit den 90er Jahren die (direkt) nichtlinearen und die adaptiven Ansätze dar. In [Alle95] wird die nichtlineare mit der adaptiven Idee verbunden, wohingegen bereits in [Gord91] beide vom Prinzip her kritisch miteinander verglichen werden. Während [LinJ97] ein nichtlineares Backstepping als Lösung für aktive Radaufhängungen propagiert, führt [ElBe96] eine Methodik ein, bei der das Reglergesetz adaptiv an die Straßenbeschaffenheit angepasst wird.

Aufgrund des nichtlinearen Systemcharakters und der oft schwankenden Parametern in Radaufhängungen finden auch robuste Verfahren im Reglerentwurf Anwendung, so wie es teils auch in dieser Arbeit der Fall sein wird. [Mora92], welcher Massenschwankungen mit einbezieht, und [Lauw04], der einen allgemeinen robust-linearen Reglerentwurf präsentiert, sind hierfür gute Beispiele. Darüber hinaus existieren auch einige Randströmungen, von denen hier nur in Form von [LinY93] und [YehE94] das Fuzzy Control sowie von [Kuri98] das Sliding Mode Control für aktive Radaufhängungen angesprochen seien.

Da am Ende dieser Arbeit auch ein kurzer Ausblick auf die semi-aktive Regelung gegeben wird, sollen entsprechend auch einige relevante Veröffentlichungen in diesem Bereich Erwähnung finden. Hervorzuheben sind hierbei u.a. [Karn74], der schon früh Grundlagen für darauf folgende Methoden gelegt hat. [Rhak85] stellt als wichtige Neuerung den „On-Off Damper“ vor, während [YiHe93] eine semi-aktive Regelung der dynamischen Radlast verwendet. Weiterhin wird in [Tseng94] ein guter Überblick über optimale und suboptimale Ansätze sowie z.B. in [Gugl08] eine umfassende allgemeine Zusammenfassung gängiger Entwurfsmethoden geboten.

1.2 Ziele, Hauptaspekte und Errungenschaften der Arbeit

In dieser Arbeit soll aufbauend auf der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung (GBL) eine komplett neue Entwurfsmethodik für nichtlineare, robuste aktive Radaufhängungen vorgestellt werden. Kann die Theorie der GBL an sich bereits als noch sehr jung bezeichnet werden, so werden ihre Anwendung auf die Schwingungsdämpfung im Kfz und die Kombination mit trimpunktabhängigen μ -Methoden – nach bestem Wissen des Autors – in dieser Arbeit erstmals erwähnt und untersucht. Deshalb sollen hier neben der Vorstellung des Reglers und der Robustheitsanalyse auch größere Abschnitte der Untersuchung grundlegender Eigenschaften, Chancen und Grenzen der Methodik gewidmet werden. Insbesondere soll auch vermittelt werden, welche Teile der Methodik besonders kritisch oder arbeitsaufwändig sind und welche Ansätze für zukünftige Studien ausgeschlossen werden können.

Die Ziele dieser Arbeit (in Abgrenzung zu anderen Arbeiten) sind dabei

- ✦ die grundlegende Untersuchung der GBL-Methodik für aktive Radaufhängungen,
- ✦ der Ermittlung eines nichtlinearen Reglers mit hoher Performanz,

- ✦ die durchgängige Bewahrung bewährter, linearer Methoden für Entwurfsberechnungen,
- ✦ die Sicherstellung von angemessener Robustheit des geschlossenen Kreises.

Während die Verwendung nichtlinearer Regler für aktive Radaufhängungen bereits in vielen Veröffentlichungen vorgeschlagen wurde, s. z.B. [Gord91], soll hier ein völlig neuer Weg zur Ermittlung eines solchen Reglers beschrieben werden. Ziel der Arbeit ist dabei weniger die Herleitung eines einzelnen, speziellen Entwurfsalgorithmus, sondern die Vorstellung einer Entwurfsplattform, welche es erlaubt, mit Hilfe fast beliebiger linearer Methoden ein nichtlineares Stellgesetz zu bestimmen. Weiterhin lassen sich die auf Basis dieser Plattform gefundenen Regler in besonders geeigneter Weise mit μ -Methoden kombinieren, um die Robustheit des Gesamtsystems zu untersuchen. Angemerkt sei, dass im Rahmen der nichtlinearen Reglerermittlung auch die modellierten Nichtlinearitäten des passiven Systems mit eingebunden werden.

Als Fundament dieser Entwurfsplattform dient die geschwindigkeitsbasierte Linearisierung, die eine Erweiterung der (klassischen) Arbeitspunkt- bzw. Trajektorien-Linearisierung darstellt, indem sie die erste Zeitableitung des nichtlinearen Systems betrachtet. Dadurch ermöglicht sie nicht nur, beliebige nichtlineare Systeme in eine (im Sinne der Approximationsgüte) optimale Quasi-LPV-Form zu bringen. Durch ihre Anwendung auf beliebige Punkte des Zustandsraums erlaubt sie auch Systemanalysen fernab von Gleichgewicht-Arbeitspunkten, wodurch im Rahmen von linearen Stabilitätstests die vom klassischen Gain Scheduling bekannten, hohen Restriktionen für den Übergang zwischen Gleichgewichtspunkten weitestgehend (und teils komplett) abgeschwächt werden. Weiterhin grenzt sich die GBL-Methodik vom Gain Scheduling dadurch ab, dass sie auf Grund ihrer Gültigkeit über den gesamten Zustandsraum geeignete Interpolationsansätze aufzeigen kann, um aus linearen lokalen Reglern ein globales nichtlineares Regelgesetz zu formen.

Wegen dieser Eigenschaften forciert die GBL die durchgängige Anwendung linearer Entwurfs- und Analyse-Methoden bei der nichtlinearen Reglererstellung, was sie speziell für solche industrielle Anwendungen attraktiv macht, in denen überschaubare Subsysteme durch Kopplungen und Schaltstrategien zu einem komplexen, nichtlinearen Gesamtsystem verschmolzen werden sollen. Dies trifft auch auf aktive Radaufhängungen zu, wo zum einen die Aktorik je nach Fahrsituation durch unterschiedliche Regelsysteme angesteuert wird (Vertikaldynamik, ABS, ESP usw.). Zum anderen müssen hier Kopplungen des Regelsystems mit benachbarten Regelkreisen (z.B. Wankstabilisierung) berücksichtigt werden.

Obwohl auch die GB-Design-Plattform (GBD-Plattform) keine globale Optimalität beim Reglerentwurf und keine hundertprozentige Sicherheit bei Stabilitätstests bieten kann, so wird sie in jedem Fall immer einen qualitativen Mehrwert im Vergleich zu klassischen linearen Methoden liefern, ohne aber die oft hoch komplexen Robustheits-, Konvergenz- oder

Entwurfsprobleme direkter nichtlinearer Methoden aufzuweisen. Letztendlich bleibt abzuwägen, ob im Einzelfall der zusätzliche Modellierungsaufwand der GBL-Methodik im Vergleich zu klassischen linearen Methoden gerechtfertigt ist. Für die Anwendung der aktiven Radaufhängung soll dies im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden. Die Hauptaspekte und neuen Errungenschaften der Arbeit stellen sich dabei wie folgt dar:

- ✦ erstmalige Ermittlung des Potentials sowie Bewertung geeigneter Aspekte der GBL-Methodik für aktive Radaufhängungen;
- ✦ Formulierung neuer bzw. Überarbeitung bestehender nomineller Stabilitätstests für das geregelte Viertelfahrzeugsystem innerhalb der GBD-Plattform;
- ✦ Erarbeitung eines ausführlichen gemischt parametrisch-dynamischen Unsicherheitsmodells inkl. Performanzgewichten;
- ✦ Darstellung nichtlinearer Reglerparameter im Sinne von fiktiven Unsicherheiten;
- ✦ erstmalige Einführung von Trimpunkt-Unsicherheiten innerhalb der GBD-Plattform;
- ✦ Vorstellung eines neuen nichtlinearen Reglers auf Basis einer iterativen GBL-Entwurfsmethodik – ausgehend von robusten Referenzreglerentwürfen bis hin zu nichtlinearen Interpolationsansätzen für den Gesamtregler;
- ✦ hierfür GBL-Robustheitstests des nichtlinearen Reglers mittels μ -Analysen;
- ✦ Ableitung eines hochrobusten linearen Ersatzreglers durch eine neu eingeführte modifizierte μ -Synthese;
- ✦ Bestimmung eines nichtlinearen, global stabilen Ersatzreglers mittels IQCs;
- ✦ Validierung von drei verschiedenen Reglerentwürfen in Simulationen und Vergleichsstudien sowie Verifikation am Viertelfahrzeug-Prüfstand.

Insbesondere die Anwendung der GBL-Analyse und der trimm-/arbeitspunktabhängigen μ -Analyse auf aktive Radaufhängungen sowie die Kombination der beiden im Rahmen eines nichtlinearen Reglerentwurfs innerhalb der GBD-Plattform stellen neue Forschungsergebnisse dar. Dadurch wird zum einen ermöglicht, trotz durchgängiger Anwendung linearer Methoden mit überschaubarem Mehraufwand einen nichtlinearen Regler zu erzeugen, bei dem der Entwurf an keine bestimmten linearen Verfahren gebunden ist und tiefere Stabilitätsaussagen erlaubt als klassische Ansätze. Zum anderen können hierbei – im Gegensatz zu direkten nichtlinearen Verfahren, z.B. auf Lyapunov-Basis – stets die Auffindbarkeit einer Lösung und ein hoher Grad an Robustheit gegen Modellunsicherheiten garantiert werden. Weiterhin bleibt innerhalb dieses Entwurfsvorgehens ein höchst möglicher Approximations- und damit Vergleichbarkeitsgrad zwischen linearisiertem Modell und realem System erhalten. Im Gegensatz dazu basieren die meisten nichtlinearen bzw. LPV-Analyseverfahren trotz mäßiger

Robustheitseigenschaften oft auf einer quasi-linearen Modellfamilie, die nur bedingt mit der tatsächlichen nichtlinearen Dynamik verwandt ist.

Als Hauptresultat der Arbeit bzgl. aktiver Radaufhängungen ist sicherlich die resultierende nichtlineare Reglerform, genannt „ROPE“, zu erwähnen, die eine überraschend einfache Struktur aufweist, so dass bestehende lineare Regler auch ohne ausführliche theoretische Herleitungen in ein entsprechendes Stellgesetz umgewandelt werden können. So bleibt es zukünftigen Anwendern selbst überlassen, ob sie aus möglicherweise bereits vorhandenen linearen Entwürfen per „Trial & Error“ und anhand von Simulationen einen nichtlinearen Regler aufwandsarm ableiten oder ob sie das Regelgesetz mit Hilfe von GBL-Modellen und GBL-Analysen optimieren wollen. Auch die Robustheitsanalysen, Ersatzreglerentwürfe sowie die Wahl der linearen Entwurfsmethoden für die Referenzregler stellen nur modulare Bausteine einer integrierten Methodik dar, deren einzelne Submethoden je nach Bedarf hinzugefügt oder weggelassen werden können, wobei sich an der GBD-Plattform als Grundlage jeweils nichts ändert.

Vor einer detaillierteren Diskussion der GBD-Plattform sollen aber zuerst relevante Grundlagen beschrieben werden. Im folgenden Kapitel 2 wird das Viertelfahrzeugmodell vorgestellt, welches als Basis aller Analysen und Entwürfe dient. Anschließend werden in Kapitel 3 umfangreiche theoretische Grundlagen zur Modellierung von Systemunsicherheiten und zu modernen Robustheitstests zusammengefasst. Kapitel 4 führt dann die Theorie der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung auf und diskutiert verschiedene, auf ihr aufsetzende Möglichkeiten für Stabilitätsanalysen und Reglerentwürfe. In Kapitel 5 werden die Haupterrungenschaften der Arbeit in Form einer neuen nichtlinearen Reglerauslegung für das Viertelfahrzeug präsentiert, welche sowohl lokale Stabilitäts- als auch Robustheitsaspekte adäquat berücksichtigt. Zugehörige Simulationsergebnisse und Prüfstandsmessungen werden in Kapitel 6 gezeigt. Für kritische Situationen leitet das Kapitel 7 Ersatzregler mittels zweier neu entwickelter, iterativer Verfahren ab. Eine Erweiterung auf semi-aktive Systeme sowie eine Zusammenfassung aller Ergebnisse in Kapitel 8 schließen die Arbeit ab.

2 Viertelfahrzeugmodell und Prüfstand

Grundlage für alle Reglerentwürfe und -analysen in dieser Arbeit sind Modelle eines Viertelfahrzeugprüfstands, der am Lehrstuhl für Regelungstechnik an der Technischen Universität München aufgebaut wurde. Die folgenden Abschnitte sollen zuerst die Herleitung physikalischer Ersatzmodelle und anschließend den Prüfstand selbst kompakt beschreiben.

2.1 Nichtlineares Viertelfahrzeugmodell

Beim Reglerentwurf für die Vertikaldynamik eines Fahrzeugs hat es sich als vorteilhaft erwiesen und etabliert, ein vereinfachtes physikalisches Ersatzmodell der Radaufhängung zu benutzen. In diesem Ersatzmodell werden üblicherweise zumindest Rad, Reifen, Aufbaufeder, Aufbaudämpfer und die anteilige Chassismasse bzw. Karosseriemasse berücksichtigt. Optional können auch Lenkstangen, Gummilager und flexible Strukturen mit eingebunden werden, jedoch ist dies (anwendungsabhängig) oft nicht erforderlich. Für Schwingungskomfortuntersuchungen reicht in der Regel die Analyse des Frequenzbereichs bis ca. 25 Hz aus, um hinreichend genaue Aussagen treffen zu können. Anbindungen mit entsprechend höherer Steifigkeit können hierbei von vornherein als starr betrachtet werden. Auch nichtlineare Reibungseffekte wie die Coulomb-Reibung können oftmals vernachlässigt werden, dies sollte vorab überprüft werden.

Generell darf nicht vergessen werden, dass eine separate Betrachtung der Vertikaldynamik an einem Viertelfahrzeug – ohne Berücksichtigung von Querdynamik, Längsdynamik und sonstigen Kopplungen mit dem restlichen Fahrzeug – nur begrenzt Sinn macht. Gerade aber bei der Auslegung von aktiven Regelungssystemen, die oft dezentral und modular aufgebaut sind, ist die gewählte Betrachtung üblich und angebracht. Denn für den Entwurfsprozess sind vereinfachte Modelle ausreichend, solange sie qualitativ zuverlässige Aussagen liefern. Unabhängig davon ist es für viele Entwurfsverfahren ohnehin vorteilhaft, die Systemordnung möglichst klein zu halten. Dies steht auch im Einklang mit den für den Reglerentwurf häufig verwendeten 1D-Simulationstools wie Matlab/Simulink, in denen komplexere 3D-Modelle nur unter hohem Aufwand abgebildet werden können.

Zur Formulierung von Viertelfahrzeugmodellen existieren zahlreiche Veröffentlichungen, wobei hier repräsentativ auf das Standardwerk [Mits04] verwiesen sei, in dem alle wichtigen Grundlagen nachgeschlagen werden können. Im Folgenden soll ein nichtlineares Viertelfahrzeugmodell hergeleitet werden, um einen Überblick über die relevanten dynamischen Eigenschaften zu gewinnen. Die Modellierung erfolgt dabei für ein Quad aus Abbildung 2-1, da für dieses auch der erwähnte Prüfstand aufgebaut wurde. Genaue Details zur Modellherleitung können auch in [Herr08] sowie der Arbeit [Mäde07] nachgeschlagen

werden, in der verschiedene Regelungsansätze für ein nichtlineares Viertelfahrzeugmodell getestet wurden.

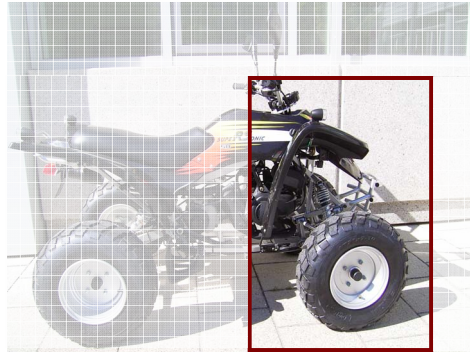


Abbildung 2-1: Quad für den Viertelfahrzeugprüfstand

Ausgangslage für die Modellierung ist Abbildung 2-2 (s. [Herr08]), in der das nichtlineare Ersatzsystem grafisch veranschaulicht wird. In diesem Modell wurden bereits einige Vereinfachungen getroffen: alle Massen wurden als Punktmassen idealisiert, alle inneren Reibungskräfte wurden zu einer einzigen Kraft parallel zur Dämpfung zusammengefasst, Gummilager wurden vernachlässigt, die Geometrie wurde auf eine zweidimensionale Ebene beschränkt. Dennoch kann dieser Modellierungsansatz bereits als sehr genau bezeichnet werden, da sich die getroffenen Vereinfachungen erfahrungsgemäß nur gering auf das relevante Systemverhalten auswirken.

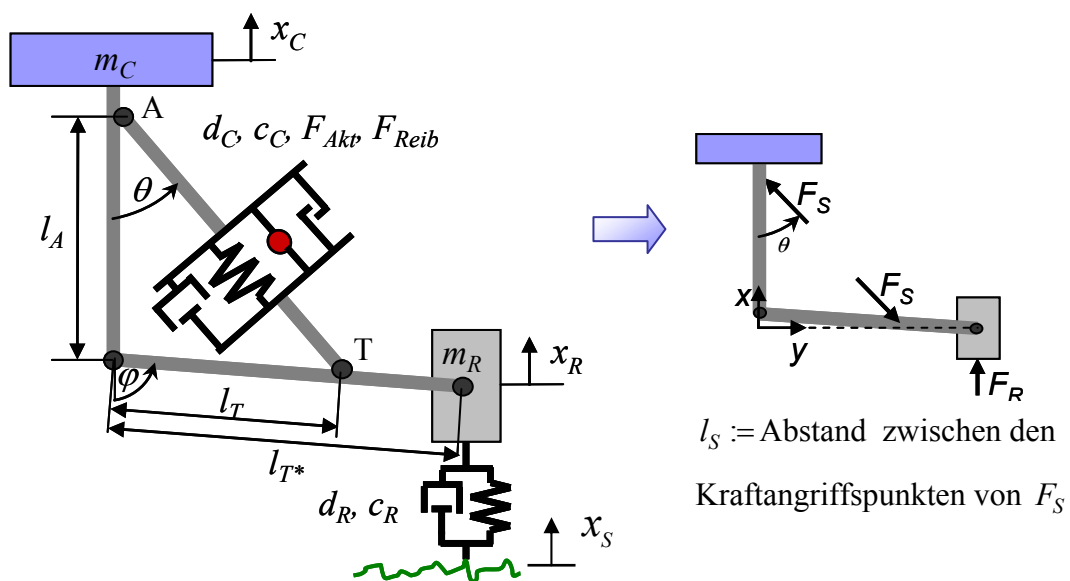


Abbildung 2-2: Nichtlineares Viertelfahrzeugmodell und Ersatzmodell

Mit Hilfe der Lagrange-Mechanik, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll (s. hierzu z.B. [Gold02]), lassen sich gemäß [Herr08] die zugehörigen Differentialgleichungen herleiten. Als generalisierte Koordinaten bieten sich

$$\mathbf{q} = [x_c \ \varphi]^T \quad (2-1)$$

an. Somit ergeben sich die kinetischen Energieanteile des Systems zu

$$T_c = \frac{m_c}{2} \dot{x}_c^2, \quad T_w = \frac{m_R}{2} (\dot{\varphi}^2 l_T^2 + 2 \sin(\varphi) \dot{\varphi} l_{T^*} \dot{x}_c + \dot{x}_c^2). \quad (2-2)$$

Die potentielle Energie V des Systems ist als 0 anzunehmen, da die Gewichtskraft durch eine Betrachtung um den Gleichgewichtsarbeitspunkt herum aus dem Ansatz herausfällt. Auch die Federkräfte werden hier nicht als mögliche Quellen potentieller Energie berücksichtigt, sondern als nichtkonservative Kräfte in F_s (für die „Suspension“ der Länge l_s zwischen den Punkten A und T) und F_R (für „Reifen/Rad“) integriert. Dies erlaubt später eine nichtlineare Modellierung dieser Kräfte zusammen mit den Dämpfer-, Reibungs- und Aktorkräften.

$$\begin{aligned} F_R &= F_{c_r} (x_R - x_S) + F_{d_r} (\dot{x}_R - \dot{x}_S) \\ F_s &= F_{c_c} (l_s - l_{s0}) + F_{d_c} (\dot{l}_s) + F_{Fric} (\dot{l}_s, t) + F_{Akt}(t) \end{aligned} \quad (2-3)$$

Im y - x -Koordinatensystem (siehe Ersatzmodell in Abbildung 2-2) können die nichtkonservativen Kräfte in Vektorform als

$$\mathbf{F}_{S,unten} = \mathbf{F}_{S1} = \begin{bmatrix} -F_s \cdot \sin(\theta) \\ F_s \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{S,oben} = \mathbf{F}_{S2} = \begin{bmatrix} F_s \cdot \sin(\theta) \\ -F_s \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ F_R \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

definiert werden, was (s. [Mäde07]) zum generalisierten nichtkonservativen Kraftvektor

$$\mathbf{Q}_{nc} = \sum_{i=\{S1,S2,R\}} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right]^T \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} F_R \\ \sin(\varphi) \left(\frac{-l_A l_T F_s}{l_s} + l_{T^*} F_R \right) \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

mit $l_s = l_s(\varphi) = \sqrt{l_A^2 + l_T^2 + 2l_A l_T \cos(\varphi)}$ führt, wobei r_i die jeweiligen Kraftangriffspunkte repräsentiert. In Anlehnung an die Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}_{nc} \quad (2-6)$$

können die Bewegungsgleichungen des Systems mit $m_s = m_s(\varphi) = (m_c + \cos^2(\varphi) \cdot m_r)$ als

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{m_c \sin(\varphi) F_R}{m_R l_{T^*} m_s} - \frac{l_C l_T (m_c + m_R) \sin(\varphi) F_S}{m_R l_{T^*}^2 m_s l_S} + \frac{m_R \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\phi}^2}{m_s}, \\ \ddot{x}_C &= \frac{\cos^2(\varphi) F_R}{m_s} + \frac{l_A l_T \sin^2(\varphi) F_S}{l_{T^*} m_s l_S} - \frac{m_R \cdot l_{T^*} \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\phi}^2}{m_s} \end{aligned} \quad (2-7)$$

angeschrieben werden (m_s ist hierbei eine Art effektive Masse, die den Durchgriff vom Rad auf das Chassis berücksichtigt). Das System (2-7) muss noch um eine Aktordynamik ergänzt werden, welche einen Zusammenhang zwischen der Reglerstellgröße $u(t)$ und der Aktorkraft $F_{Akt}(t)$ herstellt. In vielen Fällen ist hierfür ein PT2-Glied in Kombination mit einem Totzeitglied ausreichend, wobei letzteres im Falle einer Linearisierung durch eine Pade-Approximation 1. Ordnung angenähert werden kann.

Für die Reibung kann in einem ersten Ansatz ein nichtlineares, zeitabhängiges Gesetz verwendet werden, wie es z.B. in [Canu95] eingeführt wurde. In ausführlichster Form können damit viskose Reibung $d_{visk} \dot{i}_S$ sowie Haftreibung F_{Stat} und Coulomb-Reibung F_{Coul} als Teil einer dynamisch verzögerten Stribeck-Reibung F_{Strib} berücksichtigt werden, um Hysterese und Gleitfilmeffekte nachzubilden. F_{Ext} ist dabei eine externe, parallel zur Reibungskraft antreibende Kraft, $\varepsilon \ll 1 \in \mathbb{R}^+$ ein Hilfwert, um Sprünge der Reibungskraft zu vermeiden, T_{Strib} die Zeitkonstante der Verzögerung 1. Ordnung und v_{Strib} ein Formfaktor der Stribeckkurve (die den Übergang der statischen in die viskose Reibung beschreibt).

$$F_{Reib} = \begin{cases} -F_{Ext}, & \text{falls } |\dot{i}_S| \leq \varepsilon \text{ und } |F_{Ext}| \leq F_{Stat}(t) \\ -F_{Stat}(t) \cdot \text{sign}(F_{Ext}), & \text{falls } |\dot{i}_S| \leq \varepsilon \text{ und } |F_{Ext}| > F_{Stat}(t) \\ -F_{Strib} \cdot \text{sign}(\dot{i}_S) - d_{visk} \dot{i}_S, & \text{falls } |\dot{i}_S| > \varepsilon \end{cases} \quad (2-8)$$

$$F_{Strib} + T_{Strib} \dot{F}_{Strib} = F_{Coul} + (F_{Stat}(t) - F_{Coul}) \cdot e^{(-|\dot{i}_S|/v_{Strib})}$$

In den Arbeiten [Herr08], [Mäde07], [Lörc08] und [Hube10] wurden intensive Untersuchungen zum nichtlinearen Modell durchgeführt. Ohne an dieser Stelle auf die Details einzugehen, lassen sich auf Grund von Simulationen und eines Ergebnisvergleichs mit dem im nächsten Abschnitt vorgestellten teillinearen Modell (s. [Koch10]) folgende Schlussfolgerungen für das betrachtete Viertelfahrzeugmodell ziehen.

- ✘ Das nichtlineare Modell eignet sich als Grundlage für einen robusten Reglerentwurf, der sich hierbei aber wesentlich aufwändiger als für ein rein lineares oder teillineares Ausgangsmodell gestaltet.
- ✘ Der Einfluss eines zeitabhängigen Reibungsgesetzes auf die relevante Systemdynamik ist gering und daher vernachlässigbar, da vor allem der Bereich von 4 bis 8 Hz (s. Kapitel 1.1.3) für das Komfortgütemaß im Dauerbetrieb verwendet wird, in dem Gleitfilmeffekte eine vernachlässigbare Rolle spielen.
- ✘ Auch die Coulomb-Reibung hat auf den Reglerentwurf untergeordneten Einfluss, sollte im Hinblick auf quantitative Performanzanalysen aber zumindest näherungsweise in Simulationen berücksichtigt werden.
- ✘ Das nichtlineare Modell kann hilfreich bei der Herleitung oder Validierung eines Unsicherheitsmodells sein. Die geometrischen Nichtlinearitäten sind allerdings vernachlässigbar, da für realistische Anregungen $|\varphi(t) - \varphi(t=0)| \cdot 180^\circ / \pi < 10^\circ$ gilt, wie in Abbildung 2-3 zu sehen ist. Dort wurde ein in der Semesterarbeit [Hube10] identifiziertes nichtlineares Modell mit einem typischen x_s -Anregungssweep von 1 bis 30 Hz beaufschlagt (Startamplitude 0,05 m; gefiltert über doppeltes PT1-Glied mit Eckfrequenz 10 rad; s. auch Kapitel 5.3 für Details zur Eckfrequenz).

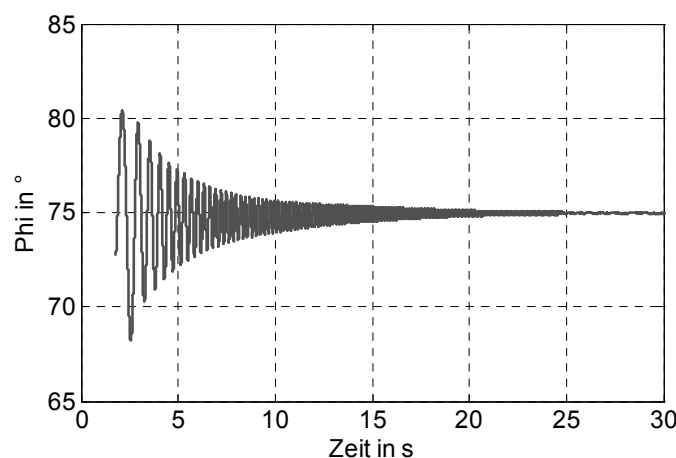


Abbildung 2-3: Simulation nichtlineares Modell

- ✦ Vor allem bei großen Schwankungen des Gleichgewichtsarbeitspunktes bzw. bei dessen Bestimmung ist das nichtlineare Modell wesentlich genauer als Modelle mit linearer Geometrie.
- ✦ Eine Linearisierung der Geometrie ist aber lokal zulässig, sofern die nichtlinearen Kennlinien entsprechend angepasst werden.

Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse werden die Reglerentwürfe in dieser Arbeit primär auf einem „klassischen“ linearen Viertelfahrzeugmodell beruhen, welches durch nichtlineare, experimentell identifizierte Kennlinien ergänzt und im nächsten Abschnitt vorgestellt wird. Auf das nichtlineare Modell soll nur bei Bedarf zurückgegriffen werden.

2.2 Teillineares Prüfstandsmodell

Die Identifikation des Prüfstandsmodells und Details zum Aufbau des Prüfstands sind in [Koch10] ausführlich beschrieben. Im Folgenden sollen nur die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und in Anlehnung an [Mits04] ein allgemeines teillineares Viertelfahrzeugmodell hergeleitet werden. Letzteres ergibt sich aus dem nichtlinearen Modell in Abbildung 2-2 durch Linearisierung der Geometrie, die Vereinfachung des Reibungsgesetzes und durch die Vernachlässigung der Dämpferkräfte im Reifen. Diese Idealisierungen für den Reglerentwurf können als zulässig betrachtet werden, sofern die Ergebnisse in Tests validierbar sind.

Im Unterschied zum komplett linearen Modell aus Abbildung 1-1 besitzt das teillineare Modell nichtlineare Kennlinien für Feder- und Dämpferkräfte. Für das betrachtete Quad hat sich gezeigt (s. [Koch10]), dass die Aufbaufederkennlinie im relevanten Hubbereich als linear betrachtet werden kann. Die viskose Reibung soll im Folgenden mit der parallel wirkenden Kraft des Aufbaudämpfers F_{dc} zusammengefasst werden, während die nichtlineare Reibung auf die Coulomb-Reibungskraft F_{Coul} beschränkt wird. Die nichtlineare Reifenfederkraft F_{cR} berücksichtigt neben den vertikalen Gummieigenschaften auch den Fall des Abhebens von der Straße, wohingegen die Reifendämpfung aufgrund ihres kleinen Wertes (von hier 38,0Ns/m) vernachlässigt wird. Damit lassen sich die Zustandsgleichungen für dieses Modell als (2-9) anschreiben, wobei u die Stellgröße des Reglers, x_1 der Aufbaufederhub, x_2 der Reifenfederhub und x_3 bzw. x_4 die Vertikalgeschwindigkeiten von Chassis bzw. Rad sind. Diese Wahl der Zustandsvariablen eignet sich besonders für Komfortanalyse und Reglerauslegung, da hier die in den Gütemaßen (1-2), (1-5) und (1-7) eingesetzten Signale direkt als x_1 und x_3 vorliegen. Für die Approximation der Aktordynamik, welche durch \dot{x}_5 und \dot{x}_6 in (2-9) beschrieben wird, verwendet das teillineare Modell ein reines PT2-Glied.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - x_4 \\
\dot{x}_2 &= \left(-c_C x_1 + F_{dC}(v) + F_{Coul}(v) + C_{Akt,2} x_6 \right) / m_C \\
\dot{x}_3 &= x_4 - \dot{x}_S \\
\dot{x}_4 &= \left(c_C x_1 - F_{dC}(v) - F_{Coul}(v) - F_{cR}(x_3) - C_{Akt,2} x_6 \right) / m_R \\
\dot{x}_5 &= A_{Akt,11} x_5 + B_{Akt,1} u \\
\dot{x}_6 &= A_{Akt,21} x_5 + A_{Akt,22} x_5 \\
\text{mit } x_1 &= x_C - x_R, \quad x_2 = \dot{x}_C, \\
x_3 &= x_R - x_S, \quad x_4 = \dot{x}_R, \quad v = x_4 - x_2
\end{aligned} \tag{2-9}$$



Abbildung 2-4: Viertelfahrzeugprüfstand

Der Prüfstands Aufbau, der in Abbildung 2-4 zu sehen ist, wird ebenfalls in [Koch10] detailliert beschrieben. Der folgende Absatz soll einen kurzen Überblick bieten. Als Aktor, d.h. als vollaktives Element, dient beim Viertelfahrzeugprüfstand ein elektrischer Linearmotor, der über eine hohe Bandbreite verfügt und relativ einfach (im Vergleich zu hydraulischen Elementen) anzusteuern ist. Die Straßenanregung wird beim vorliegenden Prüfstand über einen elektrisch geregelten Stempel aufgeprägt, wobei sich der Reifen in Querrichtung frei auf selbigem bewegen kann. Reifen, Radträger und Aufhängung wurden

direkt aus dem Quad ausgebaut und in den Prüfstand integriert. Die Bewegung der Chassis-Ersatzmasse wird durch eine Führung auf die z-Richtung beschränkt. Die Erfassung der Messgrößen, die Ansteuerung des Aktors sowie die Speicherung der Regleralgorithmen wird über ein dSPACE-System realisiert, wobei ControlDesk als Prüfstands-Software eingesetzt wird. Die Übertragung von Regelgesetzen auf die dSPACE-Karte erfolgt aus – mit TargetLink-Blöcken ergänzten – Simulink-Modellen heraus durch die Real Time Toolbox und Auto-Codierung.

Auch die Identifikation der Parameter wird in [Koch10] erläutert. Diese wurde für den Frequenzbereich bis 25 Hz durchgeführt, welcher besonders relevant für den Schwingungskomfort ist. Die nichtlinearen Kennlinien wurden so identifiziert, dass die nichtlineare Geometrie/Kinematik lokal um den Gleichgewichtsarbeitspunkt herum in ihnen berücksichtigt wird. Um den Besonderheiten des Prüfstandsbaus Rechnung zu tragen, werden im Prüfstands-Simulationsmodell je parallel zur Chassis- und Radmassenbewegung weitere Coulomb-Reibungselemente eingefügt, die vom maximalen Kraftbetrag her aber eine untergeordnete Rolle spielen und deshalb im Reglerentwurf vernachlässigt werden. In der Tabelle 2-1 werden alle für den Reglerentwurf relevanten Modellparameter aufgelistet. Die nichtlinearen Ersatzkennlinien der Reifenfeder bzw. der Aufbaudämpfung in Summe mit der Coulomb-Reibungskraft werden in Abbildung 2-5 bzw. Abbildung 2-6 dargestellt.

<i>Parameter:</i>	
$m_C = 89,56 \text{ kg}$	$c_C = 7980 \text{ N/m}$
$m_R = 23,92 \text{ kg}$	$ F_{Coul} \leq 62,81 \text{ N}$
<i>Für (RK), (RS):</i>	<i>Für (RR):</i>
$A_{Akt,11} = -15,8$	$A_{Akt,11}^{neu} = -320,4$
$A_{Akt,21} = 1000 / 3$	$A_{Akt,21}^{neu} = 1000 / 4$
$A_{Akt,22} = -1000 / 3$	$A_{Akt,22}^{neu} = -1000 / 4$
$B_{Akt,1} = 0,061$	$B_{Akt,1}^{neu} = 1,213$
$C_{Akt,2} = 80990$	$C_{Akt,2}^{neu} = 839,4$

Tabelle 2-1: Parameter des Viertelfahrzeug-Prüfstandsmodells

Diejenigen Aktorparameter, welche in Tabelle 2-1 mit dem hochgestellten Index *neu* gekennzeichnet sind, beruhen auf einer überarbeiteten, schnelleren Aktoransteuerung. Obwohl diese eine höhere Regelungsbandbreite ermöglicht, wurden die ersten Reglerentwürfe in dieser Arbeit – später durch (RK) und (RS) gekennzeichnet – noch für die alten Parameter durchgeführt, was hinsichtlich der Methodik aber keinerlei und für die quantitative

Auswertung nur beschränkt Unterschiede zur Folge hat. Vor den Prüfstandstests am Ende dieser Arbeit wurde allerdings ein neues Regelgesetz (RR) berechnet, in welchem auch die neue systeminterne Aktorregelung berücksichtigt wurde. Allgemein lässt sich vorwegnehmen, dass – neben der Optimierung der Regelgesetze – in der zukünftigen Leistungssteigerung der aktiven Elemente sicherlich die größte Chance liegt, aktive Chassissysteme für die Serienfertigung interessant zu machen.

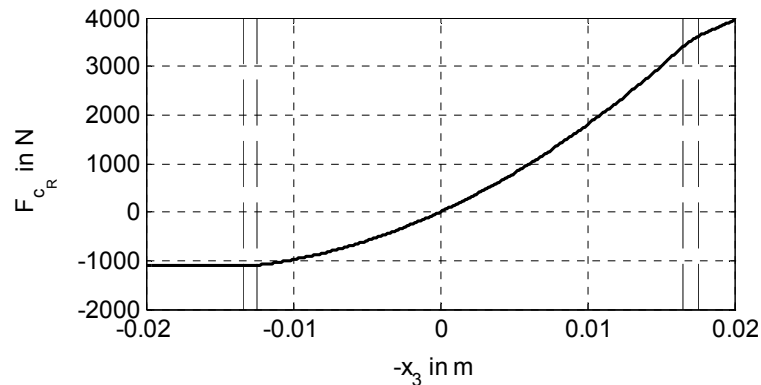


Abbildung 2-5: Kennlinie der Reifenfederkraft

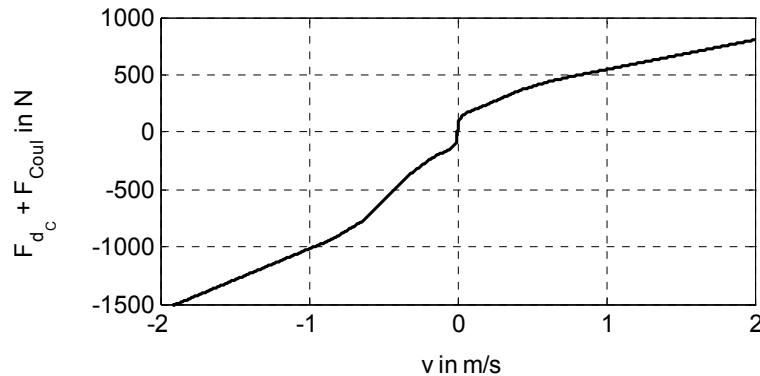


Abbildung 2-6: Kennlinie aus Aufbaudämpferkraft und Coulomb-Reibung

Für die Straßenanregung werden in der Simulation im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Signale angesetzt. Neben bandbegrenztem (typischen Straßenprofilen ähnlichem) rosa und rotem Rauschen, Sinus-Frequenz-Sweeps über den Bereich von 1 bis 25 Hz sowie reinen Sinus-Signalen für ausgewählte Frequenzen wird vor allem ein vermessenes Straßenprofil zur Komfort- und Sicherheitsbewertung herangezogen. Dieses wurde im Rahmen einer Forschungs Kooperation zur Verfügung gestellt und entspricht im niederfrequenten Bereich grob einem roten Rauschen (wobei der Bereich $\omega \ll 1$ nicht relevant für den Schwingungskomfort ist). Das zugehörige Höhenprofil $x_s(t)$ wird in Abbildung 2-7 gezeigt

und soll eine durchschnittlich starke Anregung bei 100km/h repräsentieren. Zur Untersuchung von glatten Straßen und Schlechtwegstrecken wird das Profil in dieser Arbeit mit einem entsprechenden Faktor skaliert, was für eine Grundsatzstudie ausreichend ist.

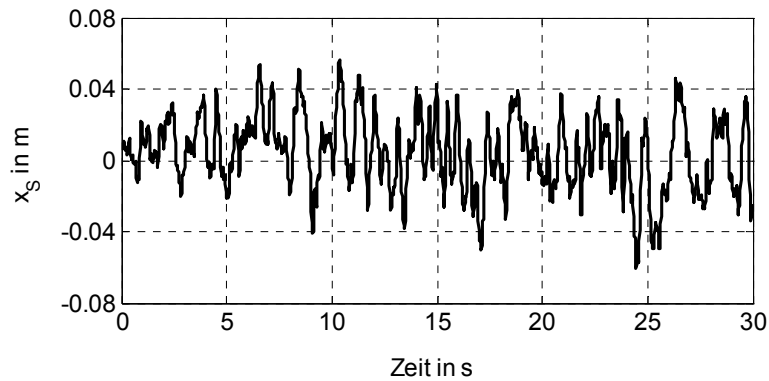


Abbildung 2-7: Vermessenes Straßenprofil

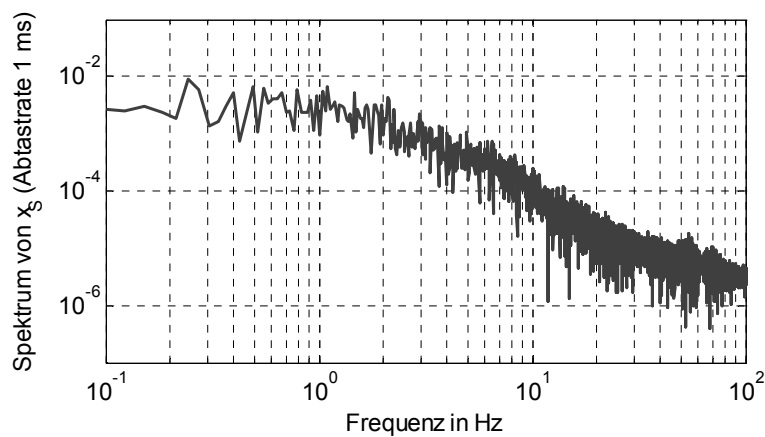


Abbildung 2-8: Spektrum des Straßenprofils

Abschließend sei noch ein kurzer Überblick über das Simulationsmodell selbst gegeben. Dieses wurde in Matlab/Simulink erstellt, basiert aber dennoch auf einer objektorientierten Struktur. Möglich wird dies durch eine Trennung von Kräfteberechnungen auf der einen Seite und den Zustandsgleichungen inkl. Zustandsintegration auf der anderen. Elemente wie Aufbaudämpfer oder Aktor liegen somit als eigene Blöcke vor und können leicht abgeändert, ausgewechselt oder mit beliebigen Signalen verbunden werden, nicht zuletzt dank einer so weit wie möglich parametrisierten Implementierung und der konsequenten Benutzung von Signalbussen in Simulink. Modellerstellung und Reglerentwurf wurden ebenfalls in Matlab durchgeführt; als weitere Toolboxen wurden die „Control Systems“-Toolbox, die „Optimization“-Toolbox, die (neue) „Robust Control“-Toolbox sowie die (alte) „ μ -Analysis and Synthesis“-Toolbox verwendet.

3 Theorie zur Modernen Robusten Regelung

Die robuste Regelung, deren Aufgabe es ist, Regler für unsichere Streckenmodelle zu entwerfen bzw. unsichere Kreise hinsichtlich Stabilität oder Performanz zu analysieren, besitzt eine lange Tradition und hat im Laufe der Jahrzehnte eine Vielzahl bekannter Methoden hervorgebracht. Dazu zählen beispielsweise grafische Methoden wie die auf der Nichols-Kurve aufsetzende Quantitative Feedback Theory [Horo72] oder das Parameterraumverfahren nach Ackermann [Acke93], welches Stabilitäts- und Performanzanalysen anhand der Pollagen unsicherer Systeme durchführt und vor allem für zwei bis drei unsichere Parameter geeignet ist. Weit verbreitet ist auch die Youla-Parametrisierung aus [Youl76], mit der sich im Rahmen eines robusten Entwurfs eine Parametrisierung aller intern stabilisierender Regler K für eine Regelstrecke finden lässt. Neben den oben erwähnten Beispielen für lineare Methoden wurden auch zahlreiche nichtlineare Ansätze entwickelt, die meist auf der Lyapunov-Theorie aufsetzen; ein kompakter Überblick hierzu ist in [Free08] zu finden.

Während alle erwähnten Methoden ihre jeweilige Berechtigung für die unterschiedlichen Aufgabenstellungen robuster Regelungsentwürfe haben, werden im Folgenden drei Verfahren vorgestellt, auf die in den Kapiteln 3.5 bis 3.7 Bezug genommen wird:

- ✦ den H_∞ -optimalen Entwurf, welcher auf dem maximalen Singulärwert aufsetzt und die wohl bekannteste Methodik der robusten Regelung darstellt,
- ✦ die μ -Analyse (bzw. -Synthese), die als Generalisierung des H_∞ -Problems angesehen werden kann und
- ✦ die IQC-Methode, welche die jüngste der drei Ansätze ist und mit quadratischen Integralbedingungen arbeitet.

Diese drei Methoden besitzen je spezifische Grundeigenschaften, die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen:

Die linearen H_∞ - und μ -Methoden

- ✦ benutzen ein vorab definiertes Unsicherheitsmodell,
- ✦ verwenden lineare, zeitinvariante Unsicherheiten,
- ✦ betrachten einen (quasi-)zeitinvarianten, linearen Regelkreis,
- ✦ sind sowohl für Reglerentwurf als auch zur Regelkreisanalyse geeignet,
- ✦ arbeiten im Frequenzbereich (was die Algorithmen selbst betrifft) und
- ✦ werden durch umfangreiche Toolboxen (v.a. in Matlab) unterstützt.

Während sich die H_∞ -Methode speziell für den Reglerentwurf und schnelle, übersichtsmäßige Robustheitstests anbietet, eignet sich der meist aufwändigere μ -Ansatz besonders für umfangreiche, wenig konservative Robustheitsanalysen, in welche vielfältige parametrische Unsicherheiten eingebunden werden können.

Die Integral Quadratic Constraints, d.h., die IQC-Methodik

- ✗ benutzt ein vorab definiertes Unsicherheitsmodell,
- ✗ kann auch nichtlineare, zeitvariante Unsicherheiten analysieren und
- ✗ kann damit auch teilweise nichtlineare Dynamik im Regelkreis berücksichtigen,
- ✗ ist bisher noch nicht für Reglerentwürfe geeignet,
- ✗ arbeitet im Zeitbereich und
- ✗ wird durch eine funktionierende, aber noch nicht sehr ausgereifte Toolbox unterstützt.

Im Vergleich zur μ -Analyse kann mittels IQCs ein noch viel höheres Spektrum an teils auch nichtlinearen oder zeitvarianten Unsicherheiten abgedeckt werden. Allerdings ist die maximale Anzahl der innerhalb einer Analyse untersuchten Unsicherheiten auf Grund von Konvergenzproblemen (je nach Anwendung) um ca. Faktor 3 bis 10 kleiner, siehe hierzu Kapitel 3.7.3. Außerdem existiert bislang noch kein zuverlässiges Reglersynthese-Verfahren mittels IQCs. In den nächsten Abschnitten sollen die drei erwähnten Methoden näher erläutert werden. Vorab werden eine kurze Einführung in die Unsicherheitsmodellierung und Normen sowie ein allgemeiner Überblick über die Verwendung des maximalen Singulärwerts in der robusten Regelung gegeben.

3.1 Normen und Singulärwerte

Der H_∞ -Entwurf und die μ -Analyse zählen zu den frequenzbereichsbasierten robusten Regelungsmethoden, bei denen der maximale bzw. der strukturierte Singulärwert des betrachteten Systems über der Frequenz berechnet und bei Bedarf minimiert wird. Das Supremum des maximalen Singulärwerts einer Übertragungsfunktion ist gleichbedeutend mit der H_∞ -Norm, welche zusammen mit der H_2 -Norm eine herausragende Rolle in der robusten Regelung spielt. Im Folgenden sei ein kurzer Überblick über die für die robuste Regelung besonders relevanten Normen gegeben (s. z.B. [HerN07] oder [Skog05] für weitere Details).

Eine Abbildung eines Vektors, eines Signals, einer Matrix oder einer Übertragungsfunktion auf einen Skalar lässt sich häufig als Norm definieren. Bei einer mathematischen Norm $\|X\|$, wobei X ein Signal, ein System oder eine Matrix sein kann, handelt es sich um eine reelle Zahl mit den folgenden Eigenschaften [HerN07].

$$\begin{aligned}
\|X\| &\geq 0 \\
\|X\| = 0 &\Leftrightarrow X = \mathbf{0} \\
\|\alpha \cdot X\| &= |\alpha| \cdot \|X\|, \quad \alpha \in \mathbb{C} \\
\|X_1 + X_2\| &\leq \|X_1\| + \|X_2\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})
\end{aligned} \tag{3-1}$$

3.1.2 Vektor- und Matrixnormen

Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}, \\
\|\mathbf{x}\|_\infty &= \max_i |x_i|.
\end{aligned} \tag{3-2}$$

Matrixnormen lassen sich als durch Vektornormen induzierte Normen darstellen, wobei für $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \bar{\sigma}(A) \quad (\text{max. Singulärwert}), \\
\|A\|_\infty &= \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{max. Zeilensumme}), \\
\text{mit } \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty, \quad \|UAV\|_2 = \|A\|_2 \text{ für } UU^H = VV^H = I.
\end{aligned} \tag{3-3}$$

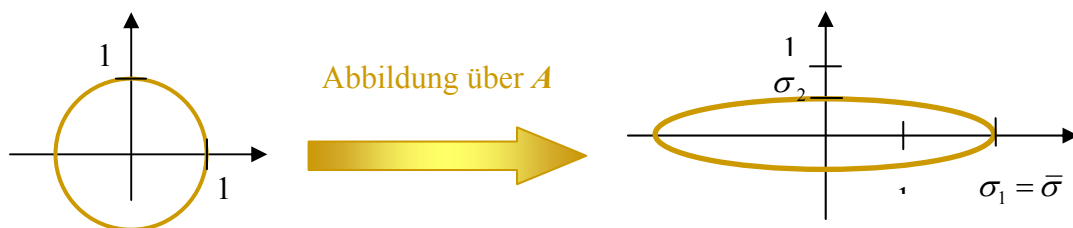


Abbildung 3-1: Grafische Deutung der Singulärwerte

Gemäß (3-3) ist die Matrix-2-Norm identisch mit dem maximalen Singulärwert $\bar{\sigma}(A)$, wobei die Singulärwerte sich grafisch einfach interpretieren lassen, s. Abbildung 3-1: eine Matrix A

bildet eine m -dimensionale Einheitskugel auf einen n -dimensionalen Hyperellipsoiden ab, dessen Halbachsen die Länge der Singulärwerte σ_i besitzen.

3.1.3 Signalnormen und -räume

Signalnormen werden in ähnlicher Weise wie die Vektornormen gebildet.

$$\begin{aligned}\|g(t)\|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}, \\ \|g(t)\|_{\infty} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| \text{ (Peak)}.\end{aligned}\tag{3-4}$$

Zu den Signalnormen lassen sich jeweils entsprechende L -Banachräume definieren:

- ✦ $L_2(\mathbb{R})$ ist der Raum aller quadratisch-integrierbaren skalaren Funktionen mit der L_2 -Norm aus (3-4).
- ✦ $L_{\infty}(\mathbb{R})$ ist der Raum aller beschränkten skalaren Funktionen mit der zugehörigen L_{∞} -Norm aus (3-4).

Deshalb ist zum Beispiel das auf den „Peak“ von 1 beschränkte Einheitssprungsignal zwar eine Funktion in L_{∞} , aufgrund des unendlichen Quadratintegrals allerdings nicht in L_2 .

3.1.4 Räume und Normen für Übertragungsfunktionen

Die Räume für Übertragungsfunktionen heißen Hardyräume.

- ✦ $H_2(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{m \times n})$ ist der Raum aller in $\text{Re}(s) > 0$ analytischen Übertragungsfunktionen $G(\sigma + j\omega)$, für die gilt:

$$\sup_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur} \left(G(\sigma + j\omega)^H G(\sigma + j\omega) \right) d\omega < \infty.\tag{3-5}$$

- ✦ $H_{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{m \times n})$ ist der Raum aller in $\text{Re}(s) > 0$ analytischen Übertragungsfunktionen, für die gilt:

$$\bar{\sigma}(G(s)) < \infty \quad \forall \text{Re}(s) > 0.\tag{3-6}$$

- ✦ $RH_{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{m \times n})$ ist der Unterraum aller reellen, rationalen, stabilen Übertragungsfunktionen von $H_{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{m \times n})$.

Zu den obigen Räumen existieren auch zugehörige Übertragungsfunktionsmatrixnormen.

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur}(\mathbf{g}^H(t)\mathbf{g}(t)) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{g}(t)\|_F^2 dt} \\ \|G(s)\|_{\infty} &= \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \left(\sup_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|G(j\omega)\mathbf{u}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2} \right) \end{aligned} \quad (3-7)$$

Während die über die Gewichtsfunktion $g(t)$ definierbare H_2 -Norm als Maß für die Energieverstärkung des Systems bei Anregung mit weißem Rausch dient, stellt die H_{∞} -Norm ein Maß für die maximale Energieverstärkung über alle möglichen Eingangssignale dar. Im SISO-Fall entspricht dies dem Peak der Betragskennlinie des Systems. Die H_{∞} -Norm gehört zu den induzierten Normen, da sie gemäß (3-7) durch die 2-Norm des Eingangssignals induziert wird.

3.2 Definition von Unsicherheiten

In der Literatur sind meist uneinheitliche, manchmal irreführende Begriffe zu Modellunsicherheiten zu finden, weshalb die für diese Arbeit relevanten Unsicherheitsbenennungen und -definitionen in den folgenden Abschnitten eindeutig festgelegt werden. Allgemein sollen hier als Unsicherheiten unbekannte Abweichungen zwischen einem realen System und einem zugehörigen mathematischen Modell verstanden werden. Als Ursachen für solche Unsicherheiten lassen sich fünf (nicht exakt abgrenzbare) Hauptgruppen ausmachen:

- ✗ ungenau bekannte Systemparameter (z.B. approximativ identifizierte Reibkennwerte),
- ✗ im Betrieb variierende Systemparameter (z.B. wechselnde Nutzlasten),
- ✗ vernachlässigte Nichtlinearitäten (z.B. bei Linearisierung um einen Arbeitspunkt),
- ✗ (lineare) Idealisierungen (z.B. vernachlässigte höhere Dynamik von Aktoren oder Annahme von Punktmassen),
- ✗ unmodellerte Störeingriffe (nur relevant für spezielle Performanzanalysen).

Zur Abdeckung der genannten Gruppen stehen zwei Grundtypen von Unsicherheiten zur Verfügung: parametrische und dynamische Unsicherheiten.

3.2.1 Parametrische Unsicherheiten

Mit parametrischen Unsicherheiten lassen sich mögliche Abweichungen eines Systemparameters p von seinem nominell angenommenen Wert erfassen. Der nominelle Wert muss

nicht zwangsläufig in der Mitte des unsicheren Parameterintervalls liegen. In dieser Arbeit soll er aber stets gleich dem Mittelwert \bar{p} gewählt werden. Weiterhin wird im Folgenden stets die multiplikative Darstellung parametrischer Unsicherheiten verwendet:

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} \cdot (1 + \eta_p \delta_p), \\ \delta_p &\in \mathbb{R}, \quad |\delta_p| \leq 1. \end{aligned} \quad (3-8)$$

Während η_p als parametrisches Unsicherheitsgewicht die maximale prozentuale Abweichung um \bar{p} herum angibt, bezeichnet δ_p die parametrische Unsicherheitsvariable. Letztere wird hier ausschließlich in normierter Form betrachtet, d.h., auf das reelle Intervall von -1 bis 1 beschränkt. Anzumerken ist hierbei, dass eine Unsicherheitsvariable δ_p mehrfach im Modell vorkommen kann, wodurch Kopplungen resultieren, welche die Perturbationsfreiheitsgrade des unsicheren Modells einschränken.

3.2.2 Dynamische Unsicherheiten

Anders als parametrische richten sich die dynamischen Unsicherheiten mehr an der Idee der klassischen Stabilitätsreserven, also der Amplituden- und Phasenreserven, aus. Sie decken pauschal Abweichungen vom nominellen Übertragungsverhalten des Systems ab, ohne dass die Ursache bzw. die zu Grunde liegende Struktur des Fehlers exakt bekannt sein muss. Zwar lassen sich auch Parameterschwankungen durch dynamische Unsicherheiten abdecken, meist birgt dies jedoch einen relativ großen Konservatismus in sich, d.h., es wird ein größerer Unsicherheitsbereich erfasst als nötig. Deshalb werden dynamische Unsicherheiten vor allem als „pauschale Stabilitätsreserve“ oder zur Abdeckung von Linearisierungs- bzw. Idealisierungsfehlern verwendet. Diese Unsicherheitsarten lassen sich meist hervorragend in Form von Abweichungen vom nominellen Frequenzgang angeben, weshalb sie speziell im Frequenzbereich besonders einfach definiert werden können. Damit ergibt sich die wohl häufigste Darstellungsform für dynamische Unsicherheiten, die multiplikative dynamische Eingangsunsicherheit, wie folgend im Blockschaltbild und als Formel:

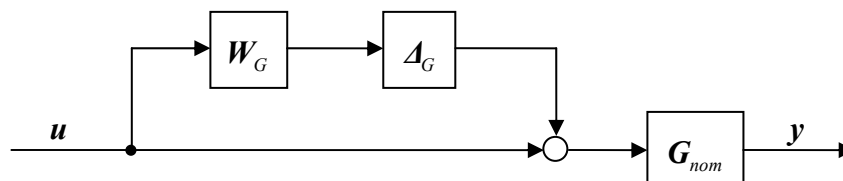


Abbildung 3-2: Dynamische Eingangsunsicherheit

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_{nom} (\mathbf{I}_{m \times m} + \mathbf{A}_G \mathbf{W}_G), \quad \mathbf{A}_G \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \|\mathbf{A}_G\|_\infty \leq 1. \quad (3-9)$$

\mathbf{G}_{nom} stellt dabei das nominelle Modell des Systems \mathbf{G} mit der Eingangsdimension m dar. Die zugehörige dynamische Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_G ist komplex und unstrukturiert, d.h., sie kann für jede beliebige Übertragungsfunktionsmatrix $\mathbf{A}_G(s)$ der Dimension $m \times m$ stehen, deren H_∞ -Norm (in der hier verwendeten normierten Form) kleiner oder gleich 1 ist. Eine erweiterte Darstellungsform der Unsicherheitsmatrix für das Beispiel $m = 2$ kann als

$$\mathbf{A}_{G,2 \times 2} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \delta_{ij} := \delta_{ij}(s) \in RH_\infty, \quad \|\mathbf{A}_{G,2 \times 2}\|_\infty \leq 1 \quad (3-10)$$

angeschrieben werden. In der Praxis – speziell dann, wenn $\mathbf{G}(s)$ ein System aus Aktoren oder Sensoren in Diagonalmatrixform repräsentiert – ist es oft üblich, an Stelle einer einzelnen $m \times m$ -Matrix \mathbf{A}_G für \mathbf{u} eine separate 1×1 -Matrix $\Delta_{G,i}$ auf jeden Kanal u_i zu schalten.

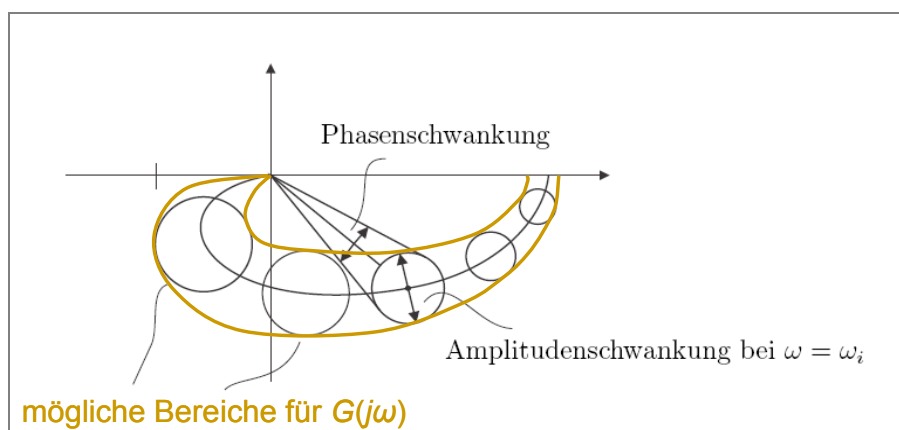


Abbildung 3-3: Ortskurve mit dynamischer Unsicherheit

Die Wahl des dynamischen Unsicherheitsgewichts \mathbf{W}_G ist nicht einfach und beruht meist auf Erfahrungswerten. $\mathbf{W}_G(j\omega)$ soll dabei primär den maximalen Amplitudenfehler zwischen dem unsicheren Frequenzgang $\mathbf{G}(j\omega)$ und dem nominellen $\mathbf{G}_{nom}(j\omega)$ über der Frequenz abdecken. Im für die Regelung relevanten Frequenzbereich gilt als Faustregel, dass die Unsicherheit betragsmäßig nicht höher als 100 % sein sollte. Für hohe Frequenzen kann die Unsicherheit je nach Modellierungsgüte auch bis zu 200 % oder mehr betragen. Häufig wird \mathbf{W}_G als Lead-Filter modelliert, wobei dann für eine von F_{low} (für kleine Frequenzen) ab der Eckfrequenz ω_{low} bis zu F_{high} (für hohe Frequenzen) ansteigende Unsicherheit gilt:

$$W_G(s) = \frac{s + \omega_{low}}{\frac{1}{F_{high}}s + \frac{1}{F_{low}}\omega_{low}}. \quad (3-11)$$

Anhand der unsicheren Ortskurve eines SISO-Systems lässt sich der Einfluss einer parametrischen Unsicherheit besonders anschaulich darstellen. Wie in Abbildung 3-3 zu sehen ist, wird durch die komplexe dynamische Unsicherheit um jeden nominellen Punkt $G_{nom}(j\omega_i)$ ein kreisförmiger Bereich hinzugefügt, in welchem der unsichere Punkt $G(j\omega_i)$ liegen darf. Dadurch ergibt sich für jeden Punkt eine mögliche Phasen- und Amplitudenschwankung, die im Falle einer Nyquist-Ortskurve die Verwandtschaft zur Idee der klassischen Stabilitätsreserven erkennen lassen.

Neben der in Abbildung 3-2 gezeigten dynamischen Eingangsunsicherheit existieren noch etliche alternative Darstellungsmöglichkeiten. Während sich die Eingangsunsicherheit besonders gut zur Abdeckung von häufig anzutreffenden Aktorunsicherheiten und unsicheren Nullstellen in der rechten komplexen Halbebene eignet, erfasst die entsprechende Unsicherheit am Ausgang besonders gut Sensorunsicherheiten. Unter der Eignung einer Darstellungsart sei hier verstanden, dass dadurch bestimmte typische Systemunsicherheiten mit minimalem Konservatismus abgedeckt werden können. Weiterhin sind die beiden beschriebenen Unsicherheitsarten auch jeweils in inverser Form modellierbar, wobei hier nur auf die inverse dynamische Ausgangsunsicherheit in Abbildung 3-4 bzw. in (3-12) eingegangen werden soll, die später für Performanzanalysen von hoher Bedeutung sein wird. Der Vollständigkeit halber seien hier noch die additive Darstellungsform dynamischer Unsicherheiten und die Koprimefaktor-Unsicherheiten erwähnt, s. [Zhou96]. Erstere lässt sich direkt durch Auflösung der Klammern in (3-9) ableiten, letztere beruht auf einer Koprimefaktorzerlegung der Strecke und eignet sich vor allem für unsichere instabile Polstellen. Relevant werden in dieser Arbeit aber nur die multiplikativen und die inversen dynamischen Unsicherheiten sein.

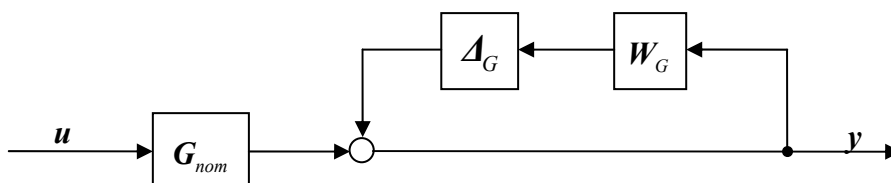


Abbildung 3-4: Inverse Ausgangsunsicherheit

$$G = (I_{m \times m} + \Delta_G W_G)^{-1} G_{nom} \quad (3-12)$$

3.3 Unsicherheitsmodellierung über LFRs

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die gemäß Kapitel 3.2 zu einem nominellen Modell hinzugefügten Unsicherheiten geschickt in die Modellgleichungen integriert und in eine für Robustheitsmethoden brauchbare Darstellungsform transformiert werden können, die so genannte Linear Fractional Representation (LFR). Die LFR kann alternativ auch als LFT-Form bezeichnet werden, wobei LFT (Linear Fractional Transformation) für eine weiter unten erläuterte spezielle mathematische Operation steht.

3.3.1 Linear Fractional Representations (LFRs)

LFRs sind spezielle Blockdarstellungen, die in der robusten Regelung meist aus einem bekannten erweiterten Übertragungsblock (z.B. erweiterte Strecke/Regelkreis) und wahlweise aus einer darüber angeordneten Unsicherheitsmatrix (Abbildung 3-5) und/oder einem darunter angeordneten Reglerblock (Abbildung 3-6) bestehen. Während der erweiterte Übertragungsblock nur aus konstanten Parametern besteht, bündelt die Unsicherheitsmatrix alle in Kapitel 3.2 eingeführten Unsicherheitsvariablen in Blockdiagonalform.

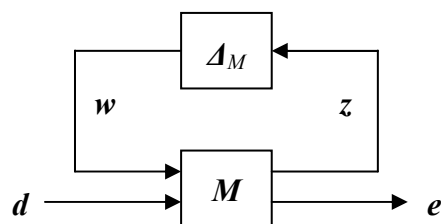


Abbildung 3-5: Upper LFR am Bsp. erweiterter Kreis mit Unsicherheitsmatrix

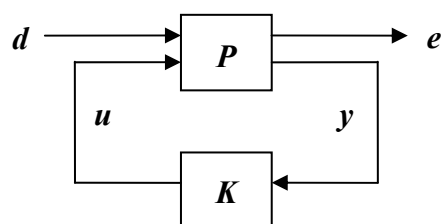


Abbildung 3-6: Lower LFR am Bsp. erweiterte Strecke mit Reglermatrix

Da kein festes und auch kein allgemeines, systematisches Vorgehen für die Unsicherheitsmodellierung existiert, soll hier nur ein grober Überblick über eine mögliche Vorgehensweise vermittelt werden. Weitere Details zu dem in dieser Arbeit verwendeten Ansatz, der anwendungsorientiert neu erarbeitet wurde und keiner Standardtheorie unterliegt, werden in Kapitel 5.5 erläutert.

Im Allgemeinen ist das Ziel der Unsicherheitsmodellierung, parametrische oder dynamische Unsicherheiten für eine Regelstrecke oder einen Regelkreis zu definieren und durch Separation von unbekanntem Unsicherheitsvariablen von bekannten konstanten Parametern eine LFR-Form herzustellen. Letztere dient als Grundlage für alle μ - und (vom Grundprinzip her auch) H_∞ -Algorithmen. Die erwähnte Separation erfolgt meist durch Einführung so genannter virtueller Ein- und Ausgänge, siehe [Bala98] und [Bala05] für zusätzliche Informationen oder [Herr04] für ausführliche Beispiele. Hierbei wird ein Summand oder Faktor der Zustandsgleichungen des Systems, der eine Unsicherheitsvariable beinhaltet und somit im Rahmen des Wertebereichs selbiger unbekannt ist, durch ein virtuelles Eingangssignal ersetzt. Über die Definition eines zugehörigen virtuellen Ausgangs, der auf den virtuellen Eingang über eine bestimmte Rückkopplungsbeziehung rückgeführt wird, ist eine Auslagerung der Unsicherheitsvariable ohne Informationsverlust möglich. Die resultierende Blockdarstellung des unsicheren Systems ist eine LFR gemäß Abbildung 3-5. Am anschaulichsten lässt sich die Idee anhand eines simplen Beispiels, siehe unten, erklären. Im Zusammenhang mit der grafischen Zusammenfassung der Unsicherheitsmodellierung in Abbildung 3-7 kann ein gutes Grundverständnis über das Vorgehen gewonnen werden.

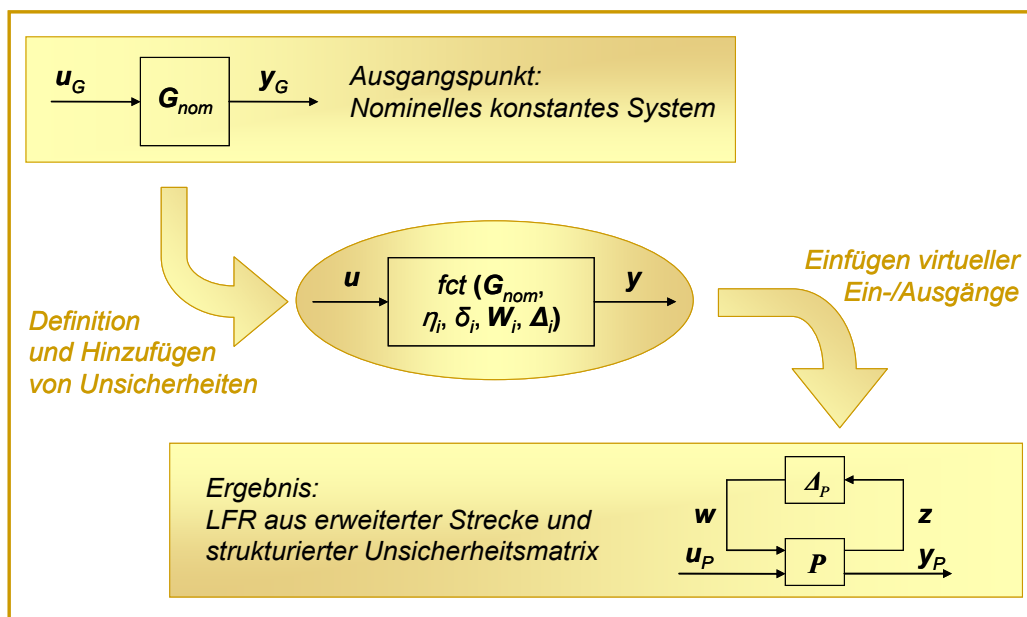


Abbildung 3-7: Überblick über die Unsicherheitsmodellierung

Beispiel zur Unsicherheitsmodellierung

$$\text{Gegeben: } \dot{x} = ax + 2u, \quad y = x \quad \text{mit} \quad a = \bar{a}(1 + \eta_a \delta_a), \quad \delta_a \in [-1; 1] \quad (3-13)$$

Definition virtueller Eingang: $\dot{x} = \bar{a}x + \bar{a} \underbrace{(\eta_a x \delta_a)}_{w_x} + 2u = \bar{a}x + \bar{a}w_x + 2u$ (3-14)

Definition virtueller Ausgang: $z_x = \eta_a x$ (3-15)

Rückkopplungs-Beziehung: $w_x = z_x \delta_a$ (3-16)

Resultierende erweiterte Zustandsgleichungen mit erweiterter Systemmatrix \mathbf{Q} :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{a} & 2 \\ \eta_a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} x \\ w_x \\ u \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

Im Frequenzbereich kann aus \mathbf{Q} und dem Laplace-Integrator $1/s$ über eine Upper-LFT-Operation gemäß (3-19) die zugehörige erweiterte Übertragungsfunktion $\mathbf{P}(s)$ gewonnen werden.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_u \left(\mathbf{Q}, \frac{1}{s} \right) \quad (3-18)$$

Die resultierende Upper LFR aus der erweiterten Übertragungsfunktion \mathbf{P} und der Unsicherheitsmatrix $\Delta_p = \delta_a$, die sich durch die Rückkopplungs-Beziehung (3-16) ergibt, ist in Abbildung 3-8 dargestellt.

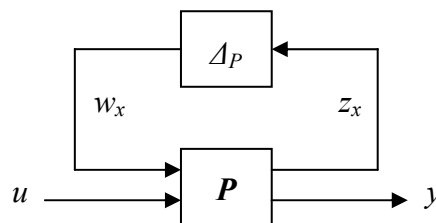


Abbildung 3-8: Upper LFR für das Beispiel zur Unsicherheitsmodellierung

Wie beabsichtigt konnte im Beispiel die unbekannte Unsicherheitsvariable von den konstanten Parametern in \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} separiert werden. Würde über die Upper LFT gemäß (3-19) Δ_p wieder mit \mathbf{P} verschmolzen werden, so ergäbe sich wieder exakt das zum Gleichungssystem (3-13) äquivalente Übertragungssystem.

3.3.2 LFR-Operationen

Im vorigen Abschnitt wurde in Form der Upper LFT bereits eine wichtige LFR-Operation vorweggenommen. Prinzipiell lassen sich LFR-Operationen in zwei Typen einteilen:

- ✦ LFT-Operationen zur Verschmelzung der Blöcke einer LFR,
- ✦ LFR-Schaltungen zur Verschmelzung zweier LFRs zu einer neuen LFR.

LFTs sind lineare fraktionale Transformationen (Linear Fractional Transformation), von denen hier als Spezialformen des Redheffer Star Products, s. [Zhou96], nur die Upper und Lower LFTs betrachtet werden.

Definition 3.1: Eine Verschmelzung der Übertragungsmatrizen einer Upper LFR gemäß Abbildung 3-9 und (3-19) zu einer einzelnen Übertragungsmatrix bezeichnet man als Upper LFT. Die Dimensionen der Submatrizen M_{ik} mit $i, k \in \{1; 2\}$ von M ergeben sich gemäß den Dimensionen von w , z , d und e .

$$F_u(M, \Delta_M) = M_\Delta = M_{22} + M_{21}(I - \Delta_M M_{11})^{-1} \Delta_M M_{12} \quad \text{mit} \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

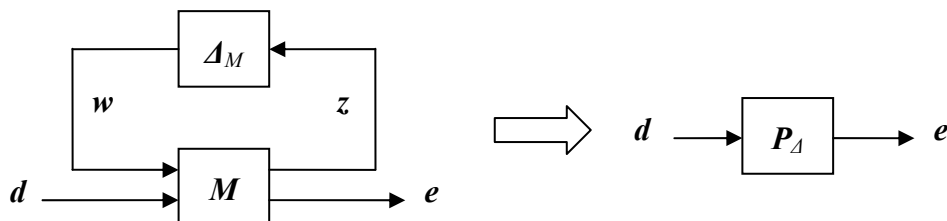


Abbildung 3-9: Upper-LFT-Operation

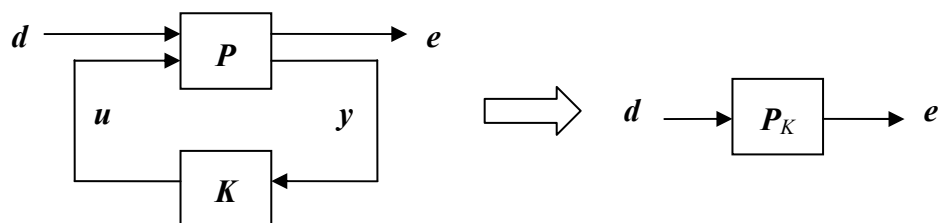


Abbildung 3-10: Lower-LFT-Operation

Definition 3.2: Eine Verschmelzung der Übertragungsmatrizen einer Lower LFR gemäß Abbildung 3-10 und (3-20) zu einer einzelnen Übertragungsmatrix bezeichnet man als Lower LFT. Die Dimensionen der Submatrizen P_{ik} mit $i, k \in \{1; 2\}$ von P ergeben sich gemäß den Dimensionen von u , y , d und e .

$$F_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{P}_K = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}\mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

Für die Schaltungen von LFRs in Blockschaltbildern gilt, dass Serien-, Parallel- und Rückführschaltungen von LFRs wiederum zu einer Gesamt-LFR zusammengefasst werden können, s. z.B. [Band96], [Magn01], [Dail90]. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur die Serienschaltung betrachtet, die über (3-21) und Abbildung 3-11 definiert ist.

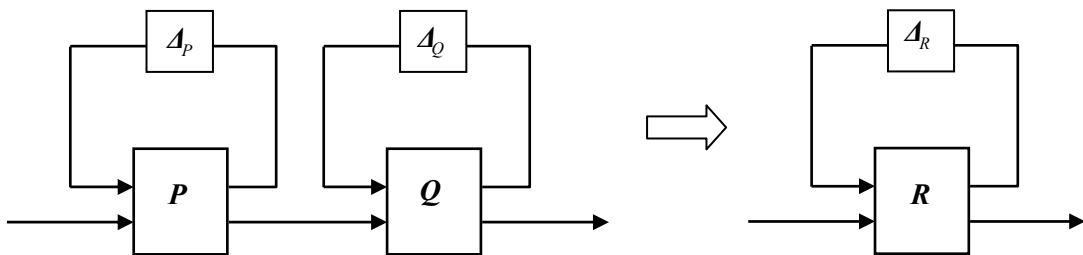


Abbildung 3-11: LFR-Serienschaltung

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{A}_R\} = \langle \{\mathbf{P}, \mathbf{A}_P\}, \{\mathbf{Q}, \mathbf{A}_Q\} \rangle \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}\mathbf{P}_{21} & \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12}\mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{Q}_{22}\mathbf{P}_{21} & \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22}\mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_Q \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

3.4 Robustheitstest mit dem maximalen Singulärwert (H_∞ -Analyse)

Gemäß (3-7) entspricht die H_∞ -Norm einer komplexen Übertragungsfunktion dem Supremum des maximalen Singulärwertverlaufs über der Frequenz. In Verbindung mit dem Small Gain Theorem ([Dail90], [Zhou96], [Bala98]) stellt sie die fundamentale Grundlage aller H_∞ -Robustheitstests dar.

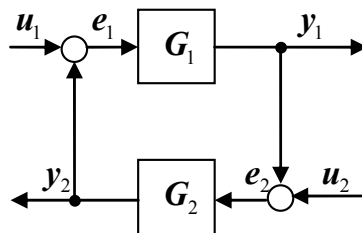


Abbildung 3-12: Allgemeine Kreisschaltung

Theorem 3.1: Small Gain Theorem (schwache Version)

In einer allgemeinen Kreisschaltung gemäß Abbildung 3-12 zweier stabiler Übertragungsfunktionen $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \in RH_\infty$ gilt:

$$\|\mathbf{G}_1\|_\infty \|\mathbf{G}_2\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \text{Kreis intern stabil.} \quad (3-22)$$

Kurzbeweis: BIBO-Stabilität in Anlehnung an [Dail90]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{e}_2 \\ \Rightarrow \|\mathbf{e}_2\|_2 &= \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{e}_2\|_2 \\ \text{Lt. (3-1): } \|\mathbf{e}_2\|_2 &\leq \|\mathbf{u}_2\|_2 + \|-\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{e}_2\|_2 = \|\mathbf{u}_2\|_2 + \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{e}_2\|_2 \\ \text{Lt. (3-7): } \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{e}_2\|_2 &= \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2\|_\infty \|\mathbf{e}_2\|_2 \\ \Rightarrow \|\mathbf{e}_2\|_2 &\leq \|\mathbf{u}_2\|_2 + \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2\|_\infty \|\mathbf{e}_2\|_2 \\ \Rightarrow \|\mathbf{e}_2\|_2 &\leq \frac{1}{(1 - \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2\|_\infty)} \|\mathbf{u}_2\|_2 \\ \Rightarrow \text{falls } \|\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2\|_\infty &\leq \|\mathbf{G}_1\|_\infty \|\mathbf{G}_2\|_\infty \leq 1 \\ &\Rightarrow \mathbf{e}_2 \text{ beschränkt für beschränktes } \mathbf{u}_2 \\ &\Rightarrow \text{BIBO-Stabilität q.e.d. (analog für } \mathbf{e}_1, \mathbf{u}_1) \end{aligned} \quad (3-23)$$

Eine wichtige Eigenschaft des obigen Small Gain Theorems ist sein Konservatismus, d.h., die Stabilitätsbedingung ist zwar hinreichend, im Allgemeinen aber nicht notwendig. Eine Ausnahme stellt die robuste Stabilitätsanalyse einer Upper $\mathbf{P} - \mathbf{A}_p$ -LFR für den Sonderfall

$$\|\mathbf{A}_p\|_\infty \leq 1, \quad \mathbf{A}_p \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (3-24)$$

dar. In diesem Fall wird die Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_p wie in (3-10) als unstrukturiert bezeichnet. Da sich dann stets ein spezielles $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_p(s)$ finden lässt, welches die durch das Small Gain Theorem ermittelte „Worst Case“-Kreisverstärkung exakt erfüllt, stellt das Theorem für diesen Fall eine exakte Bedingung dar, s. z.B. [Zhou96] für einen Beweis.

Gleichzeitig erweist sich nun gerade das unstrukturierte \mathbf{A}_p aus (3-24) als geeignetes Mittel, um pauschal, aber schnell eine Vielzahl üblicher Unsicherheiten abzudecken. Dadurch wird ein möglicher Konservatismus von der abstrakten mathematischen Beweisebene in die Modellierungsaufgabe verschoben. Speziell für Dimensionen von \mathbf{A}_p kleiner als drei ist

dieses Vorgehen für den Ingenieur sehr anschaulich und fügt sich oft nahtlos in einen von Erfahrungswerten und Idealisierungen geprägten Modellierungsprozess ein. In den folgenden Abschnitten werden einige typische robuste Stabilitäts- und Performanztests auf Basis des Small Gain Theorems mit unstrukturierter Unsicherheitsmatrix kompakt zusammengefasst. Als Basis hierfür dient der Schaltkreis aus Abbildung 3-13. Obwohl die vorgestellten Bedingungen teils auch auf Mehrgrößensysteme (MIMO = Multiple Input Multiple Output) erweiterbar sind, soll die Betrachtung hier auf Eingrößensysteme (SISO = Single Input Single Output) beschränkt werden. Weitere mögliche Bedingungen und Details können z.B. in [Skog05] oder [Dail90] gefunden werden.

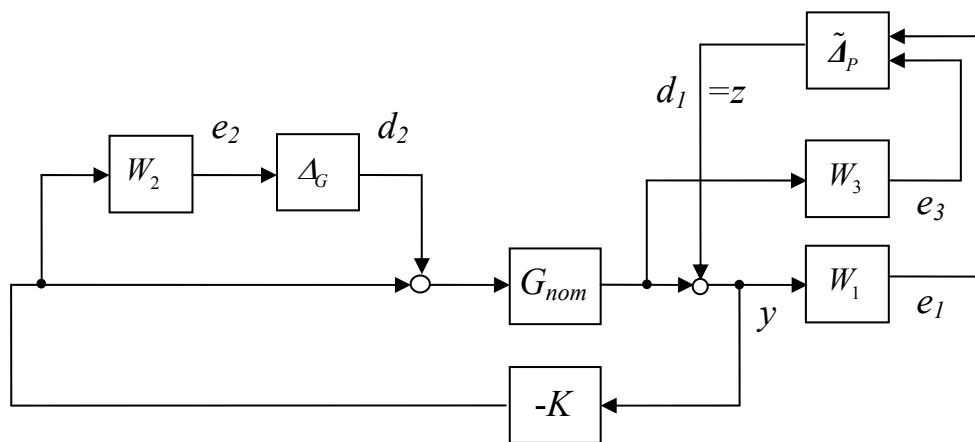


Abbildung 3-13: SISO-Kreis mit dynamischer Unsicherheit

3.4.1 Robuster Stabilitätstest mit dem maximalen Singulärwert (SISO)

Ausgangslage sei ein nomineller, intern stabiler Regelkreis mit Ausgang y und Störgröße z , der wie in Abbildung 3-13 um eine dynamische Eingangsunsicherheit Δ_G mit Gewicht W_2 erweitert wird. $\tilde{\Delta}_p$ ist hierbei auf $\mathbf{0}$ zu setzen. Die Übertragungsfunktion von d_2 auf w_2 ergibt sich zu

$$F_{d_2 \rightarrow e_2} = -W_2 \frac{G_{nom} K}{1 + G_{nom} K} = -W_2 T_{nom} \quad (3-25)$$

und somit als frequenzgewichtete Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises T_{nom} (komplementäre Sensitivitätsfunktion). Für $\|\Delta_G\|_\infty \leq 1$ gilt gemäß Small Gain Theorem (3-22) folgende exakte Bedingung für die Stabilität des unsicheren geschlossenen Kreises (nominelle Stabilität des geschlossenen Kreises $T_{nom}(s)$ sei vorausgesetzt):

$$\text{Kreis genau dann robust stabil, wenn } \|W_2 T_{nom}\|_\infty = \sup_{s=j\omega} \bar{\sigma} |W_2(s) T_{nom}(s)| < 1. \quad (3-26)$$

3.4.2 Nomineller Performanztest mit dem maximalen Singulärwert (SISO)

Um die Performanz des nominellen Regelkreises zu untersuchen, kann ein Frequenzgewicht für die Sensitivitätsfunktion $S_{nom}(s)$ eingefügt werden. Die Vorgabe einer solchen Funktion ist nahe verwandt mit dem „Loop Shaping“ des offenen Kreises, welcher eine wichtige klassische Reglerentwurfsmethodik darstellt und u.a. in [Lunz07] oder [Skog05] ausführlich beschrieben wird. Im Unterschied dazu lassen sich hier allerdings direkte Forderungen an den geschlossenen Kreis im Sinne eines „Closed Loop Shaping“ stellen (s. [Zhou98]). Für die Amplitude der Sensitivitäts- bzw. Störübertragungsfunktion wird z.B. oft gefordert, dass ihr Wert für kleine Frequenzen möglichst nahe bei 0 Hz (Störunterdrückung) und ihr Maximum möglichst nahe bei 1 (Stabilitätsreserven) liegen. Grafisch lassen sich diese Forderungen in Abbildung 3-14 mit Hilfe des Kehrwerts von $W_1(j\omega)$ veranschaulichen, wobei die eckige Kurve im Diagramm in der Regel durch einen Lead-Filter approximiert wird. Als nominelle Performanzforderung ergibt sich direkt aus dem Diagramm:

$$\text{Nom. Performanz genau dann erfüllt, wenn } \|W_1 S_{nom}\|_\infty = \sup_{s=j\omega} \bar{\sigma} |W_1(s) S_{nom}(s)| < 1. \quad (3-27)$$

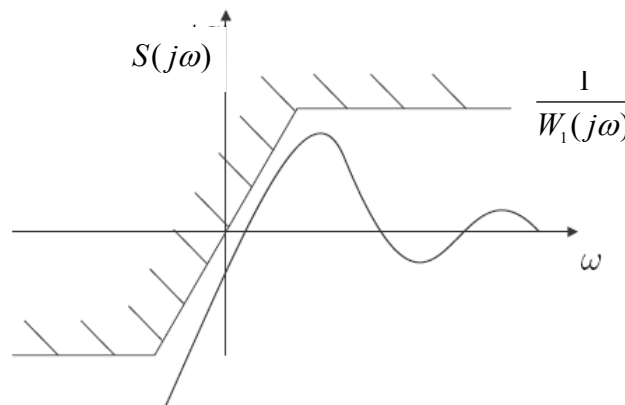


Abbildung 3-14: Performanzgewicht für die Sensitivitätsfunktion

Wird in Abbildung 3-14 (mit $\Delta_G = 0$) der mit W_1 gewichtete Ausgang über eine inverse Ausgangsunsicherheit $\tilde{\Delta}_p = [\Delta_F \ 0]$ mit $\|\Delta_F\|_\infty \leq 1$ gemäß Abbildung 3-4 rückgeführt, so lässt sich die nominelle Performanzforderung ebenfalls wie ein robustes Stabilitätsproblem behandeln. Die Forderung aus (3-27) ist dann wieder analog zu (3-26) aus dem Small Gain Theorem ableitbar. Man spricht in diesem Fall bei Δ_F von einer fiktiven Unsicherheit.

3.4.3 Robuster Performanztest und grafischer Überblick (SISO)

Im SISO-Fall ergibt sich das Kriterium der robusten Performanz, also der Erfüllung aller Stabilitäts- und Performanzforderungen für den Fall eines unsicheren Regelkreises, direkt aus der Überlagerung von robuster Performanz und Stabilität (s. Abbildung 3-15). Die zugehörige mathematische Bedingung (nominelle Stabilität sei vorausgesetzt) lautet:

$$\text{Robuste Performanz genau dann erfüllt, wenn } \|W_1 S_{nom}\| + \|W_2 T_{nom}\|_\infty < 1. \quad (3-28)$$

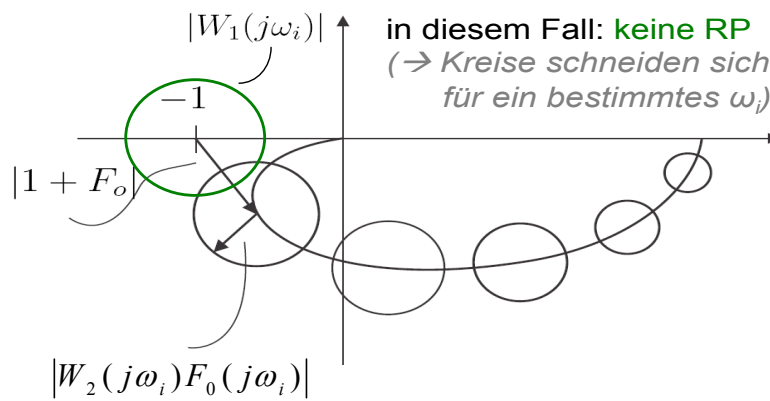


Abbildung 3-15: RP-Forderung in der Ortskurve

Die Forderung (3-28) für robuste Performanz lässt sich besonders anschaulich anhand der Frequenzgangsortskurve des offenen Kreises $F_0 = G_{nom}K$ und des vereinfachten Nyquist-Kriteriums (s. [Lunz07] oder [Föll94]) darstellen. Hierzu werden für jede beliebige Frequenz ω_i Kreise der Menge K_1 mit dem Radius $|W_1(j\omega_i)|$ um den kritischen Punkt -1 und Kreise der Menge K_2 mit dem Radius $|W_2(j\omega_i)F_0(j\omega_i)|$ um den zugehörigen Ortskurvenpunkt $|F_0(j\omega_i)|$ eingefügt. Aus den Beziehungen

$$S_{nom} = \frac{1}{1+F_0} \quad \text{und} \quad T_{nom} = \frac{F_0}{1+F_0} \quad (3-29)$$

sowie den Bedingungen (3-26) bis (3-28) lässt sich gemäß Abbildung 3-15 ableiten,

- ✘ dass robuste Stabilität RS gilt, wenn kein Kreis der Menge K_2 den kritischen Punkt durchdringt oder umschließt,
- ✘ dass nominelle Performanz NP gilt, wenn kein Kreis der Menge K_1 den Ortskurvenpunkt $G_{nom}(j\omega_i)K(j\omega_i)$ durchdringt oder umschließt,

- ✘ dass robuste Performanz RP gilt, wenn sich (im Sinne einer Superposition von RS und NP) die jeweiligen Kreise von K_1 und K_2 für keine Frequenz schneiden.

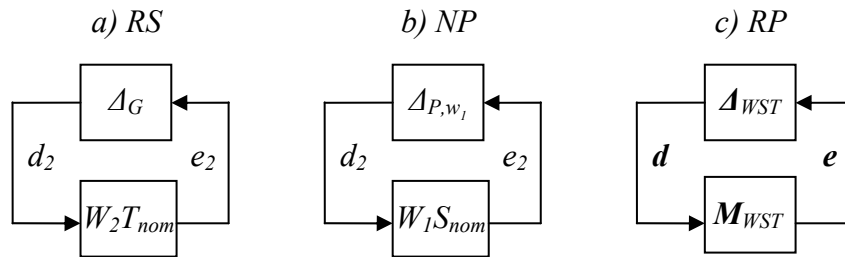


Abbildung 3-16: LFRs für RS-, NP- und RP-Forderungen (SISO)

In Anlehnung an die Unsicherheitsmodellierung aus Abbildung 3-8 und das Small Gain Theorem (SGT) (3-22) für Abbildung 3-12 können die Bedingungen für RS, NP und RP auch auf die LFRs in Abbildung 3-16 abgebildet werden, wobei für RP die Matrizen

$$\mathbf{M}_{WST} = \begin{bmatrix} W_1 S_{nom} & 0 \\ 0 & W_2 T_{nom} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_{WST} = \begin{bmatrix} \Delta_G & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

eingeführt werden. Für RS und NP entsprechen die LFRs dem Sonderfall (3-24) mit einer unstrukturierten Unsicherheitsmatrix, weshalb hier die SGT-Bedingungen $\|W_2 T_{nom}\|_\infty < 1$ (RS) bzw. $\|W_1 S_{nom}\|_\infty < 1$ (NP) sowohl hinreichend als auch notwendig sind. Bei der LFR für RP ist die H_∞ -Norm der Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_{WST} zwar ebenfalls gleich 1, jedoch führt hier das SGT zu einer konservativen, nur hinreichenden RP-Bedingung

$$\|\mathbf{M}_{WST}\|_\infty < 1 \Rightarrow \text{RP erfüllt}, \quad (3-31)$$

da \mathbf{A}_{WST} eine Struktur besitzt und somit nicht mehr jede beliebige Übertragungsfunktion mit einer H_∞ -Norm kleiner oder gleich 1 repräsentieren kann. Die exakte RP-Forderung weicht von der SGT-Forderung (3-31) aus Abbildung 3-16 ab und wurde bereits oben (3-28) definiert. Um einen quantitativen Überblick über die Forderungen nach RS, NP und RP zu gewinnen, eignet sich ein $\|W_2 T_{nom}\|_\infty$ - $\|W_1 S_{nom}\|_\infty$ -Diagramm. Das innere der geometrischen Formen bildet die Menge aller Werte der jeweiligen H_∞ -Normen, welche die zugehörigen Forderungen erfüllen.

- ✘ Fall I: RS und NP sind je für die Werte im Quadrat erfüllt. Diese Forderung ist exakt und ohne Konservatismus.

- ✘ Fall II: RP ist für die Werte im Dreieck erfüllt. Diese Forderung ist ebenfalls exakt und ohne Konservatismus.
- ✘ Fall III: RP ist für die Werte im Viertelkreis erfüllt. Diese Forderung ist konservativ (hinreichend, aber nicht notwendig) und ergibt sich aus dem MSP, s. Kapitel 3.4.4.

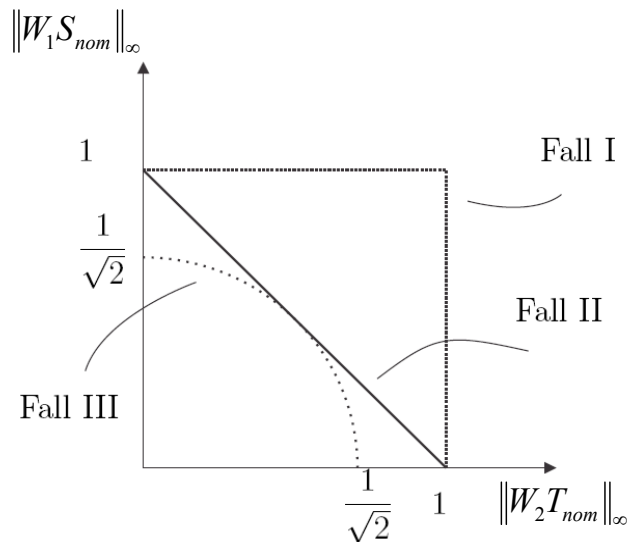


Abbildung 3-17: Grafischer Überblick der RS-, NP- und RP-Forderungen

3.4.4 Mixed-Sensitivity-Problem MSP

Das Mixed-Sensitivity-Problem ist ein einfaches, robustes Reglerentwurfs- oder Analyseverfahren und wird ausführlich in der Standardliteratur wie [Skog05] oder [Zhou96] beschrieben. Die Grundidee ist, zum einen ein „handliches“ Matrixnorm-Kriterium für RP wie in (3-31) zu bewahren, andererseits den Konservatismus der Forderung auf einen maximalen, kleinen Wert zu beschränken. Um Letzteres zu erreichen, behilft man sich eines „Tricks“, indem in Abbildung 3-13 die Gewichtung von T_{nom} über

$$W_3 = W_1 \text{ und } A_p = [A_f \quad A_G] \quad (3-32)$$

mit $d_2 = 0$ erfolgt. Die Perturbation des unsicheren Kreises erfolgt bei der RP-Analyse nun also ausschließlich über d_1 . Wird hierfür wieder eine LFR analog zu Abbildung 3-16c) erstellt, so ergeben sich die LFR-Matrizen anders als in (3-30) zu

$$\mathbf{M}_{WST} = \begin{bmatrix} W_1 S_{nom} \\ W_2 T_{nom} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{A}_{WST} = [\mathbf{A}_F \quad \mathbf{A}_G] \text{ mit } \|\mathbf{A}_{WST}\|_\infty \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \quad (3-33)$$

Im Gegensatz zu den LFRs aus Abbildung 3-16a) bis c) weist die Unsicherheitsmatrix hier eine maximale H_∞ -Norm von $\sqrt{2}$ auf, was sich durch (3-7) und (3-2) berechnen lässt. Damit lautet die konservative SGT-Bedingung in diesem Fall

$$\|\mathbf{M}_{WST}\|_\infty < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{RP erfüllt}. \quad (3-34)$$

Falls ein robuster Regler entworfen oder analysiert wird, der diese Bedingung (möglichst optimal) erfüllen soll, spricht man vom Mixed-Sensitivity-Problem. Eine grafische Darstellung dieser Bedingung wurde in Abbildung 3-17 gegeben, wobei sich im Vergleich mit der exakten RP-Bedingung zeigt, dass die Bedingung (3-34) maximal „um Faktor $\sqrt{2}$ zu konservativ“ ist. Alternativ zur Gewichtung von S_{nom} oder T_{nom} kann z.B. auch $S_{nom}K$ mit einem entsprechenden W_4 multipliziert werden, was einer Gewichtung des Stellgrößeneinsatzes entspricht (s. z.B. [Zhou96] für mehr Details). Falls alle drei Bedingungen kombiniert werden, ändert sich die RP-Bedingung zu $\|\mathbf{M}_{SWT}\|_\infty < \sqrt{3}/3$.

3.4.5 H_∞ -Analyse im MIMO-Fall

Im Gegensatz zu den SISO-Bedingungen (3-26) bis (3-28) lässt sich die (konservative) RP-Analyse gemäß (3-31) direkt auf beliebige MIMO-Systeme mit einer zugehörigen \mathbf{M} - \mathbf{A}_M -Struktur wie in Abbildung 3-18 erweitern. Im Vektor \mathbf{d} können sowohl physikalische Störeinflüsse als auch virtuelle, mathematische Perturbationen durch Modellunsicherheiten zusammengefasst werden. In \mathbf{e} finden sich alle gewichteten Signale des Regelkreises wieder, die perturbiert werden sollen. \mathbf{A}_M beinhaltet alle verwendeten physikalischen und fiktiven Unsicherheitsmatrizen in blockdiagonaler Form, \mathbf{M} repräsentiert den (um die Frequenzgewichte) erweiterten Regelkreis.

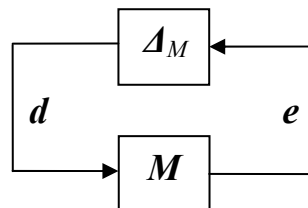


Abbildung 3-18: LFR für robuste Regelkreisanalyse

Falls alle Unsicherheitsblöcke des Kreises mit einer H_∞ -Norm kleiner oder gleich 1 modelliert wurden, so gilt nach (3-3) und (3-7) auch $\|\mathbf{A}_M\|_\infty \leq 1$. Im Rahmen der H_∞ -Analyse wird diese Norm-Bedingung zwar berücksichtigt, die Struktur von \mathbf{A}_M wird jedoch komplett vernachlässigt. Die hinreichende RP-Forderung

$$\|\mathbf{M}\|_\infty < 1 \Rightarrow \text{RP erfüllt} \quad (3-35)$$

kann somit speziell für höherdimensionale Unsicherheitsmatrizen mit einer ausgeprägten Struktur zu stark konservativen Ergebnissen und somit leicht zu Fehlschlüssen bei der Beurteilung der robusten Stabilität führen. Gerade beim H_∞ -Entwurf (s. Kapitel 3.5), wird dies – in Verbindung mit den hierfür vorhandenen, stark automatisierten Software-Tools wie Matlab – häufig übersehen. Aus eigener Erfahrung heraus soll die H_∞ -Methodik deshalb nur für maximal drei Subunsicherheitsblöcke auf der Diagonalen von \mathbf{A}_M und niemals für parametrische Modellunsicherheiten empfohlen werden. Falls möglich, sollte die RP-Forderung als Mixed-Sensitivity-Problem formuliert werden, bei dem der Konservatismus a priori beschränkt ist.

Unabhängig davon gestaltet sich das Closed Loop Shaping von $\mathbf{S}(s)$ durch Einbringen von Performanzgewichten deutlich schwieriger als im SISO-Fall, da $\mathbf{S}(s)$ nun eine Matrix ist und die H_∞ -Norm hier das Supremum des maximalen Singulärwertverlaufs anstatt des Frequenzgangs berechnet. Abhilfe schafft eine separate Gewichtung der einzelnen physikalischen Störsignale d_i und physikalischen Fehlersignale e_k entsprechend der maximal erwarteten Störungen und der gewünschten maximalen Übertragungsfunktionen von d_i auf e_k . Aber auch hier führt die zugehörige fiktive Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_F , welche e_k auf d_i abbildet und stets unstrukturiert ist, möglicherweise zu hohem Konservatismus, weshalb die Einbindung von robusten Performanzgewichten ein hohes Maß an Erfahrung erfordert. Weitere Details hierzu sind z.B. in [Band96] zu finden.

3.5 Reglerentwurf mit der H_∞ -Methodik

Der H_∞ -Entwurf eines robusten Reglers soll hier nur kurz umrissen werden, da er in dieser Arbeit keine Anwendung finden wird. Für den betrachteten Fall einer aktiven Radaufhängung wurde im Rahmen der internen Arbeit [Cyro06] zwar ein H_∞ -Entwurf erprobt, dieser Ansatz wurde allerdings aufgrund zu konservativer Ergebnisse (zu starke Performanzeinbußen zu Gunsten der Robustheit) wieder verworfen. Allerdings kann ein Überblick über die weitverbreitete H_∞ -Methodik als Spezialfall der später diskutierten μ -Methodik (s. Kapitel 3.6) zum Grundverständnis selbiger beitragen.

Ausgangslage des H_∞ -Entwurfs ist die unsichere LFR aus Abbildung 3-19 mit der erweiterten (gewichteten), unsicheren Regelstrecke \mathbf{P} , dem zu entwerfenden Regler \mathbf{K} und der Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_p . Die Störgrößen \mathbf{d} und die Fehlergrößen \mathbf{e} können hierbei aus tatsächlichen physikalischen Anteilen und fiktiven Anteilen zur Berücksichtigung von Performanzforderungen bestehen; \mathbf{u} und \mathbf{y} entsprechen den Stell- und Regelgrößen des Standardregelkreises, das negative Vorzeichen der Rückführung sei hier in \mathbf{K} integriert.

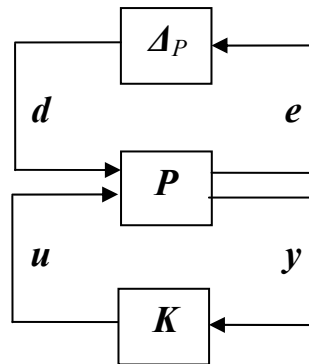


Abbildung 3-19: LFR für robusten Reglerentwurf

Beim H_∞ -Entwurf wird – wie bei der H_∞ -Analyse in Kapitel 3.4.5 beschrieben – \mathbf{A}_p als unstrukturiert betrachtet und deshalb oft im Blockschaltbild weggelassen (das \mathbf{A}_M der Analyse-LFR entspricht meist dem \mathbf{A}_p der Entwurfs-LFR, außer, wenn bei der Analyse auch Unsicherheiten der Reglermatrix berücksichtigt werden sollen). Speziell bei mehreren Subunsicherheitsblöcken auf der Diagonalen von \mathbf{A}_p kann die H_∞ -Methodik deshalb einen hohen Konservatismus aufweisen. Von der Modellierung parametrischer Unsicherheiten ist gänzlich abzuraten. Das Ziel des H_∞ -Designs lässt sich in Anlehnung an die Ausführungen in [Dail90], [Zhou96] oder [Bala05] wie folgt formulieren:

Definition 3.3: Ziel des H_∞ -Entwurfs ist es, den Regler \mathbf{K} so zu entwerfen, dass die maximale Energieübertragung von \mathbf{d} auf \mathbf{e} minimiert (optimal) oder unter einen Wert γ (suboptimal) gebracht wird. Für den suboptimalen Fall gilt die Entwurfsforderung

$$\|F_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty = \|\mathbf{M}(s)\|_\infty \leq \gamma . \quad (3-36)$$

Falls \mathbf{A}_p wieder mit $\|\mathbf{A}_p\|_\infty \leq 1$ modelliert wurde, ist für die Erfüllung aller RP-Bedingungen (analog zu (3-31)) ein Wert $\gamma < 1$ notwendig. Die Berechnung des erweiterten geschlossenen Kreises \mathbf{M} aus erweiterter Strecke \mathbf{P} und Regler \mathbf{K} erfolgt über die in (3-20) definierte Lower-LFT-Operation. \mathbf{P} selbst wird beim H_∞ -Entwurf in Systemmatrixform, s. (3-17), als

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & \mathbf{0} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

dargestellt und muss folgende Voraussetzungen erfüllen (s. [Dail90]).

$$\begin{aligned} \text{V1: } & (A, B_1) \text{ stabilisierbar und } (C_1, A) \text{ detektierbar} \\ \text{V2: } & (A, B_2) \text{ stabilisierbar und } (C_2, A) \text{ detektierbar} \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} \text{V3: } & D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [\mathbf{0} \ I] \\ \text{V4: } & \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-39)$$

Unter einer stabilisierbaren Regelstrecke wird dabei verstanden, dass (zumindest) alle instabilen Eigenmoden steuerbar sind; detektierbar heißt, dass (zumindest) alle instabilen Eigenmoden beobachtbar sind. Stabilisierbarkeit bzw. Detektierbarkeit sind somit Sonderfälle von Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit (s. z.B. [Lunz07], [Föll97]). Die Voraussetzungen in (3-39) sind stets erfüllbar für $\dim(\mathbf{e}) \geq \dim(\mathbf{u})$ und $\dim(\mathbf{d}) \geq \dim(\mathbf{y})$, wobei hierfür u.U. P skaliert und „künstlich“ Störgrößen d_i , z.B. Messrauschen, oder Fehlergrößen e_i (durch Gewichtung weiterer Signale) hinzugefügt werden müssen.

Die Berechnung eines suboptimalen H_∞ -Entwurfs (3-36) stellt ein konvexes Optimierungsproblem dar und erfordert die Lösung zweier algebraischer Riccati-Gleichungen, [Zhou96]. Eine Lösung K existiert genau dann, wenn

- ✦ ein $X_\infty \geq 0$ existiert, so dass $X_\infty A + A^T X_\infty + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = \mathbf{0}$,
- ✦ ein $Y_\infty \geq 0$ existiert, so dass $A Y_\infty + Y_\infty A^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1 C_1^T - C_2 C_2^T) Y_\infty + B_1^T B_1 = \mathbf{0}$, und
- ✦ der Spektralradius $\rho(X_\infty Y_\infty) = \max_i |\lambda_i(X_\infty Y_\infty)| < \gamma^2$ ist und lautet

$$K(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2, \quad (3-40)$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T \quad \text{und} \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1}.$$

Beim numerischen H_∞ -Algorithmus (z.B. mit Matlab) wird der Entwurf iterativ für kleiner werdende γ so lange durchgeführt, bis kein \mathbf{K} mehr gefunden werden kann. Der resultierende Regler besteht aus einem Beobachteranteil und einer Zustandsrückführung $\mathbf{F}_\infty \hat{\mathbf{x}}$ des approximierten Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$. \mathbf{K} besitzt damit gleich viele Zustandsvariablen wie die erweiterte Strecke \mathbf{P} , weshalb die Systemordnung der Regelstrecke und der verwendeten Frequenzgewichte nicht zu hoch sein sollte.

3.6 Robuste Regelung mittels μ -Analyse

In den Kapiteln 3.4.5 und 3.5 hat sich als eines der größten Defizite der H_∞ -Methodik ihr – speziell bei umfangreichen, strukturierten Unsicherheitsmodellen – hoher Konservatismus herauskristallisiert. Falls einerseits eine möglichst hohe Performanz gefordert wird, andererseits nur geringe Stabilitätsreserven vorliegen, kann der Konservatismus zum Ausschlusskriterium für die H_∞ -Methodik werden. Abhilfe schafft hier der strukturierte Singulärwert μ , mit dessen Hilfe sich eine generalisierte H_∞ -Analyse formulieren lässt: die so genannte μ -Analyse. Anders als beim H_∞ -Ansatz wird bei der μ -Analyse die Unsicherheitsmatrix \mathbf{A}_M aus Abbildung 3-18 als strukturiert betrachtet.

3.6.1 Strukturierte Unsicherheitsmatrizen

Die Grundlagen zu strukturierten Unsicherheitsmatrizen werden in der Literatur uneinheitlich diskutiert und sollen deshalb im Folgenden nochmals eindeutig für diese Arbeit definiert werden. Ausführliche Grundlagen zu Unsicherheitsmatrizen können insbesondere in [Bala98] und [Band96] gefunden werden.

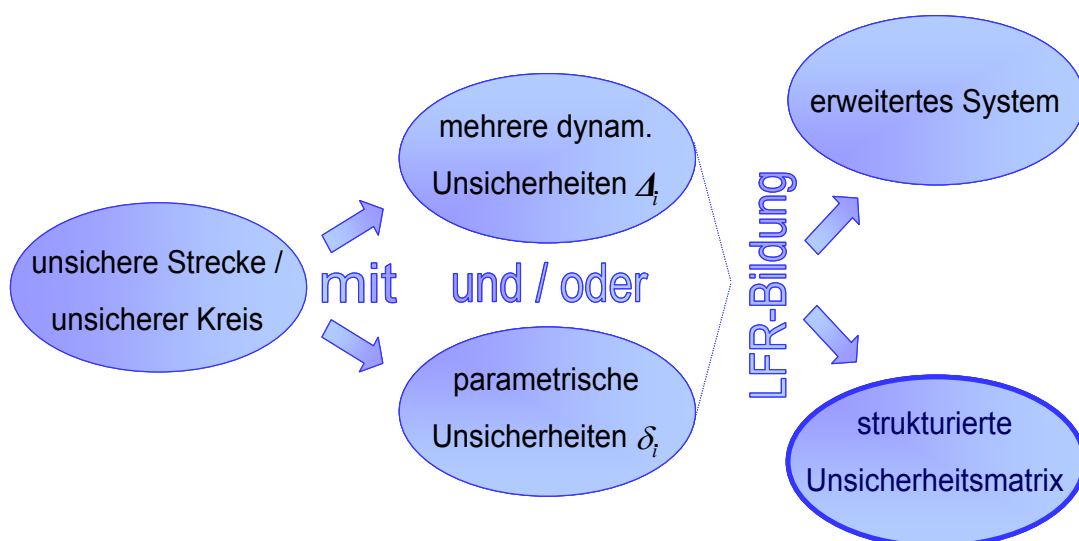


Abbildung 3-20: Entstehung strukturierter Unsicherheitsmatrizen

Wie in den Kapiteln 3.4.4 und 3.4.5 bereits angesprochen und in Abbildung 3-20 visualisiert, entstehen strukturierte Unsicherheitsmatrizen, sobald zumindest eine parametrische oder zwei dynamische Subunsicherheitsmatrizen im Regelkreis modelliert und mit den LFR-Schaltungen aus Kapitel 3.3.2 zu einer Gesamt-LFR des Kreises zusammengefasst werden; diese Gesamt-LFR besitzt dann eine blockdiagonale Form. Ein Unsicherheitsblock mit nur einer einzigen parametrischen Unsicherheitsvariable ist deshalb bereits strukturiert, da die Unsicherheit nur reelle Werte annehmen kann, weshalb parametrische Unsicherheiten (irreführender Weise) oft selbst als strukturiert bezeichnet werden. Zwei Mengen aller normierten, strukturierten Unsicherheitsmatrizen seien für diese Arbeit wie folgt definiert.

Definition 3.4: Eine Unsicherheitsmatrix \mathcal{A}_p gehört genau dann zur Menge der normierten, strukturierten Unsicherheitsmatrizen $\underline{\mathcal{A}}$, falls für sie gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p &= \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{I}_1, \dots, \delta_S \mathbf{I}_S, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_U \} \\ \text{mit } \mathcal{A}_i &\in \mathbb{C}^{m_i \times n_i}, \delta_i \in \mathbb{R}, \\ m_i &\geq 1, n_i \geq 1, S \geq 0, U \geq 0, \\ \left. \begin{aligned} \|\mathcal{A}_i\|_\infty &\leq 1 \\ \|\delta_i\|_\infty = |\delta_i| &\leq 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \|\mathcal{A}_p\|_\infty \leq 1. \end{aligned} \quad (3-41)$$

Definition 3.5: Eine Unsicherheitsmatrix \mathcal{A}_p gehört genau dann zur Menge der normierten, strukturiert-komplexen Unsicherheitsmatrizen $\underline{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}}$, falls für sie gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p &= \text{diag} \{ \delta_1 \mathbf{I}_1, \dots, \delta_S \mathbf{I}_S, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_U \} \\ \text{mit } \mathcal{A}_i &\in \mathbb{C}^{m_i \times n_i}, \delta_i \in \mathbb{C}, \\ \mathbf{I}_i &= (\mathbf{I}_i)_{r \times r}, r \geq 2, \\ \left. \begin{aligned} \|\mathcal{A}_i\|_\infty &\leq 1 \\ \|\delta_i\|_\infty &\leq 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \|\mathcal{A}_p\|_\infty \leq 1. \end{aligned} \quad (3-42)$$

Die \mathbf{I}_i in (3-41) und (3-42) stehen für Einheitsmatrizen adäquater Größe.

3.6.2 Definition des strukturierten Singulärwerts

Die lineare H_∞ -Analyse aus Kapitel 3.4.5 beruht auf dem Small Gain Theorem (3-22) und benutzt den maximalen Singulärwert $\bar{\sigma}(j\omega)$, der auch als unstrukturierter Singulärwert bezeichnet werden kann. Im Gegensatz hierzu verwendet die μ -Analyse den strukturierten Singulärwert (SSW) μ , der 1982 von John Doyle (fast zeitgleich mit M. G. Safonov) in

[Doyl82] eingeführt wurde. Die Definition des SSW ist durch seine Anwendung selbst motiviert und setzt auf der \mathbf{M} - \mathbf{A}_M -LFR des unsicheren Regelkreises in Abbildung 3-18 auf. Anders als der maximale, unstrukturierte Singulärwert, der zur konservativen RP-Bedingung

$$\bar{\sigma}(\mathbf{M}(j\omega))\bar{\sigma}(\mathbf{A}_M(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \Rightarrow \text{RP erfüllt} \quad (3-43)$$

führt, ergibt sich mit dem SSW μ (per Definition) die generalisierte, exakte Forderung

$$\mu_{\mathbf{A}_M}(\mathbf{M}(j\omega))\bar{\sigma}(\mathbf{A}_p(j\omega)) \leq \mu_{\mathbf{A}_M}(\mathbf{M}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \text{RP erfüllt}. \quad (3-44)$$

Für (3-44) gelten wieder die Voraussetzungen, dass der nominelle Kreis intern stabil und $\|\mathbf{A}_M\|_\infty \leq 1$ ist. Der Unterschied zwischen (3-43) und (3-44) kommt dadurch zu Stande, dass μ nicht nur \mathbf{M} , sondern auch die Struktur von \mathbf{A}_M berücksichtigt, was wahlweise in der Nomenklatur $\mu_{\mathbf{A}_M}$ zum Ausdruck gebracht werden kann. In Worten und als Formel lassen sich hieraus in Anlehnung an Abbildung 3-18 und die Upper-LFT-Operation (3-19) folgende Definitionen von μ ableiten.

Definition 3.6: Der Peak von $\mu(\mathbf{M}(j\omega))$ ist die im Sinne der H_∞ -Norm kleinste Perturbation \mathbf{A}_{dest} mit derselben Struktur wie \mathbf{A}_M , die das System $F_u(\mathbf{M}(j\omega), \mathbf{A}_{dest})$ an die Stabilitätsgrenze bringt. Mathematisch ergibt sich der SSW für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ zu

$$\frac{1}{\mu(\mathbf{M}(s))} = \frac{1}{\mu(\mathbf{M}(j\omega))} = \inf_{\mathbf{A}_{dest}} \left\{ \bar{\sigma}(\mathbf{A}_{dest}) : \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{dest}\mathbf{M}(j\omega)) = 0, \mathbf{A}_{dest} \subset \alpha \cdot \mathbf{A}_M \right\}, \quad (3-45)$$

$$\mu(\mathbf{M}) = 0, \quad \text{falls } \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{dest}\mathbf{M}(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega \text{ für } \mathbf{A}_{dest} \subset \alpha \cdot \mathbf{A}_M.$$

Weitere Herleitungen und speziell der Beweis für $\mu(\mathbf{M}(j\omega)) = \mu(\mathbf{M}(s))$ sind ausführlich in [Zhou96] beschrieben. Grundlage für die Prüfung der Forderung (3-44) und der Berechnung des Werts von μ gemäß (3-45) ist das MIMO-Nyquist-Kriterium, welches eine Verallgemeinerung des vereinfachten Nyquist-Kriteriums darstellt. Ausgehend von der allgemeinen \mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 -Kreisschaltung in Abbildung 3-12 lässt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)^{-1} & \mathbf{G}_2(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)^{-1} \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{I} - \mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{GK}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

ableiten, womit sich die Pole des geschlossenen Kreises über $\det((\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2)^{-1})$ bestimmen lassen. Diese Determinante kann z.B. lt. [Dail90] auch als

$$d_{GK}(j\omega) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1) = k \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{GK})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (3-47)$$

dargestellt werden, wobei \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_{GK} für die entsprechenden Dynamikmatrizen von \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 und \mathbf{G}_{GK} stehen. Nun wird wie beim vereinfachten Nyquist-Kriterium $s = j\omega$ über eine die rechte Halbebene umfassende D-Kontur von $\omega = -\infty$ bis $\omega = \infty$ variiert und der Winkel $\varphi_{GK} = \Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \sphericalangle d_{GK}(j\omega)$ betrachtet, den der Fahrstrahl zwischen Ursprung und $d_{GK}(j\omega)$ durchläuft. Für jeden instabilen Pol von \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 wächst $\varphi_{GK}(j\omega)$ auf Grund von (3-47) um 360° (s. [Dail90]), insgesamt um $2\pi(m_{G1} + m_{G2})$. Für jeden instabilen Pol des geschlossenen Kreises fällt $\varphi_{GK}(j\omega)$ um 360° , insgesamt um $2\pi m_{GK}$. Somit erhält man die exakte Stabilitätsbedingung des MIMO-Nyquist-Kriteriums zu

$$\Delta_{\omega=-\infty}^{\infty} \sphericalangle d_{GK}(j\omega) = 2\pi(m_{G1} + m_{G2}) - 2\pi m_{GK} \Leftrightarrow \text{Kreis stabil.} \quad (3-48)$$

Bei der $\mathbf{M} - \mathbf{A}_M$ - bzw. $\mathbf{M} - \mathbf{A}_{dest}$ -Kreisschaltung ist der offene Kreis per Voraussetzung intern stabil. Wie beim vereinfachten Nyquist-Kriterium liegen die Pole des geschlossenen Kreises für $\|\mathbf{A}_{dest}\|_{\infty} \rightarrow 0$ in den Polen des offenen in der linken komplexen Halbebene. Für steigende $\|\mathbf{A}_{dest}\|_{\infty}$ (mittels Skalierung $\mathbf{A}_{dest} = \alpha \mathbf{A}_M$) wandern die Pole des geschlossenen Kreises entlang der Äste einer Art MIMO-Wurzelortskurve. Auf Grund der Beziehung zwischen den Polen des geschlossenen Kreises und der Determinante $d_{GK}(j\omega) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{dest}(\alpha) \mathbf{M}(j\omega))$ lässt sich direkt ableiten, dass der geschlossene Kreis genau dann instabil mit $d_{GK} = 0$ wird, falls für ein spezielles \mathbf{A}_{dest} ein Pol(paar) des geschlossenen Kreises in die rechte komplexe Halbebene wandert. Damit ist bewiesen, dass die RP-Bedingung $\mu(\mathbf{M}(j\omega)) < 1$ aus (3-44) hinreichend und notwendig und damit nicht konservativ ist.

3.6.3 Eigenschaften des strukturierten Singulärwerts

Der SSW stellt keine Norm im Sinne von (3-1) dar, da er die Dreiecksungleichung nicht erfüllt. Dennoch besitzt er einige wichtige Eigenschaften, die teils auch für die μ -Analyse relevant sind und hier überblicksmäßig wiedergegeben werden (s. z.B. [Dail90], [Zhou96], [Bala98]). Um diesen Überblick anschaulich zu halten, sollen im Folgenden nur strukturiert-komplexe Unsicherheitsmatrizen der Menge $\underline{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}}$ aus (3-42) betrachtet werden. Ein Übergang auf die allgemeinere Menge $\underline{\mathcal{A}}$ aus (3-41), die auch reelle Unsicherheiten enthalten darf, ist jeder Zeit problemlos durch das Hinzufügen adäquater Matrizen in die Gleichungen möglich,

wobei die weiter unten aufgeführten RS- und RP-Bedingungen aber auch für $\underline{\mathcal{A}}$ gültig sind. Die genauen Formeln und Definitionen hierzu können in [Bala98] gefunden werden.

Gegeben seien $\mathbf{A}, \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\underline{\mathcal{A}} \in \underline{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ und es gelte für den Spektralradius $\rho(\mathbf{M}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{M})|$. Damit ergeben sich nach [Bala98] folgende Eigenschaften des SSW.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \mu(\alpha \mathbf{M}) = |\alpha| \mu(\mathbf{M}) \\
 \text{(ii)} \quad & \mu(\mathbf{A}\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{A}) \bar{\sigma}(\mathbf{M}) \\
 \text{(iii)} \quad & \rho(\mathbf{M}) \leq \mu(\mathbf{M}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}) \\
 \text{(iv)} \quad & \mu(\underline{\mathcal{A}}) = \bar{\sigma}(\underline{\mathcal{A}}) \\
 \text{(v)} \quad & \mu(\mathbf{I}) = 1
 \end{aligned} \tag{3-49}$$

Weiterhin seien folgende Mengen von Skalierungsmatrizen mit der gleichen Struktur wie $\underline{\mathcal{A}}$ gegeben, die Indizes sind an (3-42) angelehnt.

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathcal{D}} &= \left\{ \text{diag}(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_S, d_1 \mathbf{I}_1, \dots, d_U \mathbf{I}_U) : \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^{\text{H}} \succ 0, \mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, d_i \in \mathbb{R} \right\} \\
 \underline{\mathcal{U}} &= \left\{ \text{diag}(e^{j\varphi_1} \mathbf{I}_1, \dots, e^{j\varphi_S} \mathbf{I}_S, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_U) : \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^{\text{H}} = \mathbf{I}, \mathbf{U}_i \in \mathbb{C}^{c_i \times c_i}, \varphi_i \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned} \tag{3-50}$$

Damit lassen sich die Skalierungseigenschaften (3-51) des SSW definieren.

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad & \mathbf{U}\underline{\mathcal{A}} \in \underline{\mathcal{A}} \text{ und } \underline{\mathcal{A}}\mathbf{U} \in \underline{\mathcal{A}} \\
 \text{(vii)} \quad & \mathbf{D}\underline{\mathcal{A}}\mathbf{D}^{-1} = \underline{\mathcal{A}} \\
 \text{(viii)} \quad & \mu(\mathbf{M}\mathbf{U}) = \mu(\mathbf{U}\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{M}) \\
 \text{(ix)} \quad & \mu(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}) = \mu(\mathbf{M}) \\
 \text{(x)} \quad & \sup_{\mathbf{U} \in \underline{\mathcal{U}}} \rho(\mathbf{U}\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{M}) \leq \inf_{\mathbf{D} \in \underline{\mathcal{D}}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1})
 \end{aligned} \tag{3-51}$$

3.6.4 Robuster Stabilitätstest mittels μ -Analyse

Die Determinantenbedingung aus (3-45) ist (bis auf wenige, einfache Ausnahmen) nicht analytisch lösbar, weshalb die Bestimmung des SSW in der Praxis über die numerische Approximation einer oberen und unteren Schranke erfolgt. Ausgangslage ist wieder die \mathbf{M} - $\underline{\mathcal{A}}_M$ -LFR aus Abbildung 3-18, wobei hier (in der RS-Analyse vorerst) nur echte physikalische Modellunsicherheiten betrachtet werden. $\underline{\mathcal{A}}_M$ ist damit quadratisch und enthält keine fiktive

Performanzunsicherheit. Mit Hilfe der Eigenschaften in (3-49) und (3-51) kann nun stichpunktartig die Idee der numerischen μ -Analyse skizziert werden:

- * Eigenschaften (viii) und (ix) \rightarrow Skalierung von M in gezeigter Weise durch D und U ändert nichts am Wert von μ ;
- * Eigenschaften (iii) und (x) \rightarrow Spektralradius von UM und maximaler Singulärwert von DMD^{-1} über der Frequenz stellen obere und untere Schranke für μ dar (Upper und Lower Bound);
- * durch numerische Verfahren (z.B. in Matlab) \rightarrow Optimierung der Schranken (damit möglichst nahe zusammen) durch Optimierung von D und U .

Speziell die Berechnung der Upper Bound stellt ein konvexes Optimierungsproblem dar und ist damit gut berechenbar. Gerade die Upper Bound ist auch besonders wichtig, denn das Kriterium für robuste Stabilität lautet:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega}(\text{Lower Bound } \mu) < 1 &\Leftarrow \text{RS erfüllt (notweniges Kriterium),} \\ \sup_{\omega}(\text{Upper Bound } \mu) < 1 &\Rightarrow \text{RS erfüllt (hinreichendes Kriterium).} \end{aligned} \quad (3-52)$$

Da die Upper Bound meist etwas höher als der tatsächliche μ -Wert ist, verbleibt ein gewisser Konservatismus in der Methodik. Dieser ist jedoch sehr klein, da sich gemäß [Bala98] sowie aus eigener Erfahrung heraus folgende Faustwerte ableiten lassen (zumindest für Unsicherheitsmatrizen mit weniger als ca. 30 Unsicherheiten und einer Dimension kleiner als 100).

- * Δ_M rein komplex \rightarrow Abstand der Bounds im Bereich des Peaks von μ ca. 0-2 %
- * Δ_M gemischt reell / komplex \rightarrow Abstand der Bounds im Bereich des Peaks ca. 5-20 %
- * Δ_M vorwiegend reell \rightarrow Abstand der Bounds teils sehr groß bzw. evtl. keine Konvergenz der Algorithmen

Für den letzten Fall muss bei Bedarf künstlich eine komplexe, unstrukturierte Unsicherheit im Modell ergänzt werden oder eine vorhandene im Bereich des Peaks von μ stärker gewichtet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde auch versucht, ausgewählte reelle Unsicherheiten mit einem schmalen komplexen „Schlauch“ um den reellen Wertebereich herum zu erweitern und damit die Konvergenz zu optimieren. Der Effekt war aber sehr klein, weswegen dieser Ansatz wieder verworfen wurde.

Zum Abschluss der RS-Analyse sollen noch drei wichtige Sonderfälle (s. [Zhou96]) angegeben werden, für welche μ wesentlich einfacher bzw. exakt berechenbar ist:

- * Sonderfall 1: nur eine, wiederholte komplex-skalare Unsicherheit

$$\mathbf{A}_p = [\delta_1 \mathbf{I}_{m \times m}] \quad \text{mit } \delta_1 \in \mathbb{C}^{1 \times 1}, |\delta_1| \leq 1 \Rightarrow \mu(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M}) \quad (\text{Spektralradius}) \quad (3-53)$$

- ✱ Sonderfall 2: gesamte Unsicherheitsmatrix komplex unstrukturiert (wie H_∞ -Test)

$$\mathbf{A}_p = [\mathbf{A}_1] \quad \text{mit } \mathbf{A}_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}, \|\mathbf{A}_1\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \mu(\mathbf{M}) = \bar{\sigma}(\mathbf{M}) \quad (\text{max. SW}) \quad (3-54)$$

- ✱ Sonderfall 3: begrenzte Anzahl an wiederholten komplex-skalaren (S) und unstrukturierten (U) Unsicherheiten, s. (3-42)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &\in \underline{\Delta}^{\mathbb{C}} \quad \text{mit } 2S + U \leq 3 \\ \Rightarrow \mu(\mathbf{M}) &= \inf_{\mathbf{D} \in \underline{\mathcal{D}}} (\mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{D}^{-1}) \quad (\text{die optimierte Upper Bound entspricht exakt } \mu) \end{aligned} \quad (3-55)$$

3.6.5 Robuster Performanztest mittels μ -Analyse

Die RS-Analyse hatte als Voraussetzung, dass keine fiktiven Performanzunsicherheiten \mathbf{A}_F vorhanden sind, womit die Unsicherheitsmatrix stets quadratisch ist. Um RP-Forderungen analog zu Kapitel 3.4.5 in der Analyse zu berücksichtigen, müssen die Übertragungsfunktionen der relevanten Störgrößen zu den ausgewählten Fehlergrößen wieder mit Frequenzfiltern gewichtet werden. Die Unsicherheitsmatrix kann ähnlich wie in (3-30) als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_F \end{bmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_P \\ d_F \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{e} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} e_P \\ e_F \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

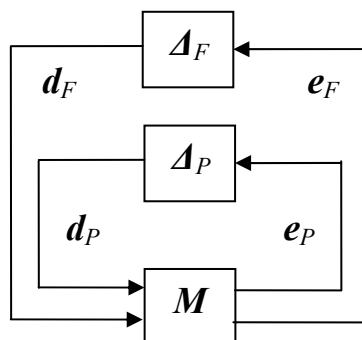


Abbildung 3-21: LFR für robusten Reglerentwurf

angeschrieben werden, wobei hier \mathcal{A}_p die zusammengefasste Matrixdarstellung aller (physikalischen) Modellunsicherheiten und \mathcal{A}_F die fiktive Performanzunsicherheit sind. Letztere ist per Definition unstrukturiert und kann eine beliebige zweidimensionale Größe in Abhängigkeit der Stör- und Fehlersignale besitzen. Die resultierende LFR-Schaltung ist in Abbildung 3-21 dargestellt.

Als Grundlage zur Untersuchung der Stabilität einer solchen Schaltung dient das Main Loop Theorem (s. z.B. [Zhou96] für eine Herleitung).

Definition 3.7: Für eine Schaltung gemäß Abbildung 3-21 mit $\|\mathcal{A}_p\|_\infty \leq 1$, $\mathcal{A}_p \in \mathbb{C}^{n_p \times n_p}$ und $\|\mathcal{A}_F\|_\infty \leq 1$, $\mathcal{A}_F \in \mathbb{C}^{n_F \times m_F}$ ist der geschlossene Kreis genau dann intern stabil mit $\|F_u(\mathbf{M}, \mathcal{A}_p)\|_\infty < 1$, wenn $\sup_{\omega} \mu_{\mathcal{A}}(\mathbf{M}(j\omega)) < 1$ gilt. \mathcal{A} wird in (3-56) definiert.

Da $F_u(\mathbf{M}, \mathcal{A}_p)$ der Übertragungsfunktion von \mathbf{d}_F auf \mathbf{e}_F entspricht, erfüllt die Bedingung $\|F_u(\mathbf{M}, \mathcal{A}_p)\|_\infty < 1$ exakt die RP-Forderungen. Somit lässt sich durch eine μ -Analyse der \mathbf{M} - \mathcal{A} -Struktur der RP-Test wieder wie ein RS-Problem untersuchen. Die RP-Bedingung für die numerische Berechnung lautet dann:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} (\text{Lower Bound } \mu) < 1 &\Leftarrow \text{RP erfüllt (notwendiges Kriterium),} \\ \sup_{\omega} (\text{Upper Bound } \mu) < 1 &\Rightarrow \text{RP erfüllt (hinreichendes Kriterium).} \end{aligned} \tag{3-57}$$

Abschließend sei angemerkt, dass die vorgestellte RP-Analyse auch einen Nachteil im Zusammenhang mit der Bewertung der Stabilitätsreserven haben kann. Per Definition gibt der Peak von μ an, um welchen Faktor das modellierte \mathcal{A} noch erhöht werden kann, bevor das System robuste Stabilität bzw. Performanz verliert. Häufig verhält es sich aber so, dass die physikalischen Modellunsicherheiten dem Ingenieur relativ gut bekannt sind und er deshalb \mathcal{A}_p so gewählt hat, dass es sicher alle Modellunsicherheiten abdeckt. Wird nun eine RP-Analyse in Verbindung mit einem \mathcal{A}_F durchgeführt, so ist dabei oft vor allem von Interesse, um welchen Faktor Letzteres noch erhöht werden darf, um beispielsweise Reglerverstärkungen optimal anzupassen. Da der Peak von μ aber nur angibt, um wie viel \mathcal{A}_p und \mathcal{A}_F gleichzeitig erhöht werden dürfen, gehen hierbei wertvolle Informationen verloren, die nur durch eine iterative Anpassung von \mathcal{A}_F zurückgewonnen werden können. Ein ähnliches Problem tritt auf, wenn $\sup(\mu) > 1$ ist und identifiziert werden soll, ob vor allem \mathcal{A}_p oder doch \mathcal{A}_F daran „Schuld“ ist. Abhilfe schafft hier das so genannte Worst Case Gain, welches im Sinne einer Skewed- μ -Analyse die Variation des \mathcal{A}_p -Anteils von \mathcal{A}_{dest} auf den Bereich $\|\mathcal{A}_{dest,P}\|_\infty \leq 1$ einschränkt und als Ergebnis die performanzrelevante, maximal mögliche H_2 -Verstärkung von \mathbf{d}_F auf \mathbf{e}_F berechnet.

3.6.6 Robuster Reglerentwurf mittels μ -Synthese

Grundidee der μ -Synthese ist die Berücksichtigung strukturierter Unsicherheitsmatrizen beim Reglerentwurf durch Kombination eines H_∞ -Entwurfs mit der Upper-Bound-Berechnung der μ -Analyse. Ausgangslage ist die LFR aus Abbildung 3-22, wobei \mathbf{D} der Skalierungsmatrix aus (3-50) entspricht. \mathbf{P} ist die erweiterte Regelstrecke, \mathbf{K} der zu entwerfende Regler und $\mathbf{\Delta} \in \underline{\mathbf{\Delta}}$ eine strukturierte Unsicherheitsmatrix wie in Kapitel 3.6.5.

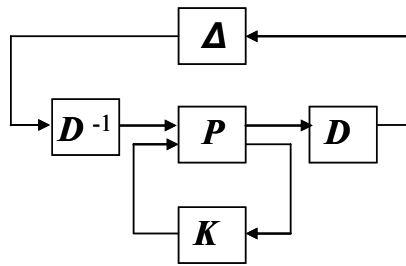


Abbildung 3-22: LFR für die μ -Synthese

Die bekannteste numerische Lösung des Entwurfsproblems ist die D-K-Iteration (s. z.B. [Dail90]), welche stichpunktartig folgendermaßen beschrieben werden kann:

- ✦ **K-Update:** Finde für ein festes \mathbf{D} mittels H_∞ -Entwurf einen Regler \mathbf{K} , so dass $\gamma = \|\mathbf{D}\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathbf{D}^{-1}\|_\infty$ (und damit der Peak der Upper Bound von μ) möglichst minimiert wird.
- ✦ **D-Update:** Finde für ein festes \mathbf{K} mittels des μ -Algorithmus eine der Struktur von $\mathbf{\Delta}$ entsprechende Skalierungsmatrix $\mathbf{D} \in \underline{\mathbf{D}}$ aus (3-50), welche wiederum $\gamma = \|\mathbf{D}\mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathbf{D}^{-1}\|_\infty$ möglichst minimiert. Bestimme dabei zuerst für jede Frequenz ω_i einzelne $\mathbf{D}_i(j\omega_i)$, die danach durch eine Funktion $\mathbf{D}(j\omega)$ möglichst gut interpoliert werden.
- ✦ **Iteration:** Wiederhole die vorigen Schritte so lange, bis γ bzw. der Upper-Bound-Peak von μ klein genug sind. Das Resultat ist ein geeigneter, robuster Regler \mathbf{K} .

Durch die D-K-Iteration wird demnach beim iterativen H_∞ -Entwurf also kein Regler für \mathbf{P} bestimmt, sondern für ein mit \mathbf{D} skaliertes \mathbf{P} , wobei mit der Skalierung die Struktur von $\mathbf{\Delta}$ berücksichtigt wird. Dadurch kann der Konservatismus des H_∞ -Entwurfs stark verringert werden. \mathbf{D} selbst wird dabei im Rahmen der numerischen μ -Analyse bestimmt, welche die selbe Kostenfunktion wie der H_∞ -Entwurf benutzt und damit eine iterative Optimierung erst möglich macht. Trotz der beschriebenen Vorteile wird die μ -Synthese eher selten angewandt, da sie auch mit einigen Nachteilen behaftet ist: zum einen das teils schwierige Closed-Loop-Shaping, die Erfüllung der Bedingungen (3-39) und (3-40) sowie die hohe

Reglersystemordnung beim H_∞ -Entwurf; zum anderen Ungenauigkeiten infolge suboptimaler Konvergenz und numerischer Probleme, die gerade bei hohen Systemordnungen auftreten können. In dieser Arbeit wird deshalb später in Kapitel 7.2 eine modifizierte μ -Synthese ohne H_∞ -Entwurf eingeführt.

3.7 Robuste Regelung mit Integral Quadratic Constraints

Die Anwendung von Integral Quadratic Constraints (IQCs) auf die Systemanalyse geht vor allem auf [Rant97] zurück, woraus auch die Grundlagen zu diesem Kapitel entnommen sind. Speziell in Verbindung mit der robusten Regelung eröffnen sich durch IQCs neue Möglichkeiten, da mit ihnen im Rahmen einer IQC-Analyse auch nichtlineare und zeitvariante Unsicherheiten berücksichtigt werden können. Bei der Präsentation der IQC-Theorie wird hier auch auf Ergebnisse der Diplomarbeiten [Rude07] und [Köpp08] zurückgegriffen, die sich mit der beispielhaften Anwendung von IQCs auf nichtlineare Dämpferkennlinien bzw. dem Methodenvergleich zwischen IQC- und μ -Analyse befassen.

3.7.1 Überblick über die IQC-Analyse

IQCs stellen quadratische Bedingungen zwischen zwei Signalvektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} in der Form

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^H \mathbf{\Pi}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3-58)$$

dar. Alternativ lässt sich die IQC aus (3-58) auch direkt in den Frequenzbereich auf

$$\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(j\omega) \\ \mathbf{w}(j\omega) \end{bmatrix}^H \mathbf{\Pi}(j\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(j\omega) \\ \mathbf{w}(j\omega) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3-59)$$

abbilden. Für die Signale muss $\mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^m)$ und $\mathbf{w} \in L_2(\mathbb{R}^p)$ gelten, s. (3-4); $\mathbf{\Pi}$ ist eine beliebige hermitesche Matrixfunktion der Dimension $(m+p) \times (m+p)$ und definiert die Eigenschaften der IQC. Sämtliche bisher vorgestellten parametrischen und dynamischen Unsicherheitsmatrizen können in Gestalt einer IQC-Bedingung als Block zwischen virtuellem Systemausgang \mathbf{w} und -eingang \mathbf{v} formuliert werden. Zum Beispiel kann eine komplexe Unsicherheit $\mathbf{A}_c \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ mit $w = \mathbf{A}_c v$ und $\|\mathbf{A}_c\|_\infty \leq 1$ über eine IQC gemäß (3-59) mit

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} v^2(j\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} w^2(j\omega) d\omega \geq 0 \quad (3-60)$$

repräsentiert werden. Denn sowohl $\|\mathcal{A}_c\|_\infty \leq 1$ als auch (3-60) führen zur Bedingung, dass die maximale Energieverstärkung vom Eingang zum Ausgang auf 1 beschränkt ist. In ähnlicher Weise lassen sich in allen bisher im Kapitel 3 eingeführten LFRs die \mathcal{A} -Blöcke durch geeignete IQC-Beziehungen ersetzen.

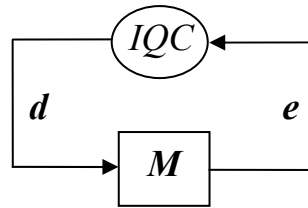


Abbildung 3-23: IQC-Schaltbild für die Systemanalyse

Darüber hinaus können noch eine Vielzahl anderer Unsicherheitsarten mit IQCs dargestellt werden, die bei entsprechender Wahl von Π auch nichtlinear oder von der Zeit abhängig sein dürfen. Die IQCs für die wichtigsten Anwendungsfälle können in der Literatur nachgeschlagen werden, z.B. in [Jöns04]. Neue Unsicherheitsarten können mit IQCs besonders einfach generiert werden, wenn sich die gesuchte Unsicherheit über die Schnittmenge bereits vorhandener ergibt. Die neue IQC-Bedingung lässt sich dann einfach durch die Summe der vorhandenen Π_i berechnen.

Analog zur LFR-Modellierung aus Kapitel 3.3 lassen sich einzelne IQC-Bedingungen wieder zu einer Gesamt-IQC des geschlossenen Kreises gemäß Abbildung 3-23 zusammenfassen. Auch hier sollte die Modellierung der virtuellen Ein- und Ausgänge so gestaltet werden, dass das System eine gute Konditionierung aufweist. Wie beim Small Gain Theorem gilt bei der IQC-Analyse, dass die Kreisverstärkung kleiner als 1 sein muss, um Stabilität zu gewährleisten. Damit ergibt sich in Anlehnung an [Rant97] folgendes, leicht abgewandeltes IQC-Stabilitätstheorem:

Theorem 3.2: IQC-Stabilitätstheorem

Gegeben sei ein wohldefinierter Regelkreis mit einer M - \mathcal{A} -LFR gemäß Abbildung 3-18 und eine IQC-Bedingung, die für jedes $\tau \in [0;1]$ die entsprechende Unsicherheitsmatrix $\tau\mathcal{A}$ repräsentiert. Dieser unsichere Kreis ist stabil, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$\begin{bmatrix} M(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^H \Pi(j\omega) \begin{bmatrix} M(j\omega) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \varepsilon \mathbf{I} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (3-61)$$

gilt. Für einen Beweis sei wieder auf die aufgeführte Literatur verwiesen. Die Prüfung des Kriteriums (3-61) erfolgt – wie bei der H_∞ - und μ -Analyse – über eine numerische Toolbox, welche in [Jöns04] beschrieben ist. Bei der numerischen Lösung, welche mit Hilfe des Kalman-Yakubovic-Popov-Lemmas auf ein konvexes Optimierungsproblem zurückgeführt werden kann, wird auch hier eine Skalierung der IQCs vorgenommen. Denn eine Multiplikation von $\mathbf{\Pi}$ mit einem Skalar $v_i \in \mathbb{R}^+$ ändert – ähnlich wie bei \mathbf{A} und \mathbf{D} – nichts an der IQC-Bedingung. Wird für (3-61) ein ε gefunden, so ist robuste Stabilität (oder Performanz) für den Regelkreis nachgewiesen.

3.7.2 IQC-Bedingung für ein zeitvariantes Skalar

Im Folgenden soll die IQC-Bedingung der Matlab-Funktion „iqc_tvskalar“ aus [Jöns04] wiedergegeben werden, welche für diese Arbeit von besonderer Relevanz ist. Mit dieser können im Gegensatz zur μ -Analyse nicht nur Unsicherheiten berücksichtigt werden, für welche $\|\delta\|_\infty = c_0 \leq 1$ gilt, sondern auch zeitvariante skalare Unsicherheiten mit

$$\|\delta(t)\|_\infty = c(t) \leq 1 \quad \forall t . \quad (3-62)$$

Die zugehörige IQC (für $w = v \cdot \delta(t)$, $|\delta(t)| \leq 1$) ist über

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & -X \end{bmatrix}, \quad X = X^H \geq 0, \quad Y = -Y^H . \quad (3-63)$$

definiert (s. [Jöns04] für Details). Alternativ, falls mit „iqc_tvskalar“ keine Stabilität nachweisbar ist, kann auch die IQC „iqc_slowtv“ verwendet werden. Bei dieser wird zusätzlich die maximale Änderungsrate $\max\{\dot{\delta}(t)\}$ beschränkt, was für quasi alle physikalischen Systeme auch Sinn macht. Dennoch ist als erste Wahl mit Nachdruck „iqc_tvskalar“ zu empfehlen, da diese auf Grund der kleineren Anzahl an Bedingungen numerisch wesentlich stabiler berechnet werden kann. Auch von der IQC „iqc_diag“, mit der mehrere auf einer Diagonalen angeordnete skalare, zeitvariante Unsicherheiten in einem einzigen Block gebündelt werden können, ist zu Gunsten von „iqc_tvskalar“ abzuraten. Denn bei der Lösung dieses IQC-Problems benutzt die IQC-Analyse nur eine Ungleichung, während sie bei „iqc_tvskalar“ für jede einzelne Unsicherheit eine eigene Ungleichung ansetzt. Dadurch (in Verbindung mit dem IQC-Berechnungsverfahren) steigen die Chancen, eine geeignete Lösung zu finden, stark an. Die Lösung selbst erfolgt in dieser Arbeit über die IQCbeta-Toolbox, welche wie erwähnt in [Jöns04] beschrieben wird.

3.7.3 Vergleich mit der μ -Analyse

Der folgende Abschnitt soll einen kurzen, auf den Ergebnissen der Diplomarbeit [Köpp08] aufsetzenden Vergleich zwischen μ - und IQC-Ansatz bieten. Speziell soll herausgearbeitet werden, warum die μ -Analyse für die meisten Robustheitstests in dieser Arbeit verwendet wird, obwohl die IQC-Analyse doch fast nur Vorteile zu bieten scheint. [Köpp08] hat zu diesem Zweck untersucht, wo die Vorteile und Grenzen der beiden Methoden liegen, um eine optimale Anwendung der Robustheitsanalyse in dieser Arbeit zu gewährleisten. Die gewonnenen Erkenntnisse basieren auf gezielten Analysen und Rechnungen mit repräsentativen Beispielsystemen, wobei hier aber nur die Hauptergebnisse zusammengefasst werden sollen. Im Rahmen der Arbeit wurde auch das Parameterraumverfahren nach Ackermann aus [Acke93] untersucht, welches auf Grund der beschränkten Anzahl an möglichen Unsicherheiten aber für die angedachte Anwendung ausscheidet und im Folgenden nicht weiter berücksichtigt wird.

Vergleich der μ - mit der IQC-Methodik nach Kategorien:

a) Art der modellierten Unsicherheiten

Hier liegt die erwähnte Stärke der IQC-Analyse: mit ihr sind nahezu beliebige nichtlineare oder zeitvariante Unsicherheiten formulierbar, während die μ -Analyse zwar reelle und komplexe Unsicherheiten, aber nur in linearer, zeitinvarianter Form vorsieht. Weiterhin kann bei der μ -Analyse die Untersuchung ausschließlich reeller Unsicherheiten zu numerischen Problemen führen.

b) Numerisch sinnvolle Anzahl an Systemunsicherheiten- und zustandsvariablen

Hingegen liegt hier der wohl größte Nachteil der IQC-Analyse, da bereits für wenige Unsicherheiten mehrere hundert Variablen innerhalb des IQC-Lösungsalgorithmus optimiert werden müssen. Dies liegt daran, dass die IQC-Methodik den Stabilitätstest zuerst in ein konvexes Optimierungsproblem umformuliert. Deshalb sind mit der IQC-Analyse bereits Systeme mit Unsicherheitsmatrizen der Dimension 10×10 oft nicht mehr lösbar, während die μ -Analyse auch bei Dimensionen von 100×100 meist noch problemlos funktioniert.

Selbst wenn die IQC-Analyse zu einem Ergebnis führt, so ist die Lösung bei großer Unsicherheits- oder Systemordnung mit einem vielfach höheren numerischen Aufwand und entsprechend längeren Berechnungszeiten verbunden. Gerade bei komplizierten, nichtlinearen Unsicherheiten tritt dieses Problem der IQCs besonders deutlich zu Tage. Der Aufwand für die Unsicherheitsmodellierung ist bei beiden Methoden übrigens als gleich hoch zu bewerten, da sie auf derselben LFR-Bildung aufsetzen können.

c) Genauigkeit der Ergebnisse

Beide Verfahren können zu einem kleinen Konservatismus in den Ergebnissen führen. Eine generelle Aussage darüber, welche Methode hier besser ist, kann nicht getroffen werden. Jedoch zeigt die Erfahrung, dass die μ -Ergebnisse tendenziell etwas weniger konservativ sind, nicht zuletzt dadurch, dass die IQC-Analyse bereits im Stabilitätstheorem einen gewissen Konservatismus trägt, während die μ -Analyse diesen erst durch die numerische Approximation gewinnt.

Ein eindeutiger Vorteil der μ -Analyse liegt allerdings in der Bewertung der Stabilitätsreserven: der Wert von μ ist ein direktes Maß dafür, um welchen Faktor die Unsicherheitsmatrix noch vergrößert werden darf bzw. verkleinert werden muss. Die IQC-Analyse gibt hierüber keinerlei Aufschluss. Vielmehr ist mit ihr nicht einmal direkt nachweisbar, dass ein System instabil ist. Falls für (3-61) kein ε gefunden wird, kann nur gefolgert werden, dass für das System keine Stabilität nachgewiesen werden konnte, was in Verbindung mit den numerischen Schwächen der IQC-Methodik ein großes Problem darstellt.

d) Anwendbarkeit auf Reglersynthese

Für μ existiert in Form der μ -Synthese aus Kapitel 3.6.6 ein erprobtes Reglerauslegungsverfahren und unabhängig davon lässt sich die μ -Analyse auf Grund ihrer numerisch genauen, zuverlässigen Stabilitätsaussagen leicht auch in andere Entwurfsverfahren integrieren. Im Rahmen der IQC-Methodik steht zum aktuellen Zeitpunkt kein vergleichbares, numerisch stabiles und erprobtes Syntheseverfahren zur Verfügung.

e) Fazit

Zusammenfassend kann nun im Hinblick auf die Punkte b) und c) anschaulich erklärt werden, warum die μ -Analyse das bevorzugte Verfahren für die meisten Stabilitätstests in dieser Arbeit sein wird: bei der Anwendung auf das Viertelfahrzeug wird die numerisch zuverlässige Betrachtung von Unsicherheitsmatrizen mit deutlich größerer Dimension als 10×10 notwendig sein, auf welche die IQC-Analyse meist nicht mehr anwendbar ist. Darüber hinaus werden die exakten (quantitativen) Stabilitätsaussagen der μ -Analyse später für einen Ersatzreglerentwurf in Kapitel 7.2 von Bedeutung sein. Nichtsdestotrotz wird auch die IQC-Analyse im Zusammenhang mit einem global stabilen, alternativen Ersatzreglerentwurf in Kapitel 7.1 zur Anwendung kommen.

4 Geschwindigkeitsbasierte Linearisierung, Analyse und Entwurfsmethodik

Unter der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung (GBL) versteht man ein noch relativ junges Linearisierungsverfahren, das erst 1997 von Leith/Leithead in [Leit97] eingeführt wurde. Mit Hilfe der GBL lassen sich allgemeine (stetige) nichtlineare Systeme durch eine Familie linearer Systeme darstellen, die GBL-Familie. Im Unterschied zur klassischen Linearisierung ist die GBL nicht nur in Gleichgewichts-Arbeitspunkten, sondern in beliebigen Punkten im Zustandsraum gültig. Deshalb stellt die GBL-Familie eine im dynamischen Sinne optimale Quasi-LPV-Form des nichtlinearen Systems dar, dessen Dynamik sich durch geeignete Übergänge innerhalb der Familie beliebig genau approximieren lässt. Die nächsten Abschnitte sollen den Begriff GBL und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme von der theoretischen Seite her näher beleuchten. Ein motivierendes Beispiel für die Systemanalyse mittels GBL wird in Kapitel 5.1 gegeben. Dort werden die Hauptaspekte und -vorteile der GBL erstmalig für ein berühmtes Standardproblem der Fachliteratur herausgearbeitet, weshalb Kapitel 5.1 auch als Vorbereitung für dieses Kapitel gelesen werden könnte.

4.1 Theorie zur geschwindigkeitsbasierten Linearisierung (GBL)

4.1.1 Herleitung der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung

Wie bereits erwähnt, stellt die GBL ein relativ junges Modellierungsverfahren dar, das erstmals in [Leit97] und [Leit98a] unter dem Namen „Velocity-Based Design“ Erwähnung findet. Die Grundidee der GBL besteht darin, nichtlineare Systeme in eine Quasi-LPV-Form zu bringen, mit der die lokale nichtlineare Dynamik auch weit abseits von Gleichgewichts-Arbeitspunkten untersucht werden kann. Weiterhin lässt sich mit dieser aus beliebig vielen linearen Subsystemen bestehenden Quasi-LPV-Form, die als GBL-Familie bezeichnet wird, das Zeitverhalten des nichtlinearen Systems über den gesamten Zustandsraum theoretisch beliebig genau approximieren. Die GBL-Familie wird dabei durch eine implizite Scheduling-Variable parametrisiert, welche von den Systemzuständen, den Systemausgängen oder von externen Eingängen abhängig sein kann. Im Folgenden soll das Grundprinzip der GBL Schritt für Schritt hergeleitet werden. Ausgangslage sei ein nichtlineares System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{r}), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{r}),\end{aligned}\tag{4-1}$$

wobei die Zustandsvariablen \mathbf{x} und Eingänge \mathbf{r} den Raum $\Phi = \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ aufspannen und die ersten Ableitungen von \mathbf{F} und \mathbf{G} lipschitzstetig sind.

Definition 4.1: Ein Gleichgewichts-Arbeitspunkt $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i\} \in \Phi$ sei definiert über

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i) &= 0, \\ G(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i) &= \mathbf{y}_i. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Definition 4.2: Ein allgemeiner Arbeitspunkt $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i\} \in \Phi$ sei definiert über

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i) &\neq 0, \\ G(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_i) &= \mathbf{y}_i. \end{aligned} \quad (4-3)$$

a) Klassische Linearisierung (Arbeitspunkt-Linearisierung)

Um das System nun in eine lineare Form zu transformieren, wird in der klassischen Linearisierung um einen Gleichgewichts-Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0)$ eine Taylorreihe 1. Ordnung gebildet, wodurch das dynamische Verhalten des nichtlinearen Systems lokal um diesen Punkt herum durch ein lineares System approximiert wird.

$$\begin{aligned} \delta \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \nabla_x F(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) \delta \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r F(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) \delta \mathbf{r} \\ \delta \hat{\mathbf{y}} &= \nabla_x G(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) \delta \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r G(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0) \delta \mathbf{r} \\ \delta \mathbf{r} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \delta \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_0, \quad \delta \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (4-4)$$

Zur Veranschaulichung soll ein Beispiel mit dem aktuellen Arbeitspunkt $x_1 = 2$ und dem Gleichgewichts-Arbeitspunkt $x_0 = 0$ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} F(x) = \dot{x} &= -\frac{1}{3}x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x_1) = -\frac{8}{3}, \\ \dot{\hat{x}} &= \nabla_x F(x_0) \delta \hat{x} = -x_0^2 \delta \hat{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{x}} = 0 \cdot \delta \hat{x}, \\ \delta \hat{x} &= \hat{x} - \hat{x}_0 = \hat{x} - 2. \end{aligned} \quad (4-5)$$

An diesem Beispiel ist besonders leicht zu sehen, dass die klassische Linearisierung nur in einer ausreichend kleinen Region um den Gleichgewichts-Arbeitspunkt herum eine gute Approximation der nichtlinearen Dynamik garantiert. Während also die klassische Linearisierung die Approximation $\dot{\hat{x}} = 0$ liefert, ist der wahre Verlauf von $\dot{x} = F(x)$ in Abbildung 4-1 eingezeichnet. Dort ist für x_1 auch eine Approximation $\dot{x} = A(x)x$ eingezeichnet, wie sie in einem simplen Ad-hoc-LPV-Ansatz modelliert werden könnte.

b) Taylor-Reihen-Entwicklung 1. Ordnung

Eine wesentlich bessere, eingangsaffine Approximation lässt sich durch eine Taylor-Reihen-Entwicklung 1. Ordnung für den Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1)$ erreichen.

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) + \nabla_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \delta \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) + \nabla_x \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \delta \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r} \\ \delta \mathbf{r} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \quad \delta \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \delta \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_1\end{aligned}\quad (4-6)$$

In (4-6) sind die Zustandsvariablen noch relativ zum Arbeitspunkt selbst definiert, in absoluten Koordinaten lässt sich das System als

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) - \nabla_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{\mathbf{x}}_1 - \nabla_r \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1 + \nabla_x \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r \mathbf{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{r}, \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) - \nabla_x \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{\mathbf{x}}_1 - \nabla_r \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1 + \nabla_x \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{\mathbf{x}} + \nabla_r \mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{r}\end{aligned}\quad (4-7)$$

beschreiben. Im Beispiel aus a) resultiert für den betrachteten Entwicklungspunkt $(x_1 = 2, \dot{x}_1 = -8/3)$ die Taylor-Reihe

$$\hat{\dot{x}} = F(x_1) + \nabla_x F(x_1) \delta \hat{x} = -\frac{1}{3} x_1^3 - x_1^2 (\hat{x} - x_1) = \frac{2}{3} x_1^2 - x_1^2 \hat{x}.\quad (4-8)$$

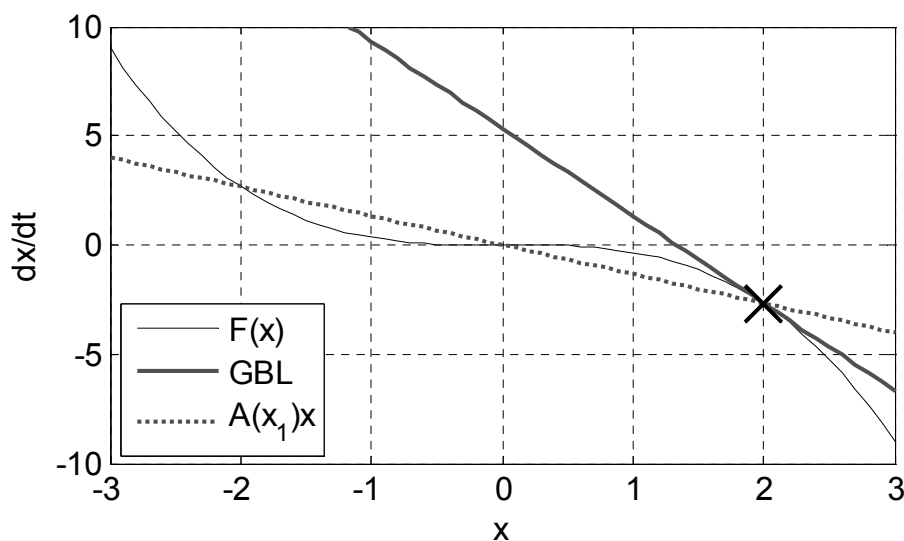


Abbildung 4-1: Beispiel zur GBL für $F(x)$

Die Approximation ist in Abbildung 4-1 unter dem Stichwort GBL eingezeichnet (da die GBL später dieselbe Approximation liefern wird). Das große Defizit dieser Approximation sind die verbleibenden konstanten und damit nichtlinearen Terme in (4-7) und (4-8), weshalb es sich hierbei um keine wirkliche Linearisierung im regelungstechnischen Sinne handelt. Klassische lineare Entwurfs- und Analysemethoden können also keine direkte Anwendung finden.

c) Geschwindigkeitsbasierte Linearisierung

Die in b) erwähnten Probleme lassen sich lösen, indem (4-7) nach der Zeit abgeleitet wird. \dot{x} kann dabei durch w substituiert werden.

$$\begin{aligned}\hat{w} &= \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} &= \nabla_x F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{w} + \nabla_r F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\hat{y}} &= \nabla_x G(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \hat{w} + \nabla_r G(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1) \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (4-9)$$

Wenn zusätzlich in (4-9) die Anfangsbedingungen zu

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t_1) &= \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1), \\ \hat{\mathbf{w}}(t_1) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t_1) = \dot{\mathbf{x}}(t_1) = F(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1), \\ \hat{\mathbf{y}}(t_1) &= \mathbf{y}(t_1) = G(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1)\end{aligned}\quad (4-10)$$

gewählt werden, so ist das System (4-9) dynamisch exakt äquivalent zum System (4-7), weist nun aber komplett linearen Charakter auf. (4-9) bezeichnet man als geschwindigkeitsbasierte Linearisierung von (4-1) im Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1)$. Für das Beispiel ergibt sich die GBL wie folgt:

$$\dot{\hat{w}} = \nabla_x F(x_1) \hat{x} = -x_1^2 \hat{w} = -4 \hat{w} . \quad (4-11)$$

Während in Abbildung 4-1 die Approximation von $F(x)$ durch die GBL dargestellt wird, vergleicht Abbildung 4-2 die tatsächliche Dynamik $\dot{w}(w)$ aus (4-12) mit der GBL-Näherung. Für den zum Arbeitspunkt $x_1 = 2$ gehörigen Wert $w_1 = w(x_1) = -8/3$ gilt also die Beziehung (4-13). Wie zu sehen ist, verwendet die GBL erst auf Geschwindigkeits- bzw. \dot{x} -Ebene eine Approximationsart der Systemdynamik, wie sie der Ad-hoc-Ansatz $\dot{x} = A(x)x$ aus Abbildung 4-1 qualitativ bereits auf x -Ebene angesetzt hatte.

$$\dot{w} = \ddot{x} = \nabla_x F(x)\dot{x} = -x^2 w = -\sqrt[3]{9w^2} \cdot w \quad (4-12)$$

$$\hat{w}_1 = \dot{w}_1 = \frac{32}{3} \quad (4-13)$$

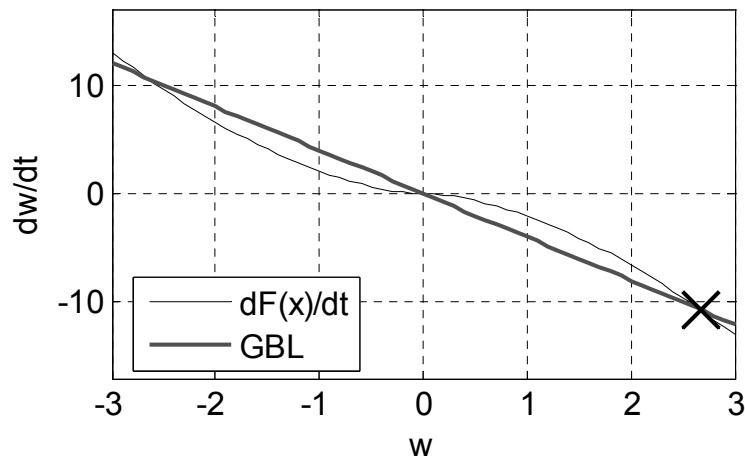


Abbildung 4-2: Beispiel zur GBL für $dF(x)/dt$

Vergleicht man weiterhin die GBL mit der exakten Zeitableitung von (4-1),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= \nabla_x F(x, r)\hat{w} + \nabla_r F(x, r)\dot{r}, \\ \dot{\hat{y}} &= \nabla_x G(x, r)\hat{w} + \nabla_r G(x, r)\dot{r} \end{aligned} \quad (4-14)$$

bzw. (4-12) für das Beispiel, so ist leicht zu erkennen, dass die GBL genau die „Froze-Time“-Betrachtung im jeweiligen Arbeitspunkt darstellt. Die gesamte nichtlineare Dynamik (4-1) bzw. (4-14) lässt sich deshalb über den Raum Φ durch Zusammensetzen der stückweise lokalen Approximationen (4-9) mit den jeweiligen Anfangsbedingungen (4-10) beschreiben. Die Menge aller derart durch die GBL erzeugten linearen Systeme bezeichnet man als GBL-Familie, die nichts anderes als eine Quasi-LPV-Darstellung des nichtlinearen Systems ist. Ohne die Ableitung von (4-8) nach der Zeit ließe sich in analoger Weise eine polytopische Darstellung des Systems herleiten, die nahe mit der GBL-Familie verwandt ist, allerdings stets den erwähnten konstanten Term aufweist.

Prinzipiell ließe sich für bestimmte nichtlineare Systeme wie das im Beispiel auch direkt eine Quasi-LPV-Form im Rahmen des in Abbildung 4-1 erwähnten, sehr simplen Ad-hoc-Ansatzes (4-15) realisieren. Dieses Vorgehen weist aber im Allgemeinen drei signifikante Nachteile auf:

$$\dot{x} = \frac{F(x)}{x} x = -\frac{1}{3} x^2 x = A(x)x \quad (4-15)$$

- a) Nicht für alle denkbaren Fälle ist dadurch eine über x analytische Matrixfunktion $A(x)$ erzeugbar.
- b) Bei komplexeren Nichtlinearitäten, z.B. der Produktform $f_i(x_i)f_k(x_k)$ liefert dieser Ansatz keinen Hinweis darauf, wie $A(x)$ am besten zu wählen ist.
- c) Stets, auch im Beispiel, berücksichtigt diese resultierende Quasi-LPV-Form nur die Zeitabhängigkeit $x(t)$ im Sinne einer Approximation 1. Ordnung, nicht aber die für die Stabilität relevante nichtlineare lokale Dynamik $\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_i, r_i)$.

Gerade c) kann für die Stabilitätsanalyse des nichtlinearen Systems eine bedeutende Rolle spielen, wie später ein motivierendes Beispiel in Kapitel 5.1 zeigen wird.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der GBL besteht darin, dass sie genau dann identisch zur klassischen Linearisierung ist, wenn (x_1, r_1) einem Gleichgewichts-Arbeitspunkt (x_0, r_0) entspricht. Da die Stabilität genau dieser Punkte in vielen Regelungs- und Analyseverfahren wie Lyapunovs indirekter Methode eine notwendige Voraussetzung für die Stabilität des nichtlinearen Systems darstellt, ist auch die Stabilität der GBL in diesen Punkten eine notwendige Voraussetzung dafür. Außerdem wird die Äquivalenz der Linearisierungsfamilie und des eigentlichen nichtlinearen Systems in den Gleichgewichts-Arbeitspunkten in zahlreichen Veröffentlichungen als besonders wichtige Forderung erwähnt, um sinnvolle Reglerentwürfe oder Dynamikanalysen zu ermöglichen. Unter dem Stichwort (erweitertes) lokales Äquivalenzprinzip, gemäß dem die klassischen Gleichgewichtspunkts-Linearisierungen dynamisch jeweils dem zugehörigen Mitglied der GBL-Familie entsprechen müssen, sind darüber z.B. in [Kami95], [Lawr95] und [Leit98b] detailliertere Informationen zu finden.

4.1.2 Approximationsgüte durch die GBL

Vor einer theoretischen Betrachtung der Approximationsgüte soll die Fähigkeit der GBL, die Dynamik eines nichtlinearen Systems zu approximieren, anhand eines Beispiels aus [Herr09] untersucht werden. Gegeben sei das nichtlineare, unangeregte System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^2, \\ x_0 &= x(t=0) = 3 \end{aligned} \quad (4-16)$$

mit dem Anfangszustand x_0 . Die Taylor-Reihen-Entwicklung 1. Ordnung in einem beliebigen Arbeitspunkt x_1 ergibt

$$\dot{\hat{x}} = \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1\hat{x} \quad (4-17)$$

was sich durch Zeitableitung in die GBL-Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= -2\hat{x}_1\hat{w}, \\ \hat{w}_1 &= \hat{w}(x(t_1)) = -\hat{x}_1^2, \quad \hat{x}_0 = x_0 = 3 \end{aligned} \quad (4-18)$$

überführen lässt. Im Folgenden soll nun die GBL-Familie (4-18) simulativ für Zeiten $t \in [0; 5]$ mit dem Originalsystem (4-16) verglichen werden, wobei jeweils nach einem Zeitintervall T der Arbeitspunkt x_1 neu gesetzt wird. Damit werden die lokalen Anfangsbedingungen (4-10) erfüllt. Zu Beginn jedes $(k+1)$ -ten Zeitintervalls muss also $\hat{w}(t_k) = \dot{\hat{x}}(t_k)$ und für $t=0$ muss $\hat{x}(0) = x(0)$ gewählt werden. Das Gesamtsystem wird hier durch zeitlich-stückweise Approximationen nachgebildet. Die folgenden Abbildungen zeigen die Ergebnisse der Simulation für drei verschiedene Intervalllängen $T = 0,1$ s, $T = 0,5$ s und $T = 3$ s: Abbildung 4-3 stellt die Approximation des Verlaufs von x dar. Für $T = 0,1$ s ergibt sich ein sehr runder Verlauf, welcher quasi exakt mit dem wahren Verlauf übereinstimmt (der hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet wurde). Je größer das Zeitintervall wird, desto größer sind auch die Approximationsfehler, was speziell in Abbildung 4-5 gezeigt wird. Dennoch erhält man bereits für $T = 0,5$ s eine brauchbare Näherung.

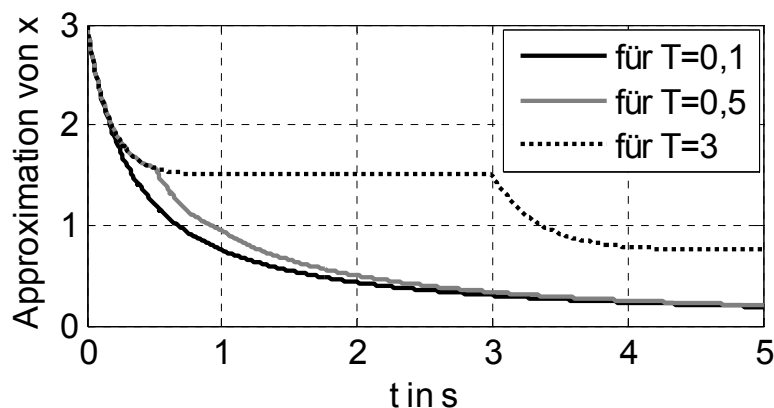
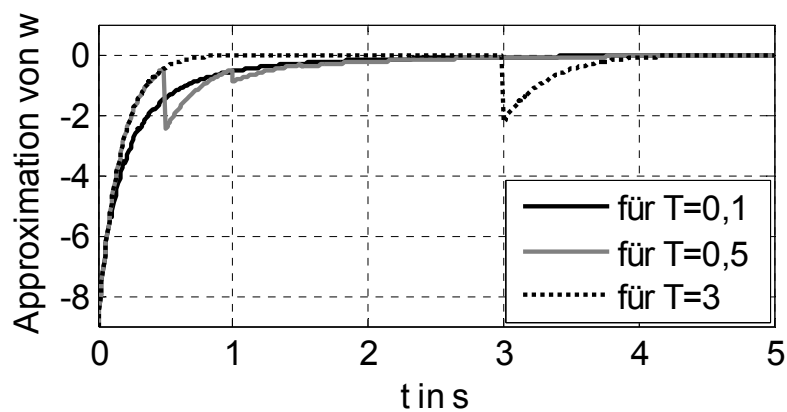
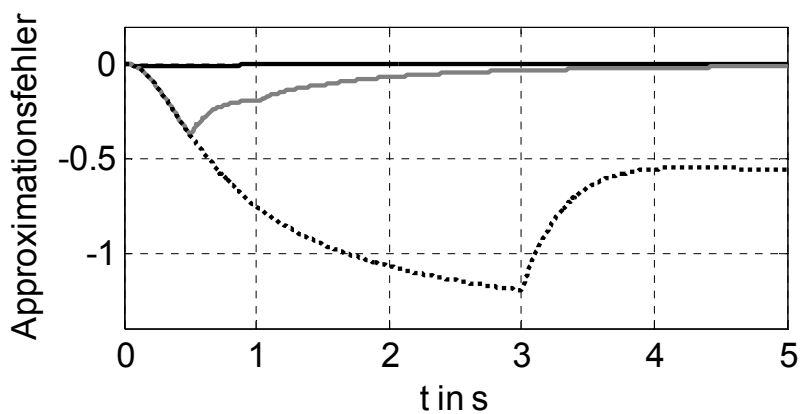


Abbildung 4-3: GBL-Approximationsbeispiel (x)

Abbildung 4-4: GBL-Approximationsbeispiel (w)Abbildung 4-5: GBL-Approximationsbeispiel (Fehler von x)

Geht die Länge des Zeitintervalls gegen Null, so scheint die GBL-Familie in das exakte nichtlineare System überzugehen. In Abbildung 4-4 ist zu sehen, dass die Approximation \hat{w} der Ableitung von x nicht stetig ist. Dies begründet sich dadurch, dass zu Beginn jedes neuen Zeitintervalls der aktuelle Integratorwert von (\hat{w} zu) \hat{w} künstlich auf $-\hat{x}_1^2$ gesetzt werden muss, weil sich das neue Intervall auf einen neuen Arbeitspunkt bezieht.

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass bei ausreichend feiner Diskretisierung in lineare GBL-Subsysteme die Dynamik eines allgemeinen nichtlinearen Systems (4-1) tatsächlich beliebig genau approximiert werden kann. Außerdem wird gezeigt, dass die GBL-Familie – unabhängig von der Diskretisierung – eine Approximation 2. Ordnung der tatsächlichen Lösung und somit wesentlich genauer als klassische Linearisierungsverfahren ist. Der ursprüngliche Beweis ist in [Leit98a] gegeben und soll hier in modifizierter Form wesentlich ausführlicher wiedergegeben werden.

Es sei angenommen, dass $\mathbf{x}(t)$ die Lösung des nichtlinearen Systems (4-1) im Zeitintervall $[0; T[$ ist. Dieses Intervall sei wiederum aufgeteilt in n Teilintervalle $[T_{i-1}; T_i[$ mit $i \in [1; n]$ und $T_i = iT/n$. In den Teilintervallen gelte die GBL-Approximation $\hat{\mathbf{x}}(t)$, für $T_0 = 0$ auch die Startbedingung (4-10). Zu beachten ist, dass $\hat{\mathbf{w}}(t)$ nur innerhalb der einzelnen Intervalle stetig ist, da die Anfangswerte entsprechend dem obigen Beispiel zu Beginn jedes Intervalls neu gesetzt werden, s. Abbildung 4-3 und Abbildung 4-4. Für $\delta\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(T_{i-1})$ lässt sich der Ausdruck $\delta\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \partial(\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(T_i)) / \partial t$ im $(i+1)$ -ten Intervall somit als

$$\delta\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) + \nabla_x \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1}))\delta\hat{\mathbf{x}}(t) + \nabla_r \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1}))\delta\mathbf{r}(t) \quad (4-19)$$

mit $\delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(T_{i-1})$, $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \delta\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ und $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ anschreiben. Weiterhin wird nun für das i -te Intervall eine Funktion $\chi_i(t)$ eingeführt, welche die Lösung der tatsächlichen nichtlinearen Dynamik für $\chi_i(T_{i-1}) = \hat{\mathbf{x}}(T_{i-1})$ darstellt. Auf Grund der Definition der GBL gilt damit auch

$$\dot{\chi}_i(T_{i-1}) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1}) = \delta\dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1}) = \hat{\mathbf{w}}(T_{i-1}) . \quad (4-20)$$

Theorem 4.1: (abgeleitet aus den Ausführungen im Anhang von [Leit98a])

- (i) Die durch (4-9) und (4-19) definierte GB-Linearisierung $\hat{\mathbf{x}}(t)$ des nichtlinearen Systems (4-1) ist eine Approximation 2. Ordnung der nichtlinearen Lösung $\chi_i(t)$ aus (4-20) im i -ten Teilintervall mit $i \in [1; n]$.
- (ii) Durch eine entsprechende Erhöhung der Teilintervallanzahl n lässt sich die exakte Lösung $\mathbf{x}(t)$ durch $\hat{\mathbf{x}}(t)$ beliebig genau annähern.

Beweis:

$\chi_i(t)$ kann durch eine Taylorreihe 2. Ordnung repräsentiert werden.

$$\chi_i(t) = \chi_i(T_{i-1}) + \dot{\chi}_i(T_{i-1})(t - T_{i-1}) + 0,5 \cdot \ddot{\chi}_i(T_{i-1})(t - T_{i-1})^2 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{A}_2 + \mathbf{R}_2 \quad (4-21)$$

\mathbf{A}_2 ist eine Approximation 2. Ordnung, der Rest \mathbf{R}_2 ergibt sich als Term 3. Ordnung (z.B. gemäß [HerN07]) für ein geeignetes ξ zu

$$\mathbf{R}_2 = \frac{1}{3!} \ddot{\chi}_i(\xi)(t - T_{i-1})^3 \quad \text{mit } \xi \in [T_{i-1}, t]. \quad (4-22)$$

Weiterhin lässt sich die GBL-Approximation $\hat{\mathbf{x}}(t)$ als Integration von (4-19) darstellen.

$$\int_{s=T_{i-1}}^t \dot{\hat{\mathbf{x}}}(s) ds = \hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1})(t - T_{i-1}) + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_x F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \delta \hat{\mathbf{x}}(s) ds + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_r F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \delta \mathbf{r}(s) ds \quad (4-23)$$

Wird nun die Differenz aus (4-23) und dem Term A_2 aus (4-21) gebildet und anschließend nach $\hat{\mathbf{x}}(t)$ aufgelöst, so erhält man unter Berücksichtigung von $\chi_i(T_{i-1}) = \hat{\mathbf{x}}(T_{i-1})$ und der Beziehung (4-21) schließlich (4-24) mit dem Fehler (4-25).

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \chi_i(T_{i-1}) + \dot{\chi}_i(T_{i-1})(t - T_{i-1}) + \frac{1}{2} \ddot{\chi}_i(T_{i-1})(t - T_{i-1})^2 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \ddot{\chi}_i(T_{i-1})(t - T_{i-1})^2 + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_x F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \delta \hat{\mathbf{x}}(s) ds + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_r F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \delta \mathbf{r}(s) ds \quad (4-25)$$

Auf Grund von $\dot{\chi}_i(t) = F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{r}(t))$ gilt $\ddot{\chi}_i(t) = \nabla_x F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{r}(t)) \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) + \nabla_r F(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t)$ (im i -ten Intervall) und somit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{T_{i-1}}^t \nabla_x F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) (\delta \hat{\mathbf{x}}(s) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1})(s - T_{i-1})) ds + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_r F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) (\delta \mathbf{r}(s) - \dot{\mathbf{r}}(T_{i-1})(s - T_{i-1})) ds. \quad (4-26)$$

Vergleicht man die Klammerausdrücke in (4-26) mit den Taylorreihen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{x}}(t) &= \delta \hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}) + \delta \dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1})(t - T_{i-1}) + \mathbf{R}_{x,1}, \\ \delta \mathbf{r}(t) &= \delta \mathbf{r}(T_{i-1}) + \delta \dot{\mathbf{r}}(T_{i-1})(t - T_{i-1}) + \mathbf{R}_{r,1}, \end{aligned} \quad (4-27)$$

so können dort die Restterme $\mathbf{R}_{x,1}$ und $\mathbf{R}_{r,1}$ wieder gefunden werden, da $\delta\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1})=0$ und $\delta\mathbf{r}(T_{i-1})=0$ sind. Weiterhin lassen sich in Anlehnung an (4-22) für spezielle ξ_x und ξ_r folgende Ungleichungen für die Restterme ableiten.

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{x,1} &= \delta\hat{\mathbf{x}}(t) - \delta\dot{\hat{\mathbf{x}}}(T_{i-1})(t - T_{i-1}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2!} \delta\ddot{\hat{\mathbf{x}}}(\xi_x)(t - T_{i-1})^2 = \mathbf{k}_x(t - T_{i-1})^2 < \mathbf{k}(t - T_{i-1})^2 \\ \mathbf{R}_{r,1} &= \delta\mathbf{r}(t) - \delta\dot{\mathbf{r}}(T_{i-1})(t - T_{i-1}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2!} \delta\ddot{\mathbf{r}}(\xi_r)(t - T_{i-1})^2 = \mathbf{k}_r(t - T_{i-1})^2 < \mathbf{k}(t - T_{i-1})^2\end{aligned}\quad (4-28)$$

Hierbei repräsentieren \mathbf{k}_x , \mathbf{k}_r und \mathbf{k} reelle Vektoren adäquater Größe. Damit ergibt sich der Betrag des Fehlerterms ε zu

$$|\varepsilon| = \left| \int_{T_{i-1}}^t \nabla_x F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \mathbf{R}_{x,1}(s) ds + \int_{T_{i-1}}^t \nabla_r F(\hat{\mathbf{x}}(T_{i-1}), \mathbf{r}(T_{i-1})) \mathbf{R}_{r,1}(s) ds \right|, \quad (4-29)$$

weshalb unter Berücksichtigung der quadratischen Terme in (4-28) ein $k_1 \in \mathbb{R}_0^+$ existieren muss, so dass (4-30) erfüllt ist.

$$|\varepsilon| = |\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}_2| < k_1(t - T_{i-1})^3 \quad (4-30)$$

Da \mathbf{A}_2 aus (4-21) selbst eine Approximation 2. Ordnung von $\chi_i(t)$ darstellt, muss außerdem ein geeignetes $k_2 \in \mathbb{R}_0^+$ existieren, so dass Ungleichung (4-31) erfüllt ist. Damit ist der Restterm der Abweichung $\chi_i(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ von der Ordnung 3 und $\hat{\mathbf{x}}(t)$ im i -ten Intervall eine Approximation 2. Ordnung für $\chi_i(t)$, womit die Aussage (i) des Theorems 4.1 nachgewiesen ist.

$$|\chi_i(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| < k_2(t - T_{i-1})^3 \quad (4-31)$$

Um die Aussage (ii) zu beweisen, muss zusätzlich der Zusammenhang zwischen $\chi_i(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ betrachtet werden. Diese beiden Funktionen unterscheiden sich nur hinsichtlich ihrer Anfangsbedingungen im jeweiligen Teilintervall, weshalb gemäß dem Theorem 2.5 aus [Khal92] für ein bestimmtes $k_3 \in \mathbb{R}_0^+$

$$|\chi_i(t) - \mathbf{x}(t)| < |\chi_i(T_{i-1}) - \mathbf{x}(T_{i-1})| e^{k_3(t - T_{i-1})} \quad (4-32)$$

gilt. Für das i -te Teilintervall lassen sich folgende Fehlerterme definieren.

$$\begin{aligned} e_i(t) &= |\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)| \leq e_{\chi,i} + e_{\hat{\mathbf{x}},i} \\ \text{mit } e_{\chi,i} &= |\boldsymbol{\chi}(t) - \mathbf{x}(t)| \\ \text{und } e_{\hat{\mathbf{x}},i} &= |\hat{\mathbf{x}}(t) - \boldsymbol{\chi}(t)| \end{aligned} \quad (4-33)$$

Genauere Fehlerwerte lassen sich mittels einer Iteration über die einzelnen Teilintervalle ermitteln:

1. Teilintervall:

$$e_1 \leq e_{\chi_1} + e_{\hat{\mathbf{x}}_1} < 0 + k_2 \left(\frac{T}{n} \right)^3 \quad (4-34)$$

2. Teilintervall:

$$e_2 \leq e_{\chi_2} + e_{\hat{\mathbf{x}}_2} < e_1 e^{k_3 \frac{T}{n}} + k_2 \left(\frac{T}{n} \right)^3 = k_2 \left(\frac{T}{n} \right)^3 \left(e^{k_3 \frac{T}{n}} + 1 \right) \quad (4-35)$$

Reihenentwicklung für das n -te Teilintervall:

$$e_n < k_2 \left(\frac{T}{n} \right)^3 \underbrace{\left(1 + e^{k_3 \frac{T}{n}} + e^{2k_3 \frac{T}{n}} + \dots + e^{(n-1)k_3 \frac{T}{n}} \right)}_{\sum_{l=0}^{n-1} \left(e^{k_3 \frac{T}{n}} \right)^l} \quad (4-36)$$

Die in (4-36) angegebene geometrische Reihe ergibt (für $e^{k_3 T/n} \neq 1$)

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left(e^{k_3 \frac{T}{n}} \right)^l = \frac{1 - \left(e^{k_3 \frac{T}{n}} \right)^{(n-1)+1}}{1 - e^{k_3 \frac{T}{n}}} = \frac{1 - e^{k_3 T}}{1 - e^{k_3 \frac{T}{n}}} \quad (4-37)$$

Wird (4-37) in (4-36) eingesetzt, lässt sich durch (4-38) direkt zeigen, dass e_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, womit auch Aussage (ii) bewiesen ist.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k_2 \left(\frac{T}{n} \right)^3 \frac{1 - e^{k_3 T}}{1 - e^{\frac{k_3 T}{n}}} = 0 \quad (4-38)$$

Abschließend sei angemerkt, dass (4-38) nicht für Approximationen 0. Ordnung der nichtlinearen Dynamik gilt, wie sie in der klassischen Linearisierung benutzt werden. Mit Approximationen 1. Ordnung, die in einigen Ad-hoc-LPV-Verfahren zum Einsatz kommen, konvergiert e_n für $n \rightarrow \infty$ zwar ebenfalls gegen 0, jedoch ist hier natürlich die Approximationsgüte für die linearisierte, lokale Dynamik geringer. Letzteres kann gerade bei hochdynamischen, vorwiegend auf Performanz ausgelegten, nichtlinearen Systemen ein entscheidendes Defizit bei der Stabilitätsanalyse sein.

4.2 Stabilitätsanalyse und Abgrenzung

4.2.1 Abgrenzung der GBL-Methodik zu gängigen Verfahren

Auf Grund der in Kapitel 4.1 abgeleiteten Eigenschaften (und auch der weiter unten in Kapitel 5.1 aufgezeigten Vorteile) stellt sich die GBL-Analyse als mächtiges Werkzeug zur Analyse nichtlinearer Systeme dar. Insbesondere bietet es sich mit der GBL an, schnell und unkompliziert erste Aussagen über die Stabilität beliebiger Systeme treffen zu können. Die Stabilitätsanalyse kann dabei vom Prinzip her in gleicher Weise für die linearisierte $\hat{\mathbf{w}}$ -Dynamik aus (4-9) um den Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1)$ herum erfolgen wie für die \mathbf{x} -Dynamik gewöhnlicher linearer Systeme. Gerade diese Bewahrung eines durchgängigen linearen Ansatzes ist eine große Stärke der GBL-Analyse und hebt sie von direkten nichtlinearen Analyseverfahren ab. Umfangreiche Methoden für lineare Stabilitätstests sind in der Standard-Literatur wie z.B. in [Föll94] oder [Lunz07] zu finden.

Allerdings sind die gewonnenen Stabilitätsaussagen nur lokal in einem hinreichend kleinen Bereich um $(\mathbf{x}_1, \mathbf{r}_1)$ herum sicher gültig. Denn auch die GBL ist letztendlich nur eine spezielle Form der Linearisierung, bei der Systeminformationen verloren gehen können. Im Vergleich zum klassischen Gain-Scheduling, welche als bekannteste lineare Alternative für die quasi-stationäre Betrachtung nichtlinearer Systeme bezeichnet werden kann (s. [Leit98b]), bietet die GBL-Analyse aber weit reichende analytische Vorteile. Beim Gain Scheduling bzw. der damit verbundenen Systemanalyse werden versteckte Abhängigkeiten und nichtlineare Rückführungen um diskrete Gleichgewichts-Arbeitspunkte herum als quasi-stationär betrachtet. Die zugehörigen Werte der so genannten Scheduling-Variable $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0)$ bzw.

der zeitveränderlichen Parameter werden dabei jeweils „eingefroren“. Dies setzt nicht nur eine ausreichend langsame Änderungsrate $\dot{\rho}$ der Scheduling-Variable voraus, vielmehr werden dadurch auch die dynamischen Effekte der versteckten Nichtlinearitäten komplett vernachlässigt. Mit der GBL-Betrachtung hingegen wird diese versteckte Dynamik im Rahmen einer Approximation 1. Ordnung erfasst und auch die Restriktionen an die Änderung von ρ werden so weit wie möglich abgeschwächt. Im Gegensatz zum Gain Scheduling kann bzw. soll die GBL-Familie nicht nur für Gleichgewichts-Arbeitspunkte oder nominelle Trajektorien aufgestellt werden, sondern für alle Arbeitspunkte auch weit abseits der Gleichgewichtspunkte. Dies erlaubt Stabilitätstests über den gesamten Zustandsraum. Nähere mathematische Ausführungen und Beispiele hierzu werden in [Leit00b] hergeleitet.

Ein weiterer Vorteil des GBL-Ansatzes, der ihn speziell von zahlreichen LPV-Methoden absetzt, ist seine Fähigkeit, auf eindeutige Weise eine Quasi-LPV-Form eines Systems abzuleiten, was in [Leit00a] durch Vergleich mit einer LPV-Methodik veranschaulicht wird. [Leit00a] zeigt in diesem Zusammenhang, dass die GBL nicht nur ein systematisches Verfahren zur Herstellung einer Quasi-LPV-Form beliebiger nichtlinearer Systeme darstellt, sondern die damit verbundene Linearisierung dabei auch in bestmöglicher Weise (hinsichtlich der Approximation der nichtlinearen Systemdynamik) erfolgt. Speziell in Verbindung mit nichtlinearen Reglerentwürfen zeigt sich hierbei der Vorteil der GBL im Vergleich zu vielen aktuelleren LPV-Methoden: Letztere verwenden zwar in Ad-hoc-Ansätzen, die auf der Jacobimatrix aufsetzen, teilweise auch eine GBL-ähnliche Darstellung der Regelstrecke. Im Gegensatz zur GBL-Analyse wird aber der dafür entwickelte nichtlineare Regler nicht in GBL-Form angenommen, sondern direkt (in „gewöhnlicher“ Darstellung) auf die nichtlineare Strecke angewendet. Der resultierende Regelkreis hat deshalb meist nur noch bedingt etwas mit der Wunschdynamik zu tun, für die der Regler entworfen wurde.

Nur die Kombination all der erwähnten Eigenschaften erlaubt es der GBL-Analyse, wertvolle dynamische bzw. Stabilitätsaussagen über den gesamten Zustandsraum zu ermitteln. Dadurch kann die Stabilität eines nichtlinearen Systems zwar (meist) nicht sicher garantiert, aber dennoch ein starkes Maß für selbige gewonnen werden. Speziell globale Instabilitäten lassen sich mittels der GBL-Analyse fast immer auffinden. In [Leit98a] sind sogar zwei Möglichkeiten aufgeführt, mit der in bestimmten Fällen direkt globale Stabilität im Rahmen der GBL-Analyse nachgewiesen werden kann. Diese beiden Methoden sollen im Folgenden noch um einen dritten Ansatz ergänzt werden. (Innerhalb dieser Arbeit werden globale Stabilitätstests aber nur mittels der IQC-Methodik aus Kapitel 3.7 durchgeführt.)

4.2.2 Stabilitätsanalyse innerhalb der linearisierten GBL-Familie

In [Leit98a] wird ein Stabilitätstest vorgeschlagen, der direkt auf der linearisierten GBL-Familie aufsetzt und ausschließlich mit linearen Methoden auskommt. Dabei wird die GBL-

Familie als schaltendes, aber bzgl. \hat{w} stetiges lineares System mit festen Schaltzeitintervallen angenommen. Es kann gezeigt werden, dass der Linearisierungsfehler pro Intervall durch einen begrenzten Anfangswertbereich und eine maximale Änderungsrate der Systemzustandsvariablen und -eingänge beschränkt werden kann. Dieses Prinzip erinnert stark an Lyapunov-Verfahren, verzichtet aber auf nichtlineare, nur numerisch lösbare Berechnungen. Durch weitere lineare Analysen können nun zwei Grenzen für die Schaltintervalllänge berechnet werden: die untere Schranke existiert, da der Übergang zwischen den linearen Systemen im Rahmen des Stabilitätstest nicht beliebig schnell erfolgen darf, weil dadurch die nichtlinearen Effekte verstärkt zum Tragen kommen. Eine Ausnahme stellt der seltene Fall dar, dass die H_2 -Norm des Zustandsvektors in jedem linearen Subsystem durchgehend exponentiell fällt; dann ist im Rahmen der Randbedingungen (Anfangswertbereich und maximale Änderungsrate) sicher Stabilität garantiert und auch eine kontinuierliche Schaltung (Schaltzeit 0s) möglich. Die obere Grenze hingegen wird benötigt, da der mögliche Linearisierungsfehler der Regelstrecke bei zu langsamer Schaltung zu einem instabilen Verhalten führen könnte. Laut [Leith98a] kann dieser Ansatz auch auf unstetig schaltende Systeme erweitert werden, sofern die Sprünge nicht zu häufig passieren.

Obwohl das beschriebene Vorgehen auf den ersten Blick sehr vielversprechend ist, muss ergänzend zu den Ausführungen in [Leith98a] angemerkt werden, dass es mit stark konservativen Forderungen verknüpft ist. In Worten formuliert beinhaltet der Stabilitätstest u.a. auch die versteckte Bedingung, dass die H_2 -Norm des Zustandsvektors am Ende unter die Norm zu Beginn des Intervalls gefallen sein muss. Für die Anwendung auf das Viertelfahrzeug führt dies – so haben Berechnungen im Vorfeld dieser Arbeit ergeben – zu Zeitintervallen von mindestens ca. 0,5s (die obere Grenze wurde nicht geprüft). In Anbetracht der gewünschten Regelungsbandbreite ist dieser Wert viel zu hoch, weshalb hier nicht näher auf die vorgestellte GBL-Stabilitätsanalyse eingegangen wird. Allgemein soll aus subjektiver Erfahrung heraus empfohlen werden, den vorgeschlagenen Stabilitätsbeweis – wenn überhaupt – nur auf a-priori „langsam“ schaltende oder gut gedämpfte Systeme anzuwenden. Unabhängig davon ist ein simulativer/experimenteller Nachweis der Stabilität für viele praktische Anwendungen ohnehin oft ausreichend und speziell für Systeme mit schwer einschätzbaren, hohen Modellunsicherheiten sogar unerlässlich.

4.2.3 Stabilitätsanalyse mittels gemeinsamer Lyapunov-Funktionen

Dieser nichtlineare Stabilitätstest wird ebenfalls in [Leith98a] beschrieben und ist nahe verwandt mit den Analysen, die auf gemeinsamen bzw. multiplen Lyapunov-Funktionen beruhen. Die Lyapunov-Theorie wird in [Slot91] ausführlich beschrieben, relevante Anwendungen auf schaltende Systeme sind z.B. in [SunZ05] zu finden. Die Grundidee liegt darin, dass die jeweilige Lyapunov-Funktion innerhalb eines Intervalls um einen höheren

Wert abnehmen soll, als der Zuwachs durch den Wechsel der Lyapunov-Funktion im nächsten Intervall betragen kann. [Leith98a] schneidet dieses Prinzip auf die speziellen Eigenschaften der GBL-Darstellung zu, wobei aber auch hier wieder stark konservative Forderungen eingebracht werden. Außerdem sind mit diesem Verfahren gerade wieder die Nachteile verbunden, die durch die GBL vermieden werden sollten: nichtlineare, numerisch aufwändige und dennoch oft nicht nachweisbare Kriterien, die zudem häufig schwache Robustheitseigenschaften aufweisen und auf stark idealisierte Modelle beschränkt werden. Aus den genannten Gründen soll auch dieser Ansatz nicht weiter verfolgt werden.

4.2.4 Stabilitätsanalyse mittels Worst Case Gain

Der Begriff Worst Case Gain (WCG) ist ein Begriff der robusten Regelung und wurde bereits in Kapitel 3.6.5 vorgestellt. Mit Hilfe des WCG wurde in dieser Arbeit eine weitere Möglichkeit für einen Stabilitätstest erarbeitet, der sich für die Anwendung auf eine GBL-Familie eignet. Die Grundidee des Stabilitätsnachweises besteht aus einer Kombination der Ausführungen in [LinH09] und der Formeln zur GBL-Approximationsgüte in Kapitel 4.1.2. Dabei werden nicht mehr die Zustandsdifferenzialgleichungen betrachtet, sondern die zugehörigen Zeitbereichslösungen selbst, wobei das Vorgehen der Einfachheit halber im Folgenden auf die Betrachtung der Stabilität von $\mathbf{w}(\mathbf{x}(t), \mathbf{r}(t) = \mathbf{0})$ beschränkt werden soll. Für die Approximation $\hat{\mathbf{w}}$ ergibt sich nach dem k -ten Teilintervall die Lösung

$$\hat{\mathbf{w}}(t = kT) = \hat{\mathbf{w}}_{k-1} e^{-A_k T} = \hat{\mathbf{w}}_0 \prod_{i=1}^k e^{-A_i T} = \hat{\mathbf{w}}_0 \prod_{i=1}^k \mathbf{M}_k . \quad (4-39)$$

Der mögliche Linearisierungsfehler pro Intervall kann nun durch die Einführung einer adäquaten Unsicherheit \mathbf{A}_p abgedeckt werden, wodurch sich eine $\mathbf{P} - \mathbf{A}_M$ -LFR analog zu Abbildung 3-9 ergibt, in der \mathbf{P} die entsprechende Erweiterung eines nominellen Durchschnittswerts der Matrix \mathbf{M} darstellt. Durch Anwendung einer Upper-LFT-Operation (3-20) erhält man die unsichere Matrix

$$\mathbf{P}_\Delta = \mathbf{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{A}_p) . \quad (4-40)$$

Mit der GBL-Bedingung $\hat{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{w}_0$ lässt sich die „unsichere Lösung“ $\mathbf{w}_\Delta(kT)$ der nichtlinearen Systemdynamik damit als

$$\mathbf{w}_\Delta(kT) = \mathbf{w}_0 \prod_{i=1}^k \mathbf{P}_\Delta = \mathbf{w}_0 \mathbf{P}_\Delta^k \quad (4-41)$$

anschreiben, wobei \mathbf{P}_Δ^k mittels der LFR-Serienschaltung (3-21) berechnet werden kann. Die Anwendung des Worst Case Gain (also der WC-Verstärkung) auf (4-41) führt zur im energetischen Sinne maximalen Verstärkung von \mathbf{w}_0 nach dem k -ten Intervall, s. (3-7).

$$\gamma_{w,k} = \sup_{\Delta} \left(\frac{\|\mathbf{w}_\Delta(kT)\|_2}{\|\mathbf{w}_0\|_2} \right) = \text{WCG}(\mathbf{P}_\Delta^k) \quad (4-42)$$

Die Stabilität der \mathbf{w} -Dynamik kann nun theoretisch folgendermaßen bestimmt werden.

Theorem 4.2: Die durch (4-39) approximierte \mathbf{w} -Dynamik des nichtlinearen Systems (4-14) ist stabil, wenn für $\Delta \in \underline{\Delta}$ ein $k \in \mathbb{N}^+$ existiert, so dass für (4-42) die WC-Verstärkung $\gamma_{w,k} < 1$ wird.

Beweis:

Nach nk Intervallen (mit $n \in \mathbb{N}^+$) gilt für die WC-Verstärkung $\gamma_{w,nk} = (\gamma_{w,k})^n$. Durch Grenzwertbildung ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{w,nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{w,k})^n \rightarrow 0, \text{ falls } \gamma_{w,k} < 1. \quad (4-43)$$

Da das WCG per Definition für die maximale Energieübertragung im System steht, muss die Energie von $\mathbf{w}_\Delta(nkT)$ ebenfalls gegen 0 streben, sofern \mathbf{w}_0 beschränkt ist. Damit ist die Stabilitätsbedingung aus Theorem 4.2 nachgewiesen.

Die Vorteile des WCG-Stabilitätstests sind:

- ✦ Durch die freie Wahl der Unsicherheitsmodellierung können Aufwand und Konservatismus der Analyse mitbestimmt werden. Durch geeignete parametrische Unsicherheiten kann der Konservatismus stark eingeschränkt werden.
- ✦ Die Stabilitätsanalyse setzt direkt auf der GBL-Darstellung des Systems auf. Die Analyse selbst ist relativ einfach durchführbar.
- ✦ Die Analyse kann theoretisch für beliebig (kleine) Zeitintervalle T erfolgen.
- ✦ Für die Berechnung des WCG stehen mächtige numerische Algorithmen zur Verfügung (z.B. Matlab Robust Control Toolbox).

Dennoch gehen auch einige gewichtige Nachteile mit dem Ansatz einher:

- ✗ Eine exakte, parametrische Unsicherheitsmodellierung kann auf Grund des Matrixexponentials in (4-39) extrem aufwändig werden.
- ✗ Für „pauschale“ Unsicherheiten, die jeweils den Schwankungsbereich der Matrixelemente von M abdecken, kann der Konservatismus schnell sehr hoch werden. Die Anzahl der Unsicherheitsvariablen wächst dann auch quadratisch mit der Anzahl der Zustandsvariablen an.
- ✗ Bei vielen Unsicherheitsvariablen oder kleinen Zeitintervallen T ist eine numerische WCG-Berechnung nur für sehr kurze Zeiträume möglich.
- ✗ Der in (4-43) vorgestellte Stabilitätstest untersucht nur die w -Dynamik für $r = \mathbf{0}$. Allgemeinere Tests bedürfen eines entsprechend höheren Aufwands.

Auf Grund der genannten Nachteile wurde auch dieser globale Analyseansatz für das aktive Viertelfahrzeug verworfen, da hier der Modellierungsaufwand und der Konservatismus zu groß waren. Alternativ wurde noch ein suboptimaler Ansatz geprüft, bei dem das WCG jeweils nur iterativ über ein Intervall berechnet wird (wodurch der Test natürlich seine gesicherte globale Stabilitätsaussage einbüßt). Jedoch wurde auch dieser Ansatz zu Gunsten der IQC-Methodik aufgegeben, welche zwar ähnliche numerische Nachteile aufweist, aber mit wesentlich weniger Modellierungsaufwand verbunden ist und gesicherte globale Ergebnisse liefert. Für Systeme mit wenigen Zustandsvariablen und weniger strengen Forderungen an hohe Schaltfrequenzen kann das vorgestellte Verfahren allerdings eine gewinnbringende Alternative darstellen.

4.3 Reglerentwurf mit GBD

4.3.1 Geschwindigkeitsbasierte Design-Plattform

Eine Grundidee der geschwindigkeitsbasierten Design-Plattform (GBD-Plattform) liegt darin, dass zwei in einer Rückführschleife angeordnete Systeme in GBL-Familien-Form der direkt aus dem Gesamtsystem gewonnenen GBL-Darstellung äquivalent sind. Deshalb ergibt sich hinsichtlich der GBL kein Unterschied, ob ein bereits entworfener nichtlinearer Regelkreis GB-linearisiert wird, oder ob ein Regler erst im Rahmen der GBD-Plattform für eine Strecke in GBL-Form entworfen wird. Alle Grundlagen zum Reglerentwurf mit der GBD-Plattform sind in ausführlicher Dokumentation in [Leit98c] zu finden, wobei dieses Kapitel eine Zusammenfassung der darauf aufsetzenden Ergebnisse in [Herr09] ist.

Abbildung 4-6 und Abbildung 4-7 veranschaulichen eine Konsequenz der oben beschriebenen Äquivalenz. Sie zeigen, dass ein Regler in GBL-Form für eine Strecke in GBL-Form entworfen und anschließend direkt auf die zugehörige nichtlineare Strecke angewandt werden kann. Hierzu müssen lediglich der Streckenausgang y abgeleitet und der Reglerausgang \hat{y}_c

aufintegriert werden. Alternativ könnte der Regler auch direkt nichtlinear mit dem Reglerausgang y_c realisiert werden, sofern eine entsprechende Darstellung ableitbar ist und die Schaltintervallzeit 0 sein darf. In den Abbildungen werden die Reglervariablen zur Unterscheidung von den Streckenvariablen mit dem Index C versehen („Controller“). Der Regler hat als externen Eingang ein Referenzsignal \dot{r}_c , die Strecke die Störgröße \dot{z} (GBL-Form) bzw. z (nichtlinear). $\rho = \rho(t)$ stellt die Scheduling-Variable der GBL-Familie dar, welche von den Zustands- und Eingangssignalen abhängig sein kann.

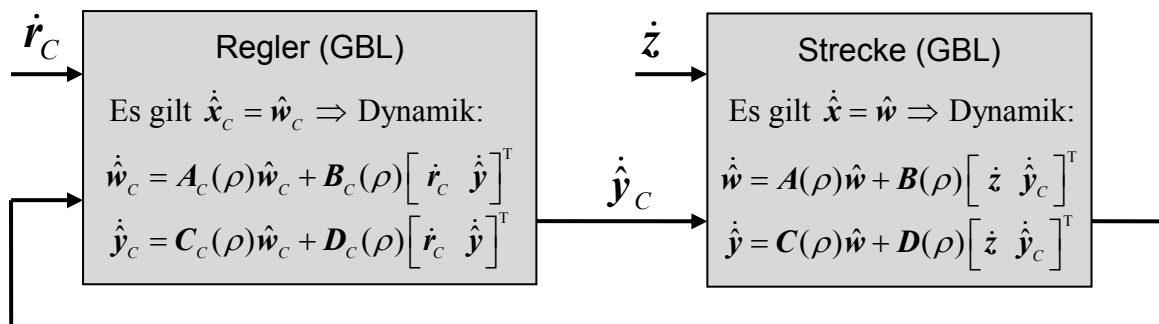


Abbildung 4-6: Kreis mit Regler und Strecke in GBL-Form

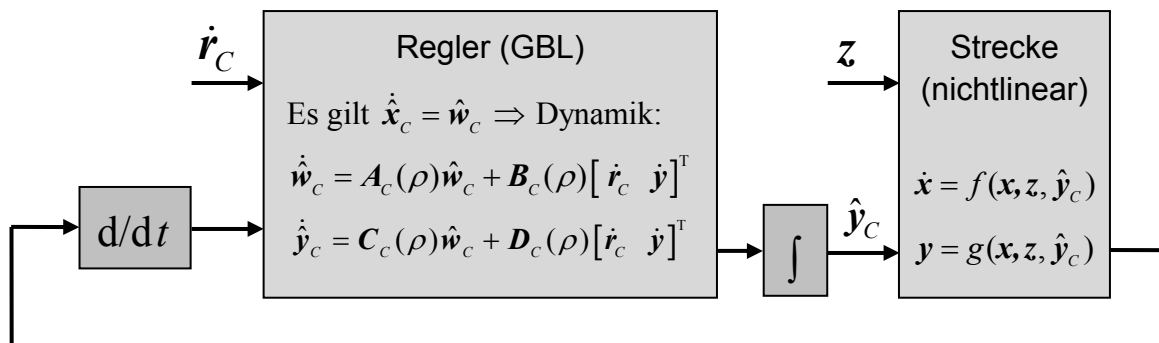


Abbildung 4-7: Kreis mit Regler in GBL-Form und nichtlinearer Strecke

Falls in Abbildung 4-7 die Messung der Zeitableitung des Streckenausgangs nicht direkt möglich ist (z.B. durch Beschleunigungssensoren wie beim Viertelfahrzeug), muss die Differentiation durch eine numerische Näherung ersetzt werden. Eine Ausnahme stellt der Fall dar, dass der Regler selbst einen Integrator-Anteil aufweist, welcher sich dann mit dem Differentiator „kürzen“ kann, wodurch y selbst zum neuen Regler-Ersatzeingang wird. Falls der Regler tatsächlich in GBL-Form implementiert wird, ist solch ein Integratoranteil auch meist notwendig, da der Regler sonst versucht, eine lokale Gleichgewichtslage für \dot{y} , nicht aber für y herzustellen (s. nächstes Kapitel).

Die Methodik des Reglerentwurfs und die Implementierung des Reglers bleibt dem Anwender im Rahmen des GBD fast vollkommen freigestellt, da das GBD nur eine Linearisierungs-Plattform darstellt, welche die Möglichkeit einer durchgängigen Anwendung linearer Methoden auf eine optimale Quasi-LPV-Form ermöglichen soll. Im Gegensatz zum klassischen Gain Scheduling bietet das GBD aber den großen Vorteil, dass beim Reglerentwurf versteckte nichtlineare Rückführungen berücksichtigt werden können. Falls aus einzelnen linearen Reglerentwürfen ein nichtlineares Gesetz abgeleitet werden soll, kann dies durch das GBD wesentlich leichter und robuster gelingen. Dieser Punkt wird in Kapitel 5 noch eine große Rolle spielen.

Das prinzipielle GBD-Entwurfsvorgehen kann in Anlehnung an [Leit98c] folgendermaßen formuliert werden. (Soll ein Regler direkt innerhalb der GBL-Plattform entworfen werden, sind allerdings auch einige Aspekte zu beachten, die im nächsten Kapitel näher beleuchtet werden sollen.)

- a) Bestimme die GBL-Familie der nichtlinearen Regelstrecke, so dass diese in Quasi-LPV-Form vorliegt.
- b) Entwerfe mittels linearer Methoden eine GBL-Reglerfamilie für die GBL-Streckenfamilie, so dass die entsprechende Familie der linearen geschlossenen GBL-Regelkreise die Performanz-Anforderungen erfüllt.
- c) Generiere aus der GBL-Reglerfamilie einen nichtlinearen Regler, indem die Scheduling-Variable kontinuierlich variiert wird, oder implementiere den Regler direkt in der GBL-Form mit einer geeigneten Intervalllänge für die stückweise Approximation.

4.3.2 Spezielle GBD-Entwurfsverfahren und qualitative Bewertung

Dieses Kapitel soll einen Überblick über einige spezielle Reglerentwurfsverfahren geben, die direkt und ausschließlich auf der GB-Design-Plattform aufsetzen. Gleichzeitig sollen aber auch die Grenzen dieser Ansätze aufgezeigt und im nächsten Kapitel auf die in dieser Arbeit verwendete Methodik übergeleitet werden. Zuerst soll auf den Reglerentwurf für ein Viertelfahrzeug direkt innerhalb der GBL-Familie eingegangen werden. Die Möglichkeiten hierzu wurden in der Diplomarbeit [Maye10] näher untersucht. Dabei wird zuerst eine nichtlineare Regelstrecke über eine Vielzahl von Arbeitspunkten im relevanten Arbeitsbereich GB-linearisiert und als GBL-Familie abgelegt. Anschließend kann für die einzelnen linearen Streckensysteme je ein linearer Regler entworfen werden, was z.B. mittels eines suboptimalen LQR-Entwurfs geschehen kann – suboptimal deshalb, da der Regler nur für die (linearisierte) Dynamik um einen Arbeitspunkt herum optimal ist, was nicht mit globaler Optimalität gleichzusetzen ist. Dennoch liefern solche suboptimalen Ansätze oft brauchbare Ergebnisse.

Ohnehin gilt, dass in Anbetracht der inhärenten nichtlinearen Merkmale quasi aller realen Systeme sämtliche linearen Verfahren zu suboptimalen Ergebnissen führen müssen.

Speziell für das Viertelfahrzeug ist ein Reglerentwurf für die GBL-Streckenfamilie allerdings mit erheblichen Problemen verbunden. Im Rahmen des vorgeschlagenen Vorgehens wird der Regler nämlich nicht für die x -Dynamik der Strecke, sondern deren Ableitung entworfen. Der jeweils aktuelle Regler versucht deshalb, einen bestimmten Arbeitspunkt mit $\dot{x} = 0$ zu erreichen, in dem meist $x \neq 0$ gilt. Durch den Wechsel des Reglers beim Übergang zwischen den Schaltintervallen wird dieses Problem zwar theoretisch umgangen, in Folge von Störungen oder numerischen Ungenauigkeiten können sich aber (temporär) Ruhelagen mit $x \neq 0$ einstellen. Dies erfordert zwingend die Einbindung eines I-Anteils (also einer Rückführung zumindest einer Zustandsgröße x_i) in das Regelgesetz. Das allein stellt noch kein großes Problem dar, da in vielen Entwürfen ein I-Anteil ohnehin ergänzt oder von vornherein berücksichtigt wird. Beim GBD-Ansatz für das Viertelfahrzeug kommt aber noch erschwerend hinzu, dass die Kostenfunktionen für die Regelgüte des geschlossenen Kreises sehr komplex sind, s. die Gütemaße (1-2) bis (1-7) in Kapitel 1.1.3. Bereits für die Regelung der x -Dynamik stellt die Ableitung geeigneter Kostenfunktionen des Reglerentwurfs (beim LQR-Entwurf z.B. die Definition der Zustands- und Stellgrößengewichte) eine große Herausforderung dar, die meist nur iterativ durch Simulationen, durch Erfahrungswerte oder durch eine numerische Optimierung gelöst werden kann. Beim GBD-Ansatz aber wächst der Aufwand meist noch erheblich und ist – in Verbindung mit der Suboptimalität des Entwurfs – kaum noch zu rechtfertigen. In [Maye10] wird aufgeführt, dass die Simulationsergebnisse mit einem strikten GBD nur um ca. 10 % bessere Komfortgütemaße ergaben als ein LQR-Reglerentwurf für ein klassisch linearisiertes Modell, obwohl der Entwurfsaufwand um ein Vielfaches höher war.

In diesem Zusammenhang schlägt [Maye10] Adaptionen im Regelgesetz vor, um Performanz und numerische Genauigkeit zu steigern. Hier soll nur auszugsweise auf zwei eingegangen werden: die Integration der Stellgröße $\dot{u}(t) = -\mathbf{R}(x)\dot{\hat{x}}$ auf $u(t)$ sollte nicht direkt erfolgen, sondern über die Auswertung einer partiellen Integration gemäß $u(t) = -\mathbf{R}(\hat{x})\hat{x} + \int \dot{\mathbf{R}}(\hat{x})\hat{x} dt$; außerdem können z.B. die in (1-1) definierte Komfortgewichtung in die Zustandsgleichungen und die zugehörigen Gewichtszustände in die Rückführung mit einbezogen werden. Dies alles führt aber zu noch höherer Systemkomplexität, was spätestens in der realen Implementierung zu großen Problemen führen kann. Deshalb soll an dieser Stelle der direkte GBD-Ansatz nur für zwei Fälle empfohlen werden: zum einen, wenn die Kostenfunktionen für den Entwurf sehr leicht auf die \dot{x} -Dynamik übertragbar sind; zum anderen im seltenen Fall, dass die entworfene GBL-Reglerfamilie eine Form besitzt, aus der sich direkt ein nichtlineares Regelgesetz $u(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\hat{x}$ ableiten lässt. Weitere Herleitungen, Entwurfsaspekte und Beispiele zum GBD innerhalb der GBL-Familie können in [Maye10] nachgelesen werden.

Als Alternative zum direkten GBD wird in [Leit99b] ein so genannter „Blended Multiple Model“-Ansatz propagiert, bei welchem nur für bestimmte, ausgewählte Referenzpunkte des Zustandsraums innerhalb der GBD-Plattform Regler berechnet werden. Zwischen den Referenzpunkten werden die einzelnen Reglerbeiträge entsprechend der Entfernung zum zugehörigen Referenzpunkt gewichtet und superpositioniert, wobei sich die Gewichtung (im einfachsten Fall) auf eine lineare Interpolation stützen kann. Details und Beispiele für diese Methodik können in [Leit99b] gefunden werden. Naturgemäß funktioniert dieser Ansatz besonders gut, wenn der Übergang der dynamischen Systemeigenschaften zwischen den Referenzpunkten ebenfalls möglichst linear erfolgt, was gleichzeitig eine erste Einschränkung des Ansatzes darstellt. Darüber hinaus gelten für den Entwurf der einzelnen Referenzregler sowie für die globale Performanz des nichtlinearen Regelkreises dieselben Probleme wie für das im vorigen Abschnitt beschriebene direkte GBD. Obwohl aus den genannten Gründen auch dieses Entwurfsverfahren für die aktiven Radaufhängungen verworfen werden soll, bietet das Grundprinzip der „Multiple Model“-Systeme doch einen nützlichen Aspekt, der auch im Anwendungsteil dieser Arbeit wieder aufgegriffen werden soll: die Verwendung einer Art Referenzregler, durch die der Entwurfsaufwand stark gesenkt wird, da nur noch einige wenige, frei wählbare Referenzpunkte betrachtet werden.

Daneben ist es auch möglich, im Rahmen des GBD eine Eingangs-/Ausgangs-Linearisierung mittels rein linearer Methoden durchzuführen, was in [Leit99a] beschrieben wird. Dabei wird versucht, für alle (relevanten) Punkte des Zustandsraums lokal eine GBL-Reglerfamilie derart zu berechnen, dass alle geschlossenen, lokal linearen Regelkreise dasselbe dynamische Verhalten aufweisen. Dies kann z.B. über eine für alle Punkte identische Platzierung der Pole des geschlossenen, linearisierten Regelkreises erfolgen. Diese Methodik bietet zwei wichtige Vorteile: zum einen kann dadurch ohne die komplexen Entwurfsprobleme einer nichtlinearen, dynamischen Inversion (s. z.B. [Slot91]) eine Eingangs-/Ausgangs-Linearisierung allein auf Basis linearer Methoden durchgeführt werden. Zum anderen wird in [Leit99a] bewiesen, dass ein derart entworfenes GBL-System automatisch asymptotische Stabilität aufweist, auch für beliebig kleine Schaltintervalle. Dennoch wird dieser Ansatz in dieser Arbeit aus folgenden Gründen nicht verwendet:

- ✘ Da für den GBD-Entwurf mit Eingangs-/Ausgangs-Linearisierung stets dasselbe lokal lineare Regelkreisverhalten erzielt werden muss, kann das Regelgesetz die verschiedenen Komfort- und Sicherheitsaspekte nicht mehr zeit- bzw. zustandsabhängig unterschiedlich stark gewichten. Dies ist aber ein fundamentales Ziel für den Reglerentwurf in der vorliegenden Arbeit.
- ✘ Um überall das gleiche lineare Verhalten zu erreichen, muss zu Gunsten einer guten Reglerperformanz mit teils hohen Stellgrößen gerechnet werden, was wiederum in Konflikt zu Stellgrößenbeschränkungen und Energieaspekten steht. Eine stärkere

Berücksichtigung letzterer bedingt wiederum meist sehr konservative Entwurfsziele für die lokalen linearen GBL-Regelkreise.

- ✦ Wie auch die dynamische Inversion, so ist auch der entsprechende GBD-Ansatz sehr stark von einer hohen Modellgüte abhängig, was hier zu deutlich schlechteren Robustheitseigenschaften des geregelten Systems führt.

4.3.3 GBL-Methodik als robustes Regelungsverfahren

Trotz jeweils einiger positiver Eigenschaften mussten alle bisher vorgestellten GBD-Methoden verworfen werden. Der Grund hierfür lag allerdings nie an den Eigenschaften der GBD-Plattform selbst, sondern an Problemen mit den darauf direkt aufsetzenden Reglerentwürfen. In dieser Arbeit soll die GBD-Plattform deshalb nur dafür genutzt werden, um bereits vorhandene, lokale Reglerentwürfe zu untersuchen und um aus den einzelnen linearen Reglern (im Rahmen einer iterativen Analyse) eine nichtlineare Reglerfamilie zu generieren. Es wird sich zeigen, dass die Analyse der GBL-Familie dabei hervorragend durch robuste Regelungsmethoden gestützt und deshalb auch direkt mit einer Robustheitsanalyse kombiniert werden kann. Das Verständnis des GBD-Ansatzes als robuste Regelungsmethodik wird dadurch noch verstärkt, indem der Konservatismus, der mit der GBL-Analyse einhergeht, als weitere Unsicherheit verstanden werden kann. Dies liegt daran, dass bestimmte nichtlineare Systeme, die global stabil sind, durchaus mehrere lokale GBL-Instabilitäten aufweisen können. Der umgekehrte Fall, dass alle Mitglieder einer GBL-Familie lokal stabil sind, das Gesamtsystem aber global instabil ist, wird in der Praxis fast nie auftreten. Das motivierende Beispiel in Kapitel 5.1 unterstreicht diese Einsicht; die daran anschließenden Kapitel werden die Anwendung der Idee auf aktive Radaufhängungen aufzeigen. Weiterhin soll die folgende Abbildung 4-8 den Robustheitsaspekt der GBL-Analyse an einem Beispiel veranschaulichen.

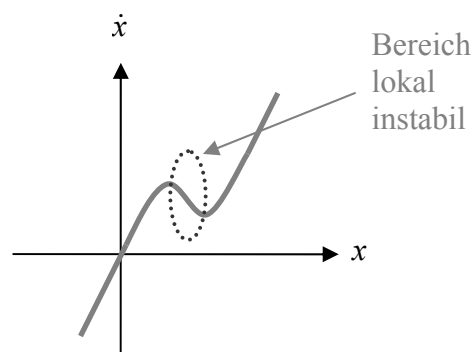


Abbildung 4-8: Lokale GBL-Instabilität

Die GBL-Analyse würde in diesem Beispiel eine lokale Instabilität errechnen, obwohl das Gesamtsystem global stabil ist. Im Sinne einer robusten Stabilitäts- oder Performanzanalyse kann das Auffinden einer solchen lokalen Instabilität aber durchaus sinnvoll sein, da die gezeigte $x-\dot{x}$ -Kennlinie des Systems im dynamischen Sinne sicher nicht optimal ist und speziell in solchen Fällen vermieden werden sollte, bei denen die lokale Instabilität durch einen nichtlinearen Reglerentwurf erst entsteht. Speziell bei komplexeren MIMO-Systemen können solche lokalen Instabilitäten einen stark negativen Einfluss auf die Robustheit oder Performanz des geschlossenen Kreises haben.

Für die in dieser Arbeit vorgestellte Anwendung auf Viertelfahrzeuge lässt sich folgendes Zwischenfazit ziehen: im Bereich der aktiven Radaufhängungen kann das GBD insbesondere dann hilfreich sein, wenn eine Art Gain-Scheduling in Abhängigkeit der Systemzustände durchgeführt werden soll. Es soll dabei klar betont werden, dass in vielen Fällen auch die klassischen linearen Methoden zur Regelung solcher Systeme genügen können, welche mit weniger Aufwand entworfen werden können und oft auch gute Ergebnisse liefern. Wenn aber z.B. größere Nichtlinearitäten im System vorliegen, insbesondere wenn komplexe nichtlineare Stellgesetze für semiaktive und aktive Elemente implementiert werden sollen, die stark von den Zuständen weit abseits des Gleichgewichts-Arbeitspunktes abhängen oder schaltend sind, dann kann das GBD ein hervorragender Ansatz sein. Auf Grund der weiter oben erwähnten Probleme beim Entwurf direkt innerhalb der GBD-Plattform wird allerdings empfohlen, die GBL primär nur für robuste Stabilitätstests und die Erzeugung eines nichtlinearen Gesetzes auf Basis bereits vorliegender Referenzregler zu nutzen. Ein geeignetes Vorgehen zur Generierung solcher Referenzregler wird in Kapitel 5 präsentiert.

5 Nichtlineare Robuste Regelung des Viertelfahrzeugs

Dieses Kapitel beschreibt die Anwendung des geschwindigkeitsbasierten Designs aus Kapitel 4 auf das in Kapitel 2.2 definierte Viertelfahrzeug. Der Reglerentwurf wird hierbei aufbauend auf den Methoden aus Kapitel 3 robust gestaltet. Vorab wird ein motivierendes Beispiel zur GBL-Analyse gegeben, um Grundidee und Stärken selbiger zu veranschaulichen. Vor allem soll das Beispiel – vor der späteren, umfangreicheren Analyse des Viertelfahrzeugsystems – in transparenter Weise aufzeigen, wie einfach, direkt und aussagekräftig sich die Untersuchung der globalen Stabilität eines nichtlinearen Systems mit der GBL gestaltet. Hierbei wird ein schaltendes System betrachtet, welches allerdings vor der GBL-Stabilitätsanalyse (in guter Näherung) in ein kontinuierliches System mit schneller Adaption der Zustandsraumkoeffizienten transformiert wird. Dadurch entsteht ein System, welches große Ähnlichkeiten mit dem Regelkreis aufweist, der später für das Viertelfahrzeug entworfen wird. Auch dort wird es zwei „Referenzregler“ geben, zwischen denen im Sinne einer zustandsabhängigen, nichtlinearen Rückführung interpoliert wird.

5.1 Motivierendes Beispiel zu Systemen mit schneller Adaption/Schaltung

Die Stabilität von schaltenden, hybriden oder linearen zeitvarianten Systemen ist ein vielfach adressiertes Themengebiet (s. z.B. [Mors95] oder [SunZ05]). Es ist bekannt, dass eine Familie linearer, stabiler Systeme, zwischen denen gemäß einer Schaltstrategie diskret oder kontinuierlich umgeschaltet wird, nicht automatisch in einem stabilen nichtlinearen bzw. linear-zeitvarianten Gesamtsystem resultiert. Dies liegt daran, dass innerhalb eines linearen Subsystems zwar die im Lyapunov-Sinne betrachtete Energie über der Zeit abnimmt, ein Wechsel des Subsystems und der entsprechenden Lyapunov-Funktion aber einen Energiezuwachs mit sich bringen kann, der den Abfall innerhalb des vorigen Subsystems übersteigt.

Eines der berühmtesten Beispiele für genau einen solchen Fall ist in [Bran94] zu finden und soll hier aufgegriffen und analysiert werden. Das Beispiel 2 der erwähnten Veröffentlichung betrachtet ein schaltendes System, bei dem zwischen zwei Subsystemen

$$f_1(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 \\ -10 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ und } f_2(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0,1 & 10 \\ -1 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

zu diskreten Zeitpunkten hin- und hergeschaltet wird. Eine Eigenwertbetrachtung der beiden Einzelsysteme zeigt, dass diese jeweils asymptotisch stabil sind:

$$\lambda_{A,1/2} = \lambda_{B,1/2} = -0,1 \pm 3,16i. \quad (5-2)$$

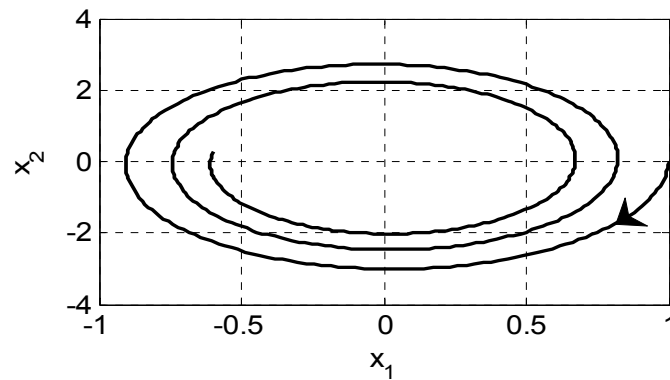


Abbildung 5-1: Zustandstrajektorie für das stabile Subsystem A

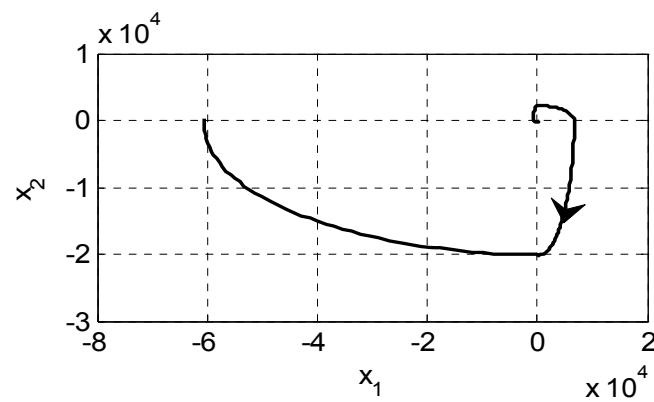


Abbildung 5-2: Zustandstrajektorie für instabiles Schaltgesetz $S1$

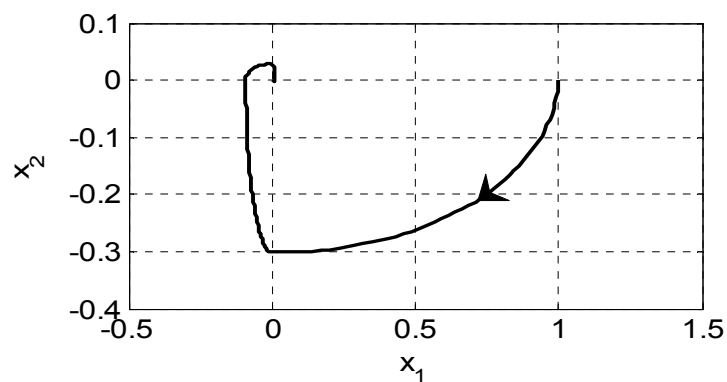


Abbildung 5-3: Zustandstrajektorie für stabiles Schaltgesetz $S2$

Eine beispielhafte Berechnung der Zustandstrajektorie des Systems A gemäß (5-3) wird in Abbildung 5-1 für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) = [1 \ 0]^T$ und $t \in [0; 50]$ visualisiert.

$$\mathbf{x}_A(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 \quad (5-3)$$

Wird nun eine Schaltstrategie S1 definiert, die im 2. und 4. Quadranten des Zustandsraums die Dynamikmatrix \mathbf{A} und im 1. und 3. die Matrix \mathbf{B} verwendet, so ergibt sich eine instabile, d.h., divergierende Zustandstrajektorie. Diese ist in Abbildung 5-2 dargestellt. Für ein Schaltgesetz S2 hingegen, welches \mathbf{B} im 2. und 4. Quadranten verwendet, konvergiert die Trajektorie wieder, wie in Abbildung 5-3 zu sehen ist.

In [Bran94] wird aufbauend auf [Pele91] vorgeschlagen, den Stabilitätsnachweis über multiple Lyapunov-Funktionen durchzuführen. Werden dabei für die Subsysteme $f_1(\mathbf{x})$ und $f_2(\mathbf{x})$ zwei Lyapunov-Kandidaten $V_1(\mathbf{x})$ und $V_2(\mathbf{x})$ gefunden, die entsprechend einer Schaltstrategie $S: \mathbf{x} \rightarrow \Psi(\mathbf{x}), \Psi \in \{\Psi_1; \Psi_2\}$ zu einer Funktion $V_\psi(\mathbf{x})$ zusammengesetzt werden, so ergibt sich für diskrete Schaltzeitpunkte τ_i die hinreichende Stabilitätsbedingung

$$V_\psi(\mathbf{x}(\tau_{i+1})) < V_\psi(\mathbf{x}(\tau_i)) \quad \forall \tau_i \quad (5-4)$$

des Gesamtsystems. Diese Bedingung lässt sich auch auf kompliziertere Schaltstrategien und Systeme anpassen, ist aber insbesondere bei Systemen höherer Ordnung und großen Subsystemmengen meist nur mit extrem hohem Aufwand und oftmals überhaupt nicht prüfbar. Hält man sich weiterhin vor Augen, dass die einzelnen Subsysteme in der Praxis häufig auf linearisierten und unsicheren, nominellen Modellen beruhen, stellt sich die folgende Frage: sollte solch ein aufwändiger und dennoch nur für das fehlerbehaftete Modell geltender Stabilitätsnachweis (modellabhängig) nicht besser gegen einen eventuell weniger akkuraten, aber dafür schnelleren, stets durchführbaren Ansatz eingetauscht werden, der optional zudem Robustheitsaspekte besonders einfach berücksichtigen kann?

Ohne die zugehörige Theorie vorwegzunehmen, die erst im nächsten Abschnitt diskutiert wird, soll an dieser Stelle die geschwindigkeitsbasierte Linearisierung (GBL) als nützliches Werkzeug zur Lösung der beschriebenen Frage vorgestellt werden. Direkt ist die GBL nur auf bis zur 1. Ableitung lipschitzstetige Systeme anwendbar, weshalb – hier ohne relevante Verfälschung der Ergebnisse – die diskreten Umschaltvorgänge vorab in kontinuierliche Übergänge zwischen den beiden Teilsystemen des Beispiels transformiert werden. Zuerst soll das instabile Schaltgesetz S1 untersucht werden. Durch eine Analyse der Abbildung 5-2 konnte der erste Umschaltzeitpunkt von \mathbf{A} nach \mathbf{B} in etwa bei $\tau_s = 5,1\text{s}$ mit $x_1(\tau_s) = x_{1s} = 0$ und $x_2(\tau_s) = x_{2s} = -3$ identifiziert werden. Da hier nur die Grundidee vermittelt werden soll, wird sich die weitere Analyse auf diesen Punkt beschränken. Weiterhin wird (zur Herstellung der Lipschitzstetigkeit) ein kontinuierlicher Übergang von \mathbf{A} nach \mathbf{B} in Form einer linearen Interpolation um den Trajektorienpunkt \mathbf{x}_s herum angenommen. Ein mögliches Interpolationsgesetz für das resultierende linear-parametervariante System $f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ ergibt sich für den betrachteten Übergang zwischen dem 4. und 3. Quadranten z.B. durch

$$C(\mathbf{x}) = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{B}}{2\Delta x_1} (x_1(t) + \Delta x_1) \quad \text{für } x_1(t) \in [-\Delta x_1; \Delta x_1], x_2 < 0. \quad (5-5)$$

Um den diskreten Schaltvorgang gut zu approximieren, muss Δx_1 ausreichend klein gewählt werden. Wenn die Schaltgesetze in den anderen Quadranten auch entsprechend abgeändert werden, so ergibt sich ein neues Schaltgesetz S3. Es bleibt zu erwähnen, dass S3 in dieser Form nicht mit der GBL-Theorie kompatibel wäre, da die erste Ableitung $f_3'(\mathbf{x})$ nicht stetig ist. Dem könnte leicht abgeholfen werden, indem die Knicke bei $-\Delta x_1$ und Δx_1 durch weiche kubische Splineübergänge ersetzt werden. Da dies aber für die exemplarische Betrachtung im Punkt $\mathbf{x}_s = [0 \ -3]^T$ keine Rolle spielt, soll hier darauf verzichtet werden. Für einen Wert $\Delta x_1 = 0,1$ lässt sich $C(\mathbf{x})$ im Übergangsbereich wie folgt darstellen:

$$C(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,1 & c_{12}(x_1) \\ c_{21}(x_1) & -0,1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} c_{12}(x_1) &= 10 - 45(x_1 + 0,1), \\ c_{21}(x_1) &= -1 - 45(x_1 + 0,1). \end{aligned} \quad (5-6)$$

Eine Eigenwertanalyse zeigt, dass alle Dynamikmatrizen $C(\mathbf{x}_i)$, die durch Einfrieren der Scheduling-Variable $x_1 = x_{1i}$ entstehen, Hurwitz sind. So liegen die Eigenwerte von $C(\mathbf{x}_s)$ im betrachteten Punkt $\mathbf{x}_s = [0 \ -3]^T$ bei

$$\lambda_{1/2}(C(\mathbf{x}_s)) = -0,1 \pm 5,5i. \quad (5-7)$$

Durch klassische lineare Analysemethoden kann hier also nicht die in Abbildung 5-2 klar zu erkennende Instabilität des nichtlinearen Gesamtsystems nachgewiesen werden. Der Grund dafür ist, dass die Nichtlinearität, die durch die implizite, versteckte Rückführung von x_1 in die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = C(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (5-8)$$

eingeht, nicht berücksichtigt wird. Die Dynamik des Systems bzgl. x_1 ist also eine andere, als lokal durch die eingefrorene Betrachtung $\dot{\mathbf{x}} = C(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}$ erfassbar ist.

Um die tatsächliche lokale Dynamik besser beurteilen zu können, wird (analog zur GBL) das Gesamtsystem (5-8) nach der Zeit abgeleitet.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_G(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (5-9)$$

Wird nun die GBL-Darstellung betrachtet, welche der Frozen-Time-Approximation relativ zu einem Arbeitspunkt $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ in der Art des LPV-Systems

$$\ddot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{C}_G(\mathbf{x}_i)\dot{\mathbf{x}} \quad (5-10)$$

entspricht, so übertragen sich zwar für eine auf (5-10) aufsetzende lineare Analyse des nichtlinearen Systems (5-9) vom Prinzip her die Probleme, die auch bei der Frozen-Time-Analyse des Systems (5-8) vorhanden waren. Aber der nichtlineare Einfluss von x_1 auf das ursprüngliche Gesamtsystem (5-8) kann durch die GBL-Betrachtung im Sinne einer lokalen Approximation 1. Ordnung durchaus untersucht werden; nähere Details wurden im Kapitel 4 erörtert. An dieser Stelle soll nochmals betont werden, dass zwar im Allgemeinen auch eine GBL-Analyse weder Stabilität noch Instabilität global eindeutig bestimmen kann; aber durch die lokale Approximation der impliziten, versteckten Nichtlinearitäten sind viel aussagekräftigere Schlussfolgerungen hinsichtlich Stabilität (bzw. bei Bedarf Robustheit) ableitbar.

Im vorliegenden Fall stellt sich die GBL-Linearisierung in \mathbf{x}_s wie folgt dar:

$$\ddot{\mathbf{x}} \approx \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{C}(\mathbf{x}_s)\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)\dot{\mathbf{x}}$$

mit $\mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} -0,1 - 45x_{2s} & 5,5 - 45x_{1s} \\ -5,5 - 90x_{1s} & -0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134,9 & 5,5 \\ -5,5 & -0,1 \end{bmatrix}$ (5-11)

Eine Eigenwertanalyse des GBL-Systems zeigt eine lokale Instabilität auf, die mit der numerischen Analyse (instabile Trajektorie) aus Abbildung 5-2 übereinstimmt.

$$\lambda_1(\mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)) = 0,1244 \quad \lambda_2(\mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)) = 134,7 \quad (5-12)$$

Anhand weniger simpler Berechnungen konnte der GBL-Ansatz also einen eindeutigen Hinweis dafür liefern, dass die Strategie S1 zu einem instabilen Systemverhalten führt.

Im Falle des Schaltgesetzes S2 kann ebenfalls eine GBL-Analyse durchgeführt werden, was durch die folgenden Gleichungen verkürzt dargestellt wird. Eine lineare Interpolation im Übergangsbereich vom 4. zum 3. Quadranten ergibt sich hier für einen zu $\tau_s = 5,0s$ gehörigen Arbeitspunkt $\mathbf{x}_s = [0 \ -0,3]^T$ zu

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,1 & c_{12}(x_1) \\ c_{21}(x_1) & -0,1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} c_{12}(x_1) &= 1 + 45(x_1 + 0,1), \\ c_{21}(x_1) &= -10 + 45(x_1 + 0,1). \end{aligned} \quad (5-13)$$

Die zugehörige GBL-Darstellung in \mathbf{x}_s ist

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &\approx \mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)\dot{\mathbf{x}} \\ \text{mit } \mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s) &= \begin{bmatrix} -0,1 + 45x_{2s} & 5,5 + 45x_{1s} \\ -5,5 + 90x_{1s} & -0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,6 & 5,5 \\ -5,5 & -0,1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5-14)$$

Auch hier liefert die GBL-Eigenwertanalyse im Einklang mit Abbildung 5-3 das korrekte Ergebnis, dass das nichtlineare System für Schaltgesetz S2 (lokal um \mathbf{x}_s) stabil ist.

$$\lambda_1(\mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)) = -2,937 \quad \lambda_2(\mathbf{C}_G(\mathbf{x}_s)) = -10,76 \quad (5-15)$$

Auch für die anderen Zustandspunkte im Übergangsbereich kann dies nachgewiesen werden, was hier aber nicht aufgeführt werden soll. Prinzipiell gilt zwar, dass der Nachweis der Stabilität durch die GBL-Analyse deutlich zuverlässiger ist als der Nachweis der Instabilität (s. hierzu auch Kapitel 4.2), aber gerade ersterer ist in den meisten Situationen am Ende des Systementwurfs ja auch besonders wichtig. Aufbauend auf den durch dieses Beispiel identifizierten Stärken der GBL-Analyse soll im Folgenden ein neues Reglerentwurfverfahren vorgestellt werden, dass sich die positiven Eigenschaften der GBL zu Nutze macht.

5.2 Überblick und Ziele der Regelungsmethodik ROPE

Die Grundzüge der GBL-Analyse sollen für die Regelung des Viertelfahrzeugs – aufbauend auf [Herr10] – im Rahmen eines hier neu eingeführten, robusten „Referenzregler-Orientierten Polynomialen Entwurfs“ (ROPE) angewandt und erweitert werden. Der ROPE greift das Referenzreglerprinzip auf, das bereits in Kapitel 4.3.2 angesprochen wurde. Dabei werden für das Streckenmodell zuerst einige wenige Referenz-Zustandsregler bestimmt, welche anschließend in polynomialer Form zu einem nichtlinearen Stellgesetz interpoliert werden. Dies könnte man auch als GBD-Gain-Scheduling bezeichnen. Durch lokale Stabilitäts- und Robustheitstests wird das Stellgesetz danach validiert und iterativ angepasst. Ebenfalls iterativ erfolgt die Auslegung der Referenzregler selbst, z.B. mittels einer robusten LQR-Iteration.

Zur quantitativen Erfassung der Robustheitsaspekte muss vorab ein Unsicherheitsmodell für das Viertelfahrzeugmodell erstellt werden. Im Zusammenhang damit wird auch auf eine

spezielle Unsicherheitsform, die Trimpunktunsicherheit, eingegangen, für welche die ROPE-Robustheitsanalyse besonders geeignet ist. Weiterhin werden die zeitvarianten Reglerverstärkungen im Sinne fiktiver Unsicherheiten in die Analyse integriert. Das gesamte Entwurfsvorgehen lässt sich dabei beim Viertelfahrzeug in mehrere Teilschritte unterteilen:

- ✗ Ergänzung einer inneren Schleife zum „Shaping“ der Dämpfungskraft,
- ✗ GB-Linearisierung des teillinearen Viertelfahrzeugmodells,
- ✗ Erarbeitung von Unsicherheitsmodellen mit parametrischen und dynamischen Modellunsicherheiten (für LQ-Reglerentwurf und GBL-Robustheitsanalyse),
- ✗ Ergänzung des GBL-Unsicherheitsmodells um Trimpunktunsicherheiten sowie fiktive Unsicherheiten zur Abdeckung zeitvarianter Reglerparameter und Fahrer-/Nutzlasten,
- ✗ iterative Berechnung robuster LQ-Referenzregler für spezielle Punkte,
- ✗ iterative Ableitung eines nichtlinearen, zeitkontinuierlichen Stellgesetzes mittels GBL-Stabilitätsanalysen verschiedener polynomialer Regleransätze,
- ✗ GBL-Robustheitstest mittels μ -Analyse gegen das definierte Unsicherheitsmodell (iterativ bei Korrekturen/Variation von Regler- oder Unsicherheitsmodell),
- ✗ simulative Validierung des Regelungssystems am teillinearen Simulink-Modell,
- ✗ Verifizierung des Reglers am Viertelfahrzeugprüfstand mit dSPACE-Hardware.

Im Rahmen des ROPE werden drei verschiedene Regler implementiert, die jeweils unterschiedliche Ziele verfolgen und folgendermaßen umschrieben werden können. Der Entwurf für den RK-Ansatz wurde bereits in [Herr10] durchgeführt.

(RK) Hochaggressives **R**egelgesetz für maximale **K**omfortgewichtung

(RS) Gemäßigtes **R**egelgesetz zur stärkeren Gewichtung von **S**icherheit und **E**nergie

(RR) **R**egelgesetz mit erhöhter **R**obustheit und **B**eobachter für sicheren Prüfstandsbetrieb

Daneben werden in den Kapiteln 7.1 und 7.2 lineare und nichtlineare Ersatzregler präsentiert, die nicht direkt auf dem ROPE aufsetzen, dafür aber eine sehr hohe Robustheit bzw. eine globale IQC-Stabilitätsaussage ermöglichen. In den nächsten Kapiteln werden die einzelnen Schritte des ROPE näher erläutert. Es liegt dabei in der Natur des Ansatzes, v.a. durch den Kompromiss aus Robustheit und bestmöglicher Performanz bzgl. vielfältiger Gütemaße (s. Kapitel 1.1.3), dass für die Auslegung von erweitertem Streckenmodell und Regelungsgesetz keine festen, quantitativen Zielgrößen vorgegeben werden. Vielmehr soll der Regelkreis innerhalb eines iterativen Lernprozesses aufgebaut und optimiert werden, wobei letztendlich auch Simulationen und Erfahrungswerte berücksichtigt werden müssen. Zuerst soll hierbei auf die innere Regelschleife eingegangen werden.

5.3 Innere Regelschleife

Um die spätere GBL-Modellierung und GBD-Bestimmung eines nichtlinearen Regelgesetzes zu vereinfachen, wird dem teillinearen Streckenmodell (2-9) vorab eine schnelle innere Regelschleife hinzugefügt. Diese innere Schleife hat die Aufgabe, die nichtlineare Aufbaudämpferkennlinie (inkl. Reibung) aus Abbildung 2-6 durch den Eingriff des elektrischen Aktors auf eine gewünschte lineare/quadratische Form zu bringen. Da dies auf Grund der Aktorbeschränkungen (s. Kapitel 1.1.3) nur begrenzt möglich und sinnvoll ist, soll das „Damper Shaping“ nur im Bereich bis maximal 25 Hz, für den auch das Modell selbst identifiziert wurde, in guter Näherung gelten. Der komfortgewichtete Bereich bis 8 Hz ist hierbei von besonderer Bedeutung. Bleibende Abweichungen vom Idealverhalten werden später im Rahmen der Unsicherheitsmodellierung pauschal berücksichtigt. Eine erfolgreiche Umsetzung des Damper Shaping hat den Vorteil, dass zum einen die Anzahl der notwendigen lokalen GB-Linearisierungen zur Erfassung der Dämpferkennlinie stark reduziert bzw. selbige zumindest durch ein Polynom parametrierbar werden; zum anderen wird der Einfluss der Coulombreibung abgeschwächt, die um die Geschwindigkeitsnulllage herum vor allem den Komfort negativ beeinflusst (siehe „weiche Auslegung“ als Komfortziel von Kapitel 1.1.2). Gleichzeitig können auch große lokale Schwankungen der Dämpfungskonstante und damit verbundene lokale Schwankungen möglicher ROPE-Reglerparameter vermieden werden.

Die gewünschte Zielkennlinie des Aufbaudämpfers kann durch folgende Funktion in Abhängigkeit der Differenzgeschwindigkeit $v(t) = \dot{x}_1(t)$ zwischen vertikaler Chassis- und Radgeschwindigkeit beschrieben werden:

$$F_{dC, \text{gew}} = d_{C, \text{lin}} v + d_{C, \text{quad}} v \cdot |v|. \quad (5-16)$$

Die Parameter $d_{C, \text{lin}}$ und $d_{C, \text{quad}}$ werden dabei als Dämpfungskonstanten eines linearen bzw. quadratischen Anteils der gewünschten Dämpferkennlinie verstanden. Eine quadratische, progressive Kennlinie kann gemäß [Mits04] helfen, den Zielkonflikt zwischen Sicherheit und Komfort zu mildern, da sie für schwache Anregungen (mit kleinen Werten von v) den Komfort mit kleinen effektiven d_C -Werten in den Vordergrund stellt, während für starke Anregungen die Sicherheitsaspekte durch höhere Dämpfungskonstanten stärker gewichtet werden. Auf dieses Prinzip wird später bei der Ableitung eines nichtlinearen Stellgesetzes nochmals zurückgegriffen werden. Mit (5-17) kann die notwendige Dämpfungskraft $F_{dC, \text{komp}}$ zur Kompensation („komp“) der Differenz aus gewünschter („gew“) und passiver („pass“) Kraft berechnet werden:

$$F_{dC, \text{komp}} = F_{dC, \text{gew}} - F_{dC, \text{pass}}. \quad (5-17)$$

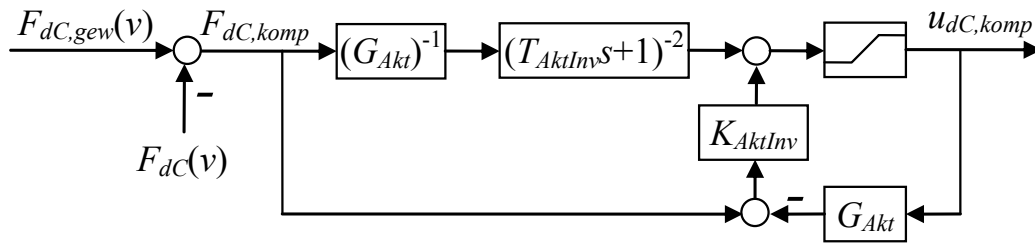


Abbildung 5-4: Innere Regelschleife

Da der Aktor im teillinearen Modell mit einer PT2-Dynamik behaftet ist (genau genommen mit zwei PT1-Gliedern) und Stellgrößenbeschränkungen unterliegt, wird zur Verfolgung von (5-16) eine Schaltung gemäß Abbildung 5-4 gewählt. Die innere Schleife kombiniert damit zwei summative Anteile: eine Inversion der Aktordynamik als Vorsteuerung und eine modellbasierte Rückführung mit P-Regler. Des Weiteren wird die resultierende Kompensationsstellgröße $u_{dC, komp}$, die gemäß

$$u_{ges} = u + u_{dC, komp} \quad (5-18)$$

zusammen mit der GBD-Reglerstellgröße u die Gesamtstellgröße u_{ges} bildet, über eine Stellgrößenlimitierung auf den Bereich $[-u_{dC, komp, max}; u_{dC, komp, max}]$ beschränkt. Eine ideale Aktorinversion würde durch $(G_{Akt})^{-1}$ beschrieben werden, wobei G_{Akt} der PT2-Übertragungsfunktion des Aktormodells entspricht, welche gemäß (2-9) den dynamischen Zusammenhang zwischen u und x_6 herstellt. Aus Kausalitätsgründen wird der Vorsteuerung ein doppeltes PT1-Glied mit der Zeitkonstante T_{AktInv} hinzugefügt; auf die Wahl der Parameterwerte wird weiter unten eingegangen. Zu Gunsten einer schnelleren Dynamik wird hier das doppelte PT1-Glied nur in den Vorsteuerungsweig eingebaut, wodurch – im Gegensatz zu einer modernen Zwei-Freiheitsgrade-Regelung – der Regelungsentwurf von der Vorsteuerung abhängig ist. Als Regler dient ein simples P-Glied mit der Verstärkung K_{AktInv} ; als Regelgröße wird die durch das Aktormodell G_{Akt} „geschätzte“ aktuelle Kompensationskraft, als Referenzgröße das geforderte $F_{dC, komp}$ verwendet. Die resultierende Dynamik der inneren Schleife ergibt sich bei vernachlässigter Stellgrößenlimitierung zu

$$u_{dC, komp} = F_{dC, komp} \cdot G_{Akt}^{-1}(s) / (T_{AktInv}s + 1)^2 + K_{AktInv} (F_{dC, komp} - G_{Akt}(s)u_{dC, komp}) \quad (5-19)$$

Bei der Wahl der Parameter gilt es abzuwägen, ob mehr Wert auf eine schnelle Sollwertfolge oder eine Begrenzung des Stellgrößeneinsatzes sowie Robustheit gelegt werden soll. Nach Tests und Simulationen wurden folgende Zielvorgaben als sinnvoll bewertet: die

Sprungantwort der Übertragung von $F_{dC,komp}$ auf $F_{dC,komp,ist} = G_{Akt} u_{dC,komp}$ gemäß (5-19) sollte eine maximale Überhöhung von 40 % nach maximal 0,01 s aufweisen. Dadurch soll sichergestellt werden, dass der Kompensationskraftfehler selbst bei starken Änderungen von $F_{dC,komp}$ kleiner als 50 % des Zielwerts bleibt. Indem die maximale Abweichung nach spätestens 0,01 s erreicht wird, soll eine gute Sollwertfolge im komfortkritischen Bereich bis ca. 10 Hz sichergestellt werden. Zur Begrenzung des Energieverbrauchs (und um genug Stellgrößenreserven für u zu bewahren) wird die Limitierung der Kompensationsspannung zu $u_{dC,komp,max} = -u_{dC,komp,min} = 2$ Volt, im Prüfstandseinsatz (Regler RR) sogar nur zu 1,5 Volt gewählt. Insgesamt stehen für die Aktoransteuerung ja nur 10 Volt zur Verfügung.

Durch Curve Fitting konnten damit folgende Parameterwerte definiert werden: $T_{AktInv} = 0,003$, $K_{AktInv} = 0,05$. Abbildung 5-5 präsentiert die Antwort der inneren Regelschleife für einen Sprung von $F_{dC,komp}$ auf den Wert 10 N. Wie zu sehen ist, erfüllt $F_{dC,komp,ist}$ die oben genannten Forderungen (maximal 40 % Überhöhung vor 0,01 s). Spätere Simulationen haben weiterhin gezeigt, dass ein progressiver Anteil der Wunschkennlinie in Kombination mit dem GBL-Regler fast keinen Einfluss auf die Performanz hat. Deshalb wird hier, anders als in [Herr10], eine rein lineare Wunschkennlinie gewählt, s. Abbildung 5-6. Eine Dämpfungskonstante von $d_{C,lin} = 600$ (mit $d_{C,quad} = 0$) hat sich in Tests als sinnvoll erwiesen.

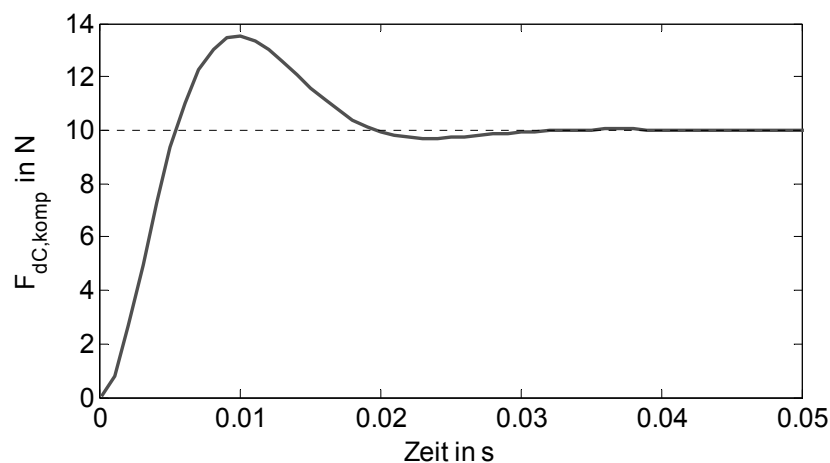


Abbildung 5-5: Sprungantwort innere Schleife

In Abbildung 5-7 wird der Vergleich zwischen passiv vorhandener und gewünschter Dämpferkraft gezeigt. Für diese Simulation der beiden Dämpferkräfte wurde ein Sinus-Sweep mit einer linear von 0,1 Hz bis 10 Hz ansteigenden Frequenz und einer Startamplitude von 0,5 m/s der Relativgeschwindigkeit v gewählt, was ein typischer Wert für diese Frequenz ist; der Sweep wurde durch einen PT1-Filter mit der Verstärkung 1 und der Eckfrequenz 10 rad/s gewichtet, um das Spektrum an vergleichbare Straßenprofile anzupassen. Die

Eckfrequenz wurde dabei näherungsweise dem in Abbildung 5-9 gezeigten Spektrum von v für eine Straßensimulation mit dem Profil aus Abbildung 2-7 entnommen. Werden die Kurven in Abbildung 5-7 mit dem Regelfehler (für die Kompensationsdämpferkraft) der inneren Schleife in Abbildung 5-8 verglichen, so zeigt sich, dass der Fehler auch für höhere Frequenzen deutlich unter 10 N liegt. Wie bereits Reifendämpfung und verschiedene Reibungseffekte, so soll auch dieser kleine Fehler später durch eine dynamische Aktorunsicherheit abgedeckt werden.

Da also die innere Regelschleife gemäß den obigen Abbildungen im relevanten Frequenzbereich zuverlässig und ausreichend schnell das gewünschte Verhalten erzielt, wird sie für alle folgenden Kapitel als ideal betrachtet, d.h., die Dynamik dieser Schleife wird im Modell nicht weiter berücksichtigt. Stattdessen wird die gewünschte Soll-Dämpferkennlinie im Modell verwendet, Abweichungen davon werden pauschal in der Unsicherheitsmodellierung erfasst. Spätere Ergebnisse werden zeigen, dass die innere Regelschleife allein bereits zu einer stark verbesserten Regelgüte führt, in Kombination mit den GBD-Reglern aber nur noch kleinen Einfluss hat – sowohl auf die Performanz als auch auf den Energieverbrauch. Der primäre Zweck der inneren Schleife bleibt deshalb die Vereinfachung der Modellierung und die Ermöglichung effektiver GBL-Analysen. Alternativ zur inneren Schleife könnte die Dämpferkennlinie auch durch Splines approximiert werden, wie es für die Reifenfederung im nächsten Kapitel durchgeführt wird. In [Herr10] wird neben dem „Shaping“ der Aufbaudämpfung auch eines für die linear modellierte Aufbaufederung durchgeführt, indem für Federwege größer als 5 cm ein quadratischer Anteil (im Sinne einer Zusatzfeder) hinzugefügt wird. Hierauf soll in dieser Arbeit verzichtet werden; stattdessen soll prinzipiell versucht werden, solch hohe Federwege so weit wie möglich zu vermeiden. Am Viertelfahrzeugprüfstand ist dies sogar eine zwingende Forderung.

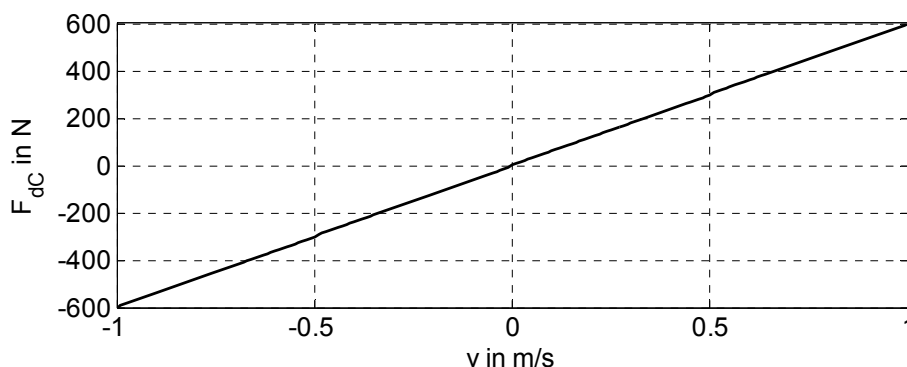


Abbildung 5-6: Lineare Wunschdämpferkennlinie

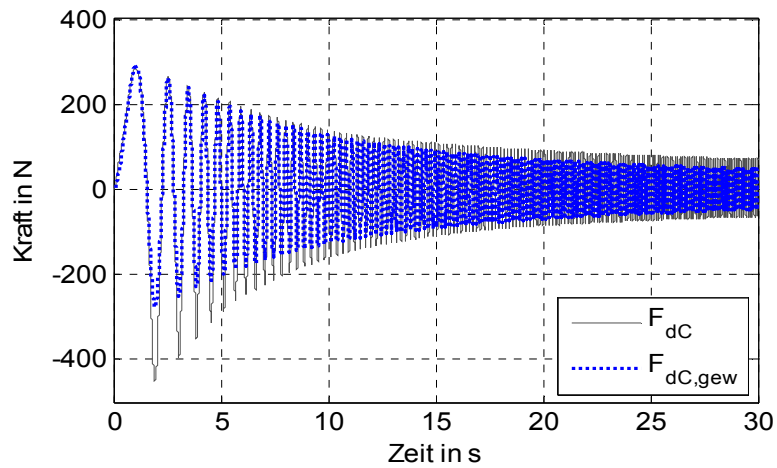


Abbildung 5-7: Passive und gewünschte Dämpferkraft

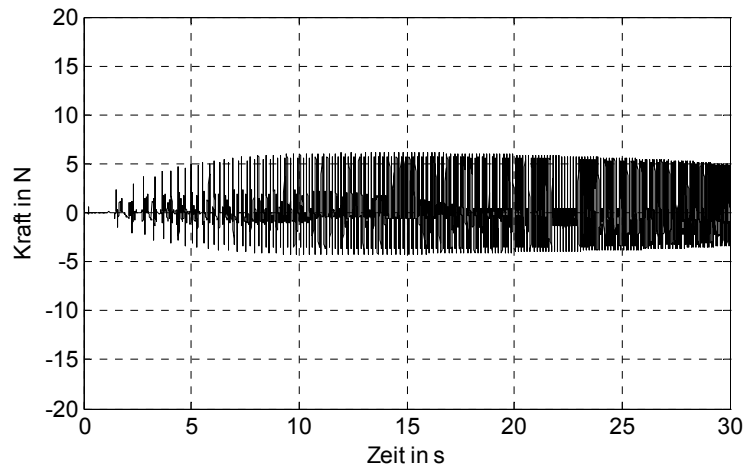


Abbildung 5-8: Fehler der Kompensationsdämpferkraft

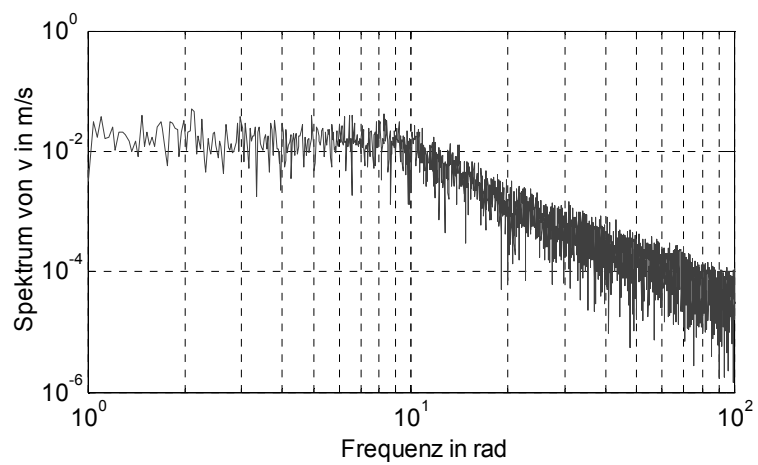


Abbildung 5-9: Spektrum der Relativgeschwindigkeit

5.4 GB-Linearisierung des teillinearen Viertelfahrzeugmodells

In diesem Kapitel wird aufbauend auf den Grundlagen aus Kapitel 4 eine GBL-Familie des teillinearen Viertelfahrzeugmodells (2-9) hergeleitet, wobei anstatt der ursprünglichen Dämpferkennlinie eine lineare (oder optional kombiniert linear-quadratische) Wunschkennlinie verwendet wird, wie sie in Kapitel 5.3 durch die innere Schleife erzeugt wurde. Abbildung 5-6 zeigt die Wunschkennlinie für $d_{c,lin} = 600$ (und $d_{c,quad} = 0$). Stellgrößenbeschränkungen werden bei der Linearisierung nicht berücksichtigt, da dadurch die Modellierung stark vereinfacht wird und ein Überschreiten der Stellgrenzen ohnehin so weit wie möglich vermieden werden sollte. Prinzipiell wäre aber auch eine Integration der Stellgrenzen in das GBL-Modell möglich.

Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, ist eine Voraussetzung für die GB-Linearisierung eines Systems, dass es bis zur ersten Ableitung stetig ist. Da die Aufbaufeder bereits linear ist und alle kleineren Reibungseffekte im nominellen Modell vernachlässigt werden, steht dieser Forderung nur noch die nichtlineare Reifenfederkennlinie aus Abbildung 2-5 entgegen. Diese wird im identifizierten Prüfstandsmodell durch (5-20) beschrieben, was bereits in Abbildung 2-5 als Diagramm dargestellt wurde. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die ermittelte Kennlinie des Reifens nur die statischen Standeigenschaften wiedergibt. Dynamische und Rolleigenschaften (wie z.B. dynamische Verhärtung, effektiver Rollradius usw.) werden hier nicht betrachtet, da hierfür keine Parameteridentifikation durchgeführt werden konnte und entsprechende Modelle sehr komplex sein können (z.B. FTire- oder Delft-Swift-Modelle). Für die nominellen GBL-Stabilitätstests in dieser Arbeit soll deshalb das nichtlineare, statische Kennlinienmodell genügen; die späteren Robustheitstests werden ohnehin eine Unsicherheit ansetzen, welche die hohen möglichen Schwankungen der Reifensteifigkeit abdeckt.

$$F_{cR} = \begin{cases} F_{cR,LO}, & x_3 < x_{3,LO} \\ -c_{R,lin}x_3 + c_{R,quad}x_3^2, & x_{3,LO} \leq x_3 \leq x_{3,k} \\ F_{cR,k} - c_{R,lin}x_3, & x_3 > x_{3,k} \end{cases} \quad (5-20)$$

$$\text{mit } c_{R,lin} = 138815, \quad c_{R,quad} = 4075449, \quad x_{3,k} = -0,01703, \\ F_{cR,LO} = 3546, \quad F_{cR,k} = -1114, \quad x_{3,LO} = 0,01292$$

In Abbildung 2-5 wurden bereits durch gestrichelte Linien Stellen näherungsweise gekennzeichnet, in denen eine Unstetigkeit der ersten Ableitung, also ein Knick, vorliegt. Dieser tritt beim Abheben des Reifens (für $x_{3,LO}$ mit $LO := \text{Lift-Off}$) und beim Übergang vom linear-quadratischen zum rein linearen Teil (für $x_{3,k}$ mit $k := \text{Knick}$) der Kennlinie auf. Diese Bereiche sollen durch kubische Splines approximiert werden, welche durch Einhaltung der

Randbedingungen in (5-21) einen stetigen Kennlinienverlauf bis hin zur ersten Ableitung in Form neuer Spline-Kennlinienbereiche $F_{cR,S,LO}(x_3)$ und $F_{cR,S,k}(x_3)$ herstellen.

$$\begin{aligned}
 F_{dR,S,LO}(x_{3,LO}^-) &= F_{dR,LO}(x_{3,LO}^-) & \partial F_{dR,S,LO}(x_{3,LO}^-) / \partial t &= \partial F_{dR,LO}(x_{3,LO}^-) / \partial t \\
 F_{dR,S,LO}(x_{3,LO}^+) &= F_{dR,LO}(x_{3,LO}^+) & \partial F_{dR,S,LO}(x_{3,LO}^+) / \partial t &= \partial F_{dR,LO}(x_{3,LO}^+) / \partial t \\
 F_{dR,S,k}(x_{3,k}^-) &= F_{dR,k}(x_{3,k}^-) & \partial F_{dR,S,k}(x_{3,k}^-) / \partial t &= \partial F_{dR,k}(x_{3,k}^-) / \partial t \\
 F_{dR,S,k}(x_{3,k}^+) &= F_{dR,k}(x_{3,k}^+) & \partial F_{dR,S,k}(x_{3,k}^+) / \partial t &= \partial F_{dR,k}(x_{3,k}^+) / \partial t
 \end{aligned} \tag{5-21}$$

Die kubischen Spline-Funktionen können anhand (5-21) mathematisch eindeutig zu

$$\begin{aligned}
 F_{dR,S,i}(x_{3,i}) &= \alpha_3 x_{3,i}^3 + \alpha_2 x_{3,i}^2 + \alpha_1 x_{3,i} + \alpha_0 \\
 \text{mit } \underline{\alpha} &= [\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0]^T = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{Y} \\
 \text{und } x_{3,i} &\in [x_{3,i}^-, x_{3,i}^+], \quad i \in \{LO; k\}
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

bestimmt werden, wobei sich \mathbf{X} und \mathbf{Y} des Gleichungssystems $\mathbf{X}\underline{\alpha} = \mathbf{Y}$ zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} (x_{3,i}^-)^3 & (x_{3,i}^-)^2 & x_{3,i}^- & 1 \\ (x_{3,i}^+)^3 & (x_{3,i}^+)^2 & x_{3,i}^+ & 1 \\ 3(x_{3,i}^-)^2 & 2x_{3,i}^- & 1 & 0 \\ 3(x_{3,i}^+)^2 & 2x_{3,i}^+ & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } i \in \{LO; k\}, \\
 \mathbf{Y} &= [F_{dR,S,i}(x_{3,i}^-) \quad F_{dR,S,i}(x_{3,i}^+) \quad \partial F_{dR,S,i}(x_{3,i}^-) / \partial t \quad \partial F_{dR,S,i}(x_{3,i}^+) / \partial t]^T
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

ergeben. Damit die Spline-Bereiche möglichst kleinen Einfluss auf die Systemdynamik haben, aber dennoch weiche Übergänge an Stelle der Knickpunkte gewährleisten, werden die Anfangs- und Endpunkte der Splinefunktionen wie in (5-24) gewählt.

$$x_{3,i}^{+/-} = x_{3,i} \pm 0,0005 \quad \text{mit } i \in \{LO; k\} \tag{5-24}$$

Dieser Spline-Ansatz könnte prinzipiell für alle nichtlinearen Kennlinien verwendet werden, z.B. bei Knickstellen durch Stellgrößenbeschränkungen oder der Approximation komplizierterer Kennlinien (wie der ursprünglichen Aufbaudämpferkennlinie).

Da nun das gesamte teillineare Modell (2-9) durch bis zur ersten Ableitung stetige Funktionen approximiert wurde, kann das GB-Linearisierungsverfahren gemäß (4-9) auf das System angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{w}}_1 &= \hat{w}_2 - \hat{w}_4 \\
\dot{\hat{w}}_2 &= (-c_C \hat{w}_1 + F_{d_C} \hat{w}_v + C_{Akt,2} \hat{w}_6) / m_C \\
\dot{\hat{w}}_3 &= \hat{w}_4 - \ddot{x}_S \\
\dot{\hat{w}}_4 &= \left(c_C \hat{w}_1 - F_{d_C} \hat{w}_v - \frac{\partial (F_{c_R}(x_3))}{\partial x_3} \Big|_{x_{3,0}} \cdot \hat{w}_3 - C_{Akt,2} \hat{w}_6 \right) / m_R \\
\dot{\hat{w}}_5 &= A_{Akt,11} \hat{w}_5 + B_{Akt,1} \dot{u} \\
\dot{\hat{w}}_6 &= A_{Akt,21} \hat{w}_5 + A_{Akt,22} \hat{w}_5 \\
\text{mit } \hat{w}_1 &= \dot{\hat{x}}_C - \dot{\hat{x}}_R, \quad \hat{w}_2 = \ddot{\hat{x}}_C, \quad \hat{w}_3 = \dot{\hat{x}}_R - \dot{\hat{x}}_S, \quad \hat{w}_4 = \ddot{\hat{x}}_R, \quad \hat{w}_v = \hat{w}_4 - \hat{w}_2
\end{aligned} \tag{5-25}$$

Der Index 0 in $x_{3,0}$ kennzeichnet in Anlehnung an (4-3) einen beliebigen Arbeitspunkt für x_3 . Wird im lokal linearen System (5-25), mit gemäß (4-10) korrekt gesetzten Anfangsbedingungen, der Arbeitspunkt kontinuierlich variiert, s. (5-26), so erhält man ein nichtlineares bzw. zeitkontinuierliches LPV-System, so wie es für die Simulationen in dieser Arbeit verwendet wird. Für den GBD-Regler wird später Analoges gelten, da auch dieser in nichtlinearer, zeitkontinuierlicher Form realisiert wird.

$$x_{3,0} = x_{3,0}(t) \rightarrow x_3(t) \quad \text{für } T_s \rightarrow 0 \tag{5-26}$$

Die resultierende GBL-Familie soll hier bzgl. der linearisierten Reifenfederkennlinie nicht explizit aufgeführt werden, da die Ableitungen gleichermaßen umfangreich wären, wie die zugehörigen mathematischen Berechnungen trivial sind. Eine wichtige Eigenschaft des – um die Ergebnisse dieses Kapitels zu (5-25) erweiterten – Modells (2-9) soll allerdings herausgehoben werden: für alle nichtlinearen Teile der Zustandsgleichungen gilt

$$\dot{x}_{i,\text{nichtlin}} = f(x_i), \tag{5-27}$$

d.h., der nichtlineare Anteil der Ableitung der i -ten Zustandsvariable ist jeweils eine Funktion der i -ten Zustandsvariable selbst. Für die GBL-Analyse wird diese Eigenschaft später noch

von Bedeutung sein. Falls für die Wunschkennlinie des Aufbaudämpfers der quadratische Anteil $d_{C,quad} > 0$ gewählt wird, lässt sich ein zu (5-25) und (5-27) analoges Ergebnis erzielen, indem nach der Relativgeschwindigkeit $v = x_2 - x_4$ anstatt nach x_2 bzw. x_4 abgeleitet wird.

5.5 Unsicherheitsmodellierung Viertelfahrzeug

Die Unsicherheitsmodellierung besteht neben der Definition von Modellunsicherheiten vor allem aus der LFR-Bildung, s. hierzu Kapitel 3.3, welche das Modell in eine geeignete mathematische Form für die Robustheitsanalyse transformiert. Während die verschiedenen Methoden der Robustheitsanalyse in der gängigen Literatur wie z.B. [Skog05], [Bala98] oder [Zhou96] sehr ausführlich beschrieben werden, sind Informationen über eine systematische Unsicherheitsmodellierung nur schwer zu finden. Dies dürfte darin begründet liegen, dass es hierfür keine allgemeingültigen Patentrezepte gibt. Vielmehr muss von Fall zu Fall entschieden werden, auf welche Art und in welcher Form ein Unsicherheitsmodell gestaltet werden soll. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Unsicherheitsmodellierung stets durch ein iteratives Vorgehen, das sich zu etwa gleichen Anteilen auf mathematische Identifikation, Simulationsergebnisse, Erfahrungswerte und den Regelzielen entsprechende Vorgaben stützt. Vorab sollen an dieser Stelle sechs Hauptschritte des Vorgehens definiert werden.

Iteration Unsicherheitsmodellierung:

- a) Ermittlung aller relevanten Systemunsicherheiten.
- b) Mathematische Definition der Unsicherheiten als parametrische oder dynamische Unsicherheiten mit entsprechenden Unsicherheitsgewichten.
- c) Definition virtueller Ein- und Ausgänge sowie Transformation der einzelnen Subsysteme des Kreises in LFRs.
- d) Bei Bedarf: Einbindung von weiteren Gewichtsfunktionen zur Berücksichtigung von Performanzaspekten.
- e) Verschmelzung der Subsysteme zu einer einzelnen, (je nach Modellierungsziel) gewünschten Gesamt-LFR des Kreises.
- f) Wiederholung einzelner oder aller Schritte a) bis e) auf Grund der Ergebnisse erster Berechnungen, Konvergenztests, Simulationen usw.

Der optionale Schritt d) ist streng genommen kein Teil der Unsicherheitsmodellierung, sondern des so genannten „Closed Loop Shaping“ (in Anlehnung an das gewöhnliche Loop Shaping, bei dem aber nur Gewichtsfunktionen für den offenen Kreis definiert werden, siehe [Skog05] und Kapitel 3.4.2). Da Schritt d) aber essentiell für eine robuste Performanzanalyse bzw. robuste Reglersynthese mittels H_∞ - oder μ -Methoden ist und stets parallel zur Unsicherheitsmodellierung erfolgt, soll er hier zu selbiger hinzugezählt werden.

Für die Schritte c) und e) existieren mittlerweile Toolboxen, welche durch symbolische Berechnungen eine automatisierte Bearbeitung dieser Schritte ermöglichen. Seit einigen Jahren ist eine solche Grundfunktionalität Teil der Robust Control Toolbox von Matlab, weiterführende Funktionen wie die symbolische Modellreduktion sind z.B. in der in [Heck07] beschriebenen Toolbox enthalten. Nichtsdestotrotz soll im Rahmen dieser Arbeit auf eine vollautomatisierte Bearbeitung der Schritte c) und e) verzichtet werden, weil

- ✦ gerade die automatisierte Matlabfunktionalität teils eher intransparent und daher nur bedingt geeignet für detaillierte Untersuchungen und Adaptionen ist,
- ✦ im Rahmen der Dissertation umfangreiche, halbautomatisierte numerische Methoden entwickelt wurden (die zwar generell weniger flexibel sind, aber für die vorliegende Anwendung gut angepasst wurden),
- ✦ deshalb und in Anbetracht der überschaubaren Dimension der hier verwendeten Unsicherheitsmatrizen eine Modellierung „per Hand“ mit nur wenig zusätzlichem Aufwand verbunden ist und
- ✦ vor allem die durch die eigene Modellierung gewonnenen Erfahrungen und Erkenntnisse einen höchst wertvollen Faktor darstellen, zum einen für die Robustheitsanalyse selbst, zum anderen hinsichtlich darauf aufsetzender Anwendungen wie der IQC-Analyse.

Die nächsten Abschnitte werden in Anlehnung an die Punkte a) bis e) detailliert die verwendete Unsicherheitsmodellierung für das Viertelfahrzeug bzw. die zugehörige GBL-Familie erörtern; für Iterationsschleifen werden dabei nur die Endergebnisse aufgelistet. Darüber hinaus wird später auch auf das Konzept der Trimpunktunsicherheit eingegangen, mit dem das Unsicherheitsmodell erweitert wird.

5.5.1 Definition parametrischer und dynamischer Modellunsicherheiten

Um einerseits den Konservatismus zu minimieren, andererseits aber formelmäßig schwer erfassbare Unsicherheiten pauschal abzudecken, wird ein gemischt dynamisch-parametrisches Unsicherheitsmodell gewählt, wie es in Kapitel 3.2 eingeführt wurde. Zuerst soll auf die parametrischen Unsicherheiten eingegangen werden. Im teillinearen Modell sind es vor allem die Aufbau- und Reifenfederkennlinien, die variable Chassis-/Fahrer Masse sowie die Aufbaudämpfung, die als unsichere Parameter in Frage kommen. Die Chassismasse soll an dieser Stelle ausgeklammert werden, sie wird später bei den Trimpunktunsicherheiten berücksichtigt. Die Federkonstante c_c der linearen Aufbaufeder kann als verhältnismäßig sicher betrachtet werden. Zur Abdeckung kleinerer lokaler Nichtlinearitäten in der Federkennung sowie von Effekten durch geometrische Nichtlinearitäten wird eine Unsicherheit von 5 % frei angesetzt (genauere Praxistests könnten die hier gewählten Unsicherheiten jeweils noch optimieren).

Der Aufbaudämpfung, die durch die innere Regelschleife geformt wird, muss eine höhere Unsicherheit angedacht werden. In Anlehnung an Abbildung 5-7 und Abbildung 5-8 werden bereits für kleinere Frequenzen (< 15 Hz) 10 % Unsicherheit der Dämpfungskonstante d_c veranschlagt. Aufgrund der Dynamik des inneren Regelkreises wird allerdings die Hälfte davon, also 5 %, durch eine dynamische Unsicherheit abgebildet, die weiter unten bei der Aktorunsicherheit integriert wird. Durch die Aktorunsicherheit wird auch der deutlich steigende Fehler bei höheren Frequenzen abgebildet.

Die Unsicherheitsmodellierung der Reifenfederkennlinie gestaltet sich aus zweierlei Gründen komplizierter: zum einen muss davon ausgegangen werden, dass das Standreifenmodell an sich bereits mit hohen strukturellen Unsicherheiten behaftet ist (unabhängig von der Genauigkeit der Identifikation); deshalb wird hier nicht der Weg gewählt, die Unsicherheiten in Abhängigkeit von x_3 relativ zur jeweiligen lokalen, nominellen Federkonstante zu definieren, obwohl sich dieser Ansatz in Verbindung mit der GBL geradezu anbietet (siehe Trimpunktunsicherheiten weiter unten). Zum anderen macht ein Reglerentwurf in der Nähe bzw. jenseits des Lift-Off-Punktes (Reifen hebt ab) kaum noch Sinn, weil das System dort die Eigenschaft der Steuerbarkeit bzw. Stabilisierbarkeit verliert. Indem der Aktor nur zwischen Rad und Chassis wirkt, kann er nicht zu einem schnelleren Zurückkehren auf die Straße und damit nicht zur Rückgewinnung der Steuerbarkeit aktiv beitragen. Dies stellt aber kein größeres Problem dar, da das Fahrzeug auch ohne Zutun des Aktors zurück zum Boden fällt. Deshalb sollen die Bereiche mit hohem Reifenhub in Analyse und Entwurf (nicht aber in der Simulation) ausgeblendet, stattdessen nur ein ausreichend großer Bereich um die Gleichgewichtslage herum betrachtet werden.

In Verbindung mit der hohen Unsicherheit des Reifenmodells wird für die Unsicherheitsanalyse deshalb Folgendes vorgeschlagen: als nominelle, konstante Reifenfederkonstante wird die lokale Steifigkeit in der nominellen Gleichgewichtslage, $c_r = 139000$ N/m, verwendet. Der Schwankungsbereich wird durch die lokalen Steifigkeiten bei einer Auslenkung von ± 4 mm definiert, was zu einer Unsicherheit von 24 % führt. Der Weg von 4 mm wurde dem RMS-Wert in Abbildung 5-10 entsprechend gewählt, der sich bei späteren Simulationen im Falle einer starken Straßenanregung (s. Kapitel 6) für den Federhub des passiven Modells eingestellt hat und somit den wichtigsten Kennlinienbereich abdeckt. Natürlich stellt diese Art der Modellierung einen starken Kompromiss dar: einerseits wird durch die Unsicherheit nur ein begrenzter Bereich der Kennlinie erfasst; andererseits kann die Unsicherheit ihre Werte unabhängig vom aktuellen x_3 (Reifenfederhub) annehmen, weshalb der Wert von 24 % trotz aller Modellschwächen als enorm hoch angesehen werden muss. Im für den Reglerentwurf relevanten Bereich der Kennlinie (also exklusive des Lift-Off-Bereichs) sollte dieses Unsicherheitsmodell der Reifenfeder deshalb zwar verhältnismäßig konservativ, insgesamt aber sehr sinnvoll sein. Sobald ein exakteres Reifenmodell vorliegt,

kann die Unsicherheitsmodellierung angepasst werden. Für einzelne Ausreißer, die den modellierten Unsicherheitsbereich übersteigen, muss aktuell die im nächsten Abschnitt definierte dynamische Unsicherheit gerade stehen. Alle parametrischen Unsicherheiten der GBL-Linearisierung (5-25) werden in (5-28) zusammengefasst .

$$\begin{aligned} c_C &= \bar{c}_C (1 + \eta_{cC} \delta_{cC}), & \bar{c}_C &= 7980 \text{ N/m}, & \eta_{cC} &= 0,05, & |\delta_{cC}| &\leq 1 \\ d_C &= \bar{d}_C (1 + \eta_{dC} \delta_{dC}), & \bar{d}_C &= 600 \text{ Ns/m}, & \eta_{dC} &= 0,05, & |\delta_{dC}| &\leq 1 \\ c_R &= \bar{c}_R (1 + \eta_{cR} \delta_{cR}), & \bar{c}_R &= 139000 \text{ N/m}, & \eta_{cR} &= 0,2374, & |\delta_{cR}| &\leq 1 \end{aligned} \quad (5-28)$$

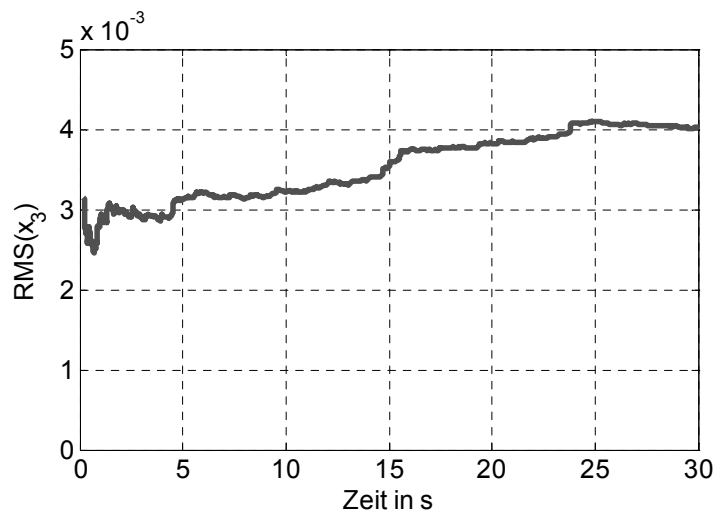


Abbildung 5-10: RMS Reifenfederhub

Während die parametrischen Unsicherheiten möglichst genau und strukturiert modelliert werden sollten, um Konservatismus zu vermeiden, kann bei der Definition der dynamischen Unsicherheiten – aus Erfahrung heraus – eine zu genaue Modellierung erst zu Konservatismus führen. Dieses Paradoxon entsteht dann, wenn versucht wird, durch (simulative, numerische oder analytische) Optimierung der dynamischen Unsicherheitsgewichte einen vorab bestimmten, unsicheren Bereich im Bode-Diagramm abzudecken. Da die dynamischen Gewichtsfunktionen aus Gründen der numerischen Lösbarkeit meist Polynome kleiner Ordnung sind, wird bei einem solchen Vorgehen fast immer ein großer zusätzlicher Schwankungsbereich erfasst, der ursprünglich nicht gewünscht war. Dieses Problem trat auch in [Hube10] auf, wo versucht wurde, ein exaktes dynamisches Unsicherheitsmodell für das Viertelfahrzeug aus nichtlinearen Simulationen heraus abzuleiten. Die Folge waren Unsicherheitsgewichte von solcher Größe, dass hierfür ein sinnvoller robuster Reglerentwurf nicht mehr möglich war. Deshalb soll in dieser Arbeit auf ein simpleres, weniger exaktes Modell zurückgegriffen werden, das – auf Basis sinnvoller Annahmen – zu deutlich

geringerem Konservatismus führt, obwohl es mit hoher Wahrscheinlichkeit dennoch alle relevanten Unsicherheiten abdeckt.

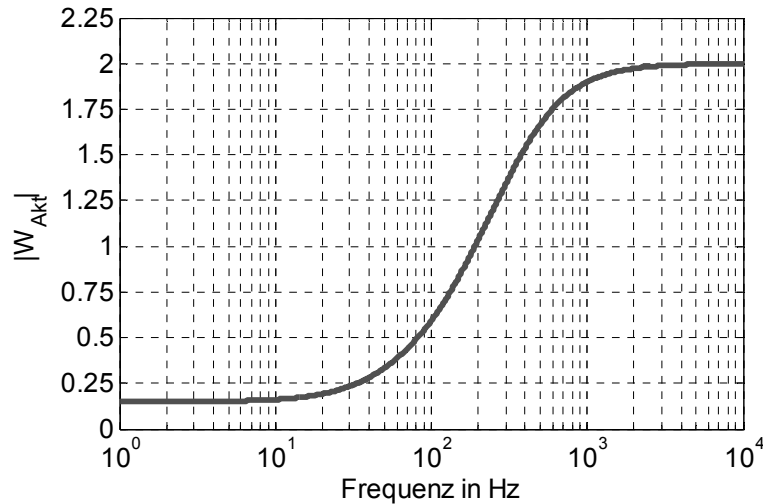


Abbildung 5-11: Frequenzgewicht Aktorunsicherheit

Zuerst wird eine multiplikative, dynamische Unsicherheit gemäß Abbildung 3-2 für den Aktor sowie pauschal für alle bisher vernachlässigten Systemunsicherheiten (Spline-Näherung, Idealisierungen, usw.) definiert. In [Bala98] werden sinnvolle Beispiele für solche Unsicherheiten beschrieben, im vorliegenden Fall kommt aber noch hinzu, dass der Aktor eigens einer recht genauen Identifikation bis 25 Hz in [Koch10] unterzogen wurde. Ein dynamisches Unsicherheitsgewicht $W_{Akt}(j\omega)$ von 10 % für kleine Frequenzen scheint deshalb sinnvoll, wird aber auf Grund der oben erwähnten fünfprozentigen, dynamischen Unsicherheit der inneren Schleife frei auf 15 % erhöht. Ab 25 Hz soll die Unsicherheit gemäß dem Verlauf eines einfachen Lead-Filters auf 200 % für hohe Frequenzen ansteigen, da in diesem Bereich das Modell sehr unzuverlässig wird. Damit ist theoretisch der Fall abgedeckt, dass der Aktor den negativen Wert der Wunschstellgröße liefert. Da diese Werte nur geschätzt sind, wird später im Rahmen der Robustheitsanalyse getestet, wie weit die Aktorunsicherheit (speziell für kleine Frequenzen) noch erhöht werden kann. In Abbildung 5-11 wird der Amplitudengang von $W_{Akt}(j\omega)$ gezeigt; dort ist auch zu erkennen, dass auf Grund des runden Verlaufs bereits bei 15 Hz eine Unsicherheit von 17,5 % vorliegt. Formelmäßig ergibt sich der zugehörige Frequenzgang gemäß (3-11) zu

$$W_{Akt}(s) = \frac{s + \omega_E}{\frac{1}{F_{up}}s + \frac{1}{F_{low}}\omega_E} \quad \text{mit} \quad \omega_E = 25 \cdot 2 \cdot \pi, \quad F_{low} = 0,15, \quad F_{up} = 2. \quad (5-29)$$

Für Untersuchungen des Modells in speziellen Arbeitspunkten des ursprünglichen Viertelfahrzeugmodells (also nicht innerhalb der GBL-Darstellung) wird eine weitere dynamische, frequenzunabhängige Unsicherheit $W_{in} = 0,2$ (20 %) mit $W_{Akt}(j\omega)$ in Serie geschaltet. Diese resultierende Unsicherheit $W_{Akt,+20}$ soll pauschal den Fehler berücksichtigen, der durch die komplette Vernachlässigung der nichtlinearen Kennlinien entsteht. Auf Grund der Normeigenschaften in (3-2), (3-3) und (3-7) besitzt das resultierende Gesamt-Unsicherheitsgewicht einen Betrag von 38 % für kleine und 260 % für hohe Frequenzen, was bereits als sehr hohes Gewicht bezeichnet werden kann. Speziell für kleine Frequenzen sollte es nicht deutlich höher ausfallen, um den Reglerentwurf zu Gunsten der Robustheit nicht zu konservativ zu gestalten.

Abschließend sei angemerkt, dass auch Tests durchgeführt wurden, in denen der reelle Wertebereich mehrerer parametrischer Unsicherheiten um einen kleinen komplexen Wertebereich erweitert wurde. In Anlehnung an Kapitel 3.6 sollte dies dazu beitragen, die Konvergenz der „Lower Bound“ von μ zu optimieren. Ein relevanter Effekt war aber nicht beobachtbar, weshalb dieser Ansatz hier nicht weiter betrachtet wird.

5.5.2 Definition von fiktiven Unsicherheiten und Trimpunktunsicherheiten

Neben den üblichen parametrischen und dynamischen Unsicherheiten werden im Folgenden auch so genannte Trimpunktunsicherheiten auf das Viertelfahrzeugmodell angewendet. Über deren Konzept sind erst in der jüngeren Literatur nähere Informationen zu finden, so z.B. in [Hell99] oder, für komplexere Modellierungen, in [Löfb98]. Die Grundlagen der in dieser Arbeit verwendeten Methodik zur Generierung von Trimpunktunsicherheiten wurden in [Herr06] und [Herr07] erarbeitet. In [Herr08] werden die daraus gewonnenen Erkenntnisse auf die Robustheitsanalyse des nichtlinearen Viertelfahrzeugmodells aus Kapitel 2.1 angewendet, wobei für die Aufbaufederung und den Aktor ähnliche Unsicherheiten angesetzt werden wie im vorigen Kapitel 5.5.1. Ziel der Trimpunktunsicherheiten in [Herr08] ist die Erfassung einer variablen Chassismasse (inkl. Fahrer- und Nutzlast), die für variierende Werte zu einer direkten Änderung der Koeffizienten der nichtlinearen Zustandsgleichungen (2-7) führt. Im Sinne eines LPV-Systems ergibt sich für jede Chassismasse ein neuer Referenzarbeitspunkt, d.h., ein Trimpunkt. Die Idee, variable Nutzlasten im Rahmen einer Robustheitsanalyse zu untersuchen, kann z.B. bereits in [Mora92] gefunden werden. In diesem Kapitel soll das Konzept der Trimpunktunsicherheit erweitert werden, indem auch die Reglerparameter von m_C abhängig gestaltet werden. Der folgende Abschnitt gibt einen kompakten Überblick über die Idee der Trimpunktunsicherheiten sowie ihre Anwendung auf das Viertelfahrzeug. Ausgangspunkt sei die Definition des Wertebereichs der variablen Chassismasse, die bei einem nominellen Wert von 89,56 kg je nach Fahrer- und Nutzlast (frei angesetzt)

$$m_C \in [80; 160] \quad (5-30)$$

betragen darf. Da die Chassismasse ausschließlich als Faktor $1/m_C$ in die Zustandsgleichungen einfließt, könnte die Massenunsicherheit im rein passiven Modell auch „gewöhnlich“ parametrisch abgelegt werden, wie in (5-31) formuliert.

$$m_C = \bar{m}_C(1 + \eta_C \delta_C) \quad \text{mit } \bar{m}_C = 120, \eta_C = 0,33, |\delta_C| \leq 1 \quad (5-31)$$

Wie die folgenden Kapiteln allerdings zeigen werden, soll auch der Regler für verschiedene Chassismassen, also verschiedene Trimpunkte, entworfen werden. Deshalb wird die Massenunsicherheit des Chassis als Trimpunktunsicherheit δ_{TP} angesetzt, wobei der Schwankungsbereich von m_C allgemein über

$$m_C \in [m_{C\min}; m_{C\max}] \rightarrow \delta_{TP} \in [-1; 1]: \delta_{TP}(m_C) = \frac{m_C - \bar{m}_C}{\frac{(m_{C\max} - m_{C\min})}{2}} \quad (5-32)$$

auf den Wertebereich der Unsicherheitsvariable abgebildet werden kann.

Um die Anwendung der Trimpunktunsicherheit auf das Viertelfahrzeug aufzuzeigen, muss dem später folgenden GBL-Reglerentwurf etwas vorgegriffen werden. Als Ergebnis des GBD wird sich ein zeitvarianter GBL-Zustandsregler der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4 \quad K_5 \quad K_6] \\ \text{mit } K_i &= \bar{K}_i(m_C) + dK_i(m_C) \cdot \kappa_i(x_i), \quad |\kappa_i(x_i)| \leq 1 \\ \text{bzw. } K_i &\in \{ \bar{K}_i(m_C) + dK_i(m_C) \cdot \delta_{Ki} \}, \quad |\delta_{Ki}| \leq 1 \end{aligned} \quad (5-33)$$

ergeben. Der Regler wird dabei für $n_T = 5$ äquidistant verteilte Chassismassen mit $\delta_{TP} = \{-1; -0,5; 0; 0,5; 1\}$ entworfen, wodurch eine Abhängigkeit der Mittelwerte \bar{K}_i und der maximalen Schwankungsbereiche dK_i von m_C entsteht. Die Variation von K_i , die sich zusätzlich über $\kappa_i(x_i)$ durch eine kontinuierliche Adaption gemäß der Zustandsvariable x_i ergibt (s. Kapitel 5.7), kann jeweils durch eine „gewöhnliche“ parametrische Unsicherheit δ_{Ki} abgebildet werden. Da diese Zeitvarianz prinzipiell nicht unbekannt und damit unsicher, sondern durch das Regelgesetz eindeutig definiert und nachvollziehbar ist, werden die Unsicherheitsvariablen δ_{Ki} hier als fiktive Unsicherheiten bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass innerhalb der späteren μ -Analyse eigentlich keine zeitvarianten Unsicherheiten wie die

für K_i berücksichtigt werden können. Denn dadurch könnte das System trotz erfolgreichem, positivem Robustheitstest infolge versteckter nichtlinearer Rückführungen instabil werden. Wie aber in Kapitel 4 diskutiert wurde, kann gerade dieses Defizit durch eine Analyse innerhalb der GBL-Familie entkräftet werden, so dass auch im zeitvarianten Fall sehr zuverlässige Tendenzaussagen möglich sind. Die Abbildung der nichtlinearen Schwankungen der Reglerverstärkungen als fiktive Unsicherheiten ist deshalb eine große Stärke der GBL-Darstellung bzw. GBL-Analyse.

Die Trimpunktunsicherheit der masseabhängigen Reglerparameter $\bar{K}_i(m_C)$ und $dK_i(m_C)$ kann mit Hilfe der rationalen Funktionen

$$\begin{aligned}\bar{K}_i(m_C) &= \bar{K}_i(\delta_{TP}) = \frac{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} \delta_{TP}}{1 + \lambda_{3,i} \delta_{TP}} := \mathbf{A}_i(\delta_{TP}) \\ dK_i(m_C) &= dK_i(\delta_{TP}) = \frac{\nu_{1,i} + \nu_{2,i} \delta_{TP}}{1 + \nu_{3,i} \delta_{TP}} := \mathbf{N}_i(\delta_{TP})\end{aligned}\tag{5-34}$$

mit den frei wählbaren Koeffizienten $\lambda_{1/2/3,i}$ bzw. $\nu_{1/2/3,i}$ modelliert werden. Dabei wird $\mathbf{N}_i(\delta_{TP})$ nur aus Gründen der Übersichtlichkeit eingeführt, die folgenden Ausführungen beschränken sich auf $\mathbf{A}_i(\delta_{TP})$. Die rationale Funktionalität hat zum einen den Vorteil, dass damit bereits sehr viele Abhängigkeiten in praktischen Anwendungen erfasst werden können (weit mehr als durch ein Polynom 1. Ordnung). Zum anderen beschränkt aber der einfache Ansatz die Komplexität der Unsicherheitsmodellierung: tatsächlich wird pro eingebrachtem Parameter $\alpha(\delta_{TP})$ die Dimension der Unsicherheitsmatrix um nur 1 erhöht, was sehr wichtig im Hinblick auf die numerische Stabilität und Genauigkeit für die μ -Analyse ist. Zum Vergleich erhöht sich die Dimension der Unsicherheitsmatrix bei einem Polynomansatz 2. Ordnung für $\alpha(\delta_{TP})$ um 2 (d.h., zwei neue virtuelle Ein-/Ausgänge sind nötig), bei einem Polynom 3. Ordnung um 3 usw.

Die Koeffizienten $\lambda_{1/2/3,i}$ (bzw. $\nu_{1/2/3,i}$ analog) der in (5-34) eingeführten rationalen Funktionen lassen sich berechnen, indem man ein Regressionsverfahren auf die diskreten Trimpunktwerte $\bar{K}_i(\delta_{TP}^i)$ entlang des Trimbereichs anwendet. Ziel des Verfahrens ist die Minimierung des relativen quadratischen Fehlers

$$\mathcal{E}_{K_i} = \sum_{k=1}^{n_T} \left(\frac{\bar{K}_{ik} - \hat{K}_{ik}}{\bar{K}_{ik}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n_T} \left(1 - \frac{\lambda_{1,ik} + \lambda_{2,ik} \delta_{TP}^i}{1 + \lambda_{3,ik} \delta_{TP}^i} \frac{1}{\bar{K}_{ik}} \right)^2, \quad n_T = 5\tag{5-35}$$

zwischen den tatsächlichen und den approximierten Werten für die fünf Trimpunkte, s. auch [Herr06] und [Löfb98]. Rechnerisch kann dieses LMS-Problem (LMS = Least Mean Square) über (5-36) gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1,i} \\ \lambda_{2,i} \\ \lambda_{3,i} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_{\delta,i}^T \mathbf{A}_{\delta,i} \right)^{-1} \mathbf{A}_{\delta,i}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n_T \times 1}, \quad \mathbf{A}_{\delta,i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{K}_{i1}} & \frac{\delta_{TP}^1}{\bar{K}_{i1}} & -\delta_{TP}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\bar{K}_{inT}} & \frac{\delta_{TP}^{nT}}{\bar{K}_{inT}} & -\delta_{TP}^{nT} \end{bmatrix}_{n_T \times 3}, \quad n_T := 5 \quad (5-36)$$

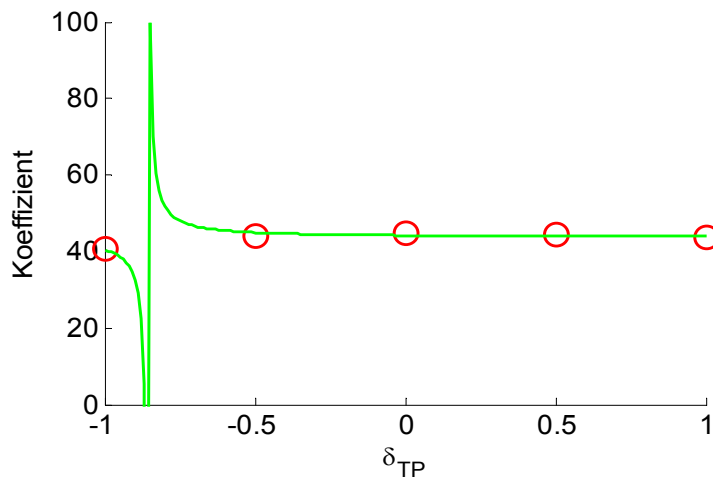


Abbildung 5-12: Trimpunkt-Approximation mit Nennernullstelle

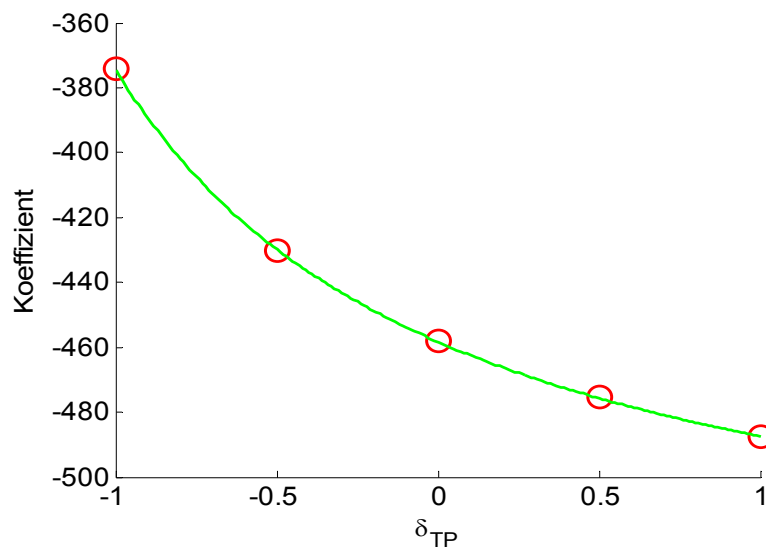


Abbildung 5-13: Rationale Trimpunkt-Approximation (vergrößert)

In Abbildung 5-13 und Abbildung 5-14 wird die Approximation der Reglerkoeffizienten für den Reglerentwurf (RS) aus Kapitel 5.7 gezeigt. Dabei ergaben sich zwei Fälle, für die eine sinnvolle Approximation durch rationale Funktionen nicht möglich war, da die Trimpunktwerte zu nahe beieinander lagen und zu unsystematisch gestreut waren. Abbildung 5-12 zeigt ein solches Beispiel für $dK_2(\delta_{TP})$, in dessen rationaler Approximation sich eine Nennernullstelle innerhalb des Trimpunktbereichs befindet.

Das Problem konnte umgangen werden, indem für $\lambda_{1,2}$ der Mittelwert der fünf Trimpunktwerte, für $\lambda_{2,2} = \lambda_{3,2} = 0$ angesetzt wurde. Das Ergebnis ist in Abbildung 5-14 dargestellt, zusammen mit den Approximationen der restlichen Reglerkoeffizienten (jeweils links, rechts): \bar{K}_2, \bar{K}_3 (Reihe 1); \bar{K}_4, \bar{K}_5 (Reihe 2); \bar{K}_6, dK_1 (Reihe 3); dK_2, dK_3 (Reihe 4); dK_4, dK_6 (Reihe 5). Der Verlauf von \bar{K}_1 wird explizit in Abbildung 5-13 vergrößert gezeigt, wohingegen der Verlauf von dK_5 nicht eingefügt wurde, da hier alle Trimpunktwerte Null sind und damit schlicht $\lambda_{1,5} = 0$ gilt. Insgesamt ist der Approximationsfehler für alle Kurven als sehr gering zu bezeichnen, weshalb er als durch die Aktorunsicherheit abgedeckt betrachtet wird.

Um den variablen Faktor $1/m_c$ in der 2. Zustandsgleichung des Streckenmodells durch eine Unsicherheit abzudecken, würde für sich (wie oben erwähnt) eine einfache parametrische Unsicherheit genügen. Da diese aber als Sonderfall der Trimpunkt-Unsicherheit definiert werden kann, wird folgende Modellierung gewählt:

$$\frac{1}{m_c} = \frac{1}{\bar{m}_c(1 + \eta_{m_c} \delta_{TP})} = \frac{\lambda_{1,m} + \lambda_{2,m} \delta_{TP}}{1 + \lambda_{3,m} \delta_{TP}} \quad (5-37)$$

mit $\lambda_{1,m} = \frac{1}{\bar{m}_c}$, $\lambda_{2,m} = 0$, $\lambda_{3,m} = \eta_{m_c}$, $\bar{m}_c = 120$, $\eta_{m_c} = 0,33$.

Im Hinblick auf die μ -Analyse von Systemen mit Trimpunktunsicherheit muss eine wichtige Eigenschaft herausgehoben werden: obwohl der Wert von μ ein direktes Maß dafür darstellt, um welchen Faktor die modellierten Unsicherheiten noch erhöht werden können bzw. erniedrigt werden müssen, um an die Stabilitätsgrenze zu gelangen (s. Kapitel 3.6), verliert dieses Maß bei Vorhandensein von Trimpunktunsicherheiten an qualitativer Aussagekraft. Denn letztere ergeben meist nur für den gewünschten Trimpunktbereich sinnvolle Werte. Außerhalb dieses Bereichs – also bei einer Extrapolation von δ_{TP} über ± 1 hinaus – sind die Auswirkungen der Trimpunktunsicherheit auf das System nur schwer vorhersagbar und ohne praktische Bedeutung. Dies muss später beim Betrachten der strukturierten Singulärwertverläufe berücksichtigt werden.

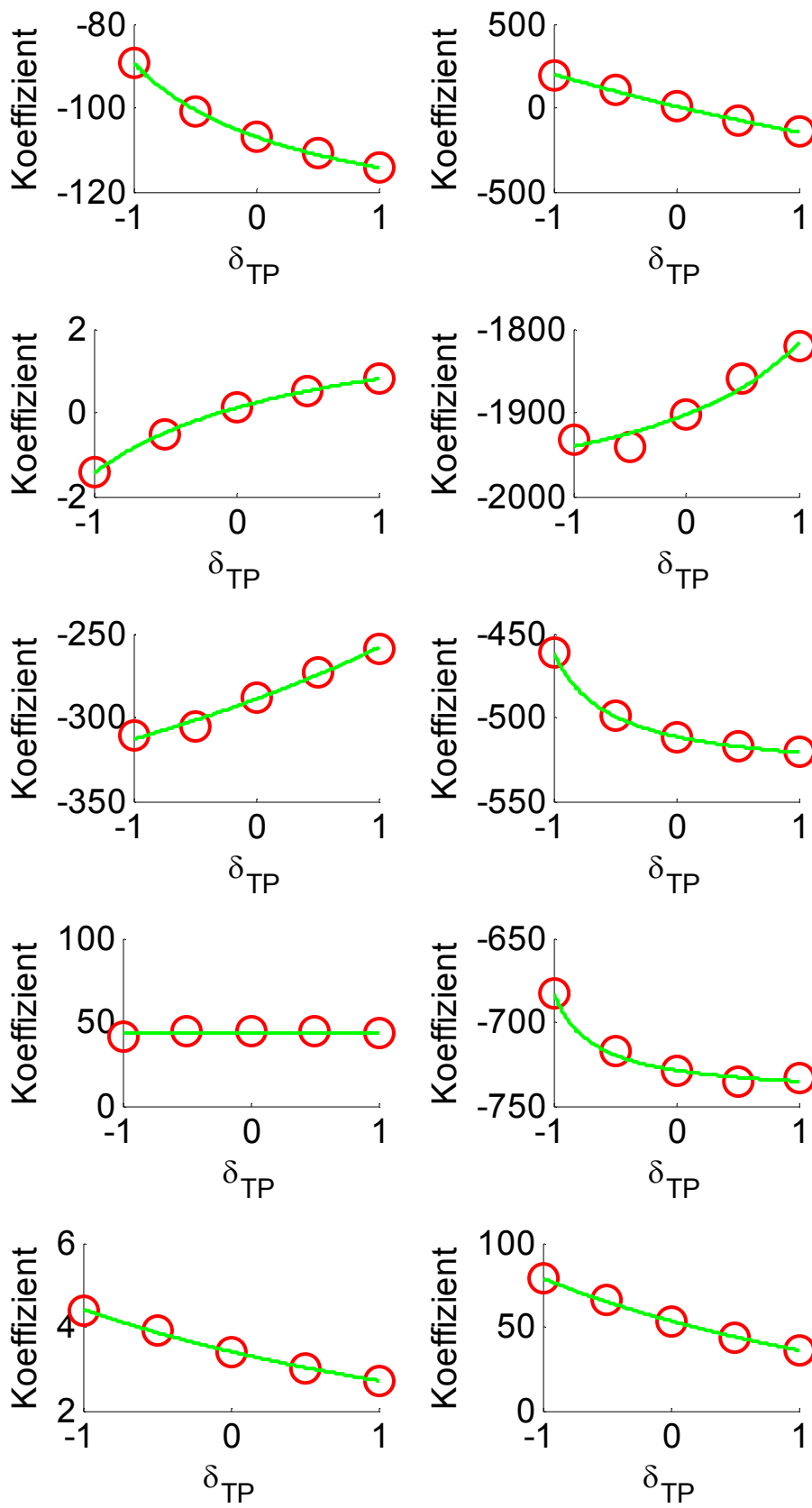


Abbildung 5-14: Trimpunkt-Approximationen des Reglers (RS)

5.5.3 Frequenzgewichte und LFR-Generierung

Für die Referenzregleriteration in Kapitel 5.6 werden Frequenzgewichte benötigt, die sich für eine robuste Reglerauslegung eignen. Hierzu werden in Anlehnung an Kapitel 3.4.4 Gewichtsfunktionen $W_2(s)$ für die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ und $W_1(s)$ für die Störübertragungsfunktion $S(s)$ eingeführt. Betrachtet werden dabei „eingefrorene“ Linearisierungen des Viertelfahrzeugmodells (2-9) an bestimmten Referenzpunkten, für welche klassische und GBL-Linearisierung theoretisch identisch sind; nähere Erläuterungen hierzu folgen zu Beginn des Kapitels 5.6. Um einerseits die SISO-Form zu bewahren und andererseits eine Gewichtung der Stellgröße u zu ermöglichen, wird der Regelkreis derart umdefiniert, dass u zur Ausgangsgröße wird. Damit beschreibt $T(s)$ die Übertragung „von u auf sich selbst“ und $S(s)$ die von der Straßenstörgröße \dot{x}_s auf u . Da dieser umgeformte Regelkreis bzgl. des Störeingriffs nicht in Standardform vorliegt, ist $S(s)$ als bereits gewichtete Störübertragungsfunktion zu verstehen. Dies stellt aber kein Problem dar, weil selbige ja ohnehin noch durch W_1 gewichtet wird und damit nicht in Reinform in der weiteren Berechnung verwendet wird. Als $W_2(s)$, welches die Modellunsicherheiten gewichtet, wird die um 20 % erweiterte Aktorunsicherheit $W_{Akt,+20}(s)$ definiert, wie sie in Kapitel 5.5.1 eingeführt wurde.

$$W_2(s) = W_{Akt,+20} = \frac{s + \omega_E}{\frac{1}{F_{up}}s + \frac{1}{F_{low}}\omega_E} \quad \text{mit } \omega_E = 25 \cdot 2 \cdot \pi, \quad F_{low} = 0,38, \quad F_{up} = 2,6. \quad (5-38)$$

$W_1(s) = W_{xs}(s) / W_u(s)$ hingegen dient als Performanzgewicht und beschreibt eine gewünschte maximale Übertragung von Straßenanregung \dot{x}_s auf u , wobei mittels W_{xs} und W_u die erwartete Störanregung bzw. die erwünschte Maximalstellgröße über der Frequenz definiert werden. Sinnvolle Werte werden in (5-39) gegeben; W_{xs} soll hierbei für sehr kleine Frequenzen (nicht betrachtete topografische Steigungen) und sehr hohe Frequenzen (über den bereits bei der inneren Schleife verwendeten 10 rad) kleine Werte annehmen. In grober Anlehnung an Simulationen (s. z.B. das Spektrum von x_s in Abbildung 2-8) wurde die Verstärkung so gewählt, dass die erwartete Geschwindigkeit \dot{x}_s bei 10 rad einen Wert von 0,15 m/s besitzt und danach mit 20 dB pro Dekade abfällt. Das maximal mögliche Stellsignal wird durch W_u mit 10 Volt beschränkt.

$$W_1 = \frac{W_{xs}}{W_u} \quad \text{mit } W_{xs} = \frac{0,03s}{(0,1s + 1)^2}, \quad W_u = 10. \quad (5-39)$$

5.5.4 LFR-Erstellung für Strecke, Regler und Regelkreis

Um eine geeignete Form für die μ -Analyse herzustellen, muss das mit parametrischen, fiktiven, dynamischen und Trimpunktunsicherheiten beaufschlagte Modell in eine LFR transformiert werden. Wie in Kapitel 3.3 beschrieben wurde, ist dafür die Einführung virtueller Ein- und Ausgänge notwendig, die eine Separation von nominellen Werten bzw. bekannten Parametern und unbekanntem Unsicherheitsvariablen ermöglichen. Im Folgenden wird ein kompakter Überblick über die LFR-Generierung für die in den Kapiteln 5.5.1 und 5.5.2 definierten GBL-Unsicherheiten des Viertelfahrzeugmodells aus Kapitel 2.2 bzw. 5.3 gegeben. Hierzu wird die (auf den nominellen Werten aufsetzende) unsichere GB-Linearisierung des Modells benutzt, wobei der Regler gemäß (5-40) als Ausgangsmatrix des „offenen Kreises“ definiert wird. Damit wird die ungewichtete Stellgröße \tilde{u} zur Ausgangsgröße – ungewichtet deshalb, weil sie noch nicht mit der dynamischen Aktor-Eingangsunsicherheit perturbiert wurde. Die Störgrößen werden hierbei vernachlässigt, da sie für den angestrebten robusten GBL-Stabilitätstest nicht benötigt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \tilde{u} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \underset{0}{\mathbf{D}}u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5-40)$$

In (5-41) werden die unsicheren Matrizen aus (5-40) elementweise aufgeschlüsselt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & & \\ \frac{-c_c(\delta_{cC})}{m_c(\delta_{TP})} & \frac{-d_c(\delta_{dC})}{m_c(\delta_{TP})} & 0 & \frac{d_c(\delta_{dC})}{m_c(\delta_{TP})} & 0 & \frac{C_{Akt,2}}{m_c(\delta_{TP})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_c(\delta_{cC})}{m_R} & \frac{d_c(\delta_{dC})}{m_R} & \frac{-c_w(\delta_{cW})}{m_R} & \frac{-d_c(\delta_{dC})}{m_R} & 0 & \frac{-C_{Akt,2}}{m_R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{Akt,11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{Akt,21} & A_{Akt,22} \end{pmatrix} \quad (5-41)$$

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ B_{Akt,1} \ 0]^T$$

$$\mathbf{C} = -[K_1(\delta_{K1}, \delta_{TP}) \ K_2(\delta_{K2}, \delta_{TP}) \ K_3(\delta_{K3}, \delta_{TP}) \ K_4(\delta_{K4}, \delta_{TP}) \ K_5(\delta_{K5}, \delta_{TP}) \ K_6(\delta_{K6}, \delta_{TP})]$$

Zuerst werden nun die virtuellen Ein- und Ausgänge für die Ausgangsmatrix \mathbf{C} definiert, wobei nochmals daran erinnert werden soll, dass die Bestimmung selbiger nicht eindeutig ist, sondern vielmehr beliebig viele Möglichkeiten existieren. Die Ausgangsgröße lässt sich als Summe von sechs Anteilen

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^6 \tilde{u}_i = \sum_{i=1}^6 K_i(\delta_{K_i}, \delta_{TP}) x_i \quad \text{mit} \quad K_i(\delta_{K_i}, \delta_{TP}) = \bar{K}_i(\delta_{TP}) + dK_i(\delta_{TP}) \delta_{K_i} \quad (5-42)$$

darstellen, wobei die Abhängigkeit von der Trimpunktunsicherheit in Kapitel 5.5.2 durch rationale Funktionen mit den Koeffizienten $\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \lambda_{3,i}$ für $\bar{K}_i(\delta_{TP})$ bzw. $v_{1,i}, v_{2,i}, v_{3,i}$ für $dK_i(\delta_{TP})$ approximiert wurde. Am Beispiel von $\bar{K}_i(\delta_{TP})$ wird in (5-43) die Einführung der virtuellen Signale für die Trimpunktunsicherheit erklärt. Die Grundlagen hierzu sowie die Definition der virtuellen Signale für parametrische (multiplikative) Unsicherheiten wie δ_{K_i} können in Kapitel 3.3 nachgelesen werden.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,\bar{K}} &:= \bar{K}_i(\delta_{TP}) x_i = \frac{\lambda_{1,i} + \lambda_{2,i} \delta_{TP}}{1 + \lambda_{3,i} \delta_{TP}} x_i = \frac{\lambda_{1,i} + \lambda_{1,i} \lambda_{3,i} \delta_{TP} - \lambda_{1,i} \lambda_{3,i} \delta_{TP} + \lambda_{2,i} \delta_{TP}}{1 + \lambda_{3,i} \delta_{TP}} x_i \\ &= \lambda_{1,i} x_i + \underbrace{\frac{\lambda_{4,i} x_i \delta_{TP}}{1 + \lambda_{3,i} \delta_{TP}}}_{:= w_i^{C1}} \quad \text{mit} \quad \lambda_{4,i} = \lambda_{2,i} - \lambda_{1,i} \lambda_{3,i} \end{aligned} \quad (5-43)$$

$$q_i^{C1} = \frac{w_i^{C1}}{\delta_{TP}} = \frac{\lambda_{4,i} x_i}{1 + \lambda_{3,i} \delta_{TP}} \Rightarrow q_i^{C1} + \lambda_{3,i} \underbrace{q_i^{C1} \delta_{TP}}_{w_i^{C1}} = \lambda_{4,i} x_i \Rightarrow q_i^{C1} = \lambda_{4,i} x_i - \lambda_{3,i} w_i^{C1}$$

Wird dasselbe Vorgehen auf $dK_i(\delta_{TP})$ angewandt und auch δ_{K_i} durch virtuelle Ein- und Ausgänge aus den Gleichungen eliminiert, so ergibt sich das erweiterte System (5-44) für die Ausgangsgleichung, wobei der Index i die Werte 1 bis 6 annehmen kann. (Das virtuelle Eingangssignal w_i^{C2} taucht in der Ausgangsgleichung nicht auf, da es durch die Substitution $w_i^{C2} \delta_{K_i} = w_i^{C4}$ ersetzt wird.)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \lambda_{1,i} x_i + \lambda_{4,i} w_i^{C1} + v_{1,i} w_i^{C3} + v_{4,i} w_i^{C4} \\ \text{mit} \quad q_i^{C1} &= \frac{w_i^{C1}}{\delta_{TP}} = x_i - \lambda_{3,i} w_i^{C1} \\ q_i^{C2} &= \frac{w_i^{C2}}{\delta_{TP}} = x_i - v_{3,i} w_i^{C2} \\ q_i^{C3} &= \frac{w_i^{C3}}{\delta_{K_i}} = x_i \\ q_i^{C4} &= \frac{w_i^{C4}}{\delta_{K_i}} = w_i^{C2} \end{aligned} \quad (5-44)$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Dynamikmatrix durch virtuelle Signale erweitern, wobei bei der Berechnung in (5-45) vorerst alle Elemente der Matrix wie jene unsicheren Elemente der 2. Reihe behandelt werden, welche sowohl von parametrischen Unsicherheiten δ_{Aik} als auch von der Trimpunktunsicherheit δ_{TP} abhängig sind. Die Koeffizienten der zugehörigen rationalen Funktionen für die m_C -Abhängigkeit werden hierbei zu $\varsigma_{1,ik}, \varsigma_{2,ik}, \varsigma_{3,ik}$ bzw. $\varsigma_{4,ik} = \varsigma_{2,ik} - \varsigma_{1,ik}\varsigma_{3,ik}$ benannt.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \mathbf{A} &= [a_{ik}]_{6 \times 6} \quad \text{und} \quad \dot{x}_i = \sum_{k=1}^6 \dot{x}_{ik} = \sum_{k=1}^6 a_{ik}(\delta_{TP}, \delta_{Aik}) x_k \\ a_{ik}(\delta_{TP}, \delta_{Aik}) &:= \bar{a}_{ik} (1 + \eta_{ik} \delta_{Aik}) \frac{\varsigma_{1,ik} + \varsigma_{2,ik} \delta_{TP}}{1 + \varsigma_{3,ik} \delta_{TP}} \\ \Rightarrow \quad \dot{x}_{ik} &= \varsigma_{1,ik} x_k + \varsigma_{4,ik} w_{ik}^{A1} + \bar{a}_{ik} \eta_{ik} \varsigma_{1,ik} w_{ik}^{A2} + \bar{a}_{ik} \eta_{ik} \varsigma_{4,ik} w_{ik}^{A3} \\ \text{mit} \quad q_{ik}^{A1} &= \frac{w_{ik}^{A1}}{\delta_{TP}} = x_k - \varsigma_{3,ik} w_{ik}^{A1} \\ q_{ik}^{A2} &= \frac{w_{ik}^{A2}}{\delta_{Aik}} = x_k \\ q_{ik}^{A3} &= \frac{w_{ik}^{A3}}{\delta_{Aik}} = w_{ik}^{A1} \end{aligned} \tag{5-45}$$

Da durch die Modellierung in (5-45) mehr Unsicherheiten abgebildet wurden als tatsächlich vorhanden sind (da bei Weitem nicht alle Elemente der Dynamikmatrix \mathbf{A} von δ_{TP} oder δ_{Aik} abhängig sind), werden durch (5-46) alle überflüssigen Unsicherheiten wieder aus den Gleichungen eliminiert (so wie beim Regler auch δ_{K5} , da $dK_5 = 0$ modelliert wurde; s. hierzu Kapitel 5.7.3).

$$\begin{aligned} \eta_{ik} = 0 &\Leftrightarrow \text{außer } ik \in \{21; 22; 24; 41; 43\}: \eta_{21/41} = \eta_{cC}, \eta_{22/24} = \eta_{dC}, \eta_{43} = \eta_{cW} \\ \varsigma_{1,ik} = 1, \varsigma_{2,ik} = \varsigma_{3,ik} = 0 &\Leftrightarrow \text{außer } i = 2, k \in \{1; 2; 4; 6\}: \varsigma_{1/2/3ik} = \lambda_{1/2/3,m} \end{aligned} \tag{5-46}$$

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben, können die erweiterten Zustandsraumgleichungen aus (5-44) und (5-45) in einer Systemmatrix zusammengefasst und so umgeordnet werden, dass solche virtuelle Ein-/Ausgänge aufeinander folgen, welche sich auf dieselbe Unsicherheitsvariable beziehen. Wird die Systemmatrix in eine Übertragungsfunktion $\mathbf{P}(s)$ transformiert, so erhält man als Ergebnis eine $\mathbf{P} - \mathbf{A}_p$ -LFR, wie sie in Abbildung 5-15 gezeigt wird. (Da es für die restliche Arbeit nicht relevant ist, soll die genaue Matrixstruktur aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht weiter beschrieben werden). Hierbei werden alle virtuellen Eingänge

zum Vektor w und alle virtuellen Ausgänge zu z zusammengefasst. Die Unsicherheitsmatrix Δ_P der Dimension 22×22 besitzt eine Diagonalstruktur mit den Unsicherheitsvariablen δ_{cC} , δ_{dC} , δ_{cR} , $\delta_{K1/2/3/4/6}$ sowie δ_{TP} (teils mehrfach) auf der Diagonalen.

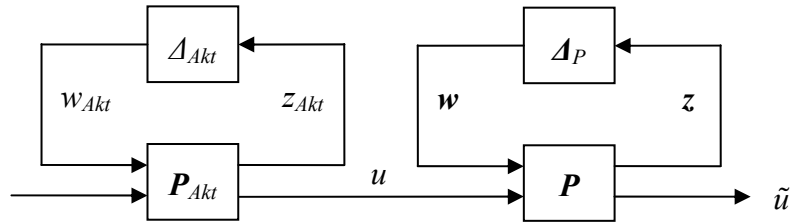


Abbildung 5-15: Upper LFRs für das erweiterte Viertelfahrzeugmodell

$$P_{Akt}(s) = \begin{bmatrix} 0 & W_{Akt}(s) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_{Akt}\|_{\infty} \leq 1 \quad (5-47)$$

Um den unsicheren Regelkreis zu vervollständigen, wird \tilde{u} über die dynamische Aktorunsicherheit $(1 + W_{Akt}\Delta_{Akt})$ auf u rückgeführt. Rechnerisch lässt sich dies bewerkstelligen, indem

- ✦ zuerst die Aktorunsicherheit gemäß (5-47) und Abbildung 5-15 als P_{Akt} - Δ_{Akt} -LFR dargestellt wird,
- ✦ eine P_{OK} - Δ_{OK} -Gesamt-LFR des offenen Kreises durch Serienschaltung der beiden LFRs in Abbildung 5-15 über (3-21) berechnet wird,
- ✦ der geschlossene Kreis in Form einer M - Δ_M -LFR (s. Abbildung 5-16) mittels einer Lower-LFT-Operation aus Kapitel 3.3.2 durch (5-48) ermittelt wird.

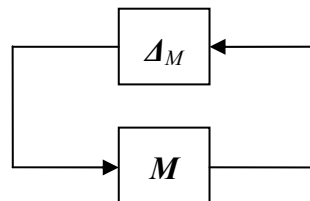


Abbildung 5-16: LFR des unsicheren Viertelfahrzeug-Regelkreises

$$M(s) = F_l(P_{OK}, 1), \quad \Delta_M = \begin{bmatrix} \Delta_{Akt} & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}_{23 \times 23} \quad (5-48)$$

5.6 Referenzregleriteration

Die Referenzregler werden für die GB-Linearisierung (5-25) des Viertelfahrzeugmodells (2-9) in speziellen, ausgewählten Arbeitspunkten \mathbf{x}_{ref} entworfen, welche hierbei als „eingefroren“ betrachtet werden (als gelte $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{ref}) := 0$), so dass die direkte, klassische Linearisierung des Viertelfahrzeugs in diesen „Frozen Time“-Punkten theoretisch dieselbe Dynamik besitzt wie das jeweilige lokale GBL-System. Die von den Referenzreglern mittels GBD abgeleiteten nichtlinearen Reglerverstärkungen sollen später derart entworfen werden, dass sie jenseits dieser Arbeitspunkte bzw. um diese herum eine Zeitableitung von (ungefähr) 0 besitzen. Dadurch gewinnt der verwendete „Frozen Time“-Ansatz, welcher eine näherungsweise Abbildung der Performanzziele für das Originalmodell auf seine GBL-Darstellung ermöglicht, an Berechtigung. Ein direkter Entwurf innerhalb der GBD-Plattform ohne diesen „Umweg“ über die Referenzregler wäre zu komplex und intransparent, was bereits in Kapitel 4.3 diskutiert wurde. Außerdem lehnt sich der Entwurf dadurch näher an bekannte Regelungsverfahren an und ist damit für den Anwender leichter nachvollziehbar. In [Herr10] wurde der gesamte Referenzregler- sowie nichtlineare GBD-Entwurf für den ROPE-Ansatz (RK) bereits einmal durchgeführt.

5.6.1 Gewichte für den LQR-Entwurf

Zuerst wird die Idee der Referenzregleriteration am aggressiven, komfortorientierten Regelgesetz (RK) präsentiert. Da bei diesem die Minimierung der Chassisbeschleunigung im Vordergrund steht, wird hier auf eine strikte Einhaltung des maximalen Aufbaufederhubs H_{max} aus (1-5) verzichtet (zu Gunsten von alternativen aktiven Federungskonzepten mit höherem freien Federweg). Für (RK) wird später auch keine μ -Analyse durchgeführt; der Ansatz soll nur aufzeigen, was theoretisch durch einen aggressiven GBL-Entwurf hinsichtlich Komfortoptimierung möglich ist.

Ziel ist es, für ausgewählte Arbeitspunkte verschiedene lineare, komfort- und sicherheitsorientierte Referenzregler mittels der LQR-Methodik zu berechnen (zum LQR s. z.B. [Skog05]). Die sicherheitsorientierten Referenzregler (:= SOR) sollen für solche Situationen ausgelegt werden, in denen hohe Anregungen durch die Straße vorliegen, welche zu großen Werten der dynamischen Radlast und des Aufbaufederhubs führen können. Hingegen sollen die komfortorientierten Referenzregler (:= KOR) vor allem für Situationen kleiner Anregung geeignet sein, wenn der Fahrer ein möglichst vibrationsarmes Fahrverhalten erwartet. Tendenziell kann in Anlehnung an Kapitel 1.1.2 gefolgert werden, dass die SOR eine „harte“ und die KOR eine „weiche“ Auslegung der Radaufhängung anstreben sollten, wobei aber die Komplexität der Gütemaße (Kapitel 1.1.3) sowie die fahrzeugabhängigen Kopplungen zwischen den einzelnen Zustandsvariablen eine intuitive Vorgabe von LQR-Gewichten nahezu unmöglich machen. Vielmehr muss hier eine numerische bzw. simulative

Optimierung erfolgen, um der gewünschten Regelgüte für die einzelnen Referenzregler möglichst nahe zu kommen.

Als Erstes wurden hierfür mittels Simulationen am passiven Viertelfahrzeugmodell typische Zustandsraumpunkte frei ermittelt, die das System während einer „unruhigen“ Straßenfahrt (Profil aus Abbildung 2-7 mit Faktor 1,5 skaliert) regelmäßig erreicht und welche deshalb als Referenz zur Auslegung des SORs dienen können. Zur Absicherung wurden auch Simulationen mit einem linearen LQ-Regler \mathbf{K}_{LQR} durchgeführt, der im Rahmen des Prüfstandsbaus, s. [Koch10], als Kompromisslösung zwischen Sicherheit und Komfort optimiert wurde, wobei hier speziell der Aktoreinsatz hoch gewichtet wurde. Die Werte der zugehörigen Reglermatrix lauten

$$\mathbf{K}_{LQR} = [-0.0140 \quad 0.0319 \quad -0.3684 \quad 0.0090 \quad 2.6456 \quad 0.7615] \cdot 1000. \quad (5-49)$$

Als Referenzpunkte für die SOR konnten damit – ohne Anspruch auf Optimalität – die Zustandsraumpunkte

$$\begin{aligned} x_{1,ref} &= 0,05, & x_{2,ref} &= 0,2, \\ x_{3,ref} &= \pm 0,006, & x_{4,ref} &= 0,8, \\ x_{5,ref} &= 0,02, & x_{6,ref} &= 0,02 \end{aligned} \quad (5-50)$$

festgelegt werden. Da im verwendeten Modell nur die Reifenfederkennung einen nichtlinearen Verlauf besitzt, ist hier für den Referenzreglerentwurf auch nur $x_{3,ref}$ von direkter Bedeutung. Prinzipiell könnten aber auch, wie in den vorigen Kapiteln erwähnt, der Aufbaufederung und -dämpfung nichtlineare Verläufe gegeben werden. In dieser Arbeit sollen demnach drei verschiedene Referenzregler bestimmt werden: KOR für die Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $SOR+$ für $+x_{3,ref}$ und $SOR-$ für $-x_{3,ref}$.

Als Nächstes wurden die Zustandsgewichte für den LQR-Entwurf der verschiedenen Referenzregler definiert. Die Gewichtung des Stelleinsatzes wurde vorerst auf $R_{RK} = 0,1$ gesetzt, d.h. die Höhe der Stellgröße sollte anfangs fast vernachlässigt werden. Für die Ermittlung der einzelnen Gewichte q_1 bis q_6 wurden dann mittels der Matlab Optimization Toolbox grobe Richtwerte ermittelt, indem über einen automatisierten Simulationsaufruf des geregelten nichtlinearen Modells eine vordefinierte Kostenfunktion minimiert wurde. Die Kostenfunktion war dabei eine Summe aus den Komfort- und Sicherheitsgütemaßen (1-2) und (1-3) sowie des maximal aufgetretenen Aufbaufederhubs $\max_t(x_1(t))$, welche jeweils über geeignete, frei angesetzte Faktoren gewichtet wurden. Beim (RK)-Entwurf stand die Minimierung des Komfortgewichts (1-2) im Vordergrund. Da die Definition dieser Faktoren

allerdings selbst ein Optimierungsproblem darstellt und die gewonnenen Regler noch nicht vollends zufriedenstellend waren, wurden die endgültigen Gewichte q_i – aufbauend auf den bisherigen Ergebnissen und wiederum ohne Anspruch auf Optimalität – durch ausführliche Simulationen am nichtlinearen Viertelfahrzeugmodell festgelegt. (Gleiches wurde später für die anderen Regleransätze (RS) und (RK) durchgeführt.) Als Ergebnis für den Ansatz (RK) ergaben sich damit

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{RK,KOR} &= [q_{1,RK,KOR} \dots q_{6,RK,KOR}]^T = [10^6 \ 10^7 \ 10^6 \ 10^4 \ 10^2 \ 10^2]^T, \\ \mathbf{Q}_{RK,SOR} &= [q_{1,RK,SOR} \dots q_{6,RK,SOR}]^T = [5 \cdot 10^5 \ 5 \cdot 10^6 \ 10^9 \ 10^4 \ 10^2 \ 10^2]^T. \end{aligned} \quad (5-51)$$

Mit diesen Gewichten lassen sich nun mittels numerischer Methoden, z.B. in Matlab, die entsprechenden LQ-Regler berechnen, welche folgendes Gütemaß minimieren:

$$J_{LQR,RK,i} = \int_{t=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{RK,i} \mathbf{x} + R_{RK} u^2). \quad (5-52)$$

5.6.2 Iterativer Robustheitstest mit dem maximalen Singulärwert

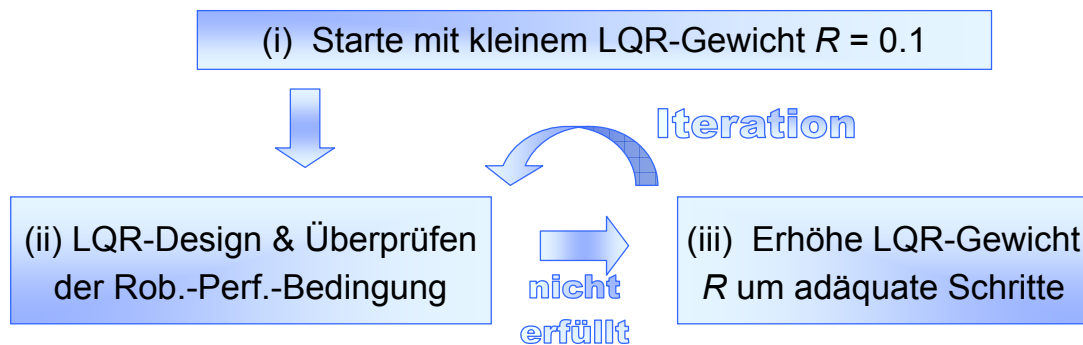


Abbildung 5-17: Referenzregleriteration

Um den Referenzreglerentwurf einer Robustheitsanalyse zu unterziehen, werden die „eingefrorenen“ Modelle für die drei Referenzpunkte jeweils mit den in Kapitel 5.5.3 eingeführten Frequenzgewichten beaufschlagt. Die Idee hinter der Referenzregleriteration besteht nun darin, das LQR-Gewicht R_{RK} so weit zu erhöhen, bis der unsichere Regelkreis im jeweiligen Referenzpunkt die gewünschten Robustheitsforderungen erfüllt. Dieses Vorgehen genügt zwar wiederum keiner Optimalitätsforderung und basiert auf keiner analytischen

Berechnung, erweist sich aber als sehr gute Kompromisslösung, wenn man die Komplexität der Kostenfunktionen und die zahlreichen Unsicherheiten bedenkt, die dem System innewohnen. Weiterhin wird dadurch sichergestellt, dass der Referenzreglerentwurf simpel und transparent bleibt. Das Prinzip der Referenzregleriteration wird in Abbildung 5-17 zusammengefasst.

Die dort erwähnten Bedingungen zur robusten Performanz, welche als Abbruchkriterium für die Iteration dienen, basieren auf den Unsicherheits- bzw. Performanzgewichten $W_2 = W_{Akt,+20}$ und $W_1 = W_d / W_u$, s. (5-39). Für die linearisierten Regelkreise, welche mit den gewonnenen Referenzreglern geschlossen werden, lässt sich dann jeweils ein Mixed-Sensitivity-Problem (5-53) gemäß Kapitel 3.4.4 formulieren, wobei $S_{RK,KOR}$, $S_{RK,SOR\pm}$ die zugehörigen Störübertragungsfunktionen von \dot{x}_s auf u (bzw. \ddot{x}_s auf \dot{u}) und $T_{RK,KOR}$, $T_{RK,SOR\pm}$ die entsprechenden Führungsübertragungsfunktionen definieren. Die gezeigte Mixed-Sensitivity-Bedingung ist zwar (um „maximal Faktor $\sqrt{2}$ “) konservativ, garantiert aber robuste Performanz gegen das gewählte Unsicherheitsmodell.

$$\|M_{RK,i}\|_{\infty} \cdot \sqrt{2} = \left[\begin{array}{c} W_1 S_{RK,i} \\ W_2 T_{RK,i} \end{array} \right] \cdot \sqrt{2} = \gamma_{RK,i} \cdot \sqrt{2} \leq 1 \Rightarrow \text{robuste Performanz} \quad (5-53)$$

mit $i \in \{KOR; \text{SOR+}; \text{SOR-}\}$

Die resultierenden Normen der Robustheitstests für das Ausgangsgewicht $R_{RK} = 0,1$, die in (5-54) aufgelistet werden, erfüllen nicht die Forderungen an robuste Performanz, da die Werte größer als 1 sind.

$$\gamma_{RK,KOR} \cdot \sqrt{2} = 2,4346, \quad \gamma_{RK,SOR+} \cdot \sqrt{2} = 2,2940, \quad \gamma_{RK,SOR-} \cdot \sqrt{2} = 2,2930 \quad (5-54)$$

Deshalb wurden gemäß der Referenzregleriteration dem Gewicht R_{RK} sukzessive die Einträge des Vektors $R_{RK} \in \{0,1; 0,5; 1; 2; 5; 10; 15; 20\}$ zugewiesen, bis schließlich für $R_{RK} = 20$ die Werte

$$\gamma_{RK,KOR} \cdot \sqrt{2} = 0,9522, \quad \gamma_{RK,SOR+} \cdot \sqrt{2} = 0,9812, \quad \gamma_{RK,SOR-} \cdot \sqrt{2} = 0,9778 \quad (5-55)$$

erreicht wurden, welche jeweils robuste Performanz garantieren. Die entsprechenden Referenzregler (5-56) dienen als Basis für den folgenden nichtlinearen GBL-Reglerentwurf.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{RK,KOR} &= [-0,3236 \quad 0,6655 \quad -2,3220 \quad 0,0238 \quad 3,8088 \quad 1,4990] \cdot 1000 \\
\mathbf{K}_{RK,SOR+} &= [-0,3797 \quad 0,4606 \quad -6,2086 \quad -0,0332 \quad 3,7576 \quad 1,4614] \cdot 1000 \\
\mathbf{K}_{RK,SOR-} &= [-0,3774 \quad 0,4596 \quad -5,3973 \quad -0,0311 \quad 3,7441 \quad 1,4515] \cdot 1000
\end{aligned} \tag{5-56}$$

Für die alternativen Entwürfe (RS = sicherheitsorientiert) und (RR = robustheitsorientiert) werden die LQR-Gewichte zur Erhöhung von Sicherheit bzw. Robustheit angepasst. Bei (RS) wird dabei primär auf eine Senkung des maximal auftretenden Aufbaufederhubs sowie sekundär auf eine Reduzierung der dynamischen Radlastschwankung geachtet. (RR) gewichtet aufsetzend auf (RS) den Stellgrößeneinsatz nochmals deutlich höher, um eine größere Robustheit gegen die Unsicherheit zu erreichen, welche im Prüfstandsbetrieb durch den bisher nicht explizit berücksichtigten Kalman-Filter (s. Kapitel 6.1) entsteht. Beim Ansatz (RS) ergibt sich im Fall $m_c = 90 \text{ kg}$ ein $\max(\gamma_{RK,i} \cdot \sqrt{2}) = 0,7180$. Das Gewicht R_{RS} wird hierbei als Funktion der Chassismasse definiert, da (RS) der Entwurf ist, welcher mittels der μ -Analyse in Kapitel 5.8 auf robuste Stabilität getestet wird. Die Funktion $R_{RS}(m_c)$ in (5-57) wurde durch Tests so ausgelegt, dass die höchste auftretende Norm $\gamma_{RS,i}(m_c) \cdot \sqrt{2}$, welche bei der kleinstmöglichen modellierten Chassismasse $m_c = 80 \text{ kg}$ auftritt, mit 0,7416 nur ca. 75 % des bei (RK) erlaubten Werts 1 ist. Höhere Massen erlauben bzw. erfordern hierbei einen höheren Aktoreinsatz als kleine Massen. Die berechneten Reglerwerte werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur für die nominelle Masse $m_c = 90 \text{ kg}$ dargestellt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{RS,KOR} &= [1,5 \cdot 10^7 \quad 2,5 \cdot 10^7 \quad 10^7 \quad 5 \cdot 10^3 \quad 10^9 \quad 10^9]^T, \\
\mathbf{Q}_{RS,SOR} &= [4 \cdot 10^8 \quad 10^7 \quad 10^8 \quad 5 \cdot 10^3 \quad 10^9 \quad 10^9]^T, \\
R_{RS} &= 750 + 7500 / (m_c - 60) \quad \rightarrow \text{hier für } m_c = 90: \\
\mathbf{K}_{RS,KOR} &= [-0,0772 \quad 0,1392 \quad -0,8568 \quad 0,0051 \quad 1,9501 \quad 0,3840] \cdot 1000 \\
\mathbf{K}_{RS,SOR+} &= [0,4090 \quad 0,0963 \quad -0,1491 \quad 0,0011 \quad 1,8564 \quad 0,3103] \cdot 1000 \\
\mathbf{K}_{RS,SOR-} &= [0,4080 \quad 0,0959 \quad -0,1771 \quad 0,0007 \quad 1,8636 \quad 0,3130] \cdot 1000
\end{aligned} \tag{5-57}$$

Für den Ansatz (RR), welcher ausschließlich für einen sicheren Test der GBL-Methodik am Prüfstand entworfen wurde, konnten die Werte (5-58) bestimmt werden. Hierbei wurde R_{RR} aus den genannten Gründen der Robustheit um Faktor 15 höher als R_{RS} angesetzt, so dass die maximale Mixed-Sensitivity-Norm mit $\max(\gamma_{RR,i} \cdot \sqrt{2}) = 0,5411$ nur noch ca. 75 % des entsprechenden Werts bei (RS) beträgt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{RR,KOR} &= [1,5 \cdot 10^7 \quad 1,5 \cdot 10^7 \quad 10^7 \quad 5 \cdot 10^3 \quad 10^9 \quad 10^9]^T, \\
\mathbf{Q}_{RR,SOR} &= [3 \cdot 10^8 \quad 10^7 \quad 10^8 \quad 5 \cdot 10^3 \quad 10^9 \quad 10^9]^T, \\
R_{RR} &= 15000 \quad (\text{mit } m_c = 90 \text{ kg}): \\
\mathbf{K}_{RR,KOR} &= [-0,8579 \quad 27,9722 \quad -144,1439 \quad 0,8812 \quad 171,3814 \quad 131,8504] \\
\mathbf{K}_{RR,SOR+} &= [94,1412 \quad 24,5484 \quad -47,7663 \quad 0,3399 \quad 170,1073 \quad 127,0696] \\
\mathbf{K}_{RR,SOR-} &= [93,9727 \quad 24,4391 \quad -56,3154 \quad 0,1993 \quad 170,6776 \quad 128,2719]
\end{aligned} \tag{5-58}$$

Im nächsten Kapitel wird der nichtlineare GBL-Reglerentwurf ROPE auf Basis der Referenzregler für (RK), (RS) und (RR) präsentiert. Für (RS) wird, wie erwähnt, zudem in Kapitel 5.8 eine GBL- μ -Analyse durchgeführt, in der auch eine variable Chassismasse berücksichtigt wird. Kapitel 6.5 erweitert (RR) um einen nichtlinearen Kalman-Filter und testet den Entwurf am realen Prüfstand.

5.7 Nichtlinearer GBL-Reglerentwurf mit lokaler Stabilitätsanalyse

In diesem Kapitel wird die GBL-Analyse aus Kapitel 4.1 verwendet, um aus den entworfenen Referenzreglern ein nichtlineares Stellgesetz abzuleiten. Da der ROPE (referenzreglerorientierter polynomialer Entwurf) ein gewisses Maß an Erfahrung erfordert und nicht in allen Schritten einer analytischen Vorgehensweise genügt, soll die Entwicklung des Regelgesetzes Schritt für Schritt so beschrieben werden, wie sie im Falle des Viertelfahrzeugs stattgefunden hat. Als Erstes soll der komfortorientierte Ansatz (RK) diskutiert werden.

5.7.1 Iteratives ROPE-Prinzip

Aus Veröffentlichungen wie z.B. [Fial02] lässt sich ableiten, dass eine langsame Adaption des Reglers gemäß der Stärke der Straßenanregung bzw. des RMS-Werts der dynamischen Radlast Sinn machen kann, um sowohl Komfort- als auch Sicherheitsziele im Rahmen eines einzelnen Entwurfs zu erfassen. Darauf aufsetzend wird in dieser Arbeit untersucht, ob sich das Prinzip auch im Sinne einer schnellen Adaption des Regelgesetzes in Abhängigkeit von x_3 umsetzen lässt, was deutlich schnellere Reaktionszeiten und eine leichtere Einbindung von „Notfall“-Reglern für kritische x_3 -Werte ermöglichen könnte. Die Stabilität bzw. eine ausreichende Robustheit des Systems sollen dabei durch eine Analyse innerhalb der GBD-Plattform sichergestellt werden. Das Entwurfsprinzip, d.h. die iterative Generierung eines nichtlinearen Stellgesetzes, wird in Abbildung 5-18 für einen allgemeinen Regler $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ – stellvertretend für die ROPE-Ansätze (RK), (RS) und (RR) – dargestellt, wobei $ref \in \{KOR; SOR+; SOR-\}$ gilt. Ausgehend vom originalen nichtlinearen Viertelfahrzeugsystem

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}u$ und dessen GBL werden hierbei über die Iteration aus Kapitel 5.6 drei zeitinvariante Referenzregler \mathbf{K}_{ref} mit gewünschter „Frozen Time“-Dynamik in den zugehörigen Referenzpunkten \mathbf{x}_{ref} erzeugt und dem nichtlinearen System jeweils in der Form $u = \mathbf{K}_{ref}(\mathbf{x}_{ref})\mathbf{x}$ aufgeschaltet. Anschließend wird auf Basis eines allgemeinen nichtlinearen ROPE-Ansatzes $u = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ iterativ die polynomiale Abhängigkeit $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ optimiert, indem innerhalb der GBL-Familie die lokale Stabilität über den gesamten Zustandsraum getestet und die Performanz durch Simulationen des nichtlinearen Gesamtmodells überprüft werden. Optional ist auch ein Robustheitstest innerhalb der GBD-Plattform möglich.

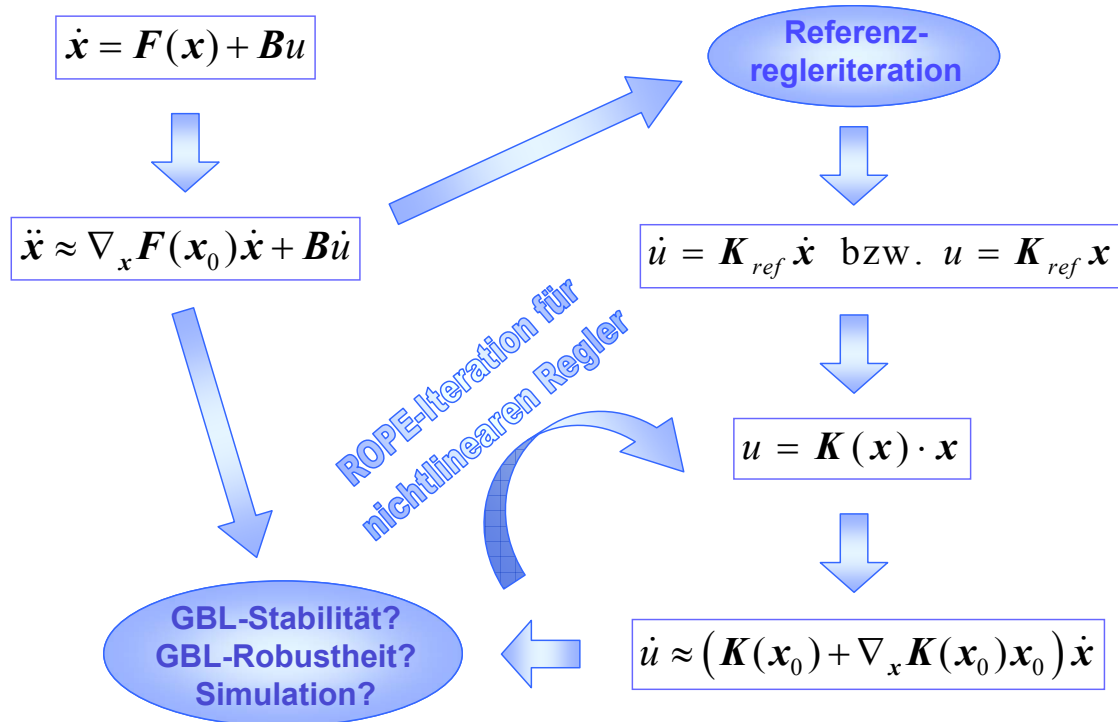


Abbildung 5-18: Iterative Erzeugung eines nichtlinearen Stellgesetzes durch ROPE

Abbildung 5-18 veranschaulicht den ROPE-Prozess: Ausgangspunkte sind also das nichtlineare Viertelfahrzeugmodell und seine GBL-Darstellung bzgl. beliebiger Arbeitspunkte \mathbf{x}_0 auf der linken Hälfte der Abbildung. Ein Regler \mathbf{K} , z.B. \mathbf{K}_{RK} für den Ansatz (RK), wird dann als zustandsabhängig in Form von $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ angesetzt, um die erwähnte schnelle Adaption (z.B. gemäß x_3) in das System integrieren zu können. Die Idee des ROPE besteht nun darin, das nichtlineare Stellgesetz auf Basis der bereits iterativ entworfenen Referenzregler \mathbf{K}_{ref} (KOR, SOR+, SOR-) so zu generieren, dass im Rahmen der GBL-Darstellung des Systems lokale Stabilität oder Robustheit über den gesamten Zustandsraum nachgewiesen werden kann. Falls diese Forderung nicht erfüllt wird, muss das Stellgesetz aufsetzend auf den gewonnenen Erkenntnissen abgewandelt werden. Im Rahmen des ROPE wird das

nichtlineare Stellgesetz dabei stets in polynomialer Form vorgegeben, da dies den Prozess zum einen intuitiver und transparenter macht (als z.B. komplexere nichtlineare Funktionen); zum anderen wird dadurch eine möglichst genaue Approximation durch optionale Trimpunktunsicherheiten in polynomialer (oder rationaler) Form ermöglicht, wie sie in Kapitel 5.5.2 eingeführt wurden. Da auch die GBL-Analyse keine absolut sichere Aussage bzgl. der globalen Stabilität treffen kann und die Performanz des nichtlinearen Entwurfs überprüft werden muss, folgt am Ende des ROPE stets eine simulative Validierung.

5.7.2 1. Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_3^2)$

Für die erste, intuitive Wahl von $\mathbf{K}_{RK,A}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_{RK,A}(x_3)$ wurde folgende Überlegung angestellt: der komfortorientierte Regler sollte für einen möglichst großen Bereich um die Gleichgewichtslage herum aktiv sein. Erst in der Nähe der Punkte $\pm x_{3,ref}$ aus (5-50) soll ein rascher Übergang auf den sicherheitsorientierten Regler SOR+ bzw. SOR- stattfinden. Hierfür bietet sich mit

$$d\mathbf{K}_{RK\pm} = \mathbf{K}_{RK,KOR} - \mathbf{K}_{RK,SOR\pm} \quad (5-59)$$

eine quadratische Abhängigkeit der Form

$$\mathbf{K} = \begin{cases} \mathbf{K}_{RK,KOR} + \left(x_3^2 / x_{3,ref}^2\right) \cdot d\mathbf{K}_{RK\pm}, & \text{falls } |x_3| \leq |\pm x_{3,ref} \mp \frac{x_{3,ref}}{20}|, \\ \mathbf{S}_{RK,A\pm}(x_3), & \text{falls } |\pm x_{3,ref} \mp \frac{x_{3,ref}}{20}| < |x_3| \leq |\pm x_{3,ref}|, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{RK,SOR\pm}, & \text{falls } |\pm x_{3,Safe}| < |x_3|, \end{cases} \quad (5-60)$$

an. Der Ausdruck $\mathbf{S}_{RK,A\pm}(x_3)$ beschreibt zugehörige Spline-Approximationen, die in Analogie zu ihrer Verwendung in Kapitel 5.3 einen bis zur 1. Ableitung stetigen Übergang zwischen quadratischer Kennlinie und sicherheitsorientierter Reglermatrix herstellen. Um hierbei einen weichen Übergang zu garantieren, bei dem die Ableitung der Splinefunktion im definierten Bereich keinen Vorzeichenwechsel erfährt, werden anstatt kubischer in (5-60) quadratische Splines verwendet. Da diese eine Randbedingung weniger erlauben, wird darauf verzichtet, die Endwerte $K_{i,RK,SOR\pm}$ exakt zu erreichen. Die tatsächlichen Endwerte werden mit $\tilde{K}_{i,RK,SOR\pm}$ bezeichnet und sind betragsmäßig etwas kleiner als $K_{i,RK,SOR\pm}$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll diese äußerst kleine Differenz im Folgenden aber vernachlässigt werden, so dass $\tilde{K}_{i,RK,SOR\pm} \approx K_{i,RK,SOR\pm}$ gilt.

Nach GB-Linearisierung des Stellgesetzes ergibt sich für $|x_3| \leq |\pm x_{3,ref} \mp \frac{x_{3,ref}}{20}|$

$$\begin{aligned}\dot{u} &\approx \mathbf{K}_{RK,GBL}(x_{3,0}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_{RK,GBL}(x_{3,0}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \mathbf{K}_{RK,KOR} \mathbf{w} + (x_{3,0}^2 / x_{3,ref}^2) \cdot d\mathbf{K}_{RK\pm} \mathbf{w} + (2x_{3,0} / x_{3,ref}^2) d\mathbf{K}_{RK\pm} \mathbf{x}_0 \cdot w_3.\end{aligned}\quad (5-61)$$

Wie in (5-61) zu sehen ist, beinhaltet der Ausdruck $(2x_{3,0} / x_{3,ref}^2) d\mathbf{K}_{RK\pm} \mathbf{x}_0$, welcher durch Linearisierung der versteckten nichtlinearen Rückführung von $w_3 = \dot{x}_3$ innerhalb der GBL-Darstellung entsteht, Produkte der Arbeitspunktvariablen $x_{3,0}$ und allen anderen $x_{i,0}$, welche unabhängig voneinander positive und negative Werte annehmen können. Dadurch können je nach Arbeitspunkt sehr hohe positive oder negative Verstärkungen für die Rückführung von $w_3 = \dot{x}_3$ existieren, welche in diesem auf hohe Performanz ausgelegten System fast zwangsläufig zu lokalen Instabilitäten führen. Entsprechende GBL-Stabilitätstests beweisen dies in Form von instabilen, lokalen Polstellen in der rechten komplexen Halbebene (auf den Stabilitätstest selbst wird weiter unten in diesem Kapitel eingegangen). Natürlich darf an dieser Stelle nicht vergessen werden, dass die lokalen Instabilitäten nicht bedeuten, dass auch das nichtlineare Gesamtsystem zwangsläufig eine Instabilität besitzt. Jedoch sollen auch die Erkenntnisse aus Kapitel 4.3.3 (und das Beispiel von Kapitel 5.1) in Erinnerung gerufen werden: das Verständnis der GBL-Analyse als robuste Regelungsmethodik führt nicht nur zu einer aussagekräftigen, tendenziellen Absicherung des nichtlinearen Systems gegen instabiles BIBO-Verhalten im Falle von „Worst Case“-Anregungen; vielmehr ist eine positive GBL-Stabilitätsanalyse auch meist mit einer erhöhten Robustheit des Systems gegen unmodelliertes bzw. unbeabsichtigtes Systemverhalten verbunden, was speziell bei nichtlinearen Stellgesetzen sehr wertvoll sein kann. Dies liegt daran, dass die GBL-Analyse das dynamische Systemverhalten nicht nur in Gleichgewichtsarbeitspunkten, sondern in beliebigen Punkten des gesamten Zustandsraums betrachtet.

Simulationen mit einer sehr hohen Straßenanregung (2-mal Profil aus Abbildung 2-7), welche ein häufiges Wechseln zwischen KOR und SOR bezwecken und hier nur kurz in Worten zusammengefasst werden sollen, haben beim Vergleich des 1. Ansatzes aus (5-60) mit dem finalen, letztendlich verwendeten ROPE-Regler (5-66) Folgendes gezeigt: der alte Entwurf schnitt zwar bzgl. des Komfortgütemaßes (1-2) um knapp 20 % besser ab, wies dafür aber in allen anderen Punkten Defizite auf. So war der Sicherheitsindex (1-3) um ca. 10 % höher, der RMS-Wert von x_1 um ca. 1 mm höher und die Lift-Off-Zeit τ_{oLO} aus (1-4) (während der das Fahrzeug den Bodenkontakt verloren hat) war mit 0,4 s sogar um ca. 100 % höher. Vor allem war auch der Aktoreinsatz um fast 10 % höher, was insgesamt auf schlechtere Robustheitseigenschaften (trotz derselben KOR- und SOR-Entwürfe) schließen lässt. Ansonsten konnte aber – wie erwartet – keine globale Instabilität in den Simulationen festgestellt werden, da durch die GBL-Analyse globale Instabilitäten meist nur sehr sicher ausgeschlossen, selten aber zuverlässig nachgewiesen werden können.

5.7.3 2. Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_i^2)$

Auf Grund der lokalen Instabilitäten des ersten Ansatzes wurde in Verbindung mit den Erfahrungen aus Simulationen eine zweite Überlegung verfolgt, nach der im Falle sicherheitskritischer Anregungen nicht nur die Zustandsvariable x_3 , sondern alle Zustandsvariablen höhere durchschnittliche Beträge über der Zeit aufweisen. Deshalb wurde vorgeschlagen, anstatt einer Variation des Reglers mit x_3 die einzelnen Verstärkungen der Reglermatrix je vom zugehörigen, rückgeführten Zustand abhängig zu gestalten. Dadurch sollte auch gewährleistet werden, dass der Rückführung der Zustandsvariable x_i nur dann eine hohe Verstärkung zugeordnet wird, wenn die Zustandsvariable tatsächlich auch selbst einen hohen aktuellen Wert besitzt. Durch entsprechende Anpassung des alten Gesetzes aus (5-60) wurde eine neue Vorschrift (5-62) abgeleitet,

$$K_i = \begin{cases} K_{i,RK,KOR} + \left(x_i^2 / x_{i,ref}^2 \right) \cdot dK_{i,RK\pm}, & \text{falls } |x_i| \leq |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i| \text{ mit } \varepsilon_i = x_{i,ref} / 20, \\ S_{i,RK,B\pm}(x_i), & \text{falls } |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i| < |x_i| \leq |\pm x_{i,ref}|, \\ K_{i,RK,SOR\pm}, & \text{falls } |\pm x_{i,ref}| < |x_i|, \end{cases} \quad (5-62)$$

wobei die Reglerwerte von $SOR+$ und $SOR-$ gemäß

$$K_{i,RK,SOR\pm} = \frac{K_{i,RK,SOR+} + K_{i,RK,SOR-}}{2} \quad \text{für } i \in \{1; 2; 4; 5; 6\} \quad (5-63)$$

gemittelt wurden, weil die durch die Punkte $+x_{3,ref}$ und $-x_{3,ref}$ motivierte Unterscheidung zwischen $SOR+$ und $SOR-$ hier für alle Reglerverstärkungen außer $K_{3,RK}$ keinen Sinn mehr macht. Da weiterhin festgestellt wurde, dass die Differenz zwischen $K_{5,RK,SOR\pm}$ und $K_{5,RK,KOR}$ fast keinen Unterschied in Simulationen bewirkte, wohl aber bei der späteren Robustheitsanalyse numerische Probleme bereitete, wurden die Werte ebenfalls im Sinne des Mittelwerts neu definiert:

$$K_{5,RK,SOR\pm} = K_{5,RK,KOR} = \frac{(3,8088 + (3,7576 + 3,7441) / 2)}{2} \cdot 10^3 = 3,7798 \cdot 10^3. \quad (5-64)$$

Für die Adaption (5-62) des Regelgesetzes wurde wiederum eine GBL-Stabilitätsanalyse des geschlossenen Kreises durchgeführt, die aber ebenfalls – wenn auch um ein Vielfaches

„knapper“ als im ersten Ansatz – zu instabilen lokalen Eigenwerten führte. Der Grund dafür war, dass im GBL-Stellgesetz für $|x_i| \leq |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i|$,

$$\dot{u}_i \approx K_{i,RK,GBL}(x_{i,0}) \cdot \dot{x}_i = K_{i,RK,GBL}(x_{i,0}) \cdot w_i = \left(K_{i,RK,KOR} + (3x_{i,0}^2 / x_{i,ref}^2) dK_{i,RK\pm} \right) \cdot w_i, \quad (5-65)$$

bei Annäherung von $x_{i,0}$ an $x_{i,ref}$ maximal fast $3 \cdot dK_{i,RK\pm}$ zu $K_{i,RK,KOR}$ hinzuaddiert wird, obwohl $K_{i,RK,SOR\pm}$ als $K_{i,RK,KOR} + 1 \cdot dK_{i,RK\pm}$ ausgelegt wurde. Dadurch ergeben sich teils sehr hohe GBL-Reglerverstärkungen, welche die Pole des lokalen Regelkreises in die rechte komplexe Halbebene verschieben.

5.7.4 Finaler Ansatz: Nichtlineare Abhängigkeit durch $K_i(x_i)$

Um dem entgegenzuwirken, wurde ein dritter Ansatz (5-66) getestet, bei dem ein weitestgehend linearer Übergang zwischen $K_{i,RK,KOR}$ und $K_{i,RK,SOR\pm}$ stattfindet.

$$K_i = \begin{cases} S_{i,RK,I\pm}(x_i), & \text{falls } |x_i| \leq |\varepsilon_i| \text{ mit } \varepsilon_i = x_{i,ref} / 20 \\ K_{i,RK,KOR} + (|x_i| / x_{i,ref}) \cdot dK_{i,RK\pm}, & \text{falls } |\pm \varepsilon_i| \leq |x_i| < |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i|, \\ S_{i,RK,II\pm}(x_i), & \text{falls } |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i| < |x_i| \leq |\pm x_{i,ref}|, \\ K_{i,RK,SOR\pm}, & \text{falls } |\pm x_{i,ref}| < |x_i| \end{cases} \quad (5-66)$$

Um Knicke in den Kennlinien $K_i(x_i)$ bei $x_i = 0$ zu vermeiden, wurde in diesem Bereich eine weitere Spline-Approximation $S_{i,RK,I\pm}(x_i)$ eingefügt. Das GBL-Stellgesetz lässt sich nun als

$$\dot{u}_i \approx K_{i,RK,GBL}(x_{i,0}) \cdot \dot{x}_i = K_{i,RK,GBL}(x_{i,0}) \cdot w_i = \left(K_{i,RK,KOR} + (2|x_{i,0}| / x_{i,ref}^2) dK_{i,RK\pm} \right) \cdot w_i \quad (5-67)$$

im Bereich $|\pm \varepsilon_i| \leq |x_i| < |\pm x_{i,ref} \mp \varepsilon_i|$ formulieren, wodurch sich bei Annäherung von $x_{i,0}$ an $x_{i,ref}$ nur noch (knapp) $2 \cdot dK_{i\pm}$ zu $K_{i,RK,KOR}$ hinzuaddiert wird. Die maximalen Werte der GBL-Reglerverstärkungen sind damit deutlich geringer als im vorigen Ansatz. Prinzipiell wäre es auch möglich, den KOR über einen gewissen Bereich um die Gleichgewichtslage herum direkt als Regler zu verwenden und danach den Anstieg zum SOR hin entsprechend steiler zu gestalten. Durch diese oder ähnliche stückweise definierten Varianten ließe sich das Regelverhalten prinzipiell noch optimieren, was hier aber nicht weiter verfolgt wurde.

Um die lokale Stabilität zu testen, wurden für fein diskretisierte Werte von x_1 bis x_6 über den gesamten relevanten Zustandsraum (exklusive des Lift-Off-Punkts),

$$\begin{aligned}
 x_1 &\in [0; 0,15], & x_2 &\in [0; 0,5], \\
 x_3 &\in [-0,02; 0,0124], & x_4 &\in [0; 1], \\
 x_5 &\in [0; 0,05], & x_6 &\in [0; 0,05],
 \end{aligned}
 \tag{5-68}$$

je die geschlossenen Regelkreise mit der Strecke (5-25) und dem Regelgesetz (5-67) berechnet und die Pole des Kreises in ein Diagramm eingetragen. Zudem wurde mittels eines Matlab-Skripts der Pol ermittelt, der den größten Realteil p_{max} aufweist. Die Ergebnisse in (5-69) und Abbildung 5-19 zeigen, dass die GBL-Darstellung des Systems für alle Zustandsvektoren lokal stabil ist, weshalb dieser Regler (in zeitkontinuierlicher, nichtlinearer Form) für die weitere Arbeit als (RK) verwendet werden soll.

$$p_{max,RK} = \max(\operatorname{Re}(\lambda_{RK,GBL})) = -0,1372
 \tag{5-69}$$

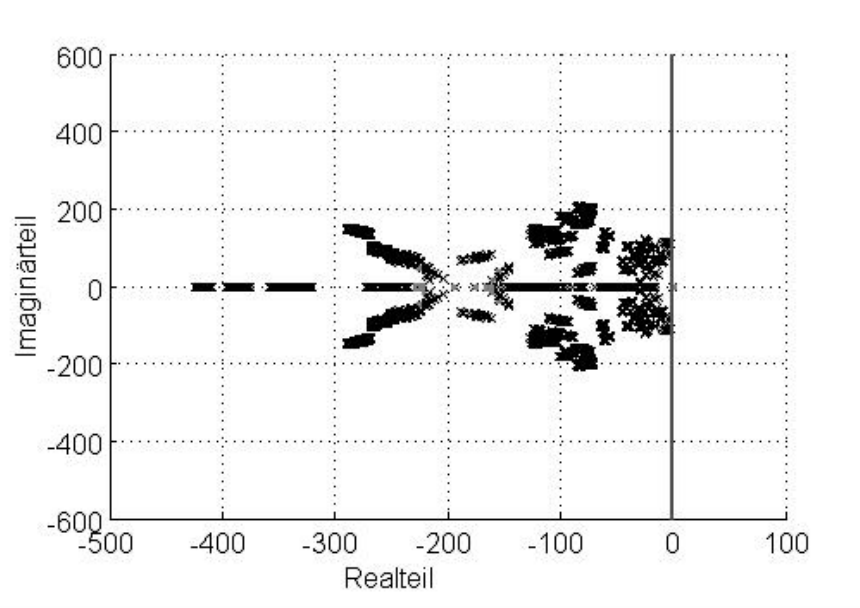


Abbildung 5-19: Pole der lokalen GBL-Regelkreise für (RK)

Exemplarisch ist in Abbildung 5-20 der asymmetrische Verlauf von $K_{3,RK,GBL}$ über x_3 dargestellt. Da die Stabilitätsbetrachtung allein noch keine Aussage über die Performanz des Regelkreises zulässt, wurde der finale Entwurf von $K_{RK}(x)$ auch ausführlich in Simulationen getestet, was zu hervorragenden Ergebnissen führte, s. Kapitel 6. Die Simulationen wurden hierbei direkt mit dem nichtlinearen Gesamtsystem durchgeführt.

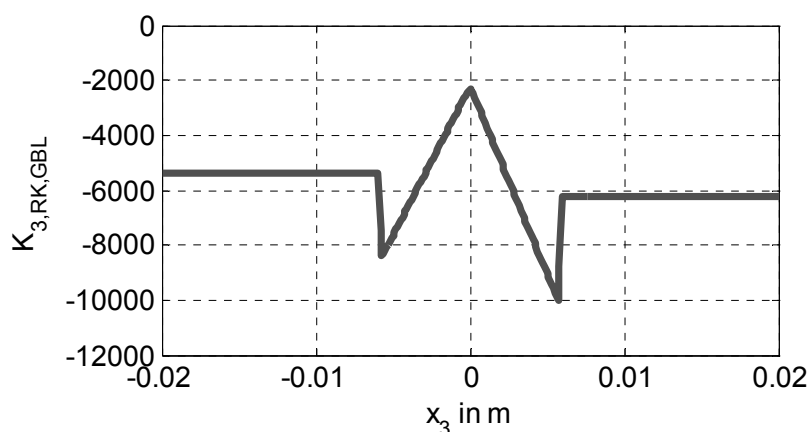


Abbildung 5-20: Beispiel zur zustandsabhängigen GBL-Reglerverstärkung

Für die Ansätze (RS) und (RR) wurden – ohne dass hier auf nähere Details eingegangen werden soll – in analoger Weise Regler entworfen, wobei am Ende ebenfalls jeweils die Regelgesetze (5-66) bzw. (5-67) ausgewählt wurden. Auch hier waren alle lokalen GBL-Regelkreise stabil, wie die entsprechenden maximalen Realteile der Pole des geschlossenen Kreises in (5-70) zeigen. Weiterhin wurde die Analyse von (RS) für den gesamten Bereich der Chassismasse $m_C \in [80; 160]$ durchgeführt.

$$\begin{aligned}
 p_{max,RS} &= \max(\operatorname{Re}(\lambda_{RS,GBL})) = -1,0270 \\
 p_{max,RR} &= \max(\operatorname{Re}(\lambda_{RR,GBL})) = -1,6766
 \end{aligned}
 \tag{5-70}$$

Die Referenzreglerverstärkungen für (RS) in Abhängigkeit von m_C können übrigens auch der Abbildung 5-14 entnommen werden, wobei

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{i,RS} &= \max(K_{i,RS,SOR+}, K_{i,RS,SOR-}), \\
 dK_{i,RS} &= \max(dK_{i,RS+}, K_{i,RS-}) \\
 \text{mit } dK_{i,RS\pm} &= K_{i,RS,SOR\pm} - K_{i,RS,KOR}
 \end{aligned}
 \tag{5-71}$$

gilt. Durch die Maximumbildung (anstatt einer genauen Abbildung des nominellen Mittelwerts bzw. einer separaten Betrachtung von je $dK_{i,RS+}$ und $dK_{i,RS-}$) wird die Unsicherheitsmodellierung an dieser Stelle zwar etwas konservativer, dafür aber wesentlich einfacher und übersichtlicher. Relevant wäre eine genauere Modellierung ohnehin nur für $K_{3,RS}(x_3)$, welches als einzige Verstärkung eine asymmetrische Kennlinie bzgl. der zugehörigen Zustandsvariable x_3 besitzt.

5.8 GBL-Robustheitsanalyse mit dem strukturierten Singulärwert

Auf Basis der in Kapitel 5.6 sowie in (5-71) definierten Reglerparametern kann das Unsicherheitsmodell (5-41) des unsicheren geschlossenen Regelkreises in Abbildung 5-16 nun auch quantitativ vervollständigt werden. Wie erwähnt, soll der Test der robusten Stabilität aber nur für den ROPE-Ansatz (RS) exemplarisch im Rahmen einer μ -Analyse durchgeführt werden, s. hierzu die Kapitel 3.6.2 bis 3.6.4. Bei einer numerischen Berechnung durch Matlab muss die obere Grenze, also die Upper Bound des strukturierten Singulärwerts μ gemäß (3-52) für alle Frequenzen kleiner als 1 sein, damit die Forderung der robusten Stabilität hinreichend erfüllt ist. Aufsetzend auf den in Kapitel 5.5 definierten Unsicherheiten soll die Robustheit des Systems im Folgenden durch μ -Analysen der GB-Linearisierung des Regelkreises untersucht werden. Die Massenabhängigkeit von Strecke und Regler wird durch die Trimpunktunsicherheiten aus Kapitel 5.5.2 berücksichtigt.

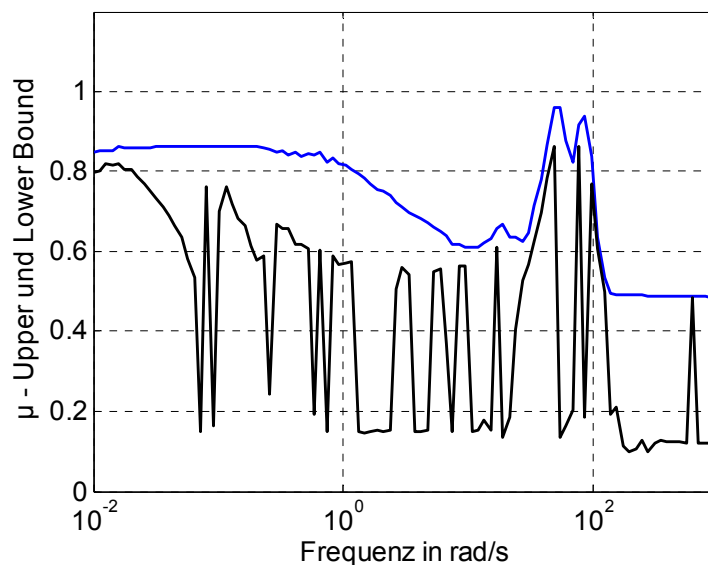


Abbildung 5-21: μ -Analyse für 15 % Aktorunsicherheit

Abbildung 5-21 zeigt das Ergebnis einer ersten μ -Analyse mit einer Aktorunsicherheit von 15 % für kleine Frequenzen. Es wurde darauf geachtet, dass relevante Peaks durch eine ausreichend feine Frequenzdiskretisierung erfasst wurden. Eine Berechnung von 100 Punkten im gezeigten Frequenzbereich war hierfür ausreichend. Im Diagramm ist erkennbar, dass der Peak der Upper Bound mit einem Wert von ca. 0,96 kleiner als 1 ist, wodurch das GBL-System robust stabil gegen die modellierten Unsicherheiten ist. Wie bereits mehrfach erwähnt, betrachtet auch hier die Analyse zwar nur die lokalen Robustheitseigenschaften der GBL-Familie. Die lokalen Eigenschaften der GBL lassen aber starke Rückschlüsse auf das globale Verhalten des nichtlinearen Gesamtsystems zu.

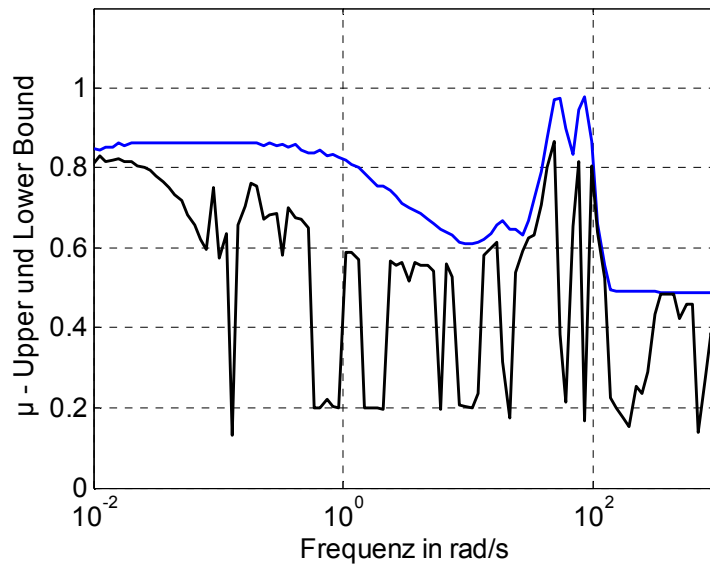


Abbildung 5-22: μ -Analyse für 20 % Aktorunsicherheit

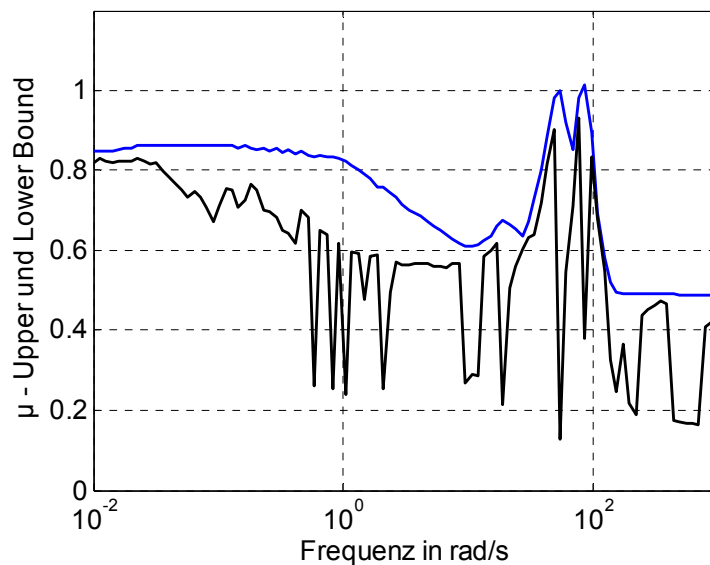


Abbildung 5-23: μ -Analyse für 25 % Aktorunsicherheit

Nach dem positiven Ergebnis des ersten Tests wurde in einem zweiten die Aktorunsicherheit für kleine Frequenzen um 5 % auf 20 % erhöht. Auch hier war der Peak der Upper Bound mit ca. 0,98 kleiner als 1, s. Abbildung 5-22. Die Aktorunsicherheit kann bei diesem Wert bereits als relativ hoch angesehen werden, weshalb dem System (RS) gute absolute Robustheitseigenschaften zugesprochen werden können. Erst bei einem dritten Test mit einer Erhöhung der Aktorunsicherheit auf 25 % wurde die hinreichende Robustheitsbedingung mit einem Wert von ca. 1,01 der Upper Bound verletzt, s. Abbildung 5-23. Eine endgültige Aussage, ob der Wert von μ tatsächlich kleiner als 1 ist, kann damit allerdings noch nicht

getroffen werden, da selbiger irgendwo im Bereich zwischen Upper und Lower Bound liegen kann. Der Peak der Lower Bound ist aber deutlich geringer als 1.

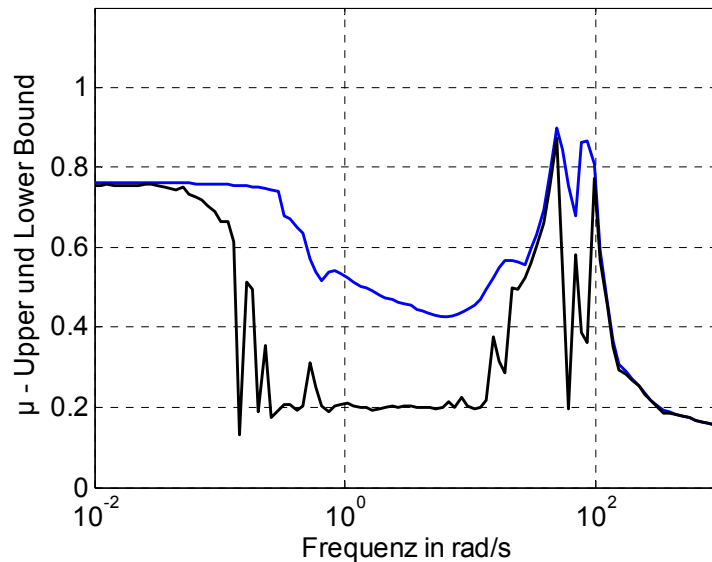


Abbildung 5-24: μ -Analyse ohne Trimpunktunsicherheit

Die hohe Differenz von Upper und Lower Bound, speziell um den Peak von μ herum, entsteht vor allem durch die Trimpunktunsicherheit, welche als Spezialfall einer reellen, parametrischen Unsicherheit das Konvergenzverhalten der Lower Bound durch ihr häufiges Auftreten in der Unsicherheitsmatrix (10-mal) negativ beeinflusst. Kompensiert werden könnte dies durch entsprechend hohe komplexe, dynamische Unsicherheiten, was hier aber zu einer stark konservativen Unsicherheitsmodellierung und – wie Abbildung 5-23 zeigt – auch zu einem negativen Robustheitstest führen würde. Abbildung 5-24 unterlegt diese Theorie, indem es das Ergebnis der μ -Analyse ohne Trimpunktunsicherheiten darstellt (für die mittlere Masse $m_C = 120$ kg). Die Peaks von Upper und Lower Bound liegen hier fast aufeinander. Die Dimension der Unsicherheitsmatrix beträgt dabei nur noch 13×13 . Auf ihrer Diagonalen sind 7 parametrische Unsicherheiten des passiven Modells, 5 parametrische des Reglermodells und die eine dynamische Aktorunsicherheit zu finden. Der Peak liegt in diesem Fall bei ca. 0,90, weshalb sich auf Grund der Eigenschaften von μ im Fall ohne Trimpunktunsicherheit (für $m_C = 120$ kg) folgern lässt, dass alle anderen Unsicherheiten noch um ca. $1/0,9$, d.h. 11 % erhöht werden können, bevor das System die robuste Stabilitätsgrenze erreicht.

Nach der erfolgreichen μ -Analyse soll nochmals herausgestellt werden, warum sich GBL und Robustheitstest hier so hervorragend kombinieren lassen. Beim nominellen GBL-Stabilitätstest war eine hohe Anzahl an Untersuchungen notwendig, um lokale Stabilität für

alle relevanten Zustandspunkte zu gewährleisten. Dies lag daran, dass durch die nichtlineare ROPE-Regelung für alle Zustandsvariablen nichtlineare Abhängigkeiten über fast den kompletten Zustandsraum vorliegen. Wäre das System noch detaillierter modelliert, z.B. durch ein Aktormodell höherer Ordnung, so könnten sich dadurch schnell extrem lange Rechenzeiten ergeben. Im Rahmen der GBL-Robustheitsanalyse aber können die Wertebereiche der Reglerverstärkungen je durch eine parametrische Unsicherheit abgedeckt werden. Dadurch kann die Stabilitätsanalyse bzgl. der verschiedenen lokalen Reglerwerte als GBL-Robustheitsanalyse betrachtet und damit – zusammen mit den tatsächlichen Modellunsicherheiten – innerhalb einer einzigen μ -Analyse untersucht werden. Die Reglerunsicherheiten werden dabei, ähnlich wie die Performanzunsicherheit in Kapitel 3.6.5, als fiktive Unsicherheiten bezeichnet.

Eine weitere große Stärke der GBL kristallisiert sich in Verbindung mit Trimpunktunsicherheiten heraus: durch die GBL wird bei der vorgestellten Viertelfahrzeugregelung stets eine (im dynamischen Sinne) optimale Quasi-LPV-Form des Systems erreicht (siehe Kapitel 4), in der die nichtlinearen Rückführungen in der Form $K_{i,GBL}(\mathbf{x}_0) \cdot w_i$ und beim verwendeten ROPE-Ansatz sogar stets in der Form $K_{i,GBL}(x_{i,0}) \cdot w_i$ vorliegen. Die nichtlinearen Abhängigkeiten der Verstärkungen $K_{i,GBL}(x_{i,0})$ können bei Bedarf je über Trimpunktunsicherheiten erfasst werden, genauso wie es auch für die Abhängigkeit von der variablen Chassismasse gemacht wird. Selbst wenn also nichtlineare innere Kräfte $F_{dC}(v)$, $F_{cC}(x_1)$ oder $F_{cW}(x_3)$ im Modell integriert sind und diese mit einem ROPE-Regelgesetz der Form $K_i = K_i(x_i)$ geregelt werden, können die Nichtlinearitäten mit minimalem Konservatismus im Rahmen einer einzigen (oder sehr wenigen) GBL-Robustheitsanalyse(n) untersucht werden, da die Trimpunktunsicherheiten geeignete Kopplungen zwischen den Abhängigkeiten $F_i(x_i)$ und $K_i(x_i)$ herstellen. Bei den Chassismassen-Abhängigkeiten der Matrixelemente von A und der Reglerverstärkungen ergeben sich in analoger Weise wichtige Kopplungen. Zusammen mit der Eigenschaft der GBL, auch bei schneller Variation von x_i aussagekräftige Ergebnisse zu erlauben, sind dadurch überlegene Robustheitsanalysen im Vergleich zu den üblichen klassischen Ansätzen möglich.

6 Validierung durch Simulationen und Prüfstandstests

Zur Überprüfung der Performanz der nichtlinearen Reglerentwürfe (RS), (RK) und (RR) aus Kapitel 5.7.4 werden in diesem Kapitel ausführliche Simulationen mit dem Straßenprofil aus Abbildung 2-7, im Folgenden durch SP abgekürzt, und einem Sinus-Sweep von 1 bis 30 Hz, durch SW gekennzeichnet, durchgeführt. Die verschiedenen Anregungen sind:

$$\begin{aligned}
 SP_G(t) &= 0,3 \cdot SP(t) && \text{(geringe Anregung, sehr glatte Straße),} \\
 SP_S(t) &= 0,6 \cdot SP(t) && \text{(mittlere Anregung, Komforttests),} \\
 SP_M(t) &= 1,0 \cdot SP(t) && \text{(erhöhte Anregung, Abstimmungstests),} \\
 SP_L(t) &= 1,5 \cdot SP(t) && \text{(starke Anregung, Sicherheitstests),} \\
 SP_X(t) &= 2,0 \cdot SP(t) && \text{(sehr hohe Anregung, Extremfalltests),} \\
 SW(t) &= 0,05 \cdot \sin(\omega(t) \cdot t) && \text{mit } \omega(t) = 1 \cdot 2\pi + \frac{29 \cdot 2\pi t}{30}, \quad t \in [0; 30].
 \end{aligned}
 \tag{6-1}$$

Der Regler (RR) wurde speziell für den Prüfstandsbetrieb entworfen, während dem nicht alle Zustände gemessen werden, sondern über einen Zustandsbeobachter geschätzt werden müssen. Dabei gibt es v.a. drei Gründe, warum (RR) besonders robust ausgelegt wurde: die erhöhten Robustheitseigenschaften sind notwendig,

- ✘ um ein instabiles Fehlverhalten des Reglers und eine damit verbundene Schädigung des Prüfstands (z.B. durch Überschreitung $x_1 > H_{\max} = 0,05$) unbedingt zu vermeiden,
- ✘ um in diesem Zusammenhang die Schätzfehler aufzufangen, die mit jedem Beobachter verbunden sind,
- ✘ um zudem zu berücksichtigen, dass der hier verwendete Beobachter nicht bzgl. seiner Performanz optimiert wurde.

Aus Sicherheitsgründen wurden deshalb auch nur die Anregungen SP_G und SP_S am Prüfstand getestet (wodurch solche Fälle nahezu ausgeschlossen sind, in denen x_1 nahe dem erlaubten Maximum H_{\max} kommt). Weiterhin wurden für die Regelung ungewünschte topografische Steigungen durch einen Hochpassfilter $4s^2 / (2s+1)^2$ entfernt. Die Auslegung des Beobachters selbst soll vorab im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

6.1 Erweiterter Kalman-Filter für die Prüfstandsregelung

Während des Prüfstandsbetriebs können nur die Chassis- und Radbeschleunigung sowie der Federhub x_1 gemessen werden; die anderen Zustandsvariablen müssen über einen Beobachter

ermittelt werden. Hierfür wird ein nichtlinearer, d.h. erweiterter Kalman-Filter (:= EKF) verwendet, der erhöhte Approximationsfähigkeiten bzgl. des nichtlinearen Systemverhaltens im Vergleich zu linearen Beobachtergesetzen besitzt. Die für dieses Kapitel relevanten Grundlagen können z.B. in [Zarc00] oder [Welc01] nachgelesen und sollen hier nur kompakt zusammengefasst werden.

Ausgangslage sei ein mit (im Idealfall weißem) Rauschen \mathbf{w}_x und \mathbf{v}_z perturbiertes allgemeines System

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{w}_x, \quad \mathbf{z} = h(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_z, \quad (6-2)$$

wobei \mathbf{z} die gemessenen Größen repräsentieren und \mathbf{w}_x für Prozessrauschen (im Sinne von Fehlern in der Modellstruktur) bzw. \mathbf{v}_z für Messrauschen (im Sinne von Mess- und Schätzfehlern) stehen. Um das Prozess- und Messrauschen adäquat zu gewichten, werden die Rauschmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} eingeführt, die im Idealfall (mit $E = \text{Erwartungswert}$)

$$\mathbf{Q} = E(\mathbf{w}_x \mathbf{w}_x^T), \quad \mathbf{R} = E(\mathbf{v}_z \mathbf{v}_z^T) \quad (6-3)$$

entsprechen. Da die Werte von \mathbf{Q} und \mathbf{R} nur schwer identifizierbar sind, werden die Matrizen oft auf Basis von Erfahrungswerten in Diagonalfom realisiert (die Werte auf der Diagonalen sollten bei weißem Rauschen der Spektraldichte des jeweiligen Rauschsignals entsprechen). Hierbei bedeuten hohe Werte Q_{ii} , dass dem Wert der entsprechenden Messgröße tendenziell mehr vertraut wird als der zugehörigen geschätzten Zustandsgröße. Bei relativ höheren Werten von R_{ii} verhält es sich umgekehrt.

Weiterhin wird für den EKF die sogenannte Kovarianzmatrix \mathbf{P} benötigt, welche sich theoretisch für den Schätzfehler \mathbf{e} des EKFs über

$$\mathbf{P} = E(\mathbf{e} \mathbf{e}^T) \quad (6-4)$$

berechnet, innerhalb des EKF-Algorithmus aber nur iterativ approximiert wird. Die Wahl eines sinnvollen Startwerts für \mathbf{P} , welches eine Korrelation zwischen den einzelnen Messsignalen im mathematischen Sinne beschreibt, muss aus Erfahrung heraus oder in Form von Tests erfolgen. Zur Schätzung des Zustandsvektors für den k -ten (diskreten) Zeitschritt mittels des EKF müssen die nichtlinearen Zustandsgleichungen linearisiert werden, was mit Hilfe der Jakobi-Matrizen

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}} \quad (6-5)$$

geschieht, worin mit $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ der geschätzte Zustandsvektor des letzten Zeitschritts bezeichnet wird. Weiterhin kann über die nichtlineare Beziehung (6-2) für $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ und \mathbf{u}_{k-1} direkt die Ableitung $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{k-1}$ des letzten Zeitschritts bestimmt werden.

Der EKF-Algorithmus kann nun in zwei Phasen unterteilt werden: die Prädiktionsphase und die Korrekturphase. Im Rahmen der Prädiktionsphase wird für jeden Zeitschritt der Dauer T_S zuerst auf Basis der letzten Schätzung ein Wert

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{k-1} \cdot T_S \quad (6-6)$$

vorausgesagt. Im Gegensatz zum linearen Kalman-Filter erfolgt diese Voraussage beim EKF also nicht über die so genannte Fundamentalmatrix, welche durch eine Taylor-Approximation 1. Ordnung als

$$\phi_k = \mathbf{I} + \mathbf{F}_k T_S \quad (6-7)$$

definiert ist. Diese wird beim EKF nur für den zweiten Teil der Prädiktionsphase, der Voraussage der neuen Kovarianzmatrix

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \phi_{k-1}^T + \mathbf{Q} \quad (6-8)$$

verwendet. In der folgenden Korrekturphase werden nun die vorausgesagten Werte mit den neuen, aus der Messung berechneten Werten verglichen, wodurch der EKF auf Fehler im Beobachtermodell schließt und dieses entsprechend adaptiert. Dies geschieht über eine (für weißes Rauschen optimale) Neubestimmung der Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_{EKF} über

$$\mathbf{K}_{EKF} = \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (6-9)$$

und einer darauf aufsetzenden Schätzung des aktuellen Zustandsvektors

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{EKF} (\mathbf{z}_k - h(\bar{\mathbf{x}}_k)), \quad (6-10)$$

wobei $\bar{z}_k = h(\bar{x}_k)$ wiederum direkt über die nichtlineare Beziehung (6-2) berechnet wird. Die prädizierten Ausgangsgrößen $h(\bar{x}_k)$ können im speziellen Fall des Prüfstands durch

$$\begin{aligned}\bar{z}_{1,k} &= h_1(\bar{x}_k, u_k) = \bar{\ddot{x}}_{C,k} = \dot{x}_{2,k}(\bar{x}_k), \\ \bar{z}_{2,k} &= h_2(\bar{x}_k, u_k) = \bar{\ddot{x}}_{R,k} = \dot{x}_{4,k}(\bar{x}_k), \\ \bar{z}_{3,k} &= h_3(\bar{x}_k, u_k) = (\bar{x}_{C,k} - \bar{x}_{R,k}) = \bar{x}_{1,k}\end{aligned}\tag{6-11}$$

aus den Zustandsgleichungen bestimmt werden. Zum Abschluss der Korrekturphase wird gemäß (6-12) eine neue Schätzung der Kovarianzmatrix durchgeführt.

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{EKF} \mathbf{H}_k) \bar{\mathbf{P}}_k\tag{6-12}$$

Für die Regelung des Viertelfahrzeugprüfstands konnte, wie erwähnt, keine Optimierung von \mathbf{R} und \mathbf{Q} vorgenommen werden. Der zeitliche Aufwand hierfür wurde im Hinblick auf die mehr qualitative Grundsatzstudie in dieser Arbeit als zu hoch erachtet. Die Werte auf den Diagonalen beider Matrizen wurden deshalb sämtlich auf 1000 gesetzt. Für die Kovarianzmatrix hingegen wurde ein sinnvoller Startwert dadurch ermittelt, indem der im EKF geschätzte Wert von \mathbf{P} , der sich am Ende eines rein passiven Testlaufs (ohne Regelung) ergeben hatte, als Startwert für weitere Tests abgelegt wurde.

Die Prädiktion des Zustandsvektors über die Zustandsableitungen in (6-6) erfolgt nur teilweise analytisch über die Funktion f in (6-2), da vielmehr die aktuellen Werte der Dämpfungskonstante $d_C(t)$ und der Federkonstante $c_R(t)$ simulativ ermittelt werden. Hierzu werden parallel zum Kalman-Filter Simulink-Modelle des nichtlinearen Viertelfahrzeugs in den Regelalgorithmus integriert, welche für die aktuellen Schätzwerte $\hat{v}_k = \hat{x}_{2,k} - \hat{x}_{4,k}$ und $\hat{x}_{3,k}$ die zugehörigen Feder- bzw. Dämpfungskonstanten gemäß

$$\begin{aligned}d_{C,k} &\approx \frac{F_{dC}(\hat{v}_k + \varepsilon_v) - F_{dC}(\hat{v}_k - \varepsilon_v)}{2\varepsilon_v} \quad \text{mit } \varepsilon_v = 0,01, \\ c_{R,k} &\approx \frac{F_{cR}(\hat{x}_{3,k} + \varepsilon_{x3}) - F_{cR}(\hat{x}_{3,k} - \varepsilon_{x3})}{2\varepsilon_{x3}} \quad \text{mit } \varepsilon_{x3} = 0,0005\end{aligned}\tag{6-13}$$

numerisch approximieren. Die berechneten Werte werden dem Kalman-Filter anschließend zu Beginn jedes Zeitschritts übergeben. Alle anderen Modellnichtlinearitäten können als klein

bezeichnet und deshalb im EKF-Algorithmus vernachlässigt werden. Obwohl hier durch Simulationen keine und in Kapitel 6.5 durch Prüfstandsläufe nur eine kompakte Validierung des EKF beschrieben werden soll, kann gesagt werden, dass der präsentierte EKF-Ansatz insgesamt zufrieden stellende Ergebnisse geliefert hat. Speziell für kleine Anregungen ist das Verhalten akzeptabel; für stärkere Anregungen sowie die Schätzung von x_1 liegt in der Optimierung des Filters aber sicherlich noch ein hohes Potenzial, da hier die Schätzfehler größere Werte annehmen. (Insbesondere für x_1 sollte eine deutliche Verbesserung möglich sein, da es ja sogar als Messgröße vorliegt). Durch den robusten Entwurf (RR) und die ausschließliche Verwendung der Anregungen SP_G und SP_S am Prüfstand wurde diesem Umstand Rechnung getragen. Sämtliche Ergebnisse zu (RR) in den Kapiteln 6.4 und 6.5 basieren auf Tests mit dem obigen EKF. Prinzipiell wäre es auch möglich, m_C über den EKF schätzen zu lassen. Auf dies wird in dieser Arbeit aber nicht genauer eingegangen.

6.2 Ergebnisse komfortorientierter Regler (RK)

Vor der Analyse der ROPE-Regler werden die Simulationsergebnisse vom passiven Modell (2-9), der inneren Regelschleife aus Kapitel 5.3 allein und des alternativen, klassischen LQR-Reglers (5-49) miteinander verglichen. Zuerst wird hierfür in Abbildung 6-1 bis Abbildung 6-5 das Profil SP_M betrachtet, bei welchem das Hauptaugenmerk zwar noch auf dem Komfort liegt, aber die Sicherheitsgütemaße – speziell bei aggressiven Regelgesetzen – nicht unbeachtet bleiben dürfen. Beim Komfortindex erzielt hier die innere Regelschleife knapp die besten Werte, da sie mit einer gewünschten, weichen Dämpfungskonstante von 600 Ns/m bereits etwas aggressiver ausgelegt ist als der klassische LQR-Regler, bei dem hoher Wert auf geringen Energieverbrauch gelegt wurde. Die Folge hiervon ist in Abbildung 6-4 bzw. in Abbildung 6-5 zu sehen: die innere Regelschleife (IS) weist einen deutlich höheren Energieverbrauch und deutlich größere Kräfte als K_{LQR} auf. Bzgl. des Sicherheitsindex liefern bei der gewählten Anregung alle Systeme unkritische Ergebnisse; interessanter ist hingegen die Betrachtung des Aufbaufederhubs x_1 . Obwohl alle Systeme noch akzeptable Werte aufweisen, steigen sowohl der RMS-Wert von x_1 als auch $\max(|x_1(t)|)$, siehe hierzu Tabelle 6-1, bei K_{LQR} und noch mehr bei der inneren Schleife deutlich an.

In Tabelle 6-1 werden die wichtigsten Simulationskennzahlen für alle (je 30 s langen) Simulationen kompakt zusammengefasst: τ_{3LO} , welches die Zeit beschreibt, in der x_1 weniger als 3 mm vom Lift-Off-Punkt entfernt ist bzw. diesen überschreitet; der RMS-Wert von x_1 (nach 30 s); das betragsmäßige Maximum $x_{1\max}$ von x_1 ; der Komfortindex J_{Komf} als Maß der gewichteten Chassisbeschleunigung; der Sicherheitsindex J_{Sich} als Maß für die dynamische Radlast; das betragsmäßige Maximum F_{\max} der Aktorkraft F_{Akt} ; der RMS-Wert der Gesamtleistung P (in Watt) für einen exemplarisch sehr konservativ angenommenen elektrischen Wirkungsgrad von 0,6.

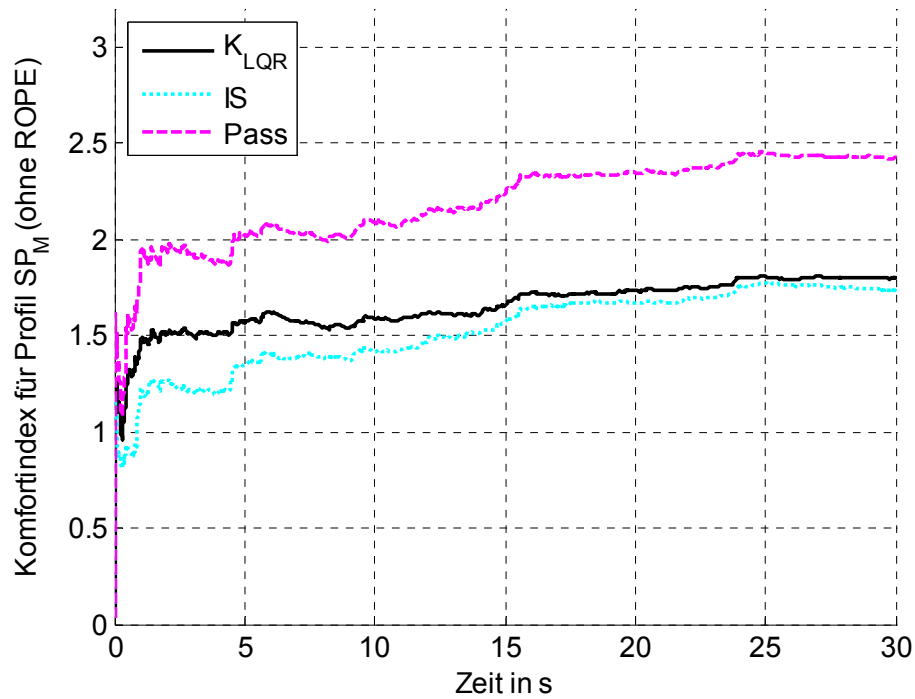


Abbildung 6-1: Komfortindex Profil SP_M – Vergleich mit passivem Modell

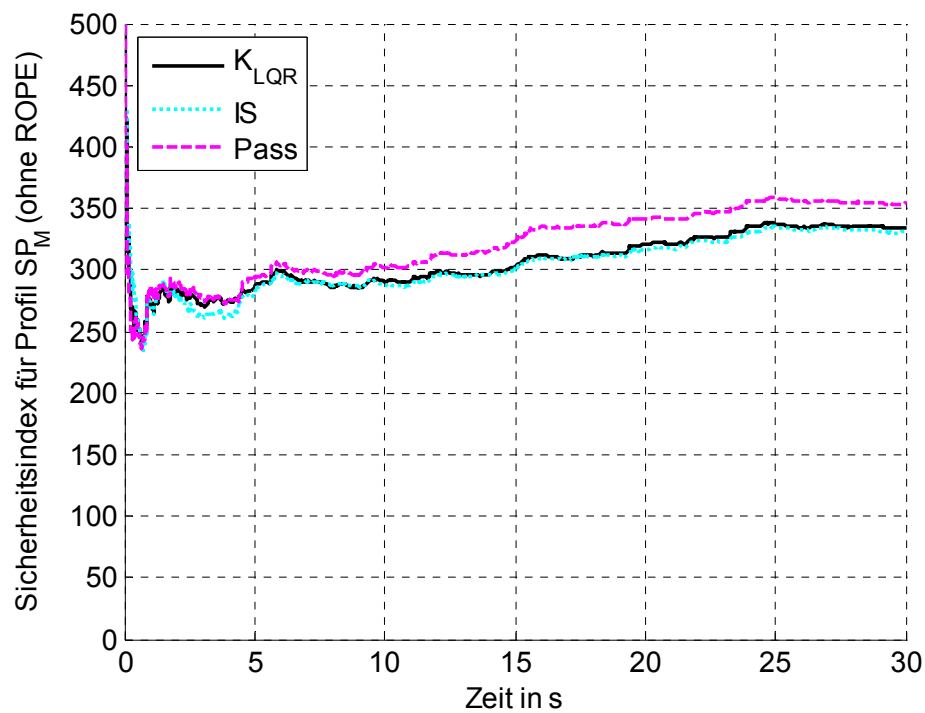


Abbildung 6-2: Sicherheitsindex Profil SP_M – Vergleich mit passivem Modell

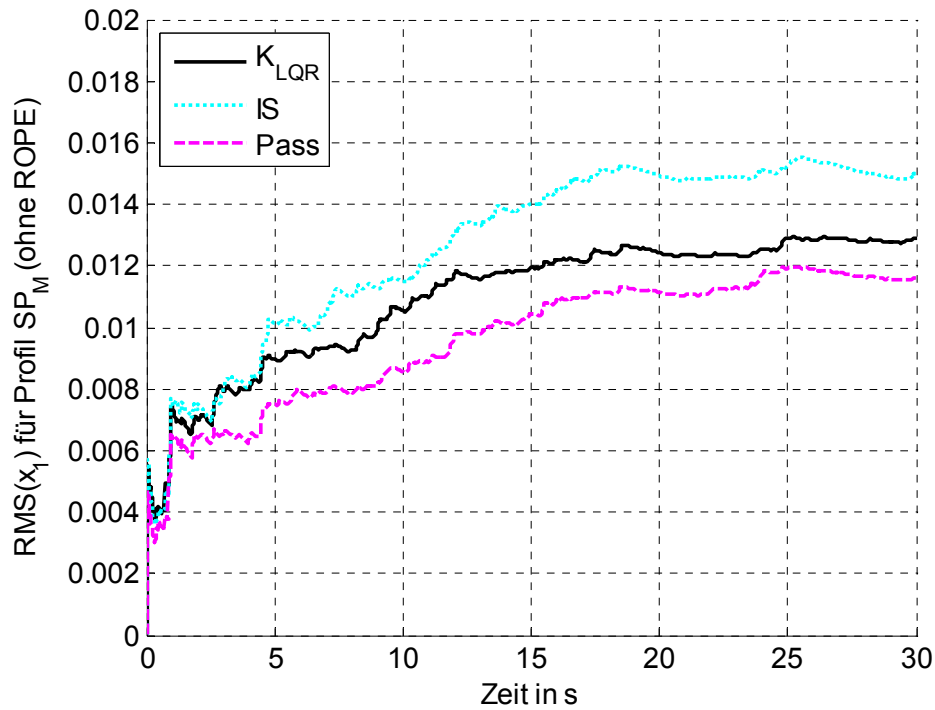


Abbildung 6-3: $RMS(x_1)$ Profil SP_M – Vergleich mit passivem Modell

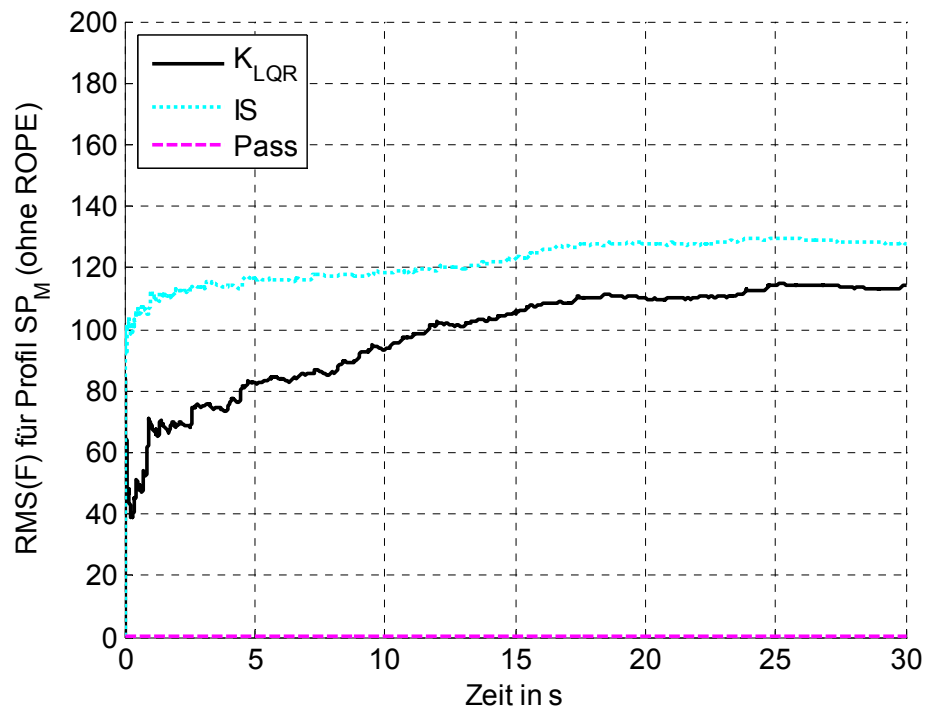


Abbildung 6-4: $RMS(F_{Akt})$ Profil SP_M – Vergleich mit passivem Modell

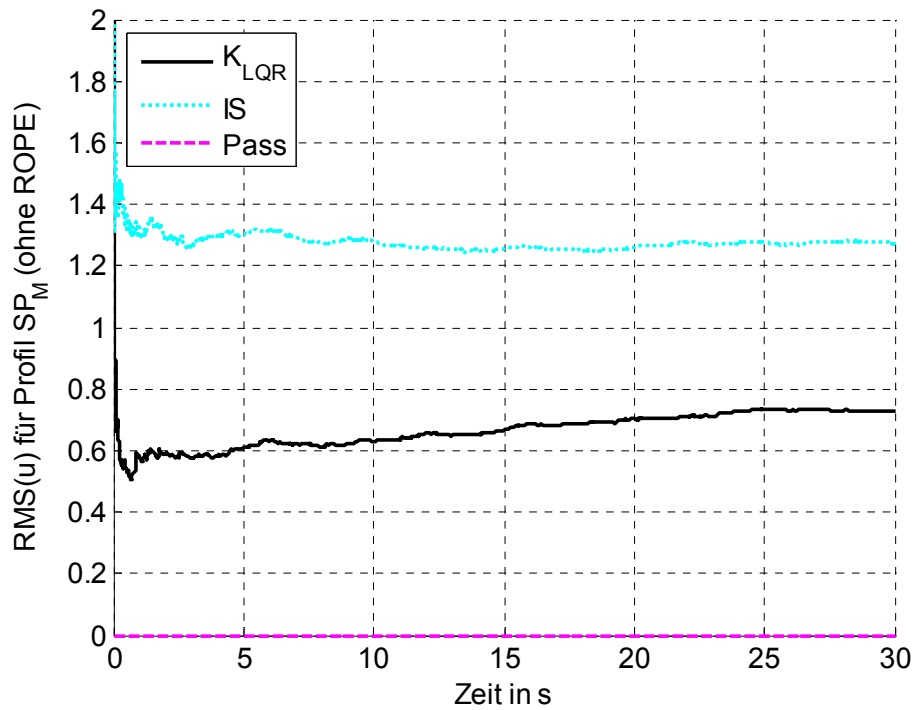


Abbildung 6-5: RMS(u) Profil SP_M – Vergleich mit passivem Modell

	Ansatz	τ_{3LO}	RMS(x_1)	x_{1max}	J_{Komf}	J_{Sich}	F_{max}	RMS(P)
SP_G	K_{LQR}	0,00	0,003	0,009	0,90	129	127	4
	IS	0,00	0,004	0,012	0,43	88	141	13
	PASS	0,00	0,002	0,009	1,11	143	0	0
SP_S	K_{LQR}	0,00	0,007	0,023	1,29	213	237	18
	IS	0,00	0,009	0,027	0,98	190	304	33
	PASS	0,00	0,006	0,023	1,67	231	0	0
SP_M	K_{LQR}	0,00	0,013	0,045	1,80	334	403	51
	IS	0,00	0,015	0,049	1,75	331	411	71
	PASS	0,00	0,012	0,040	2,43	354	0	0
SP_L	K_{LQR}	0,22	0,021	0,076	2,47	500	582	118
	IS	0,31	0,023	0,073	2,71	509	433	130
	PASS	0,53	0,020	0,064	3,41	522	0	0
SP_X	K_{LQR}	1,33	0,030	0,107	3,08	673	764	217
	IS	1,53	0,032	0,094	3,64	680	435	193
	PASS	1,85	0,028	0,092	4,32	688	0	0
SW	K_{LQR}	0,00	0,007	0,045	1,19	217	391	25
	IS	0,00	0,010	0,071	1,18	236	421	54
	ROPE	0,00	0,007	0,047	1,61	233	0	0

Tabelle 6-1: Kennzahlen für Simulationen passiv und innere Schleife

Für eine nähere Betrachtung von Komfort und Sicherheit zeigen Abbildung 6-6 bzw. Abbildung 6-8 die Performanzmaße J_{Komf} und $RMS(x_1)$ des passiven Modells für die Anregungen SP_S bzw. SP_L . Diesen Diagrammen werden die Simulationsergebnisse des komfortorientierten, aggressiven Regelungsansatzes (RK) gegenübergestellt, s. Abbildung 6-7 und Abbildung 6-9. Neben dem nichtlinearen Regelgesetz (mit ROPE gekennzeichnet) werden auch je die Ergebnisse der Referenzreglerentwürfe SOR und KOR allein gezeigt. In analoger Weise wird in Abbildung 6-10 und Abbildung 6-11 der Sicherheitsindex für SP_X untersucht, der für zunehmende Lift-Off-Zeiten eine immer größere Bedeutung bekommt. Die Kennzahlen aller Simulationen werden in Tabelle 6-2 gegenübergestellt.

	Ansatz	τ_{3LO}	$RMS(x_1)$	x_{1max}	J_{Komf}	J_{Sich}	F_{max}	$RMS(P)$
SP_G	KOR	0,00	0,006	0,020	0,26	88	321	18
	SOR	0,00	0,005	0,018	0,40	91	281	13
	ROPE	0,00	0,006	0,020	0,27	87	312	18
SP_S	KOR	0,00	0,012	0,040	0,36	194	614	68
	SOR	0,00	0,011	0,035	0,70	177	529	43
	ROPE	0,00	0,012	0,038	0,44	183	571	57
SP_M	KOR	0,05	0,021	0,072	0,56	364	985	193
	SOR	0,00	0,018	0,062	1,18	303	829	111
	ROPE	0,00	0,019	0,062	0,84	322	909	139
SP_L	KOR	0,71	0,034	0,109	0,82	589	1455	429
	SOR	0,07	0,029	0,096	1,80	463	1044	239
	ROPE	0,08	0,029	0,095	1,47	489	1217	275
SP_X	KOR	3,39	0,046	0,151	1,12	834	2043	786
	SOR	0,82	0,039	0,126	2,38	619	1384	410
	ROPE	0,99	0,039	0,135	2,11	647	1525	449
SW	KOR	0,00	0,010	0,061	0,42	283	724	104
	SOR	0,00	0,009	0,053	0,75	209	654	59
	ROPE	0,00	0,010	0,060	0,51	232	693	78

Tabelle 6-2: Kennzahlen für Simulationen mit Ansatz (RK)

Die Ergebnisse zeigen: Wie gewünscht, verhält sich der nichtlineare ROPE-Regler für kleine Anregungen ähnlich wie der KOR, der den Komfortindex im Vergleich zum passiven Modell für SP_G um 78 % reduziert (ROPE selbst erreicht 74 %, SOR nur 58 %), bei SP_M sind es mit 75 % noch fast genauso viel. Für hohe Anregungen hingegen, z.B. im Falle von SP_L , verhält sich der ROPE ähnlich wie der SOR. So erhöhen ROPE und SOR gleichauf den RMS-Wert von x_1 um nur ca. 45 % im Vergleich zum passiven Modell, während KOR selbigen um 70 % steigert. Eine gewisse Erhöhung von $RMS(x_1)$ ist allerdings bei quasi jedem Regelgesetz unvermeidbar.

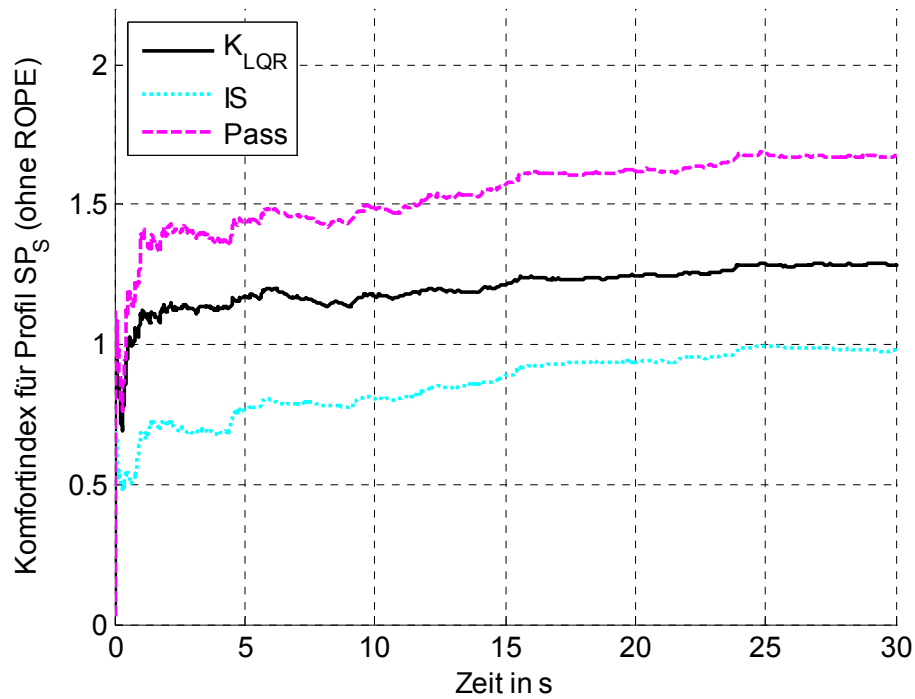


Abbildung 6-6: Komfortindex Profil SP_S – Vergleich mit passivem Modell

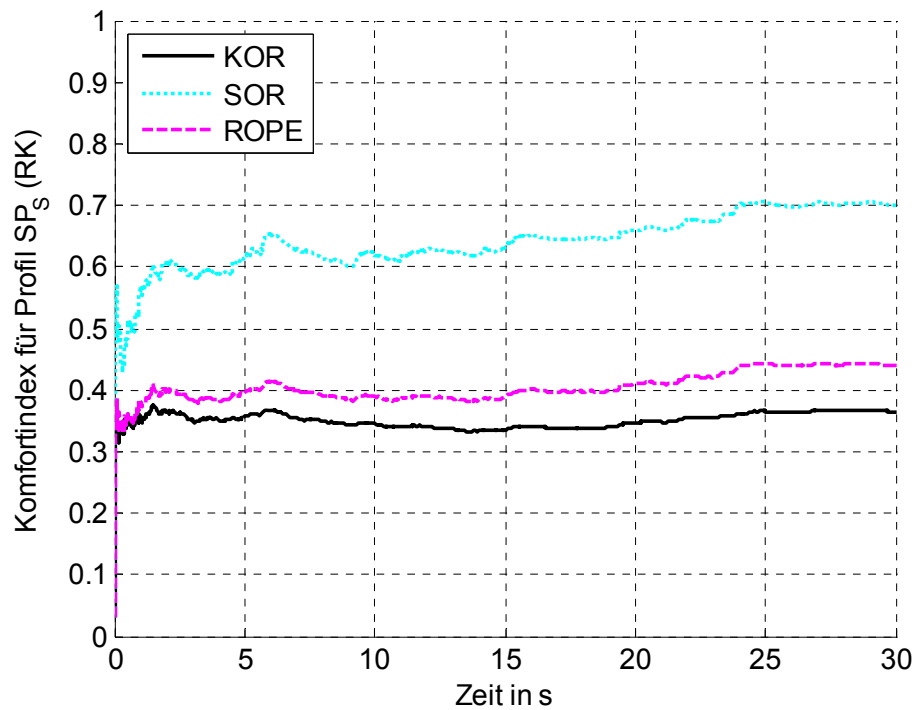


Abbildung 6-7: Komfortindex Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (RK)

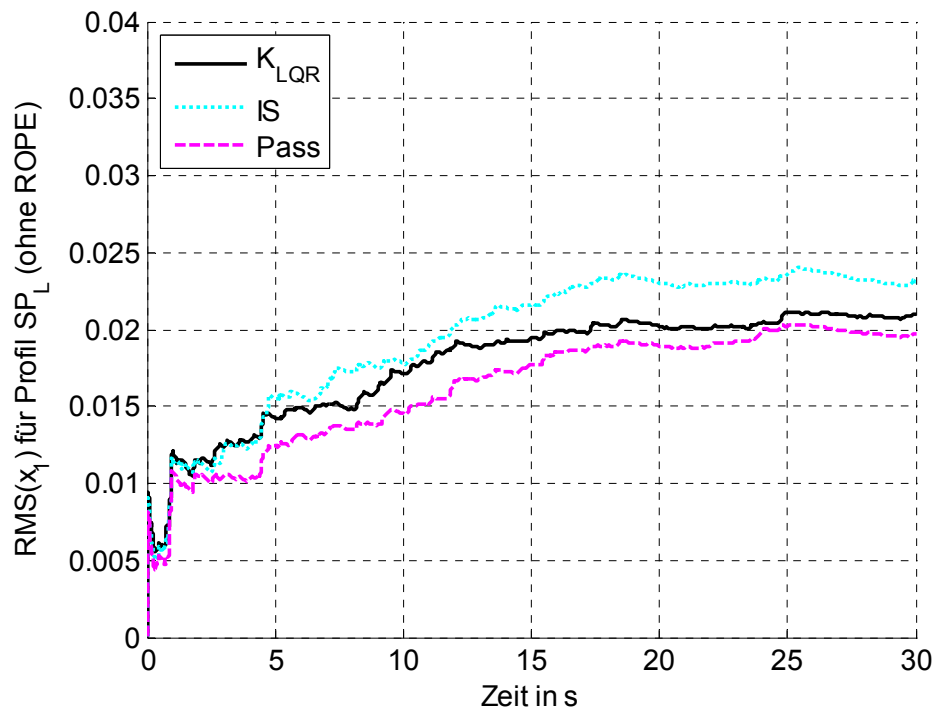


Abbildung 6-8: $RMS(x_1) SP_L$ – Vergleich mit passivem Modell

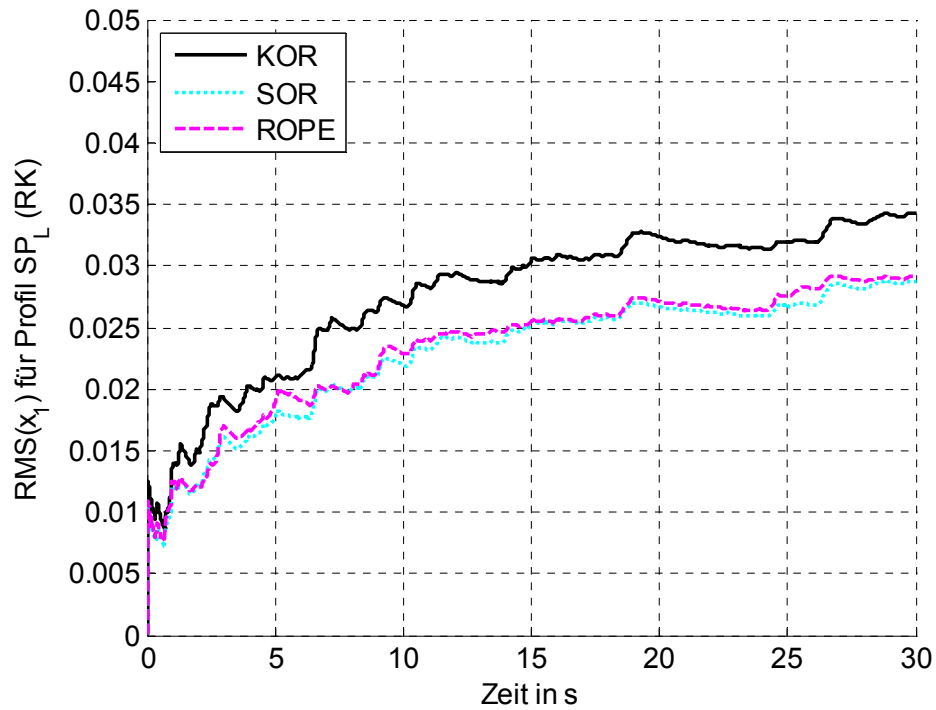


Abbildung 6-9: $RMS(x_1)$ Profil SP_L – Vergleich mit ROPE (RK)

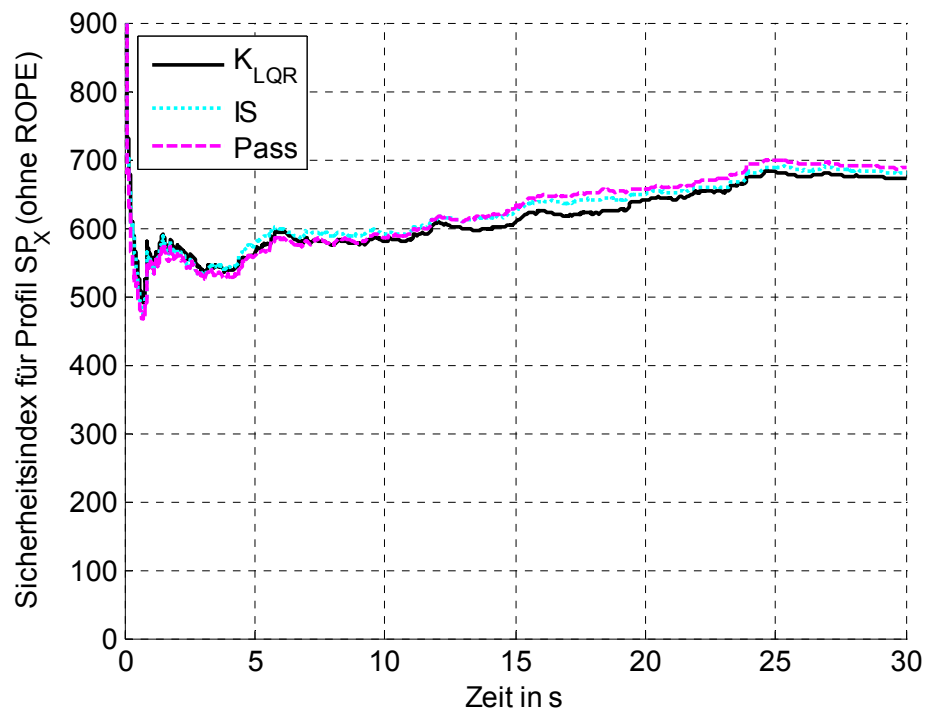


Abbildung 6-10: Sicherheitsindex Profil SP_X – Vergleich mit passivem Modell

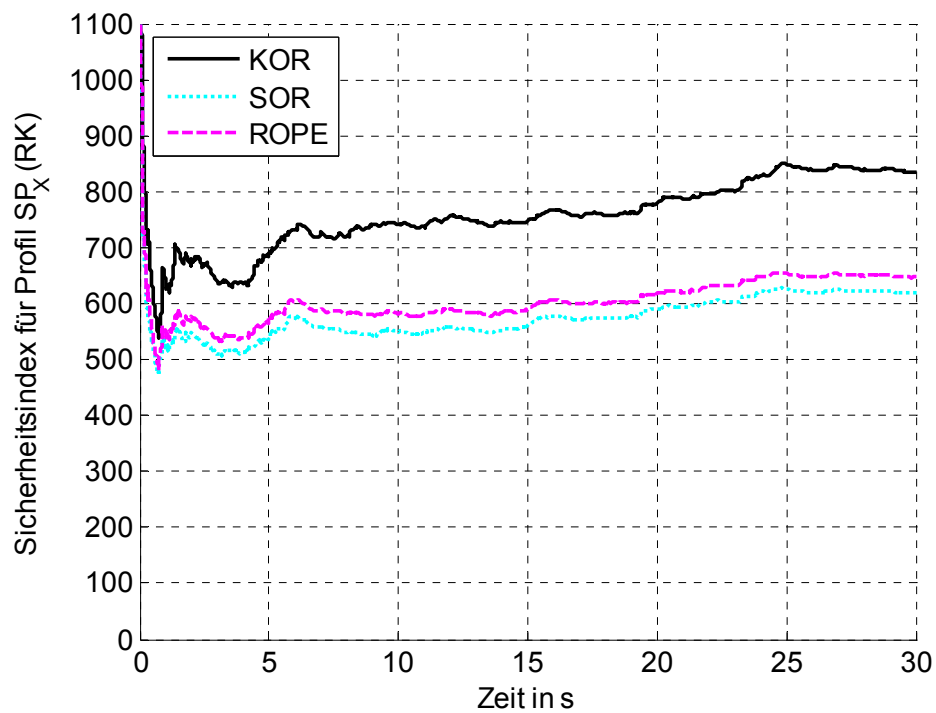


Abbildung 6-11: Sicherheitsindex Profil SP_X – Vergleich mit ROPE (RK)

Wird der Sicherheitsindex für SP_X betrachtet, der beim (RK)-Entwurf (im Gegensatz zu x_1) explizit berücksichtigt wurde, so ergibt sich ein noch deutlicheres Bild: während SOR und ROPE J_{Sich} im Vergleich zum passiven Modell reduzieren können (um 10 % bzw. um 6 %), wird dieser durch KOR deutlich erhöht (um 21 %). Speziell auch das Lift-Off-Zeitmaß τ_{3LO} spiegelt dieses Verhalten wieder: es beträgt beim passiven System 1,85 s, bei KOR 3,39 s, bei SOR und ROPE aber nur 0,92 s bzw. 0,99 s.

Als Zwischenfazit kann gesagt werden, dass der (RK)-Ansatz die Erwartungen insgesamt sehr gut erfüllt. Es gelingt ihm, die positiven Eigenschaften von KOR und SOR zu kombinieren, welche jeweils direkt vergleichbar mit klassischen Entwürfen sind. Für schwache Anregungen wird der Komfort zu Lasten der dann unwichtigen Sicherheitsmaße gesteigert, für starke Anregungen verhält es sich genau umgekehrt. Wie bereits erwähnt, wurde beim Ansatz (RK) aber nicht explizit versucht, den Aufbaufederweg zu begrenzen. Der Ansatz (RS) soll diesem sicherheitskritischen Umstand mit einer weniger aggressiven Regelung begegnen. Außerdem zeigen die Werte für Aktorkraft, Aktorspannung u und elektrische Gesamtleistung, dass (RK) eher verschwenderisch mit selbigen umgeht (indem er ca. doppelt so hohe Werte wie K_{LQR} erzeugt). Der besonders robuste Ansatz (RR) wird hierbei durch seine starke Gewichtung der Aktorzustände bzw. des Stellsignals beim LQR-Entwurf Abhilfe schaffen.

6.3 Ergebnisse sicherheitsorientierter Regler (RS)

Ein Hauptziel des sicherheitsorientierten Ansatzes (RS) war, den Aufbaufederhub $x_1(t)$ betragsmäßig zu beschränken, so dass zumindest bis zur Anregung SP_M die am Prüfstand zulässige Höchstgrenze $H_{max} = 0,05$ m eingehalten wird. Während das passive Modell ein $x_{1max} = 0,040$ erreicht, kann (RK) das gesteckte Ziel mit $x_{1max} = 0,062$ (für ROPE und SOR, $x_{1max} = 0,072$ für KOR) nicht einhalten. Im Gegensatz hierzu zeigen Tabelle 6-3 und Abbildung 6-12, dass der ROPE-Regler (RS) mit $x_{1max} = 0,043$ fast denselben Wert wie das passive Modell erreicht und auch den RMS-Wert von x_1 im Vergleich zu (RK) senken kann. Der x_{1max} -Unterschied zum KOR ist bei (RS) auch deutlich stärker (ca. 34 %) ausgeprägt.

Der Sicherheitsindex bleibt beim ROPE (RS) für die Profile SP_X und SP_L relativ zum passiven Modell fast unverändert, die Lift-Off-Zeit τ_{3LO} nimmt hingegen durch den ROPE um 21 % bei SP_X und um sogar 42 % bei SP_L ab. Dieses Missverhältnis zwischen J_{Sich} und τ_{3LO} kann leicht erklärt werden: der nichtlineare ROPE-Regler versucht über einen möglichst großen Bereich um die Gleichgewichtslage herum, den Komfort zu Lasten des Sicherheitsindex zu maximieren. Erst für kritische Werte der dynamischen Radlast gewinnt der sicherheitsorientierte Referenzregler die Überhand, wodurch die Lift-Off-Zeiten reduziert werden. Letztendlich ist damit τ_{3LO} das wichtigere Sicherheitsmaß, da eine zu starke Reduzierung von J_{Sich} bei bereits kleineren bis mittleren Anregungen die Komforteigenschaften negativ beeinflussen würde.

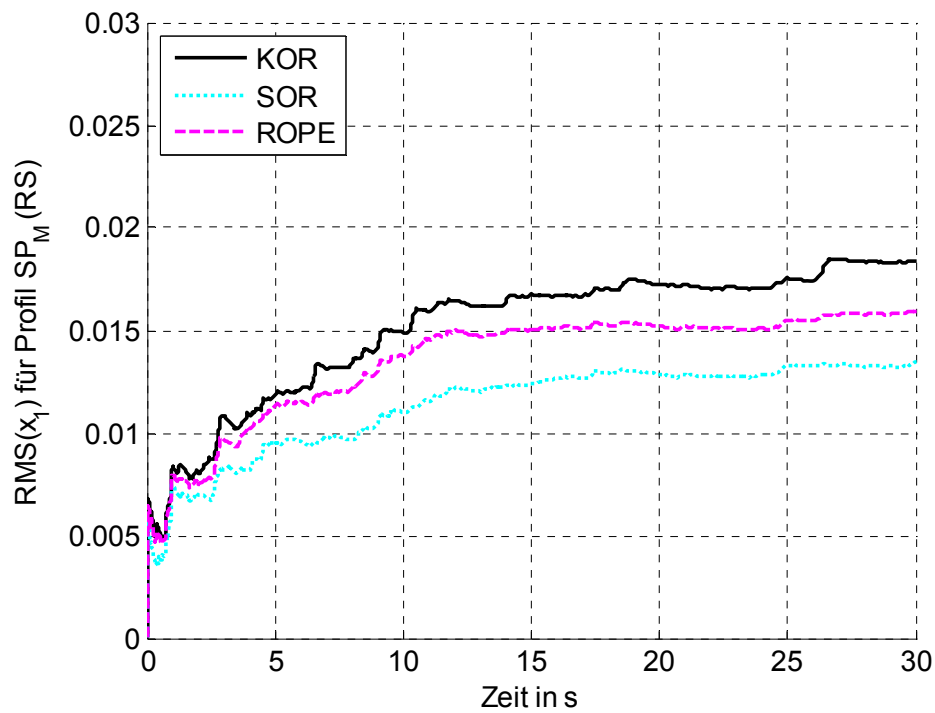


Abbildung 6-12: RMS(x_1) Profil SP_M – Vergleich mit ROPE (RS)

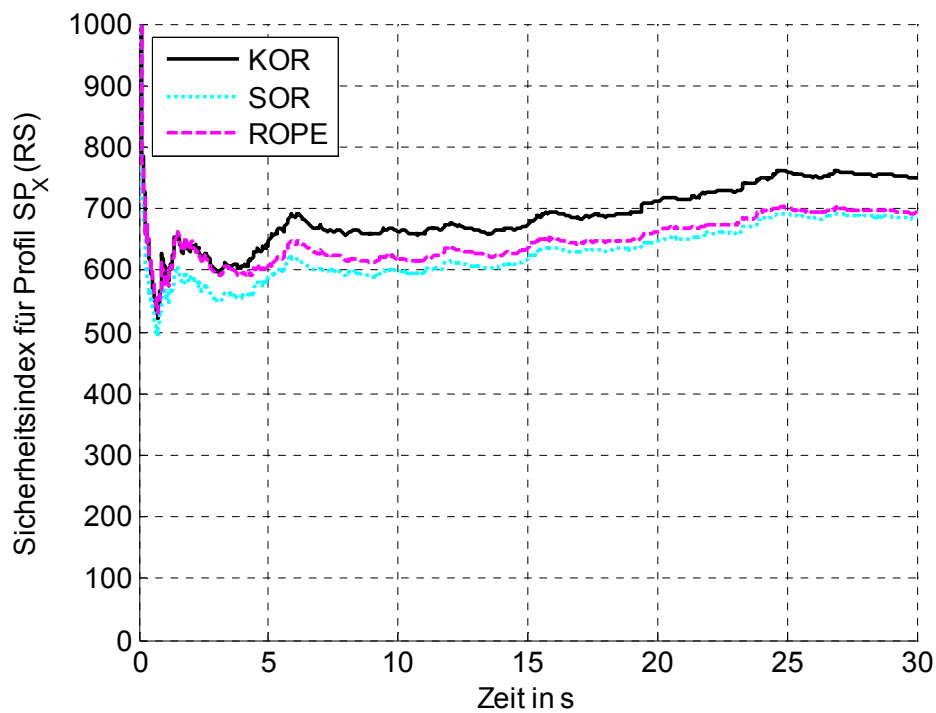


Abbildung 6-13: Sicherheitsindex Profil SP_X – Vergleich mit ROPE (RS)

Trotz der stärkeren Ausrichtung auf Sicherheit in Form von kleineren Werten von x_1 führt auch (RS) zu einer deutlichen Komfortsteigerung relativ zum passiven Modell: J_{Komf} wird bei SP_M um 42 %, bei SP_G sogar um 71 % verringert. Abbildung 6-14 und Abbildung 6-15 zeigen zum Vergleich auch die Komfortindizes für verschiedene Chassismassen, wobei die Gleichgewichtslagen in den Simulationen jeweils entsprechend angepasst wurden. Im Vergleich zu (RK) stellen sich bei (RS) aber auch – genau wie allgemein bei SOR gegenüber KOR – deutlich geringere Kraft- und Leistungskennwerte ein (je um fast 40 % bei SP_L und ca. 30 % bei SW). Ein weiteres interessantes Ergebnis präsentiert Tabelle 6-4: wird die innere Schleife, hier für SP_M , bei der ROPE-Regelung ausgeschaltet, so ergeben sich für die meisten Kennzahlen geringfügig schlechtere Werte. Da die Unterschiede aber eher klein sind, kann die Vermutung aus Kapitel 5.3 bestätigt werden, wonach die innere Schleife vor allem für den Entwurf relevant, für die spätere Regelung aber von untergeordneter Bedeutung ist.

	Ansatz	τ_{3LO}	RMS(x_1)	x_{1max}	J_{Komf}	J_{Sich}	F_{max}	RMS(P)
SP_G	KOR	0,00	0,005	0,017	0,47	99	271	13
	SOR	0,00	0,003	0,011	0,69	110	179	7
	ROPE	0,00	0,005	0,015	0,49	100	244	12
SP_S	KOR	0,00	0,011	0,038	0,71	198	508	47
	SOR	0,00	0,008	0,025	1,12	202	300	22
	ROPE	0,00	0,010	0,029	0,81	197	433	40
SP_M	KOR	0,00	0,018	0,065	1,10	350	889	130
	SOR	0,00	0,013	0,045	1,73	335	532	58
	ROPE	0,00	0,016	0,043	1,42	339	670	95
SP_L	KOR	0,44	0,029	0,101	1,59	550	1143	288
	SOR	0,27	0,021	0,069	2,52	510	741	133
	ROPE	0,31	0,023	0,067	2,32	520	763	180
SP_X	KOR	1,95	0,039	0,138	2,04	751	1425	506
	SOR	1,41	0,028	0,094	3,25	685	878	237
	ROPE	1,46	0,030	0,093	3,13	693	824	280
SW	KOR	0,00	0,008	0,056	0,72	244	696	66
	SOR	0,00	0,007	0,051	1,10	224	481	31
	ROPE	0,00	0,008	0,052	0,90	254	475	55

Tabelle 6-3: Kennzahlen für Simulationen mit Ansatz (RS)

	Ansatz	τ_{3LO}	RMS(x_1)	x_{1max}	J_{Komf}	J_{Sich}	F_{max}	RMS(P)
SP_M	mit IS	0,00	0,016	0,043	1,42	339	670	95
	ohne IS	0,00	0,016	0,042	1,57	366	661	96
	Pass	0,00	0,012	0,040	2,42	354	0	0

Tabelle 6-4: Kennzahlen für Simulationen mit Ansatz (RS) ohne IS

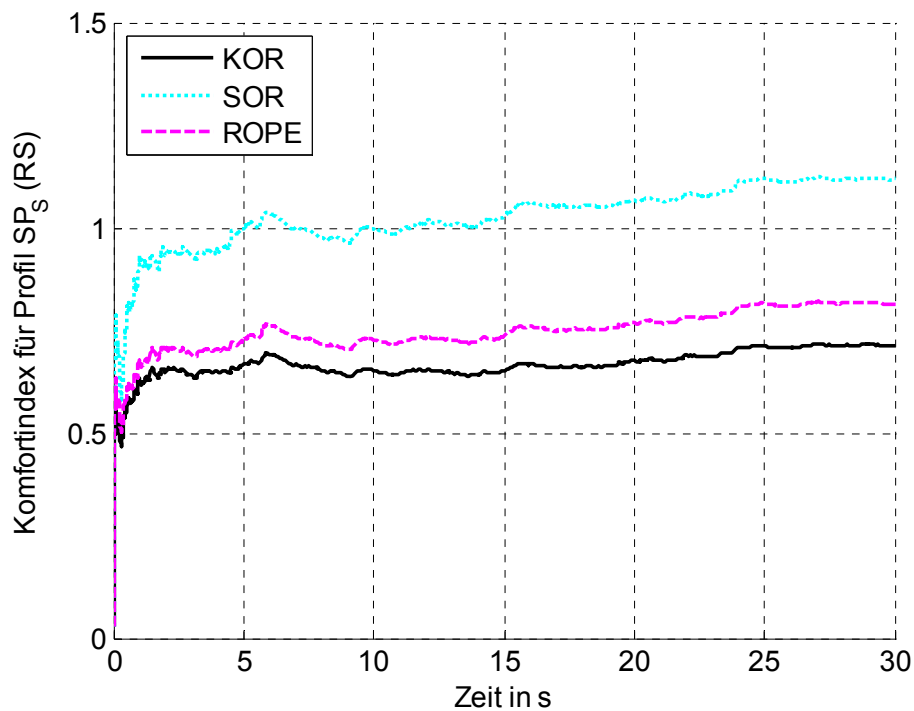


Abbildung 6-14: Komfortindex Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (RS) für $m_C = 90$

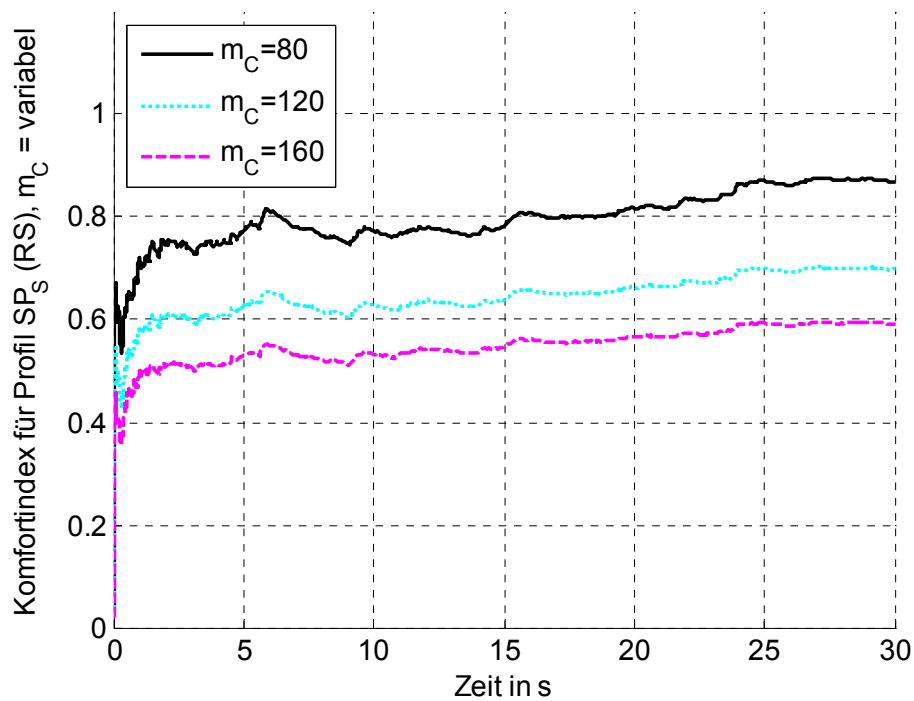


Abbildung 6-15: Komfortindex Profil SP_S – nur ROPE (RS) für $m_C = \text{variabel}$

6.4 Ergebnisse robustheitsorientierter Regler (RR)

Die Bewertung des robustheitsorientierten Ansatzes (RR) läuft außer Konkurrenz der anderen beiden ROPE-Regler, da (RR) nur zusammen mit dem Kalman-Filter aus Kapitel 6.1 eingesetzt wird und – wie in Kapitel 2 erwähnt – hierbei auch eine deutlich schnellere Aktordynamik zum Einsatz kam (mit einem Übertragungspol bei -250 anstatt -15,8, s. Tabelle 2-1). Diese konnte bei (RK) und (RS) noch nicht berücksichtigt werden. Die Simulationen, welche wie bei der späteren Messung nur über 25 s laufen, dienen dazu, die Performanz von (RR) am Prüfstand zu validieren. Insgesamt verhalten sich (RS) und (RR) aber ähnlich, nur dass (RS) den Federhub speziell höheren Anregungen stärker berücksichtigt, (RR) dafür in Verbindung mit dem schnelleren Aktor deutlich kleinere Spannungssignale u fordert.

Die Tabelle 6-5 gibt einen Überblick über die Simulationskennzahlen von (RR). Fast alle Werte bewegen sich dabei in einem ähnlichen Bereich wie die Kennzahlen der (RS)-Regelung (mit altem Aktor und ohne Kalman-Filter) aus Kapitel 6.3. Obwohl der maximale Federhub $x_{1\max}$ auch bei SP_M mit $x_{1\max} = 0,042$ unter der geforderten Schranke von 5 cm liegt, wurden aus Sicherheitsgründen nur die Profile SP_G und SP_S am Prüfstand getestet. Abbildung 6-16 bis Abbildung 6-17 geben einen exemplarischen Überblick über den Komfortindex und $\text{RMS}(x_1)$ für (RR) bei einer Anregung SP_S . Diese sollen im folgenden Kapitel mit den Prüfstandsmessungen verglichen werden. Hierbei zeigt sich auch, ähnlich wie bei (RS), dass der SOR für kleine Anregungen u.U. zu einem leicht schlechteren Sicherheitsindex führen kann als der KOR. Dies kann damit erklärt werden, dass der SOR zum einen nicht für den Bereich um die Gleichgewichtslage herum entworfen wurde, zum anderen bei (RS) und (RR) der Hauptfokus auf $x_{1\max}$ und nicht auf J_{Sich} liegt. Außerdem verlangt der SOR stets die klar kleinsten Stellgrößen, weshalb hier beim Entwurf vernachlässigte Kräfte (Coulombreibung und Reifendämpfung) höheren Einfluss haben können.

	Ansatz	τ_{3LO}	$\text{RMS}(x_1)$	$x_{1\max}$	J_{Komf}	J_{Sich}	F_{\max}	$\text{RMS}(P)$
SP_G	KOR	0,00	0,005	0,013	0,39	93	256	14
	SOR	0,00	0,003	0,010	0,71	111	188	7
	ROPE	0,00	0,005	0,012	0,43	93	225	13
SP_S	KOR	0,00	0,010	0,025	0,67	195	491	45
	SOR	0,00	0,007	0,023	1,16	202	333	23
	ROPE	0,00	0,010	0,025	0,78	192	439	40
SP_M	KOR	0,00	0,018	0,048	1,08	354	818	124
	SOR	0,00	0,013	0,042	1,76	337	609	64
	ROPE	0,00	0,016	0,042	1,37	342	707	100

Tabelle 6-5: Kennzahlen für Simulationen mit Ansatz (RR)

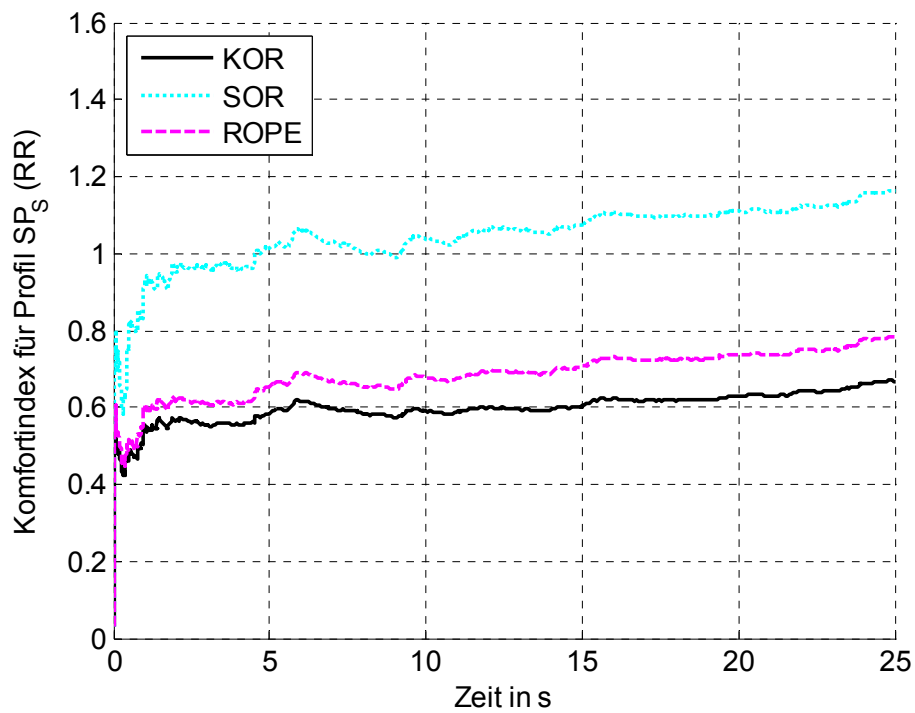


Abbildung 6-16: Komfortindex Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (RR)

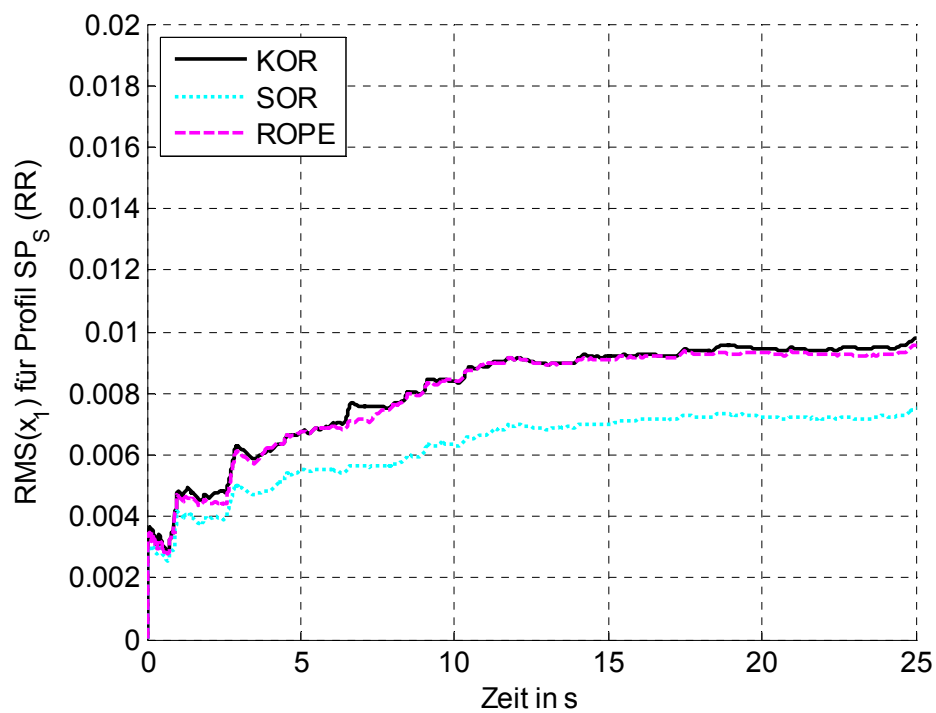


Abbildung 6-17: RMS(x_1) Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (RR)

6.5 Verifizierung am Viertelfahrzeugprüfstand

Nach der Autocodierung des entsprechenden Simulink-Modells wurde der Ansatz (RR) (also Regler, Kalman-Filter mit Parallelmodell, Anregungsgenerierung, Auswertung) in der exakt selben Form wie in Kapitel 6.4 auf einer dSPACE-Karte am Prüfstand getestet, welche mit einer Abtastfrequenz von 1000 Hz betrieben wurde. Die Ergebnisse in Abbildung 6-18 bis Abbildung 6-19 können direkt mit den Ergebnissen der (RR)-Simulation aus Abbildung 6-16 und Abbildung 6-17 verglichen werden. Zudem zeigt die Tabelle 6-6 alle relevanten Kennzahlen der Messung. Bzgl. der Komfort- und Sicherheitsindizes stimmen die Ergebnisse von Messung und Simulation für SP_S tendenziell gut überein, die etwas schlechteren Werte am Prüfstand können durch Messrauschen und Modellfehler begründet werden. Der SOR weist bei der Messung sogar etwas bessere Komfoteigenschaften als in der Simulation auf (evtl. könnte er für das Prüfstandsmodell noch optimiert werden). Allein $RMS(x_1)$ ist bei der Messung deutlich kleiner als in der Simulation. Dies ist leicht erklärbar, wenn der Schätzfehler des Kalman-Filters bei der ROPE-Regelung betrachtet wird: obwohl nach 25 s nur ein gemessener Wert $RMS(x_1) = 0,0031$ vorliegt, beträgt der vom Kalman-Filter geschätzte Wert mit 0,0064 mehr als das Doppelte. Dadurch richtet sich der Regler stärker als nötig auf die Senkung von x_1 aus, was teilweise auch für die obigen Abweichungen von J_{Komf} und J_{Sich} verantwortlich sein könnte. Das Verhältnis der SOR-, KOR- und ROPE-Werte bzgl. $RMS(x_1)$ bzw. x_{1max} hingegen ist wieder sehr plausibel und entspricht tendenziell gut den Erwartungen.

Für die anderen Zustände liefert der Kalman-Filter ebenfalls akzeptable Werte: so wird z.B. der (über eine Kraftmessdose bestimmte, aber nicht für die Schätzung verwendete) Sicherheitsindex von $J_{Sich} = 280$ mit ca. 300 relativ genau geschätzt, wobei eine Optimierung des EKF's die Schätzung sicherlich noch stark verbessern würde. Insgesamt können jedoch die Funktionalität des nichtlinearen Reglers sowie die Eigenschaft des ROPE, die Vorteile von KOR und SOR tendenziell in sich zu vereinigen, auch durch die Prüfstandsmessung bestätigt werden. Trotz bestimmter Abweichungen, die durch eine Anpassung des Kalman-Filters an den realen Prüfstand verringerbar wären, dürfen die Simulationsergebnisse der vorigen Kapitel deshalb (im Rahmen der hier gezeigten, möglichen Prüfstandstests) als qualitativ validiert betrachtet werden. Als positiver Nebeneffekt ergibt sich zudem am Prüfstand, dass der Energieverbrauch – vermutlich auch auf Grund der überzeichneten x_1 -Regelung – deutlich geringer als in der Simulation ausfällt. Der RMS-Wert der Leistung beträgt nur 28 W bei einem betragsmäßigen Maximum von 133 W während des gesamten Tests. Das betragsmäßige Maximum der Aktorspannung u liegt bei SP_S mit 1,16 V weit unter dem möglichen Höchstwert von 10 V. Nur die maximale Aktorkraft ist in der Messung deutlich höher als in der Simulation, was auf temporär größere Schätzfehler zurückzuführen ist, aber angesichts eines kurzzeitig erlaubten Kraftwerts von 2 kN, s. (1-6), kein Problem darstellt.

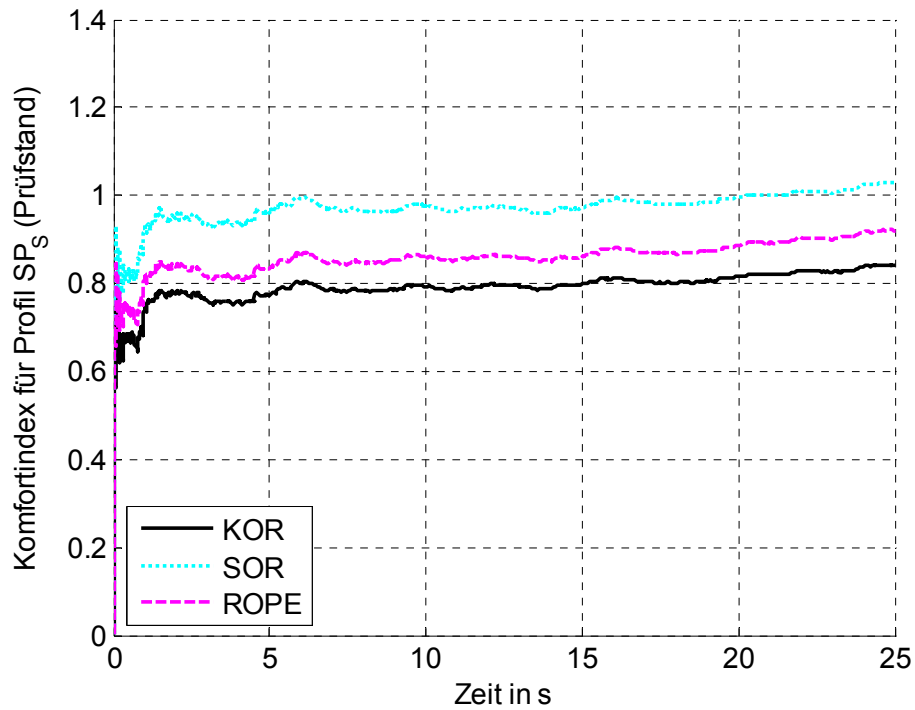


Abbildung 6-18: Komfortindex Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (Messung)

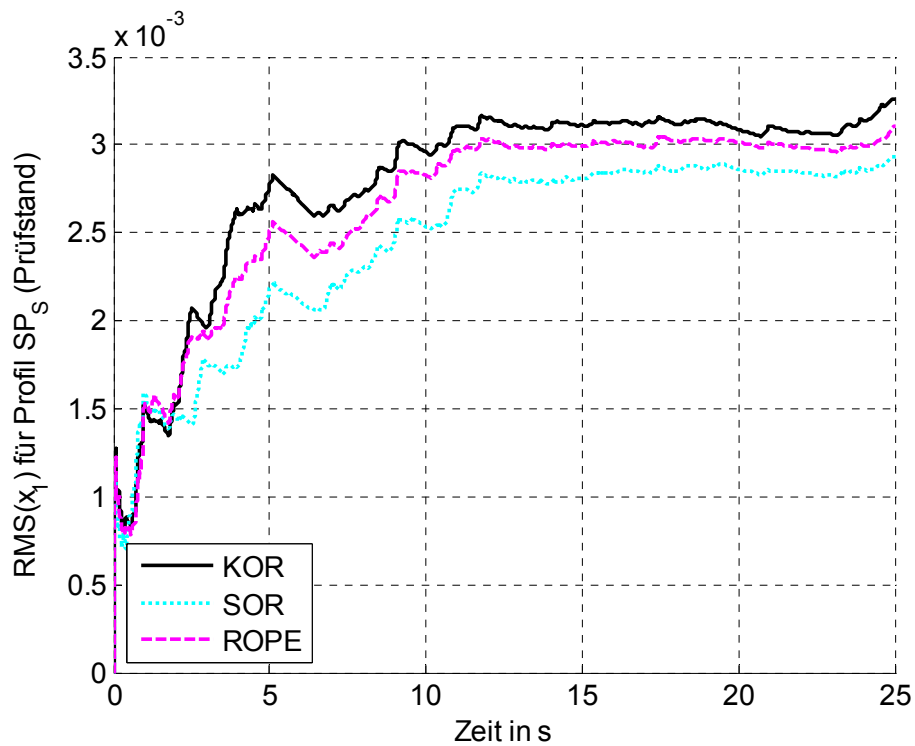


Abbildung 6-19: $RMS(x_1)$ Profil SP_S – Vergleich mit ROPE (Messung)

	<i>ROPE SP_S</i>
F_{max}	1115
RMS (F)	279
u_{max}	1,16
RMS (u)	0,40
RMS (P)	28
τ_{3LO}	0,00

	Ansatz	RMS(x_1)	x_{1max}	J_{Komf}	J_{Sich}
SP_G	<i>KOR</i>	0,0033	0,007	0,60	166
	<i>SOR</i>	0,0029	0,004	0,71	159
	<i>ROPE</i>	0,0031	0,005	0,63	165
SP_S	<i>KOR</i>	0,0023	0,010	0,84	304
	<i>SOR</i>	0,0013	0,009	1,03	280
	<i>ROPE</i>	0,0019	0,009	0,92	279

Tabelle 6-6: Kennzahlen für Messungen mit Ansatz (RR)

7 Alternative Reglerentwürfe

7.1 Global stabile Ersatzregleriteration mittels IQC-Analyse

Eine Schwäche der GBL-Theorie besteht darin, dass trotz tendenziell aussagekräftiger Analyseergebnisse keine globale Stabilität absolut garantiert werden kann. Auf Basis des Ansatzes (RS) wird deshalb der ROPE-Entwurf abgewandelt, um in Verbindung mit der IQC-Analyse ein global stabiles, nichtlineares Stellgesetz für das nichtlineare Streckenmodell abzuleiten – der Entwurf findet dabei direkt im Originalsystem statt, nicht in seiner GBL-Darstellung. Auf die Berücksichtigung aller Modellunsicherheiten wird hierbei zu Lasten der Robustheit verzichtet, da die numerische IQC-Berechnung bei zu umfangreichen Forderungen meist nicht konvergiert, s. Kapitel 3.7 für alle weiteren Grundlagen.

Die diskreten Reglerwerte K_{i0} , welche die Reglerfamilie über den Zustandsraum parametrieren, sollen aber in Form fiktiver Unsicherheiten beibehalten werden. Exakt dasselbe Prinzip wurde bei der Anwendung der μ -Analyse auf die GBL-Familie herangezogen, nur dass dort die GBL-Verstärkungen $K_{i,GBL}$ mit dem SOR als Mittelwert betrachtet wurden. Hingegen ergeben sich hier die Mittelwerte des jeweiligen unsicheren Wertebereichs als Durchschnitt zwischen SOR und KOR, die Unsicherheitsgewichte η_{Ki} aus der Differenz von SOR und Mittelwert. Bei K_3 werden (in leicht konservativer Weise) auf Grund der asymmetrischen Reglerkennlinie für positive und negative Werte von x_3 je die betragsmäßigen Maxima für die Bestimmung von Mittelwert und Abweichung verwendet.

Als einzige wirkliche Modellunsicherheit wird die in Kapitel 5.5.1 definierte Unsicherheit δ_{c_R} der Reifenfederkonstante beibehalten, wobei δ_{c_R} bei einer genaueren Reifenmodellierung auch als Trimpunktunsicherheit $\delta_{TP,x_3}(x_3)$ aufgefasst werden könnte. Die fiktive Reglerunsicherheit δ_{K_3} aus (5-33) müsste dann ebenfalls in $\delta_{TP,x_3}(x_3)$ überführt werden, wodurch zwischen den unsicheren Parametern $K_3(\delta_{TP,x_3})$ und $c_R(\delta_{TP,x_3})$ eine Kopplung entstehen würde. Der Schwankungsbereich der effektiven, zeitvarianten Reifenfedersteifigkeit $c_R(t) := F_{c_R}(t) / x_3(t), |x_3| > 0$ wird hier – durch ein analoges Vorgehen wie bei der GBL-Unsicherheitsmodellierung aus Kapitel 5.5.1 – zu ± 16000 für das originale, nichtlineare Viertelfahrzeugmodell bestimmt, um wieder einen guten Kompromiss zwischen der Abdeckung aller möglichen Werte und einem zu hohen Konservatismus zu erzielen.

Im Folgenden wird der Ersatzreglerentwurf exemplarisch für die nominelle Masse $m_C = 90$ durchgeführt, wobei der zugehörige ROPE-Regler (RS) als Ausgangslage dient. Die LFR-Matrizen des Regelkreises lassen sich für die oben definierten Unsicherheiten in analoger Weise wie die für die μ -Analyse benutzten Matrizen aus Abbildung 5-16 bestimmen, indem alle Unsicherheitsvariablen außer δ_{Ki} und δ_{c_R} deaktiviert („auf Null gesetzt“) werden. Anstatt der sechs parametrischen Unsicherheiten auf der Diagonalen von A_M (δ_{K_5} wurde ja

gemäß den Kapiteln 5.5.4 und 5.7.3 als 0 definiert) werden nun aber IQC-Bedingungen für zeitvariante Skalare gemäß (3-62) gesetzt. Diese IQC-Bedingungen erlauben, dass die unsicheren Parameter beliebig schnell ihren Wert innerhalb der durch die Unsicherheitsmodellierung gesetzten Schranken ändern dürfen, womit auch versteckte nichtlineare Rückführungen erfasst werden. Deshalb ist hier auch keine Betrachtung innerhalb der GBL-Familie mehr notwendig.

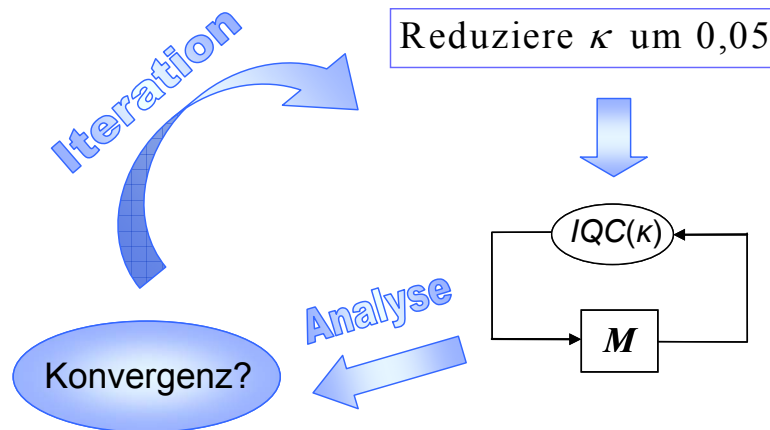


Abbildung 7-1: IQC-Schaltbild für Ersatzregleriteration

Mit Hilfe der IQC-Toolbox wird nun überprüft, ob für das modellierte unsichere System Stabilität nachgewiesen werden kann, indem der IQC-Algorithmus gegen eine endliche Schranke ε konvergiert und damit die Bedingung (3-61) erfüllt. Solange dies nicht der Fall ist, werden die fiktiven Regler-Unsicherheitsgewichte η_{ki} gleichmäßig, iterativ über einen Faktor $\kappa \in]0; 1]$ verkleinert. Anschaulich gesprochen werden dadurch die Werte der „neuen“ KOR und SOR denen des Mittelwerts sukzessiv näher gebracht, wodurch der nichtlineare ROPE-Regler immer mehr gegen eine lineare Kompromisslösung konvergiert. Die gesamte Ersatzregleriteration wird in Abbildung 7-1 zusammengefasst. Bereits für einen Wert $\kappa = 0,90$ konnte mit $\varepsilon = 4988$ schließlich globale Stabilität nachgewiesen werden, wodurch sich die neuen Referenzregler

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{KOR,neu} &= [-0,0530 \quad 0,1371 \quad -0,8214 \quad 0,0049 \quad 1,9501 \quad 0,3804] \cdot 10^3 \\ \mathbf{K}_{SOR,neu} &= [0,3842 \quad 0,0983 \quad -0,1845 \quad 0,0011 \quad 1,9501 \quad 0,3153] \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (7-1)$$

ergeben. Abbildung 7-2 zeigt den Komfortindex für eine Simulation des Profils SP_g mit dem neuen Regler, dessen Performanz nur unwesentlich schlechter als die des ursprünglichen (RS)

ist. Trotz des einfach durchführbaren, globalen Stabilitätsnachweises sollten hierbei zwei Punkte nicht vergessen werden:

- ✘ Zum einen musste der Regelkreis zu Gunsten der globalen Stabilität etwas an Performanz einbüßen. Speziell für aggressivere Regler könnte das Performanzdefizit wesentlich höher ausfallen.
- ✘ Zum anderen gilt der Begriff „global stabil“ nur gegenüber dem nominellen Modell mit c_R -Unsicherheit. Alle anderen Unsicherheiten werden vernachlässigt, weshalb keine Aussagen über die globale Stabilität bei weiteren Parameterschwankungen getroffen werden können. Eine Berücksichtigung der wichtigen Aktorunsicherheit würde z.B. im Rahmen der vorgestellten IQC-Iteration zu deutlich konservativeren Ersatzreglern führen bzw. evtl. sogar den Nachweis globaler Stabilität verhindern.

Da aber der neue Regler im vorliegenden Fall dem ursprünglichen sehr ähnlich, nur etwas konservativer ist, wird empfohlen, den Ersatzregler in stabilitätskritischen Situationen zum Einsatz kommen zu lassen (z.B., wenn der RMS-Wert der dynamischen Radlast für eine bestimmte Zeit einen Grenzwert überschreitet). Allgemein könnte ein guter Ansatz sein, bei kritisch wachsender dynamischer Radlast das Regelgesetz immer mehr gegen den linearen Mittelwertsregler konvergieren zu lassen.



Abbildung 7-2: Komfortindex Profil SP_S – IQC-ROPE-Ersatzregler

7.2 Robuste Ersatzregleriteration mittels modifizierter μ -Synthese

Während in Kapitel 7.1 globale Stabilität für ein Modell (fast) ohne Unsicherheiten, aber mit nichtlinearem ROPE-Regler untersucht wurde, soll in diesem Kapitel ein linearer Ersatzregler entworfen werden, der zwar sehr konservativ ist, dafür aber erhöhte Robustheitseigenschaften aufweist. Hierfür soll eine modifizierte μ -Synthese entwickelt werden. Da nur die nominelle Masse $m_C = 90$ betrachtet wird (für andere Massen können eigene Ersatzregler separat berechnet werden) und die Reglerunsicherheiten entfallen, wird die Analyse direkt am nichtlinearen Originalsystem durchgeführt. Die parametrischen GBL-Unsicherheiten werden hierfür vernachlässigt. Dafür wird aber das in Kapitel 5.5.1 eingeführte, dynamische Unsicherheitsgewicht $W_2 = W_{Akt,+20}$ verwendet und sogar noch erweitert: anstatt um 20 % wird die Aktorunsicherheit um 50 % (im Sinne einer pauschalen, konservativen Erfassung aller parametrischen Unsicherheiten) derart multiplikativ erhöht, dass für kleine Frequenzen 72,5 % und für hohe Frequenzen 350 % Amplitudenunsicherheit vorliegen. Zudem wird die Eckfrequenz auf 15 Hz herabgesetzt, so dass bei 25 Hz bereits 173 % Unsicherheit vorliegt. Die Werte wurden bewusst so extrem gewählt, um eine hohe Robustheit gegen alle möglichen Modellfehler zu gewährleisten.

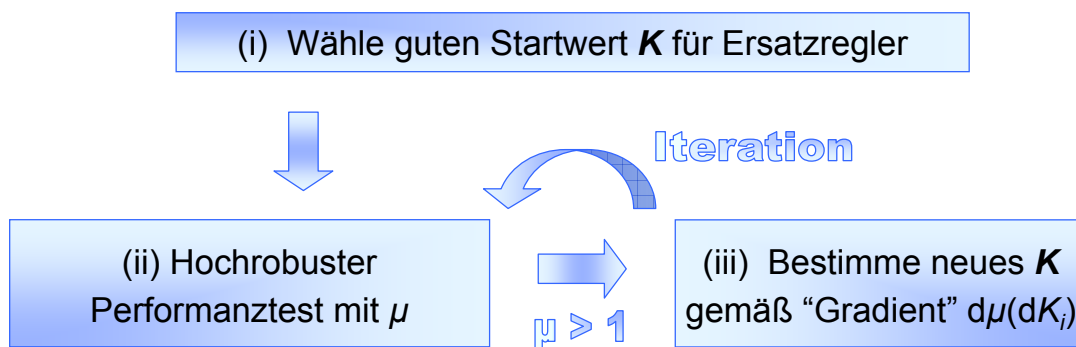


Abbildung 7-3: Ersatzregleriteration mittels modifizierter μ -Synthese

Zur Berücksichtigung der Performanz wird weiterhin die in Kapitel 5.5.3 vorgestellte Gewichtung W_1 der Sensitivitätsfunktion in das System integriert, womit sich ein Unsicherheitsmodell der Regelstrecke mit zwei komplex-skalaren Unsicherheiten Δ_{Akt} und Δ_F (für die Performanz) ergibt. Der Kreis wird nun mit dem (ohnehin bereits relativ robusten) sicherheitsorientierten Referenzregler $K_{RS,SOR}$ geschlossen und in eine LFR gemäß Abbildung 5-16 umgeformt. Darauf aufsetzend wird eine μ -Analyse durchgeführt, die für die konservative Modellierung natürlich keine robuste Stabilität nachweisen kann (es gilt: $\mu = 1,21$). Zu beachten ist aber, dass auf Grund des Sonderfalls (3-55) mit $U = 2$ die Upper Bound dem tatsächlichen Wert von μ identisch ist, da insgesamt nur zwei (nicht wiederholte

und damit unstrukturierte) komplex-skalare Unsicherheiten vorliegen. Dies ist ein entscheidender Punkt, da ein neuer Regler, der wieder robuste Stabilität herstellt, über die in Abbildung 7-3 gezeigte Iteration gefunden werden soll.

Zu Beginn eines jeden Iterationsschritts werden dabei alle K_i einzeln um je $\pm 10\%$ des Startwerts (Verstärkung zu Beginn der Iteration) variiert. Für die Reglervarianten werden dann jeweils die zugehörigen Werte $\mu_{1,1K_i}$ bzw. $\mu_{0,9K_i}$ des Peaks von μ berechnet, mit deren Hilfe der Gradient

$$\gamma_i = \max(\gamma_{i+}, \gamma_{i-}) \quad \text{mit} \quad \gamma_{i+} = d\mu_{K_{i+}} \approx \frac{\mu_{1,1K_i} - \mu_{0,9K_i}}{2}, \quad \gamma_{i-} = d\mu_{K_{i-}} \approx \frac{\mu_{0,9K_i} - \mu_{1,1K_i}}{2} \quad (7-2)$$

angenähert wird. Durch Normierung der Gradienten werden Gewichte

$$w_i = \frac{\gamma_i}{\sum_i \gamma_i} \quad (7-3)$$

bestimmt, mit denen über

$$K_{i,neu} = K_i + \alpha \cdot 0,1 \cdot w_i K_i, \quad \alpha \in \{-1; +1\} \quad (7-4)$$

neue Reglerwerte bestimmt werden; α wird hierbei so gewählt, dass der Peak von μ durch den neuen Regler abnimmt. Essentiell ist hierbei, dass der Peak über die Upper Bound exakt bestimmt wird, da schon geringe Abweichungen die Gradientenbildung stark verfälschen würden. Gemäß (3-55) wäre hierfür sogar eine dritte komplex-skalare Unsicherheit erlaubt.

Als Ergebnis des 29. Iterationsschritts konnte im vorliegenden Fall der lineare Ersatzregler

$$\begin{aligned} \text{neu: } \mathbf{K}_{lin,mod\mu} &= [0,2466 \quad 0,0577 \quad -0,1301 \quad 0,0009 \quad 1,3716 \quad 0,2798] \cdot 10^3, \\ (\text{alt: } \mathbf{K}_{RS,SOR} &= [0,4085 \quad 0,0961 \quad -0,1631 \quad 0,0009 \quad 1,9501 \quad 0,3117] \cdot 10^3) \end{aligned} \quad (7-5)$$

gefunden werden, für welchen $\mu = 0,995$ gilt. Abbildung 7-4 und Abbildung 7-5 zeigen die Peakwerte von μ für die einzelnen Iterationsschritte sowie für den finalen Ersatzregler den Verlauf des strukturierten Singulärwerts über der Frequenz. In Abbildung 7-6 wird auch für

diesen Regler der Komfortindex für die Simulation mit dem Profil SP_S gezeigt, wobei die Performanz hier – wie erwartet – deutlich schlechter als beim ROPE-Regler des Entwurfs (RS) ist. Da der beschriebene Entwurf zwar sehr robust, aber auch sehr konservativ ist, wird empfohlen, den linearen Ersatzregler nur im Notfall einzusetzen, wenn durch den nichtlinearen Regler scheinbar keine Systemstabilität (bzw. kein akzeptabler Wert der dynamischen Radlast) wieder hergestellt werden kann.

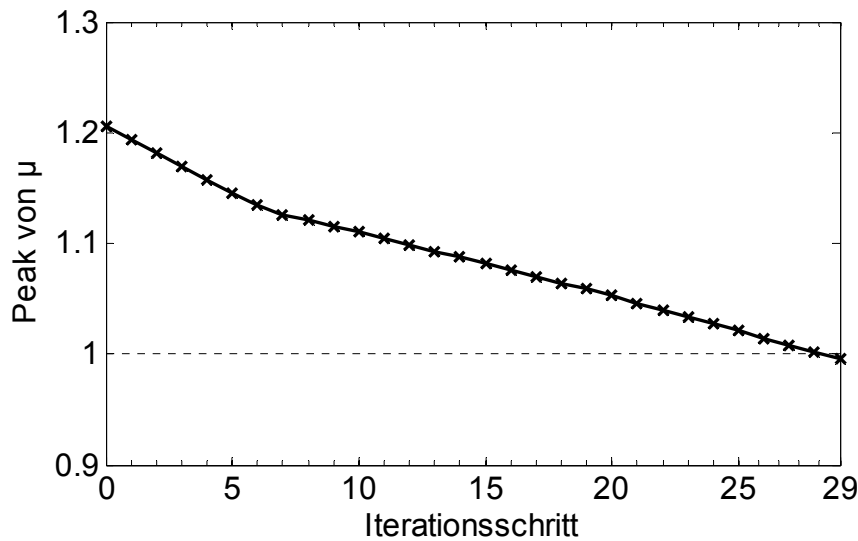


Abbildung 7-4: Peakwerte von μ für Schritte der Mod.- μ -Ersatzregler-Iteration

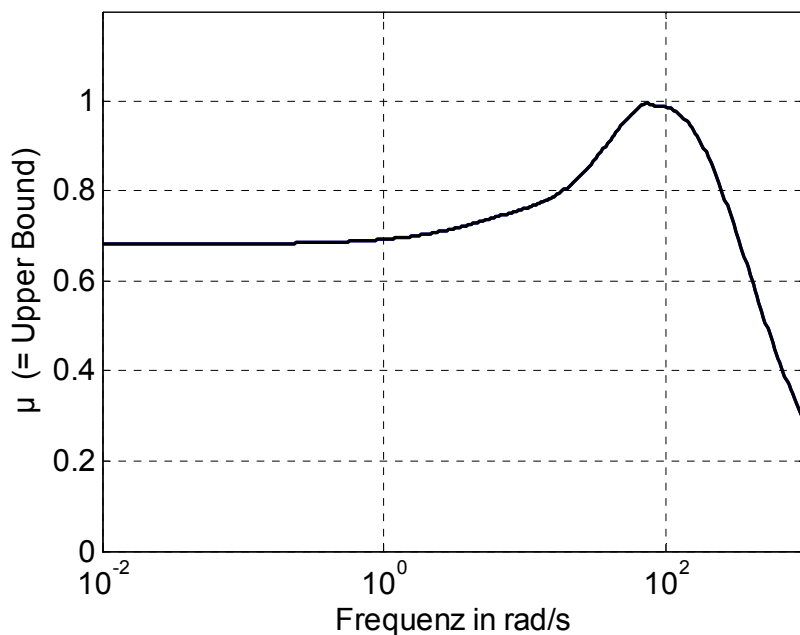


Abbildung 7-5: Verlauf von μ für linearen Ersatzregler der mod. μ -Synthese

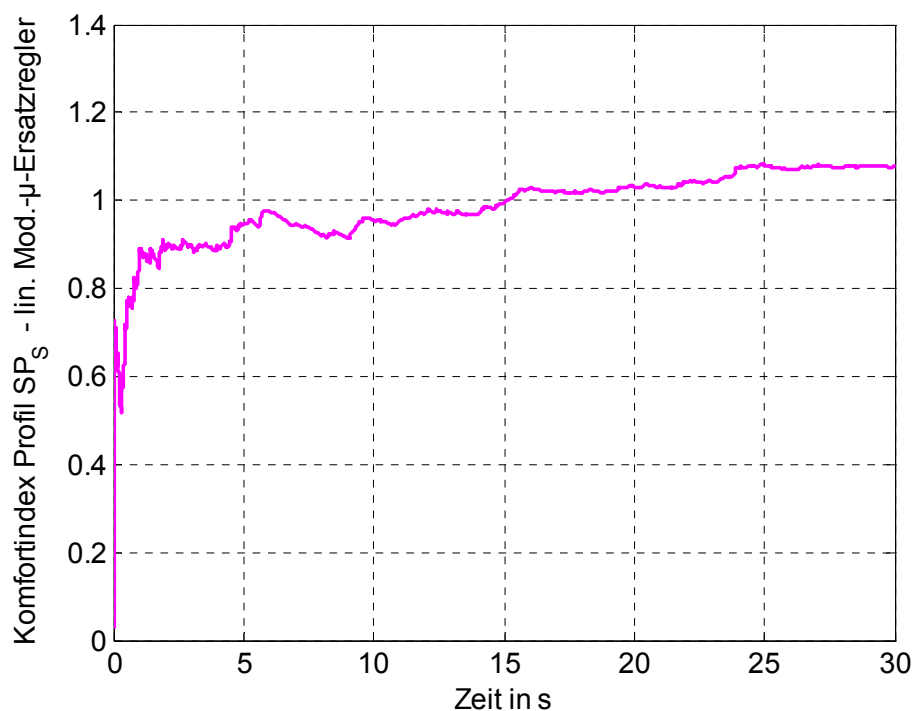


Abbildung 7-6: Komfortindex Profil SP_S – linearer Mod.- μ -Ersatzregler

7.3 Erweiterung auf ein semi-aktives Viertelfahrzeugmodell

Ein grundlegendes Problem der bisher behandelten, vollaktiven Viertelfahrzeugregelung ist der hohe Energieverbrauch, der in Kapitel 6 dokumentiert wurde und der speziell im Hinblick auf die wachsenden ökologischen Anforderungen an moderne Kraftfahrzeuge immer kritischer zu bewerten ist. Deshalb soll in diesem Kapitel geklärt werden, ob die vorgestellte ROPE-Regelung prinzipiell auch auf semi-aktive Konfigurationen anwendbar ist, die natürlich nicht dieselbe Performanz wie vollaktive aufweisen können. Ein Überblick über solche Systeme wird z.B. in [Gugl08] gegeben. An dieser Stelle sollen kompakt die Ergebnisse zusammengefasst werden, die am Lehrstuhl in [Eich10] für den Fall eines semi-aktiven Dämpferelements (anstatt des vollaktiven Linearmotors) herausgearbeitet wurden. Dabei sollen nur das Grundkonzept und die wichtigsten Simulationsergebnisse erörtert werden, für alle weiteren Details sei auf [Eich10] verwiesen.

Die Grundidee hinter den semi-aktiven Analysen war, eine geeignete Vorgabe der Dämpferkonstante des „virtuellen“ semi-aktiven Dämpfers zu generieren, die dann in eine der Dämpferkraft entsprechende Aktorkraft (unter Berücksichtigung der vorhandenen Aktordynamik) umgewandelt wird. Dadurch konnte das vollaktive Prüfstandsmodell wie ein semi-aktives betrieben werden, was prinzipiell auch Tests am realen Prüfstand ermöglichen

würde. Das Gesetz zur Bestimmung der Aktorkraft wurde strukturell als eine Art erweiterte Skyhook-Regelung (s. [Gugl08]) mit Zustandsrückführung

$$d_{C,semi} = \left(\frac{-\mathbf{K}_{semi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}}{x_2 - x_4} \right) \text{ mit } \max(d_{C,semi}) = 2000, \min(d_{C,semi}) = 50 \quad (7-6)$$

ausgelegt, wobei $\mathbf{K}_{semi}(\mathbf{x})$ mittels suboptimaler LQR-Entwürfe bestimmt wurde: dem „Clipped Optimal Control“ für Komfortauslegung und der „Steepest Gradient Method“ für Sicherheitsauslegung, die je in [Tseng94] beschrieben werden.

Auf dieser Basis wurden, ähnlich wie in Kapitel 5, zuerst komfort- und sicherheitsorientierte Referenzregler (KOR und SOR) berechnet. Im Anschluss wurde wieder für alle Reglereinträge ein geeigneter polynomialer Übergang zwischen den KOR- und SOR-Werten bestimmt, so dass sich eine zeitvariante ROPE-Verstärkung $\mathbf{K}_{semi} = \mathbf{K}_{semi}(\mathbf{x})$ ergibt. Eine Analyse der GBL-Stabilität wurde nicht durchgeführt, wäre aber in Anlehnung an die Ausführungen in [Herr09] prinzipiell problemlos möglich. Die Performanz der „doppelt“ nichtlinearen Rückführung (zum einen durch den Skyhook, zum anderen durch die nichtlineare ROPE-Regelung) wurde in Simulationen für verschiedene Verstärkungen des Straßenprofils SP_M getestet (Verstärkung 1,5 entspricht SP_L , 2 entspricht SP_X).

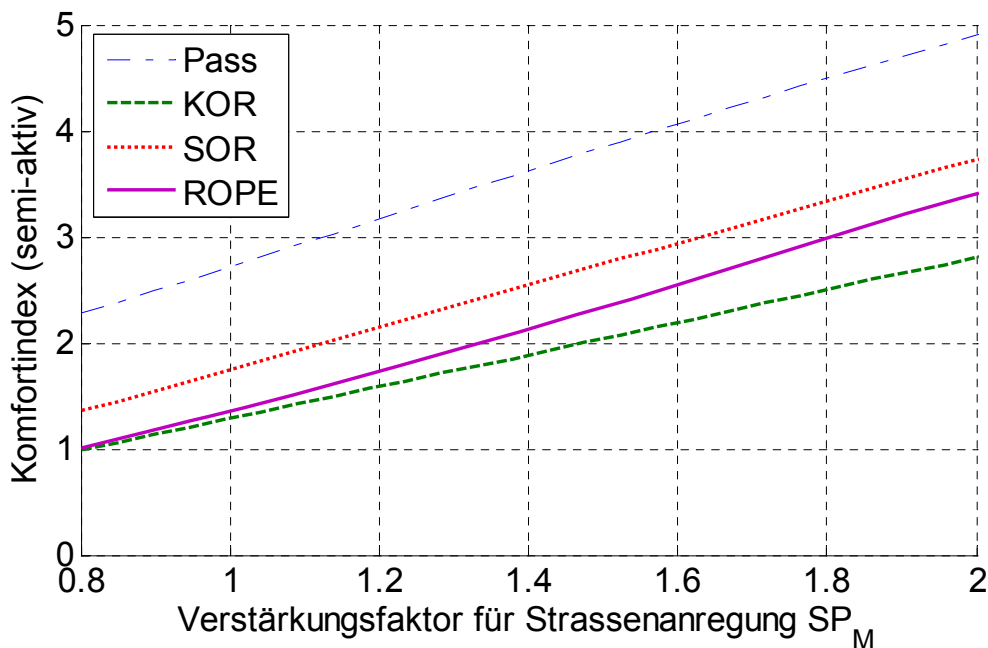


Abbildung 7-7: Komfortindex über Straßenanregung – semi-aktiver ROPE

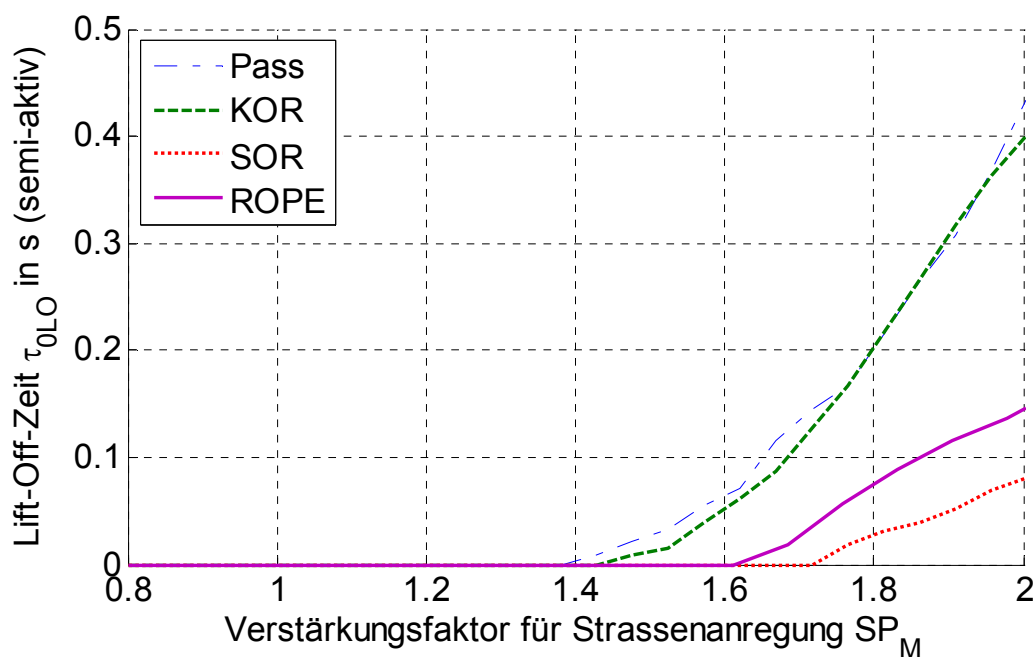


Abbildung 7-8: Lift-Off-Zeit über Straßenanregung – semi-aktiver ROPE

Anhand des Komfortindex in Abbildung 7-7 und der Lift-Off-Zeit τ_{0LO} in Abbildung 7-8 konnte auch hier festgestellt werden, dass sich der ROPE für schwache Anregungen tendenziell wie der KOR und für wachsende immer mehr wie der SOR verhält. Weiterhin wurde unterlegt, wie einfach sich bereits existierende klassische Entwürfe zu einem nichtlinearen ROPE erweitern lassen (speziell bei Verzicht auf Stabilitäts- oder Robustheitsanalysen zu Gunsten einer rein simulativen Validierung). Deshalb scheint auch für energiesparende semi-aktive Konzepte der nichtlineare ROPE-Ansatz eine vielversprechende Alternative zu klassischen Entwürfen zu sein.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde zuerst das Prinzip der geschwindigkeitsbasierten Linearisierung (GBL) bzw. des geschwindigkeitsbasierten Designs (GBD) beschrieben und Voraussetzungen, Chancen sowie Grenzen der Methodik diskutiert. Mit Hilfe der GBL wurde anschließend eine Möglichkeit aufgezeigt, auf einfache und transparente Weise ein nichtlineares Stellgesetz für das teillineare Modell eines Viertelfahrzeugprüfstands zu generieren. Eine Anwendung auf beliebige andere nichtlineare Systeme kann in analoger Weise erfolgen. Während des Designprozesses kommen dabei durchgängig nur lineare, vorzugsweise klassische bzw. bewährte Methoden zum Einsatz. Als adäquates Entwurfsverfahren hat sich im Falle des Viertelfahrzeugs das ROPE-Prinzip, d.h., der referenzregler-orientierte polynomiale Entwurf erwiesen. Bei diesem wird zuerst eine allgemeine Zustandsrückführung angesetzt, deren zeitvariante Reglermatrixeinträge jeweils von den ihnen zugeordneten Zustandsvariablen abhängig sind.

Für verschiedene, ausgewählte Punkte des Zustandsraums werden dann je durch ein frei wählbares Regelungsverfahren lineare, konstante Referenzregler entworfen. Diese sollen ausgewählten Performanzaspekten gerecht werden, welche in den zugehörigen Zustandsraumpunkten dominant sind bzw. mit selbigen in direkter Verbindung stehen. Beim Viertelfahrzeug waren dies sicherheitsorientierte (SOR) und komfortorientierte (KOR) Referenzregler. Um nun bei zeitlicher Änderung der Zustandsvariablen über den Zustandsraum die verschiedenen Performanzziele situationsabhängig adäquat und schnell zu berücksichtigen, wird ein nichtlineares ROPE-Regelgesetz erzeugt, indem die Reglermatrixeinträge zwischen den Referenzreglern interpoliert werden. Für die Interpolation werden beim ROPE nur polynomiale Übergänge verwendet, da diese ein besonders intuitives Vorgehen sowie eine möglichst einfache und aussagekräftige GBL-Analyse erlauben, welche wiederum gewinnbringend für das iterative Design der Interpolationskurven sein kann.

Dennoch bleibt es hierbei aber dem Nutzer überlassen, ob er den ROPE nur simulativ validiert oder auch GBL-Stabilitäts- oder Robustheitsanalysen heranzieht. Diese Flexibilität stellt ein Hauptmerkmal des gesamten Vorgehens dar, weil sie dem Nutzer freistellt, ob er komplett neu entwerfen oder nur bestehende Strukturen erweitern will, ob er mehr Vertrauen in theoretische Analysen oder in reale Testläufe setzt. Dadurch und auf Grund der Eigenschaft der GBL, auch zeitlich oder räumlich stückweise definierte Stellgesetze adäquat untersuchen zu können, ist der vorgestellte Ansatz speziell für solche industriellen Anwendungen interessant, in denen ein komplexes Zusammenspiel verschiedener Subsysteme und Reglerentwürfe vorliegt. Für das Viertelfahrzeugmodell konnten mit dem ROPE sowohl in Simulationen wie auch in Prüfstandstests gute Ergebnisse erzielt werden, wobei in den Simulationen drei Regler mit unterschiedlicher Zielorientierung betrachtet wurden.

Im Rahmen der lokalen GBL-Stabilitätstests kann mit einer systemabhängigen, meist aber hohen Wahrscheinlichkeit geprüft werden, ob das entworfene nichtlineare System global stabil ist. Zudem bietet sich die GBL-Darstellung hervorragend dafür an, die zeitvarianten Schwankungen der nichtlinearen Reglermatrixeinträge als fiktive Unsicherheiten zu modellieren und in einen GBL-Robustheitstest zu integrieren. Bei genau bekannten, nichtlinearen Abhängigkeiten des passiven Modells von den Zustandsvariablen entstehen in der GBL-Robustheitsanalyse Kopplungen zwischen Regler- und Modellunsicherheiten, die den Konservatismus der Analyse senken. Beim Viertelfahrzeugmodell wurden zudem Abhängigkeiten von der Chassismasse, welche durch rationale Funktionen approximiert werden konnten, im Sinne einer Trimpunktunsicherheit in der GBL-Robustheitsanalyse berücksichtigt. Diese Trimpunktunsicherheit beeinflusst sowohl passive Zustandsraum- als auch Reglermatrizen und stellt dadurch ebenfalls gewünschte Kopplungen zwischen diesen her. Für den Robustheitstest selbst wurde eine μ -Analyse verwendet, mit der für den ROPE-Regelkreis robuste Stabilität nachgewiesen werden konnte.

Da die lokalen GBL-Stabilitäts- und μ -Analysen globale Stabilität nicht zu hundert Prozent garantieren können, wurde selbige mittels einer IQC-Analyse – unter Vernachlässigung ausgeprägter Robustheitseigenschaften – untersucht. Dabei wurde ein (nominell) global stabiler ROPE-Ersatzregler gefunden, der nur gering vom ursprünglichen ROPE-Regler abweicht. Zudem wurde für besonders sicherheitskritische Situationen, wenn die nichtlinearen Regler u.U. zu einem instabilen Systemverhalten führen, auf Basis einer neuen, modifizierten μ -Synthese ein hochrobuster, linearer Ersatzregler bestimmt. Die ROPE-Regler zeigten in Simulationen und Prüfstandstests allerdings bei guter Performanz keine Anzeichen von Instabilitäten, auch nicht in Kombination mit einem erweiterten, nichtlinearen Kalman-Filter, der für die Prüfstandsimplementierung entworfen wurde.

Das größte Weiterentwicklungspotenzial ist in drei Aspekten zu finden: zuerst sollte der erwähnte Kalman-Filter optimiert werden, um die Prüfstandsergebnisse noch weiter zu verbessern. Des Weiteren könnte die GBL-Methodik derart erweitert werden, dass im Rahmen der GBL-Analyse auch Aussagen bzgl. der Performanz getroffen werden können. Dies ist je nach System nicht trivial, prinzipiell aber durchaus denkbar. Zuletzt könnte auch die Anwendung auf semi-aktive Systeme weiter getrieben werden, die hier in ihrer Grundidee bereits erfolgreich überprüft wurde. Vor allem die Integration eines realitätsnahen semi-aktiven Aktormodells wäre notwendig. Allgemein bieten aber die GBL und speziell der ROPE noch zahlreiche vielversprechende Anwendungsmöglichkeiten, die bisher keine Erwähnung in der Fachliteratur gefunden haben.

9 Literaturverzeichnis

- [Acke93] Ackermann, J., Bartlett, A., Kaesbauer, D.: *Robuste Regelung*. Springer, Berlin, 1993.
- [Alle95] Alleyne, A., Hedrick, J. K.: *Nonlinear adaptive control of active suspensions*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, **3** (1), pp. 94–101, 1995.
- [Bala05] Balas, G.: *EADS Short Course on μ* . MUSYN Inc., Minneapolis / EADS Deutschland GmbH München, 2005.
- [Bala98] Balas, G., Doyle, J., Glover, K., Packard, A., Smith, R.: *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*. Musyn Inc. and The MathWorks, Inc., 1998.
- [Band96] Banda, S., Bowlus, J.: *Multivariable Control Design Guidelines*. Honeywell Technology Center, Minneapolis, 1996.
- [Bran94] Branicky, M.: *Stability of Switched and Hybrid Systems*. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [Canu95] Canudas de Wit, C., Aström, K. J., Lischinsky, P.: *A New Model for Control of Systems with Friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. 40**, No. 3, pp. 419-425, 1995.
- [Cyro06] Cyron, C.: *Hinf-Regelung für die aktive Schwingungsdämpfung einer Radaufhängung*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2006.
- [Dail90] Dailey, R. L.: *Lecture Notes for the Workshop on H_∞ and μ Methods for Robust Control*. American Control Conference, San Diego, 1990.
- [Doyl82] Doyle, J.: *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*. IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications), Vol. 129, No. 6, pp. 242-250, 1992.
- [Eich10] Eichhorn, A.: *Semiaktive Regelung eines aktiven Viertelfahrzeugprüfstands durch Velocity-Based Design*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2010.
- [ElBe96] El Beheiry, E., Karnopp, D.: *Optimal Control of Vehicle Random Vibration with Constrained Suspension Deflection*. Journal of Sound and Vibration, **Vol. 189**(5), pp. 547-564, 1996.

-
- [Fial00] Fialho, I., Balas, G. J.: *Design of Nonlinear Controllers for Active Vehicle Suspensions using Parameter-Varying Control Synthesis*. Journal of Vehicle Systems Dynamics, **Vol. 33**, pp. 351-370, 2000.
- [Fial02] Fialho, I., Balas, G.: *Road Adaptive Active Suspension Design Using Linear Parameter-Varying Gain-Scheduling*. IEEE Transactions on Control Systems, **Vol. 10**, No. 1, 2002.
- [Föll94] Föllinger, O.: *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 8. Auflage. Hüthig Verlag, Heidelberg, ISBN 3-7785-2336-8, 1994.
- [Free08] Freeman, R. A., Kokotovic, P. V.: *Robust Nonlinear Control design*. Birkhäuser Boston, Ann Arbor, MI, 2008.
- [Gold02] Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J. L.: *Classical Mechanics*. Third edition, Addison Wesley, ISBN: 0-2016-5702-3, 2002.
- [Gord91] Gordon, T. J., Marsh, C., Milsted, M. G.: *A Comparison of Adaptive LQG and Nonlinear Controllers for Vehicle Suspension Systems*. Vehicle Systems Dynamics, **Vol. 20**, pp. 321-340, 1991.
- [Gugl08] Guglielmino, E., Sireteanu, T., Stammers, C. W., Ghita, G., Giuclea, M.: *Semi-active Suspension Control: Improved Vehicle Ride and Road Friendliness*. Springer-Verlag, London, 2008.
- [Heck07] Hecker, S.: *Generation of low order LFT Representations for Robust Control Applications*. Fortschrittberichte VDI, **Series 8**, No. 1114, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2007.
- [Hell99] Heller, M.: *Untersuchungen zur Steuerung und Robusten Regelung der Seitenbewegung von Hyperschallflugzeugen*. Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, Herbert Utz Verlag Wissenschaft, 1999.
- [HerN07] Herrmann, N.: *Höhere Mathematik: für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*. Oldenbourg, 2. überarb. Auflage, 2007.
- [Herr04] Herrnberger, M.: *Moderne Verfahren zur Robustheits- und Stabilitätsanalyse eines Flugregelungssystems*. Semesterarbeit, Technische Universität München, 2004.

-
- [Herr06] Herrnberger, M., Heller, M., Leitner, R., Sachs, G.: *Fortschrittliche Unsicherheitsmodellierung und μ -Analyse für den Basisregler eines modernen Trainers*. DGLR-2006-224. DGLR-Kongress, Braunschweig, 2006.
- [Herr07] Herrnberger, M., Heller, M., Paul, R., Hecker, S., Sachs, G.: *Advanced Uncertainty Modeling and Robustness Analysis for the Basic Flight Control System of a Modern Jet Trainer*. AIAA-2007-6668. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Hilton Head, 2007.
- [Herr08] Herrnberger, M., Mäder, D., Lohmann, B.: *Linear Robust Control for a Nonlinear Active Suspension Model Considering Variable Payload*. Proceedings of the 17th IFAC World Congress 2008, Seoul, South Korea, 2008.
- [Herr09] Herrnberger, M.: *Velocity-Based Design für die Regelung von aktiven Radaufhängungen*. In "Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik", Erlangen-Münchener Workshops 2007 und 2008. Shaker Verlag, Aachen 2009, pp. 75-93.
- [Herr10] Herrnberger, M., Lohmann, B.: *Nonlinear Control Design for an Active Suspension using Velocity-Based Linearisations*. IFAC Symposium Advances in Automotive Control, München, 2010.
- [Horo72] Horowitz, I., Sidi, M.: *Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances*. International Journal of Control, **Vol. 16**(2), pp. 287–309, 1972.
- [Hrov93] Hrovat, D.: *Applications of Optimal Control to Advanced Automotive Suspension Design*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **Vol. 115**, pp. 328–342, 1993.
- [Hrov97] Hrovat, D.: *Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications*. Automatica, **33**, pp. 1781–1817, 1997.
- [Hube10] Huber, B.: *Unsicherheitsmodellierung für die Robustheitsanalyse einer nichtlinearen aktiven Radaufhängung*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2010.
- [Jöns04] Jönsson, U., Kao, C., Megretski, A., Rantzer, A.: *A Guide to IQCbeta: A Matlab Toolbox für Robust Stability and Performance Analysis*, 2004.
- [Kami95] Kaminer, I., Pascoal, A., Khargonekar, P., Coleman, E.: *A Velocity Algorithm for the Implementation of Gain-Scheduled Controllers*. Automatica, **31**, 1995, pp. 1185-1191.

-
- [Karn74] Karnopp, D. C., Crosby, M. J., Harwood, R. A.: *Vibration Control Using Semi-Active Force Generators*. ASME J. Eng. Ind., **96**, No. 2, pp. 619–626, 1974.
- [Khal92] Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*. Macmillan, New York, 1992.
- [Koch10] Koch, G., Pellegrini, E., Spirk, S., Lohmann, B.: *Design and Modeling of a Quarter-Vehicle Test Rig for Active Suspension Control*. Technical Reports on Automatic Control (TRAC), Technische Universität München, Volume TRAC-5, No. 2, 2010.
- [Köpp08] Köppern, J.: *Robustheitsanalyse mittels μ , IQC und Parameterraum*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2008.
- [KuoS96] Kuo, S. M., Morgan, D. R.: *Active Noise Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [Kuri98] Kurimoto, M., Yoshimura, T.: *Active Suspension of Passenger Cars Using Sliding Mode Controller (Based on Reduced Models)*. Int. Journal of Vehicle Design, **Vol. 19**, No. 4, pp. 402–414, 1998.
- [Lauw04] Lauwerys, C., Swevers, J., Sas, P.: *Design and experimental validation of a linear robust controller for an active suspension of a quarter car*. Proceeding of the 2004 American Control Conference, pp. 1481-1486, 2004.
- [Lawr95] Lawrence, D. A., Rugh, W. J.: *Gain Scheduling Dynamic Linear Controllers for a Nonlinear Plant*. Automatica, **31**, 1995, pp. 381-390.
- [Leit00a] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *On formulating nonlinear dynamics in LPV form*. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, **Vol. 4**, Sydney, 2000, pp. 3526-3527.
- [Leit00b] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Gain-scheduled control: Relaxing slow variation requirements by velocity-based design*. Journal of guidance, control, and dynamics **Vol. 23**, pp. 988-1000, 2000.
- [Leit97] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Analysis of gain-scheduled and nonlinear systems by velocity-based linearisation families*. Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, **Vol. 1**, 1997, pp. 424-429.
- [Leit98a] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Gain-Scheduled & Nonlinear Systems: Dynamic Analysis by Velocity-Based Linearisation Families*. International Journal of Control, **70**, 1998. pp.289-317.

-
- [Leit98b] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Appropriate Realisation of MIMO Gain Scheduled Controllers*. International Journal of Control. **70**, 1998, pp. 13-50.
- [Leit98c] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Gain-Scheduled Controller Design: An Analytic Framework Directly Incorporating Non-Equilibrium Plant Dynamics*. International Journal of Control, **70**, 1998, pp. 249-269.
- [Leit99a] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Input-Output Linearisation by Velocity-based Gain Scheduling*. International Journal of Control. **72**, 1999, pp. 229-246.
- [Leit99b] Leith, D. J., Leithead, W. E.: *Analytic Framework for Blended Multiple Model Systems Using Linear Local Models*. International Journal of Control, **72**, 1999, pp. 605-619.
- [LinH09] Lin, H., Antsaklis, P.: *Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results*. IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. 54**, No. 2, 2009.
- [LinJ97] Lin, J.-S., Kanellakopoulos, I.: *Road-Adaptive Nonlinear design of Active Suspensions*. Proceedings of the American Control Conference, New Mexico, 1997.
- [LinY93] Lin, Y., Lu, Y., Padovan, J.: *Fuzzy Logic Control of Vehicle Suspension Systems*. Int. Journal of Vehicle Design, **Vol. 14**, No. 5/6, pp. 457-470, 1993.
- [Löfb98] Löfberg, J.: *μ -Synthesis Control of Lateral Dynamics on a Hypersonic Test Vehicle*. Examensarbeit, Linköping University, 1998.
- [Lörc08] Lörcher, A.: *Identifikation der nichtlinearen Kennlinien eines Viertelfahrzeug-Prüfstands*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2008.
- [Lunz07] Lunze, J.: *Regelungstechnik 1*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg, 2007.
- [Mäde07] Mäder, D.: *Detailed Nonlinear Modeling of the Suspension of a Quarter Car Test-Rig and Analysis of Modern Control Approaches*. Student project, Institute of Automatic Control, Technische Universität München, 2007.
- [Magn01] Magni, J. F.: *Linear Fractional Representations with a Toolbox for Use with Matlab*. Technica Report, ONERA, FRA, 2001.
- [Maye10] Mayet, J.: *Velocity-Based-Design Active Suspension Control*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2010.

-
- [Mits04] Mitschke, M., Wallentowitz, H.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer, Berlin, 2004.
- [Mora92] Moran, A., Nagai, M.: *Analysis and design of active suspensions by robust control theory*. JSME Int. Journal, **Series III, Vol. 35**, No. 3, pp. 427–437, 1992.
- [Mors95] Morse, A.: Control using logic-based switching. In *Trends in Control: A European Perspective* (A. Isidori, ed.), pp. 69–113, London, Springer-Verlag, 1995.
- [Pele91] Peleties, P., DeCarlo, R.: *Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions*. Proceeding of the American Control Conference, pp. 1679-1684, Boston, 1991.
- [Rakh85] Rakheja, S., Sanker, S.: *Vibration and shock isolation performance of a semi-active “on-off” damper*. Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Reliability in Design, 1985.
- [Rant97] Rantzer, A., Megretzki, A.: *System Analysis via Integral Quadratic Constraints*. IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. 42**, No. 6, 1997.
- [Rude07] Ruder, J.: *Robuste Stabilitätsanalyse mittels Integral Quadratic Constraints*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München, 2007.
- [Skog05] Skogestad, S., Postlethwaite, I.: *Multivariable Feedback Control*. John Wiley & Sons Ltd, 2. Auflage, Chichester, 2005.
- [Slot91] Slotin, J. E., Li, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, ISBN: 0-1304-0890-5, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [SunZ05] Sun, Z., Ge, Z.: *Analysis and synthesis of switched linear control systems*. Automatica, **41**, pp. 181-195, 2005.
- [Tseng94] Tseng, H. E., Hedrick, J. K.: *Semi-Active Control Laws – Optimal and Sub-Optimal*. Vehicle System Dynamics, **23**, pp. 545–569, 1994.
- [Venh93] Venhovens, P. J. T.: *Optimal Control of Vehicle Suspensions*. PhD thesis, Delft University of Technology, ISBN 90-370-0093-2, 1993.
- [VIng87] Verein Deutscher Ingenieure: VDI-2057 – Human exposure to mechanical vibrations. Beuth Verlag GmbH, 1987.

- [Welc01] Welch, G., Bishop, G.: *An Introduction to the Kalman Filter*. University of North Carolina and Chapel Hill, 2001.
- [Wong01] Wong, J.: *Theory of Ground Vehicles*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [Yama90] Yamashita, M., Fujimori, K., Uhlik, C., Kawatani, R., Kimura, H.: *Control to an active suspension*. Int. Conference on Decision and Control, pp. 2244–2250, 1990.
- [YehE94] Yeh, E. C., Tsao, Y. J.: *A Fuzzy Preview Control Scheme of Active Suspension for Rough Road*. Int. Journal of Vehicle Design, **Vol. 15**, No. 1/2, pp. 166–180, 1994.
- [YiHe93] Yi, K., Hedrick, K.: *Dynamic Tire Force Control by Semiactive Suspensions*. In: Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, **115**, No. 3, pp. 465-474, 1993.
- [Youl76] Youla, D. C., Jabr, H. A., Bongiorno, J. J.: *Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: part I*. IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. AC-21**, pp. 3-13, 1976.
- [Zarc00] Zarchan, P., Musoff, H.: *Fundamentals of Kalman Filtering A Practical Approach*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [Zhou96] Zhou, K., Doyle, J., Glover, K.: *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1996.
- [Zhou98] Zhou, K., Doyle, J.: *Essentials of robust control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1998.