

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Stationarität und Tailindex bei
zeitdiskreten Volatilitätsmodellen**

Diplomarbeit

von

Nikolaus Kiefersbeck

Themenstellerin: Prof. Dr. C. Klüppelberg

Betreuer: Dr. M. Borkovec

Abgabetermin: 15. November 1999

Hiermit erkläre ich, daß ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 15. November 1999

Danksagung

An dieser Stelle will ich all denen meinen Dank aussprechen, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit ihren Beitrag geleistet haben. In erster Linie gilt dies für Frau Prof. Dr. Claudia Klüppelberg, die wann immer es nötig war, die Arbeit mit hilfreicher Kritik vorantrieb, und Herrn Dr. Milan Borkovec, der mir durch seine hervorragende Betreuung über so manche Hürde hinweggeholfen hat.

Desweiteren bedanke ich mich bei Herrn Bernhard Sporrer für die Durchsicht meiner Arbeit und allen anderen Mitarbeitern am Lehrstuhl für Mathematische Statistik, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen.

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

$AR(p)$	Autoregressive process of order p (Autoregressiver Prozeß der Ordnung p)
$ARCH(p)$	Autoregressive conditionally heteroscedastic process of order p (Autoregressiver Prozeß mit nicht-konstanter bedingter Varianz der Ordnung p)
$ARMA(p, q)$	Autoregressive-moving average process of order (p, q) (Autoregressiver Moving Average-Prozeß der Ordnung (p, q))
\mathfrak{B}	Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}
δ_x	Dirac-Maß an der Stelle x
dRi	direkt Riemann-integrierbar
f^+	Positivteil der Funktion f $f^+ = \mathbf{1}_{\{f>0\}}f$
f^-	Negativteil der Funktion f $f^- = -\mathbf{1}_{\{f<0\}}f$
f.s.	fast sicher
$GARCH(p, q)$	Generalized ARCH-process of order (p, q) (Verallgemeinerter ARCH-Prozeß der Ordnung (p, q))
iid	independent, identically distributed (unabhängig, identisch verteilt)
$L^1(\mathbb{R})$	Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf \mathbb{R}
$MA(q)$	Moving average process of order p (Moving Average-Prozeß oder gleitendes Mittel der Ordnung q)
$o(\cdot)$	$a(x) = o(b(x))$ für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow x_0$ bedeutet, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/b(x) = 0$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x)/b(x) = 0$
\mathbb{R}^+	$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\text{sgn}(x)$	Vorzeichen von x

$\text{supp}(f)$	Träger der Funktion f $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$
ZV	Zufallsvariable(n)
$\stackrel{d}{=}$	$A \stackrel{d}{=} B$: A und B sind in Verteilung gleich
\xrightarrow{d}	$A_n \xrightarrow{d} B$: A_n konvergiert in Verteilung gegen B
\sim	$a(x) \sim b(x)$ bedeutet, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/b(x) = 1$

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	9
2.1	Finanzzeitreihen	9
2.2	Maß- und Integrationstheorie	12
2.3	Direkte Riemann-Integrierbarkeit	15
2.4	Erneuerungstheorie	16
2.5	Reguläre Variation	17
3	Lineare stochastische Rekurrenzgleichungen	20
3.1	Konvergenz des stochastischen Prozesses und Eigenschaften der stationären Verteilung	23
3.2	Tailverhalten der stationären Verteilung	27
3.3	Beweis des Satzes von Goldie	34
4	Tailindexbestimmung beim GARCH(1,1)-Prozeß	65
4.1	Verfahren zur Bestimmung des Stationaritätsbereichs und des Tailindexes	66
4.2	Stationarität und Tailindex für verschiedene Verteilungen der Noise-Variablen	67
4.2.1	Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden	68
4.2.2	Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden	69
4.2.3	Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden	71
4.2.4	Standardnormalverteilung	72
5	AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen	75
5.1	Vorstellung des Modells und Anforderungen an die Noise-Variablen	75
5.2	Existenz einer stationären Verteilung	77
5.3	Tailverhalten der stationären Verteilung	80
6	Tailindex beim AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen	85
6.1	Mögliche Verteilungen für die Noise-Variable	85
6.2	Tailindex und Stationaritätsbereich bei verschiedenen Noise-Variablen	88
6.2.1	Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden	89

6.2.2	Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden	91
6.2.3	Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden	92
6.2.4	Standardnormalverteilung	93
6.2.5	Laplace-Verteilung	95
6.3	Monotonieeigenschaften für den Tailindex	97
7	Anwendung der Ergebnisse	103
7.1	Schätzen des Tailindexes	103
7.2	Anwendungsmöglichkeiten	106
A	Maple-Programme	108
A.1	Programme zur Bestimmung des Parameterbereichs, für den stationäre Lösungen existieren	108
A.2	Programme zur Bestimmung des Tailindexes bei stationären Verteilungen	110
B	S-Plus-Programme	112

Kapitel 1

Einleitung

Immer wieder geraten die Kapitalmärkte in die Schlagzeilen, wenn sich irgendwelche extreme Ereignisse an den Börsen einstellen. Insbesondere Finanzkrisen, wie etwa im Herbst 1998 in Südostasien, beschäftigen die Öffentlichkeit, vor allem aber Investmenthäuser, die versuchen, die Risiken solcher Entwicklungen abzuschätzen und sich im voraus gegen solche Krisen abzusichern. Die Abschätzung solcher Risiken und die Vorhersage von Kursverläufen für eine optimale Anlagestrategie sind wesentliche Gründe, weshalb man Finanzzeitreihen beobachtet und versucht passende mathematische Modelle dafür zu finden.

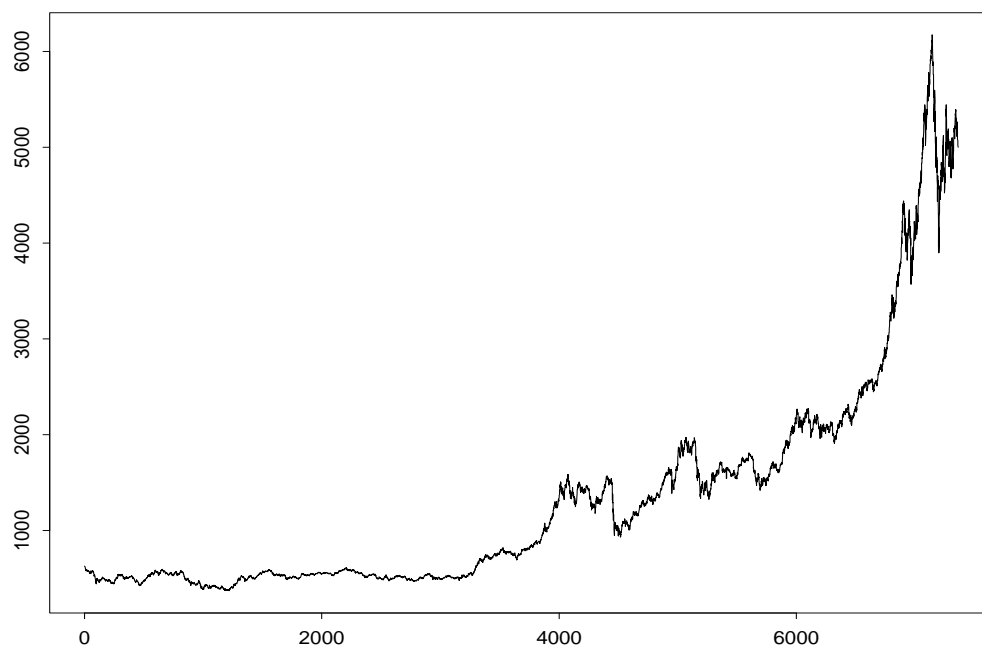


Abbildung 1.1: Kursentwicklung des DAX im Zeitraum von 2. Januar 1970 bis 2. Juni 1999.

Unter Finanzzeitreihen verstehen wir zeitlich sortierte Abfolgen von Preisbeobachtungen oder Indexwerten, wie etwa die Indexstände von DAX und Dow Jones, Wechselkurse zwischen Währungen, Rohstoffpreise und vielem mehr, die täglich, wöchentlich, monatlich oder in einem anderen zeitlichem Schema ermittelt werden. Dabei geht man davon aus, daß die Finanzzeitreihe $\{x_t\}$ die Realisierung eines Preisprozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ist. In Abbildung 1.1 ist als Beispiel die Kursentwicklung des DAX angegeben. Dabei wurden die Tagesendkurse an allen Handelstagen im Zeitraum von 2. Januar 1970 bis 2. Juni 1999 notiert.

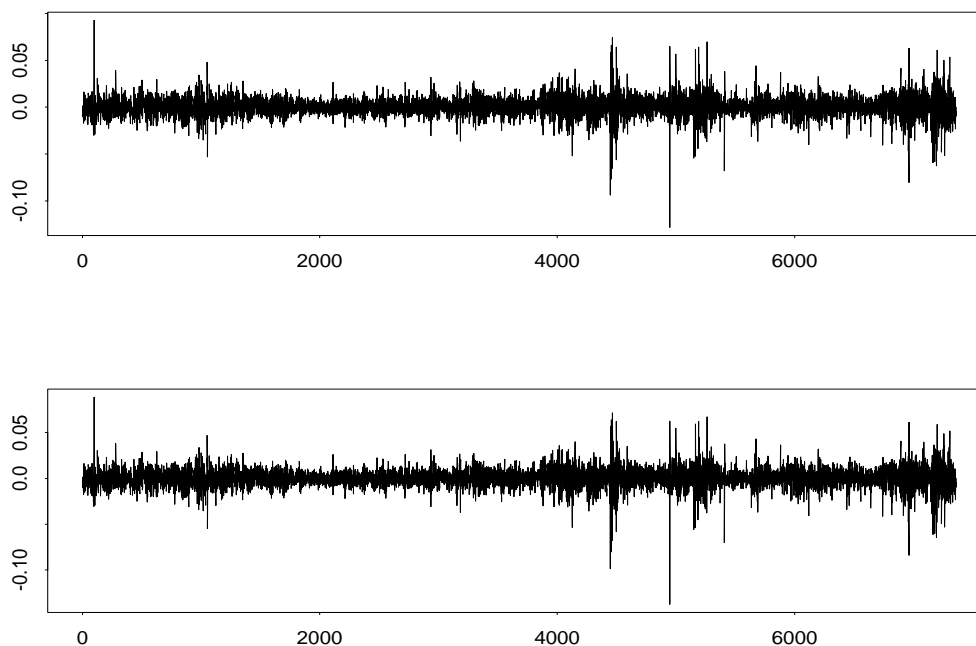


Abbildung 1.2: Vergleich von relativen Returns und Logreturns am Beispiel des DAX im Zeitraum von 2. Januar 1970 bis 2. Juni 1999.

Wir werden uns in dieser Diplomarbeit ausschließlich mit stationären Modellen beschäftigen. Allerdings wurde durch empirische Untersuchungen festgestellt, daß der Preisprozeß von Finanzzeitreihen nicht stationär ist, da aufeinanderfolgende Preise eine starke Abhängigkeit aufweisen und die empirischen Varianzen im Laufe der Zeit zunehmen. Wir betrachten deshalb nicht die Preise $\{x_t\}$ sondern die relativen Renditen $\{y_t\}$, $y_t = (x_t - x_{t-1})/x_{t-1}$, bzw. die logarithmierten Renditen $\{z_t\}$, $z_t = \ln(x_t/x_{t-1})$; in der Literatur werden diese häufig als relative Returns bzw. Logreturns bezeichnet. Die Prozesse der relativen Renditen bzw. logarithmierten Renditen erfüllen nach empirischen Untersuchungen die Forderung der Stationarität wesentlich besser (vgl. Abb. 1.2), als der Preisprozeß (vgl. Abb. 1.1). Weiter führt die Transformation dazu, daß die Prozesse unabhängig von der zugrundeliegenden Währung werden und somit verschiedene Renditeprozesse verglichen werden können. Für die weitere Analyse spielt es dabei meist keine Rolle, ob wir die relativen Renditen $\{y_t\}$ oder die logarithmierten Renditen $\{z_t\}$ benutzen. Die

Taylorentwicklung der Logreturns um $x_t/x_{t-1} = 1$ ergibt nämlich

$$\ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} + o\left(\left(\frac{x_t}{x_{t-1}} - 1\right)^2\right) \quad \text{für } \frac{x_t}{x_{t-1}} \rightarrow 1,$$

und damit in erster Ordnung die relativen Renditen. Da üblicherweise x_t/x_{t-1} nahe bei 1 liegt, sind also die Logreturns approximativ gleich den relativen Returns, wie auch der Vergleich am Beispiel der Daxentwicklung in Abbildung 1.2 zeigt.

Außerdem werden wir uns in dieser Diplomarbeit nur mit zeitdiskreten Modellen auseinandersetzen. Zeitstetige Modelle werden vor allem bei Finanzderivaten, wie etwa bei der Optionspreisbestimmung durch Black und Scholes [6], herangezogen. In diesen Modellen benutzt man zur Modellierung des Preisprozesses vor allem die geometrische Brownsche Bewegung,

$$X_t = X_0 \exp(\alpha t + \sigma B_t), \quad t \geq 0;$$

dabei ist X_0 der Startwert und α bzw. σ sind Konstanten, die den Trend bzw. die Volatilität des Prozesses beschreiben. $(B_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet eine Standard-Brownsche Bewegung.

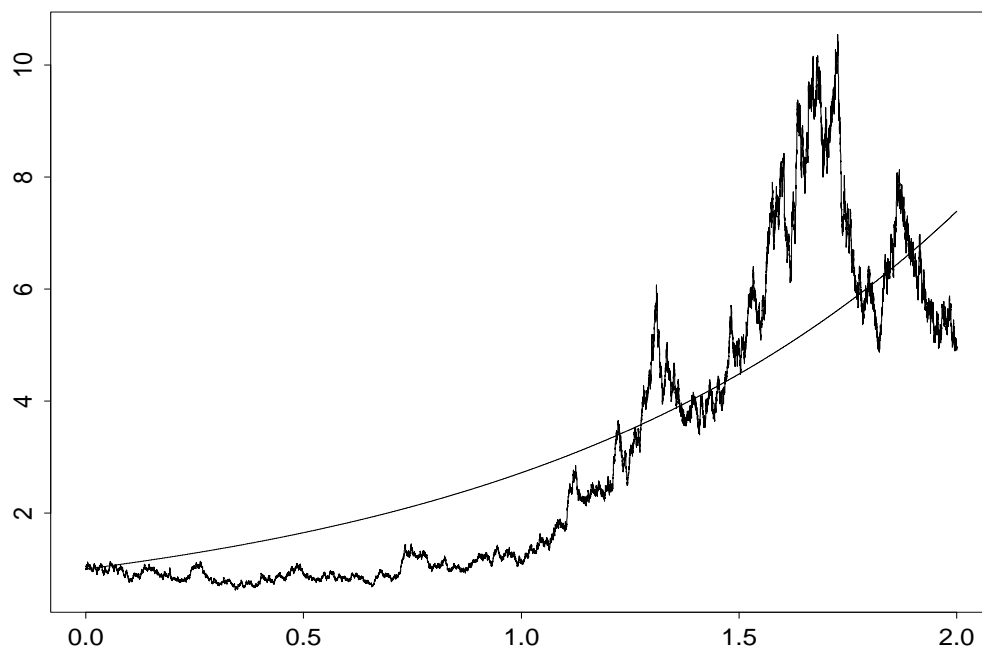


Abbildung 1.3: Simulation einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Startwert $X_0 = 1$, $\alpha = 1$ und $\sigma = 1$ - dabei stellt die glatte Linie den Driftterm $\exp(t)$ dar.

Die Abbildung 1.3 zeigt ein Beispiel einer simulierten geometrischen Brownschen Bewegung, wobei sich doch eine starke qualitative Ähnlichkeit mit dem Verlauf des DAX-Kurses (vgl. Abbildung 1.1) feststellen läßt. Eine ausführliche Beschreibung zeitstetiger Modelle findet man etwa

in Duffie [15]. Würden wir ein solches Modell für einen zeitdiskreten Renditeprozeß anwenden, dann wären sowohl die relativen Returns, als auch die Logreturns, aufgrund der unabhängigen und stationären Zuwächse der Brownschen Bewegung, unabhängig und identisch verteilt (iid), da

$$\begin{aligned} \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} &= \frac{\exp(\alpha t + \sigma B_t) - \exp(\alpha(t-1) + \sigma B_{t-1})}{\exp(\alpha(t-1) + \sigma B_{t-1})} \\ &= \exp(\alpha + \sigma(B_t - B_{t-1})) - 1 \\ &\stackrel{d}{=} \exp(\alpha + \sigma B_1) - 1, \end{aligned}$$

$$\ln(X_t/X_{t-1}) = \alpha t + \sigma B_t - \alpha(t-1) - \sigma B_{t-1} \stackrel{d}{=} \alpha + B_1.$$

Empirische Untersuchungen historischer Datenreihen der Logreturns haben allerdings eine komplexe Abhängigkeitsstruktur in den Daten ermittelt. Bereits Mandelbrot [28] und Fama [19] haben in ihren Untersuchungen von Finanzzeitreihen unter anderem festgestellt, daß auf einen starken Ausschlag in der Preisentwicklung zumeist eine Phase starker Volatilität folgt, d.h. daß auch in den nächsten Beobachtungen überdurchschnittliche Ausschläge zu erwarten sind. Insgesamt betrachtet, wechseln sich Perioden mit eben beschriebener hoher Volatilität mit Perioden niedriger Volatilität, also nur schwachen Ausschlägen, ab. Diese Eigenschaft läßt sich auch aus dem Beispiel mit den Daxrenditen in Abbildung 1.2 herauslesen.

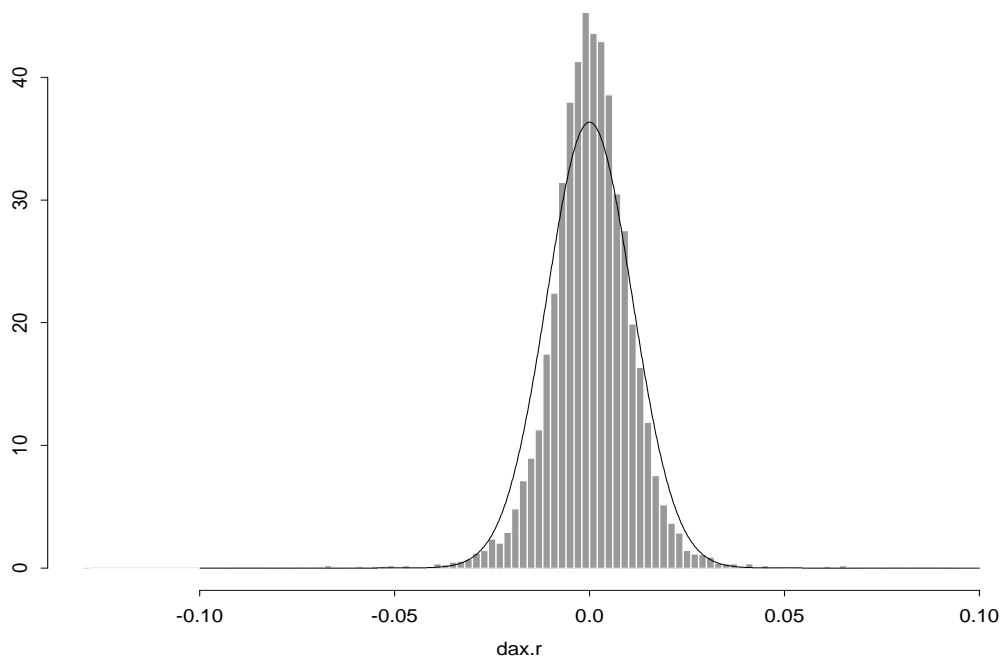


Abbildung 1.4: Histogramm der Daxrenditen aus Abb. 1.2 - dabei gibt die durchgezogene Linie die Dichte der Normalverteilung wieder, wobei Erwartungswert und Varianz aus den Daxrenditen geschätzt wurden.

Weitere Analysen historischer Daten, wie sie etwa in Taylor [39] beschrieben sind, haben die nachfolgenden empirischen Eigenschaften von Renditereihen zu Tage gefördert.

- Die empirische Verteilung der Logreturns ist approximativ symmetrisch mit Erwartungswert 0 und einer über die Zeit konstanten unbedingten Varianz (vgl. Abb. 1.2 und 1.4).
- Es zeigt sich eine hohe Kurtosis mit Werten > 6 und damit mehr als doppelt so groß wie bei der Standardnormalverteilung. Das bedeutet, daß im Vergleich zur Normalverteilung, bei der Verteilung der Logreturns mehr Masse um 0 und in den Verteilungsschwänzen (Tails) liegt. Diese Eigenschaft einer gegenüber der Normalverteilung größeren Kurtosis bezeichnet man auch als Leptokurtose. Insbesondere fallen dabei die Tails $\mathbf{P}(Y > x)$, $x > 0$, und $\mathbf{P}(Y < -x)$, $x > 0$, nicht wie bei der Normalverteilung exponentiell ab, sondern wie bei einer Paretoverteilung mit $x^{-\kappa}$, $\kappa > 0$, für $x \rightarrow \infty$. Man spricht in diesem Fall von heavy tails im Gegensatz zu light tails, wie bei der Normalverteilung. Den Exponenten κ definieren wir später als Tailindex der Verteilung.
- Man stellt keine nennenswerte Autokorrelation in den Logreturns, allerdings eine markante positive Autokorrelation der quadrierten und absoluten Logreturns fest.

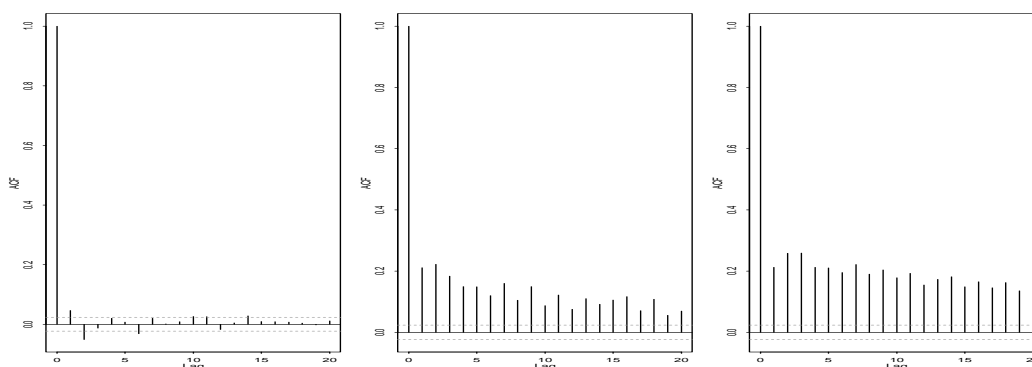


Abbildung 1.5: Autokorrelationen der einfachen (Links), quadrierten (Mitte) und absoluten Logreturns am Beispiel der DAX-Renditen aus Abbildung 1.1 - die gestrichelte Linie beschreibt das 95% -Konfidenzintervall für iid-normalverteilte Daten

Dies zeigt auch die Abbildung 1.5, in der die Autokorrelationen der normalen, quadrierten und absoluten Logreturns für den DAX im Zeitraum von 2. Januar 1970 bis 2. Juni 1999 verglichen werden. Eine mögliche Erklärung für diese besondere Abhängigkeitsstruktur ist eine nichtstationäre Varianz oder eine bedingte Varianz $\text{Var}(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$, die von den vergangenen Beobachtungen oder anderen zusätzlichen Variablen abhängt.

- Man beobachtet Klusterbildung von extremen Ausschlägen. Hiermit ist die bereits oben beschriebene Beobachtung von Mandelbrot [28] bzw. Fatma [19] gemeint, daß auf außergewöhnliche Sprünge in den Preisen meist weitere große Kursschwankungen folgen und deshalb extreme Logreturns häufig in Gruppen auftreten.

Alle diese Beobachtungen führten zu einer Weiterentwicklung der traditionellen ökonometrischen Modelle, wie z.B. den linearen ARMA-Modellen, in denen nur mit unbedingten Verteilungen und konstanten Varianzen der Logreturns gearbeitet wurde. Insbesondere wurde dadurch die häufige Annahme von unabhängig und identisch normalverteilten Logreturns verworfen. Zudem mußte man erkennen, daß lineare Modelle zwar mathematisch und statistisch einfach zu handhaben sind, allerdings nicht den Beobachtungen gerecht werden. Dies alles führte zur Entwicklung nichtlinearer, stationärer Modelle, insbesondere solcher mit nicht-konstanter bedingter Varianz, sogenannten bedingt heteroskedastischen Modellen oder auch Volatilitätsmodellen.

Die bekanntesten Vertreter solcher Modelle sind die von Engle [18] eingeführten ARCH-Prozesse und deren Verallgemeinerung, die auf Bollerslev [7] zurückgehenden GARCH-Prozesse. Während bei den ARCH-Prozessen die auf die vergangenen Beobachtungen bedingte Varianz nur von den letzten Logreturns abhängt, ist diese beim GARCH-Prozess auch von den zurückliegenden bedingten Varianzen abhängig. Den einfachsten Vertreter dieser Klasse, den GARCH(1,1)-Prozeß, werden wir in dieser Arbeit hinsichtlich seines Tailverhaltens untersuchen. Bei diesem Prozeß ist die bedingte Varianz zum Zeitpunkt t von der Rendite und der bedingten Varianz zum Zeitpunkt $t - 1$ abhängig.

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ iid symmetrisch verteilt, $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1, \beta_1 > 0$ und X_0 beliebige ZV.

Dabei zeigt sich, wie bereits Kesten [25] bewies, daß bei diesen Modellen die Verteilung der X_t heavy tails besitzen kann, auch wenn die ZV ε_t eine Verteilung mit light tails besitzt. Die weitere Entwicklung führte dann zu Volatilitätsmodellen der allgemeineren Form

$$X_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit iid Innovationen ε_t , $t \in \mathbb{N}$, und ε_t unabhängig von den vergangenen X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Dabei bezeichnen σ_t bzw. μ_t die von der Vergangenheit abhängigen bedingten Varianzen bzw. Erwartungswerte des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ zum Zeitpunkt t . In diese Prozessklasse ordnen sich auch die von Weiss [42] eingeführten autoregressiven Prozesse mit GARCH-Innovationen ein. Den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen, gegeben durch

$$X_t = \gamma_1 X_{t-1} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ iid symmetrisch verteilt, $\alpha_0 \geq 0$, $\gamma_1, \alpha_1 > 0$ und X_0 beliebige ZV,

werden wir hier genauer unter die Lupe nehmen und dessen Tailverhalten studieren.

Da in allen diesen Volatilitätsmodellen, die vergangenen Logreturns für den weiteren Renditeverlauf miteinbezogen werden, lassen sich mit diesen Modellen gegenüber den herkömmlichen Modellen verbesserte Prognosen erstellen. Voraussetzung dafür ist eine vernünftige Schätzung der Modellparameter. Dafür bietet sich die Methode der Quasi-Maximum-Likelihood Schätzung an, wie sie in Gouriéroux et al. [21], Weiss [43], Bollerslev und Wooldridge [8] und speziell für den GARCH(1,1)-Fall in Lee und Hansen [27] beschrieben ist. Dabei wird die Methode der

Maximum-Likelihood Schätzung unter der Annahme standardnormalverteilter Innovationen benutzt. Obwohl diese Voraussetzungen i.a. nicht erfüllt sind, lassen sich für Innovationen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 Eigenschaften wie Konsistenz und asymptotische Normalität nachweisen.

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, das Tailverhalten des GARCH(1,1)-Prozesses und des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen zu beschreiben, um dann deren Tailindizes zu bestimmen. Wie bereits erwähnt, beschreibt der Tailindex einer Verteilung, wie schnell sich die Schwänze der Verteilung gegen 0 bewegen, d.h. wie viel Masse in den Verteilungsenden liegt. Anders formuliert läßt sich aus dem Tailindex ablesen, mit welcher Wahrscheinlichkeit extreme Ereignisse passieren, also starke Preissprünge stattfinden. Je kleiner der Tailindex, umso langsamer fällt der Tail der Verteilung ab und umso häufiger stellen sich große Logreturns, positiv wie negativ, ein. Umgekehrt kommt man dem Tailverhalten der Normalverteilung umso näher, je größer der Tailindex ist. Dies drückt sich auch dadurch aus, daß umso mehr Momente existieren, je größer der Tailindex ist. Bei einem Tailindexwert von κ existierten alle Momente bis zum κ -ten, alle Momente ab dem κ -ten und einschließlich diesem sind dagegen unendlich. Dies werden wir in den mathematischen Grundlagen (Abschnitt 2.5) beweisen. Insbesondere werden wir die Bedeutung der Noise-Variable für die Größe des Tailindexes in diesen Modellen herausarbeiten. Auf dieses Ziel hin gliedert sich der weitere Verlauf der Arbeit in sechs Kapitel.

Zunächst führen wir in den mathematischen Grundlagen wichtige Begriffe aus dem Bereich der Finanzzeitreihen ein und stellen das für die weiteren Kapitel notwendige Basiswissen aus der Maß- und Integrationstheorie und Kernsätze der Erneuerungstheorie bereit. Zudem benötigen wir einige Definitionen aus dem Gebiet der regulären Variation.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit den stationären Lösungen der stochastischen Rekurrenzgleichung

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t, \quad (A_t, B_t) \text{ iid und unabhängig von } Y_{t-1}, \quad t \in \mathbb{N},$$

mit der sich bereits Kesten [25], Vervaat [41] und Goldie [20] auseinandersetzen. Wir zeigen, inwiefern ARCH- und GARCH-Prozesse diese Gleichung erfüllen, und zeigen unter welchen Bedingungen stationäre Lösungen der Rekurrenzgleichung existieren. Mit Hilfe des Satzes von Goldie zeigen wir, wie der Tail solcher stationärer Lösungen abfällt und wenden diese Ergebnisse auf den Spezialfall eines GARCH(1,1)-Prozeß an. Den Satz von Goldie [20] werden wir dabei ausführlich unter Anwendung erneuerungstheoretischer Ergebnisse beweisen.

Im nächsten Kapitel greifen wir auf die Resultate des dritten Kapitels zurück und liefern für den GARCH(1,1)-Prozeß Tabellen über diejenigen Parameter, für die eine stationäre Lösung existiert, und über die dafür ermittelten Tailindizes. Zuerst wird allerdings ausführlich beschrieben, wie die Tabellenwerte ermittelt wurden. Anschließend werden die Tabellen für die verschiedene Noise-

variablen verglichen und interpretiert. Dabei dokumentiert sich deutlich die starke Abhängigkeit des Tailindexes von der verwendeten Noise-Variablen.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit dem AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen und stellen dazu kurz das Modell vor. Dabei stellen wir einige Bedingungen an die Noise-Variable, mit deren Hilfe sich anschließend die Sätze über die Existenz einer stationären Verteilung und deren Tailverhalten beweisen lassen. Allerdings würde das Ausführen aller Beweise den Rahmen der Diplomarbeit sprengen, weshalb wir stattdessen auf die vorhandene Literatur verweisen.

Die gewonnenen Erkenntnisse benutzen wir im anschließenden Kapitel, um Tabellen für den Parameterbereich mit stationären Lösungen und deren Tailindizes zu bestimmen. Zunächst aber geben wir in diesem Kapitel ein Auswahl von Verteilungen an, welche die bei der Modellvorstellung angegebenen Bedingungen erfüllen. Der darauffolgende Vergleich der Tabellen für verschiedene Verteilungen der Noise-Variablen, wird mit dem Beweis einiger Monotonieeigenschaften in den Tailindextabellen abgeschlossen.

Im abschließenden Kapitel diskutieren wir die Verwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse aus dieser Diplomarbeit in der Praxis. Dabei stellen wir auch einige Methoden der Tailindexschätzung, insbesondere den Hillschätzer, vor.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

Im folgenden seien alle Zufallsvariablen (ZV) auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiert.

2.1 Finanzzeitreihen

Hier werden einige grundlegende Definitionen aus der Zeitreihenanalyse vorgestellt, wobei wir uns dabei am Buch von Brockwell und Davis [11] orientiert haben.

Definition 2.1 (strikt stationär)

Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt **strikt stationär**, falls für alle $h, n \in \mathbb{N}$, $t_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1 \dots n$,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

gilt. Insbesondere sind dann alle ZV X_t , $t \in \mathbb{Z}$, identisch verteilt.

Definition 2.2 (Autokovarianzfunktion)

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stochastischer Prozeß mit $\text{Var}X_t < \infty$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Dann heißt die Funktion $\gamma_X : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma_X(r, s) = \mathbf{E}[(X_r - \mathbf{E}X_r)(X_s - \mathbf{E}X_s)]$$

Autokovarianzfunktion von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definition 2.3 (schwach stationär)

Der stochastische Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt **schwach stationär**, falls

- (i) $\mathbf{E}(|X_t|^2) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $\mathbf{E}X_t = \mu$ für $\mu \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$,
- (iii) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r+h, s+h) \quad \forall r, s, h \in \mathbb{Z}$.

Bemerkungen:

- (i) Wir verwenden im weiteren Verlauf der Diplomarbeit oftmals die Bezeichnung stationär, damit ist immer die strikte Stationariät gemeint.
- (ii) Falls ein strikt stationärer stochastischer Prozeß endliche Varianz besitzt, dann ist dieser Prozeß auch schwach stationär. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.
- (iii) Falls der Prozeß $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist, dann ist

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0), \quad r, s \in \mathbb{Z}.$$

Deshalb definieren wir $\gamma_X(h) := \gamma_X(h, 0)$, $h \in \mathbb{Z}$, als Autokovarianzfunktion eines schwach stationären stochastischen Prozesses.

Definition 2.4 (Weißes Rauschen, White Noise)

Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stationärer stochastischer Prozeß mit $\mathbf{E}Z_t = 0$ und

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma^2 & , \quad h = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann heißt $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ weißes Rauschen oder White Noise mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 , kurz $WN(0, \sigma^2)$.

Definition 2.5 (linearer Prozeß)

Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} WN(0, \sigma^2)$ und $\psi_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Falls $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$, $t \in \mathbb{Z}$, und $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$,

dann ist $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein linearer Prozeß.

Definition 2.6 (ARMA(p, q)-Prozeß)

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stationärer stochastischer Prozeß für den die folgende Differenzgleichung gelte

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

wobei $\phi_i, \theta_j \in \mathbb{R}$ für $i = 1 \dots p$, $j = 1 \dots q$, $\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$ und $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} WN(0, \sigma^2)$.

Dann ist $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein autoregressiver Moving Average-Prozeß der Ordnung (p, q) , kurz ein ARMA(p, q)-Prozeß. Falls $p = 0$ ist, erhalten wir einen Moving Average-Prozeß der Ordnung q , kurz einen MA(q)-Prozeß, und falls $q = 0$ ist, ergibt sich ein autoregressiver Prozeß der Ordnung p , kurz ein AR(p)-Prozeß.

Bemerkung:

Die ARMA(p, q)-Prozesse sind keine guten Modelle für Finanzzeitreihen, z.B. besitzen sie eine konstante bedingte Varianz $\text{Var}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$, denn

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) &= \text{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \\ &= \text{Var}(Z_t) + \theta_1 \text{Var}(Z_{t-1}) + \dots + \theta_q \text{Var}(Z_{t-q}) \\ &= (1 + \theta_1 + \dots + \theta_q) \sigma^2. \end{aligned}$$

Bedingte heteroskedastische Modelle:

Für die Modellierung von Finanzzeitreihen benutzt man häufig Modelle der Form

$$X_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ WN}(0, 1), \quad \varepsilon_n \text{ unabhängig von } \sigma_n.$$

μ_n ist dann der bedingte Erwartungswert von X_n gegeben X_{n-1}, X_{n-2}, \dots , und σ_n ist die bedingte Standardabweichung von X_n gegeben X_{n-1}, X_{n-2}, \dots .

Die ε_n , $n \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir auch als Noise-Zufallsvariablen oder Innovationen.

Zudem ist in der Regel die ZV X_n durch die vergangenen X_{n-1}, X_{n-2}, \dots mitbestimmt, so daß einige ZV zu Anfang gegeben sein müssen. Diese vorgegebenen ZV nennen wir Start-ZV.

Beispiele für diese Prozeßklasse sind

- (i) ARCH(p)-Prozeß nach Engle [18]

ARCH = autoregressive conditionally heteroscedastic, d.h. autoregressiv mit nicht-konstanter bedingter Varianz.

Dabei ist $\mu_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit vorgegebenen Start-ZV $X_0, X_{-1}, \dots, X_{1-p}$ ist

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } \alpha_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad \alpha_p > 0.$$

Ein ARCH(1)-Prozeß besitzt also die Form

$$X_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2} \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad X_0 \text{ bel. Start-ZV.}$$

- (ii) GARCH(p, q)-Prozeß nach Bollerslev [7]

GARCH = generalized ARCH, d.h. verallgemeinerter ARCH-Prozeß.

Dabei ist $\mu_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit vorgegebenen Start-ZV X_{1-i} , $i = 1, \dots, p$, und vorgegebenen Startvarianzen σ_{1-j}^2 , $j = 1, \dots, q$, ist

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{n-p}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{n-q}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit}$$

$\alpha_i, \beta_j \geq 0$ für $i = 0, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, q-1$ und $\alpha_p, \beta_q > 0$, X_0, σ_0^2 beliebig.

Ein GARCH(1,1)-Prozeß besitzt also die Form

$$X_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1, \beta_1 > 0.$$

- (iii) AR(r)-Prozeß mit GARCH(p, q)-Innovationen nach Weiss [42]

Dabei ist σ_n^2 wie bei Punkt (ii) angegeben und mit Start-ZV X_{1-i} , $i = 1, \dots, r$, ist

$$\mu_n = \gamma_1 X_{n-1} + \dots + \gamma_r X_{n-r}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit } \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad \gamma_r > 0, \quad X_0 \text{ bel. ZV.}$$

Ein AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen hat dann die Form

$$X_n = \gamma_1 X_{n-1} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2} \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \gamma_1, \alpha_1 > 0.$$

2.2 Maß- und Integrationstheorie

Im folgenden betrachten wir die Bildung von Produktmaßen und die Faltung von Maßen bzw. Funktionen. Für eine ausführlichere Beschreibung und die Beweise verweisen wir auf Bauer [3] und Elstrodt [16].

Seien Ω_1, Ω_2 zwei Mengen und $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ die Produktmenge sowie $p_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, i = 1, 2$, die Projektionen, welche jeden Punkt aus Ω auf seine i -te Komponente abbilden.

Satz 2.7 (Definition des Produktmaßes)

Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 := \sigma(p_1, p_2)$ sei die von p_1, p_2 erzeugte σ -Algebra, die als Produkt- σ -Algebra von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 bezeichnet wird.

Dann gibt es genau ein Maß π auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \quad \forall A_i \in \mathfrak{A}_i, i = 1, 2.$$

Dieses Maß π nennt man **Produkt der Maße μ_1 und μ_2** und wird mit $\mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet.

Analog definiert sich das Produkt endlich vieler Maße.

Satz 2.8 (Satz von Fubini)

Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume und sei f eine $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbare numerische Funktion auf $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Dann gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1. \quad (2.2)$$

Ist $f \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ -meßbar und eines der Integrale

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2), \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f| d\mu_1 \right) d\mu_2, \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right) d\mu_1$$

endlich, so ist $f \mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbar und es gilt (2.2).

Nun sei die $\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{B}$ -meßbare Abbildung

$$A : (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben. Wie üblich bezeichne \mathfrak{B} dabei die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} .

Definition 2.9 (Faltung von Maßen)

Für zwei endliche Maße μ_1, μ_2 auf \mathfrak{B} , heißt das Bildmaß von $\mu_1 \otimes \mu_2$ unter der Abbildung A das Faltungsprodukt der Maße μ_1, μ_2 und wird mit $\mu_1 * \mu_2$ bezeichnet.

Damit ist für $B \in \mathfrak{B}$

$$\mu_1 * \mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B - y) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu_2(B - y) d\mu_1(y).$$

Bei der n -fachen Faltung, $n \in \mathbb{N}$, des gleichen Maßes benützen wir eine abkürzende Schreibweise. Sei μ ein endliches Maß, dann definieren wir rekursiv

$$\mu^{(1)} := \mu, \quad \mu^{(n+1)} := \mu * \mu^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zusätzlich definieren wir

$$\mu^{(0)} := \delta_0, \quad \text{wobei } \delta_0(B) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } 0 \in B \\ 0 & , \text{ falls } 0 \notin B, \end{cases} \quad B \in \mathfrak{B},$$

das Dirac-Maß an der Stelle 0 bezeichnet. Dann gilt

$$\delta_0 * \mu(B) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(B - y) d\mu(y) = \mu(B), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Ebenso wie in Definition 2.9 können wir auch die Faltung eines Maßes mit einer Funktion und die Faltung zweier Funktionen definieren.

Definition 2.10 (Faltung von Maß und Funktion)

Sei μ ein endliches Maß auf \mathfrak{B} und f eine Lebesgue-integrierbare numerische Funktion auf \mathbb{R} .

Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|\int_{\mathbb{R}} f(x - y) d\mu(y)| < \infty$

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) d\mu(y).$$

Auf der Nullmenge, auf der $|\int_{\mathbb{R}} f(x - y) d\mu(y)| = \infty$, wird $f * \mu(x) = 0$ definiert.

Definition 2.11 (Faltung zweier Funktionen)

Seien f, g zwei Lebesgue-integrierbare numerische Funktionen auf \mathbb{R} .

Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy| < \infty$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy.$$

Auf der Nullmenge, auf der $|\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy| = \infty$, wird $f * g(x) = 0$ definiert.

Für die Faltung zweier Funktionen sind im folgenden Satz einige elementare Eigenschaften zusammengefaßt.

Satz 2.12 (Eigenschaften der Faltung)

Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ und λ sei das Lebesguemaß.

Die Faltung ist kommutativ, d.h. $f * g = g * f$,
 distributiv in dem Sinne, daß

$$(f + g) * h = f * h + g * h \quad \lambda\text{-fast überall,}$$

und assoziativ in dem Sinne, daß

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad \lambda\text{-fast überall.}$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |f| dx \int_{\mathbb{R}} |g| dx < \infty$$

und damit gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f| dx \int_{\mathbb{R}} |g| dx.$$

Definition 2.13 (Maßerzeugende Funktion)

Sei $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsseitig stetige Funktion.

Dann nennt man H **maßerzeugende Funktion**.

Satz 2.14 (Differentiationssatz für parameterabhängige Integrale)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, μ ein Maß auf \mathbb{R} und $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $t \in I$ ist $f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Die Ableitung $\left. \frac{d}{dt} f(t, x) \right|_{t=t_0}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (iii) Es existiert eine Umgebung U von t_0 und eine integrierbare Funktion $g \geq 0$, so daß

$$\left| \left. \frac{d}{dt} f(t, x) \right|_{t=t_0} \right| \leq g(x) \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Dann ist die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x) d\mu(x)$$

im Punkt t_0 differenzierbar, $\left. \frac{d}{dt} f(t, \cdot) \right|_{t=t_0}$ ist integrierbar und es gilt

$$F'(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \left. \frac{d}{dt} f(t, x) \right|_{t=t_0} d\mu(x).$$

Ist die Funktion F in allen Punkten $t \in I$ differenzierbar, dann ist $\left. \frac{d}{dt} f(t, \cdot) \right|_{t=t}$ für alle $t \in I$ integrierbar und es gilt

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \left. \frac{d}{dt} f(t, x) \right|_{t=t} d\mu(x), \quad t \in I.$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in Elstrodt [16, S.146].

2.3 Direkte Riemann-Integrierbarkeit

Für die Sätze aus der Erneuerungstheorie sind oftmals direkt Riemann-integrierbare (dRi) Funktionen notwendig. Wir liefern hier die Definition und geben in einem Satz notwendige und hinreichende Bedingungen für die direkte Riemann-Integrierbarkeit an.

Definition 2.15 (direkt Riemann-integrierbar)

Sei g eine reellwertige Funktion auf \mathbb{R} .

Definiere für beliebiges $h > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m_k(h) &:= \inf\{g(t); (k-1)h \leq t < kh\}, \\ M_k(h) &:= \sup\{g(t); (k-1)h \leq t < kh\}, \\ \underline{\sigma}(h) &:= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k(h), \quad \bar{\sigma}(h) := h \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k(h). \end{aligned}$$

g heißt **direkt Riemann-integrierbar (dRi)**, falls $\underline{\sigma}(h)$ und $\bar{\sigma}(h)$ für alle $h > 0$ konvergieren und $\lim_{h \downarrow 0} (\bar{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)) = 0$.

Bemerkung:

Wenn wir in obiger Definition den Definitionsbereich der Funktion g auf ein kompaktes Intervall beschränken, dann entspricht diese Definition der gewöhnlichen Riemann-Integrierbarkeit auf einem kompakten Intervall.

Satz 2.16 Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und λ sei das Lebesgue-Maß.

Falls g dRi ist, dann ist g auch Lebesgue-integrierbar und

$$\lim_{h \downarrow 0} \underline{\sigma}(h) = \lim_{h \downarrow 0} \bar{\sigma}(h) = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda.$$

Eine notwendige Bedingung für die direkte Riemann-Integrierbarkeit ist

$$g \text{ ist beschränkt und } \lambda\text{-f.ü. stetig.} \tag{2.3}$$

Hinreichende Bedingungen für die direkte Riemann-Integrierbarkeit sind

- (2.3) zusammen mit $\bar{\sigma}(h) < \infty$ und $\underline{\sigma}(h) < \infty$ für ein $h > 0$,
- (2.3) und g besitzt beschränkten Träger $\overline{\{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}}$,
- (2.3) und $f \leq g \leq h$ für dRi-Funktionen f und h ,
- $g = 0$ auf $(-\infty, 0)$ sowie monoton nichtwachsend auf $[0, \infty)$ und g ist Lebesgue-integrierbar.
- g^+ und g^- sind dRi.

Den Beweis zu diesem Satz findet man etwa in Alsmeyer [1, S.69f].

2.4 Erneuerungstheorie

Seien Y_0, Y_1, Y_2, \dots unabhängige reelle Zufallsvariablen, $Y_i, i \in \mathbb{N}$, iid, und sei $S_n := \sum_{k=0}^n Y_k, n \in \mathbb{N}_0$, dann bezeichnen wir $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als **Irrfahrt** oder auch Random Walk. Falls $Y_0 = 0$, dann nennen wir diese eine **Standard-Irrfahrt**, ansonsten nennen wir sie **verschobene Irrfahrt**. Die ZV $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißen **Zuwächse** der Irrfahrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und deren Erwartungswert $\mathbf{E}Y_n$ bezeichnen wir als **Drift der Irrfahrt**.

Definition 2.17 (Erneuerungsfunktion und Erneuerungsmaß)

Sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt, F die Verteilungsfunktion der Zuwächse $Y_n, n \in \mathbb{N}$, und F_0 die Verteilungsfunktion der ZV Y_0 .

Die Funktion $U = F_0 * \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$ heißt **Erneuerungsfunktion** der Irrfahrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und das durch $dU(x) = d\left(F_0 * \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}\right)(x), x \in \mathbb{R}$, definierte Maß nennt man **Erneuerungsmaß**.

Die Standard-Erneuerungstheorie studiert nun die asymptotischen Eigenschaften einer unbekannt Funktion G , welche die Erneuerungsgleichung $G = g + G * \mu$ erfüllt. Dabei ist g eine bekannte Funktion und μ ein bekanntes Maß, üblicherweise ein Erneuerungsmaß.

Definition 2.18 (Erneuerungsgleichung)

Sei H eine maßerzeugende Funktion auf \mathbb{R} mit $H(\infty) < \infty, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine bekannte Funktion und $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unbekannt.

Dann nennt man die Faltungsgleichung $G = g + H * G$ **Erneuerungsgleichung**.

Wir untersuchen nun für den nicht-arithmetischen Fall die Lösung solcher Erneuerungsgleichungen; dazu definieren wir zunächst den Begriff einer arithmetischen Verteilungsfunktion.

Definition 2.19 (arithmetische Verteilungsfunktion)

Die Verteilungsfunktion F_X einer reellen Zufallsvariablen X heißt **arithmetisch**, falls ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ existiert, so daß

$$\mathbf{P}(X \in \{n\lambda, n \in \mathbb{Z}\}) = 1.$$

Satz 2.20 (Lösung der Erneuerungsgleichung)

Sei F eine nicht-arithmetische Verteilungsfunktion einer reellen ZV mit $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) > 0$. Weiter

sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine dRi-Funktion und $U = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}$.

Dann bildet $G = g * U$ eine beschränkte Lösung der Erneuerungsgleichung $G = g + U * G$. Zudem ist $G = g * U$ die einzige beschränkte Lösung mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$.

Satz 2.21 (Key Renewal Theorem)

Sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt mit strikt positiver Drift $\mu \in (0, \infty]$, nichtarithmetischer Verteilungsfunktion der Zuwächse $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Erneuerungsfunktion U .

Dann gilt für jede dRi-Funktion g

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g * U(t) = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

Damit sind die für diese Arbeit notwendigen Begriffe und Sätze aus der Erneuerungstheorie bereitgestellt. Ausführlichere Darstellungen dieses Gebietes findet man in Resnick [34], Asmussen [2] oder Alsmeyer [1]. Die Beweise zu den Sätzen 2.21 und 2.20 sind in Alsmeyer [1, S.71f und S.88f.] angegeben.

2.5 Reguläre Variation

Hier werden die für diese Arbeit nötigen Definitionen aus dem Gebiet der regulären Variation angegeben. Für weitere Informationen zu diesem Gebiet sei auf die Bücher von Bingham, Goldie und Teugels [5], Resnick [33] oder Embrechts et al. [17] verwiesen.

Definition 2.22 (langsam variierende Funktion in ∞)

Sei $l : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, eine positive meßbare Funktion, die auf einer Umgebung von ∞ definiert ist.

Falls $\forall t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(tx)}{l(x)} = 1,$$

dann heißt l **langsam variierende Funktion in ∞** .

Beispiele für langsam variierende Funktionen:

- Konstante Funktionen sind trivialerweise langsam variierende Funktionen.
- Funktionen, die im Limes gegen Unendlich gegen eine echt positive Konstante streben.
- Die Logarithmusfunktion, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(tx)}{\ln(x)} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t/(tx)}{1/x} = 1.$$

Definition 2.23 (regulär variierende Funktion in ∞)

Sei l eine meßbare nichtnegative Funktion.

Falls $\forall t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(tx)}{l(x)} = t^\kappa,$$

dann heißt l **regulär variierende Funktion in ∞ mit Index κ** .

Beispiele für regulär variierende Funktionen mit Index κ sind etwa

$$x^\kappa, \quad x^\kappa \ln(x), \quad x^\kappa \ln(1+x).$$

Definition 2.24 (Tailindex)

Sei X eine ZV, $\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X > x)$, $x > 0$, die Funktion, die den rechten Tail der ZV beschreibt, und l eine langsam variierende Funktion in ∞ . Damit gelte

$$\mathbf{P}(X > x) \sim l(x)x^{-\kappa}.$$

Dann ist \bar{F} regulär variierend in ∞ mit Index $-\kappa$, denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\kappa}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Den Index κ bezeichnen wir dann als **Tailindex** des rechten Tails der Verteilung von X . Analog läßt sich auch der Tailindex des linken Tails von X definieren.

Bemerkung:

Für eine reelle ZV X mit $\mathbf{P}(X > x) \sim C_1 x^{-\kappa}$ und $\mathbf{P}(X < -x) \sim C_2 x^{-\kappa}$ für $x > 0$, d.h. X besitzt Tailindex κ für beide Tails, gilt

$$\mathbf{E}(|X|^u) < \infty, \quad \text{für } 0 < u < \kappa, \quad \text{und } \mathbf{E}(|X|^u) = \infty, \quad \text{für } u \geq \kappa. \quad (2.4)$$

Aufgrund der Monotonie der Verteilungsfunktion gilt für Konstanten \underline{C}, \bar{C} und hinreichend großes $s > 0$

$$\underline{C}x^{-\kappa} \leq \mathbf{P}(X > x) \leq \bar{C}x^{-\kappa} \quad \text{und} \quad \underline{C}x^{-\kappa} \leq \mathbf{P}(X \leq -x) \leq \bar{C}x^{-\kappa}, \quad \text{für } x > s. \quad (2.5)$$

Damit zeigt sich für $0 < u < \kappa$ mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X|^u) &\leq \underbrace{\int_{-s}^s |x|^u d\mathbf{P}(X \leq x)}_{=: K \in \mathbb{R}, \text{ konstant}} + \int_s^\infty x^u d\mathbf{P}(X \leq x) + \int_{-\infty}^{-s} |x|^u d\mathbf{P}(X \leq x) \\ &= K - \int_s^\infty x^u d\mathbf{P}(X > x) dx + \int_{-\infty}^{-s} (-x)^u d\mathbf{P}(X \leq x) \\ &= K - \left[x^u \mathbf{P}(X > x) \right]_{x=s}^\infty + u \int_s^\infty x^{u-1} \mathbf{P}(X > x) dx \\ &\quad + \left[(-x)^u \mathbf{P}(X \leq x) \right]_{x=-\infty}^{-s} + u \int_{-\infty}^{-s} (-x)^{u-1} \mathbf{P}(X \leq x) dx \\ &\stackrel{(2.5)}{\leq} K + \bar{C}s^{u-\kappa} + u \int_s^\infty x^{u-1} \bar{C}x^{-\kappa} dx + \bar{C}s^{u-\kappa} + u \int_{-\infty}^{-s} (-x)^{u-1} \bar{C}(-x)^{-\kappa} dx \\ &= K + 2\bar{C}s^{u-\kappa} + 2u\bar{C} \frac{s^{u-\kappa}}{u-\kappa} < \infty. \end{aligned}$$

Für $u = \kappa$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(|X|^\kappa) &= \underbrace{\int_{-s}^s |x|^\kappa d\mathbf{P}(X \leq x) - \int_s^\infty x^\kappa d\mathbf{P}(X > x)}_{=: K' \in \mathbb{R}, \text{ konstant}} + \int_{-\infty}^{-s} (-x)^\kappa d\mathbf{P}(X \leq x) \\
 &= K' - \left[x^\kappa \mathbf{P}(X > x) \right]_{x=s}^\infty + \kappa \int_s^\infty x^{\kappa-1} \mathbf{P}(X > x) dx \\
 &\quad + \left[(-x)^\kappa \mathbf{P}(X \leq x) \right]_{x=-\infty}^{-s} + \int_{-\infty}^{-s} (-x)^{\kappa-1} \mathbf{P}(X \leq x) dx \\
 &\stackrel{(2.5)}{\geq} K' + \underline{C}\kappa \int_s^\infty x^{-1} dx + \underline{C}\kappa \int_{-\infty}^{-s} (-x)^{-1} dx \\
 &= K' + 2\underline{C} \left[\ln x \right]_s^\infty = \infty,
 \end{aligned}$$

und für $u > \kappa$ folgt mit der Jensenschen Ungleichung

$$\mathbf{E}(|X|^u) = \mathbf{E}\left((|X|^\kappa)^{u/\kappa}\right) \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \left(\mathbf{E}(|X|^\kappa)^{u/\kappa}\right) = \infty.$$

Wir werden später das Tailverhalten der stationären Verteilungen für den GARCH(1,1)-Prozeß und den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen untersuchen. Dabei werden wir feststellen, daß diese Verteilungen einen Tailindex κ für beide Tails besitzen und die langsam variierende Funktion eine Konstante ist. Damit ist die Aussage (2.4) gültig für ZV X , die nach diesen stationären Verteilungen verteilt sind.

Der folgende Satz stammt von Breiman [12] und besagt, daß für das Produkt zweier unabhängiger regulär variierender ZV die ZV mit dem kleineren Tailindex den Index des Produkt bestimmt.

Satz 2.25

Sei X eine nichtnegative ZV mit $\mathbf{P}(X > x) \sim l(x)x^{-\kappa}$ für eine langsam variierende Funktion l .

Weiter sei Y eine nichtnegative ZV, unabhängig von X , mit $\mathbf{E}(|Y|^{\kappa+\varepsilon}) < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$.

Dann gilt

$$\mathbf{P}(YX > x) \sim \mathbf{E}(Y^\kappa)l(x)x^{-\kappa},$$

d.h. YX besitzt Tailindex κ für den rechten Tail der Verteilung.

Einen Beweis zu diesem Satz, sogar für den multivariaten Fall, findet man in Davis et al. [13, S.23f].

Kapitel 3

Lineare stochastische Rekurrenzgleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel Zeitreihenmodelle, welche die folgende stochastische Rekurrenzgleichung erfüllen.

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

mit Start-ZV Y_0 , $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid und unabhängig von Y_0 .

Hier, wie im folgenden auch, seien alle Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ definiert, soweit nicht explizit etwas Gegenteiliges definiert ist.

Mit Lösungen dieser Gleichung haben sich bereits Kesten [25] und Vervaat [41] eingehend beschäftigt, wobei sich Kesten auch deren Tailverhalten widmete. Auf Vervaat geht der Satz 3.2 über die Existenz einer stationären Lösung für die Gleichung (3.1) zurück. Für den Kernsatz dieses Kapitels (Satz von Goldie) greifen wir auf den Beweis von Goldie zurück, den wir hier ausführlich darstellen werden. Als Grundlage des Beweises stellt sich das Key Renewal Theorem (Satz 2.21) aus der Erneuerungstheorie heraus.

Das restliche Geschehen in diesem Kapitel zielt auf die Anwendung des Satzes von Goldie auf den GARCH(1,1)-Prozeß. Mit den Stationaritätseigenschaften von GARCH-Prozessen haben sich u.a. Bougerol und Piccard [10] auseinandergesetzt, während Mikosch und Stărică [29] und Nelson [30] besonders das Tailverhalten des GARCH(1,1)-Prozesses untersuchten.

Zu Beginn seien nun beispielhaft einige Modelle angegeben, welche die stochastische Rekurrenzgleichung (3.1) erfüllen. Insbesondere der GARCH(1,1)-Prozeß wird uns im weiteren Verlauf der Arbeit noch näher interessieren.

Beispiel 3.1

- ARCH(1): $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$.

Um auf die Form des Modells (3.1) zu kommen, quadrieren wir den ARCH(1)-Prozeß und

erhalten

$$\underbrace{X_n^2}_{=:Y_n} = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2) \varepsilon_n^2 = \underbrace{\alpha_1 \varepsilon_n^2}_{=:A_n} \underbrace{X_{n-1}^2}_{=:Y_{n-1}} + \underbrace{\alpha_0 \varepsilon_n^2}_{=:B_n}.$$

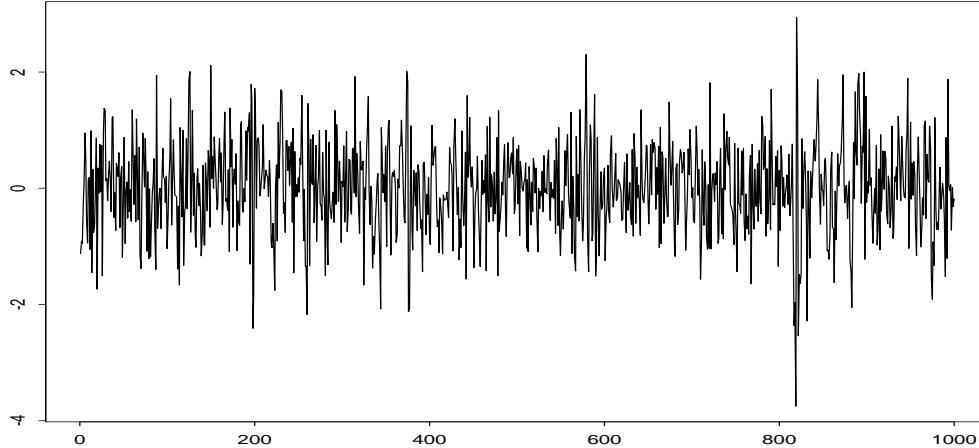


Abbildung 3.1: 1000 simulierte Daten des ARCH(1)-Prozesses $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = 0.4 + 0.4X_{n-1}^2$, wobei die Noise-Variablen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid-standardnormalverteilt ist.

Die Abbildung 3.1 zeigt die Simulation eines ARCH(1)-Prozesses. Er gibt die empirischen Eigenschaften von Renditenreihen realer Finanzdaten recht gut wieder (vgl. Abb. 1.2).

- GARCH(1,1): $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$. Um diesen Prozeß in die Form des obigen Modells zu pressen, ist eine zweidimensionale Darstellung notwendig. Aus den Zufallsvariablen werden dann Zufallsvektoren bzw. Zufallsmatrizen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_n^2 \\ \sigma_n^2 \end{pmatrix}}_{=:Y_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_n^2 & \beta_1 \varepsilon_n^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}}_{=:A_n} \underbrace{\begin{pmatrix} X_{n-1}^2 \\ \sigma_{n-1}^2 \end{pmatrix}}_{=:Y_{n-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \varepsilon_n^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}}_{=:B_n}.$$

Wir werden später nicht mit dieser Darstellung arbeiten, sondern werden eine stationäre Grenzverteilung für den Prozeß $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ suchen und dessen Tailverhalten betrachten. Mit Hilfe des Satzes 2.25 von Breiman [12] werden wir die so gewonnenen Resultate auf den GARCH(1,1)-Prozeß zurückführen. Der Prozeß $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt ebenfalls die Form (3.1).

$$\underbrace{\sigma_n^2}_{=:Y_n} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{n-1}^2 \varepsilon_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 = \underbrace{(\alpha_1 \varepsilon_{n-1}^2 + \beta_1)}_{=:A_n} \underbrace{\sigma_{n-1}^2}_{=:Y_{n-1}} + \underbrace{\alpha_0}_{=:B_n}.$$

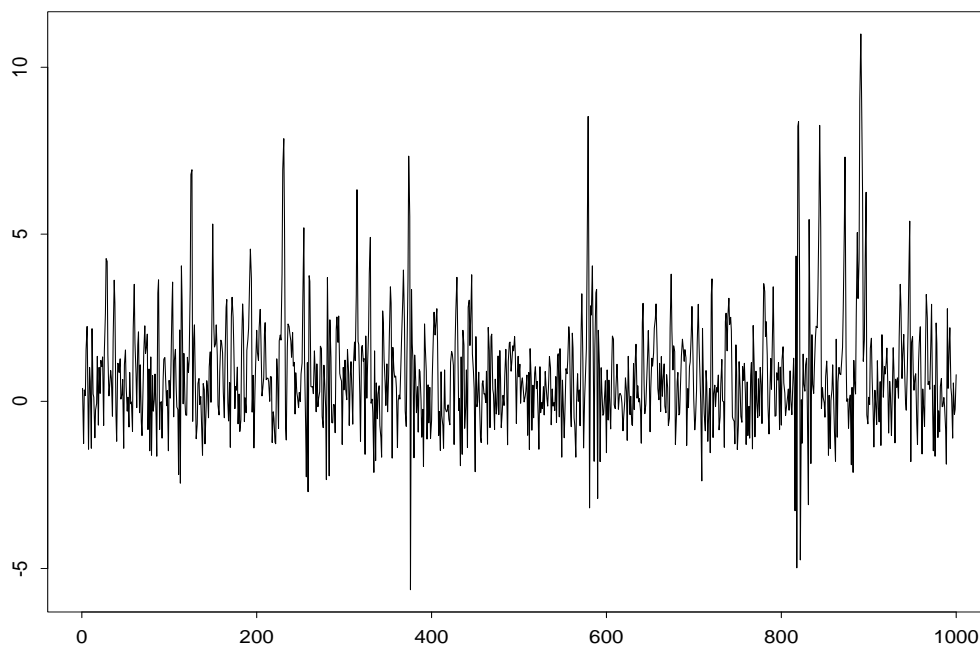


Abbildung 3.2: 1000 simulierte Daten des Bilinearen Prozesses $Y_n = 0.2Y_{n-1} + 0.4Y_{n-1}\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$, wobei die Noise-Variablen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid-standardnormalverteilt sind.

- Bilinearer Prozeß BL(1,0,1,1):

$$Y_n = \alpha_1 Y_{n-1} + \beta_1 Y_{n-1} \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1 \varepsilon_{n-1})}_{=: A_n} Y_{n-1} + \underbrace{\varepsilon_n}_{=: B_n}.$$

In Abbildung 3.2 sehen wir eine Simulation eines Bilinearen Prozesses. Dabei erkennen wir, daß dieser Prozeß zwar einige empirische Eigenschaften der Logreturns besitzt, wie etwa die Klusterbildung, der Pfad allerdings teilweise sehr lange Zeit braucht, bis er wieder den Mittelwert 0 erreicht, was für Finanzzeitreihen untypisch ist.

- Den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen können wir nicht derart einfach in die Form (3.1) bringen. Durch Quadrieren kommen wir etwa auf die Form

$$X_n^2 = \gamma_1 X_{n-1}^2 + 2\gamma_1 \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2} \varepsilon_n + (\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2) \varepsilon_n^2,$$

die uns nicht weiter bringt.

3.1 Konvergenz des stochastischen Prozesses und Eigenschaften der stationären Verteilung

Zunächst betrachten wir den rekursiven Aufbau des stochastischen Prozesses $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genauer. Aus Modell (3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_1 Y_0 + B_1, \\ Y_2 &= A_2 Y_1 + B_2 = A_2 A_1 Y_0 + A_2 B_1 + B_2, \\ &\vdots \\ Y_n &= Y_0 \prod_{j=1}^n A_j + \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=m+1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid und unabhängig von Y_0 sind, 0gilt

$$(Y_0, (A_k, B_k)_{1 \leq k \leq n}) \stackrel{d}{=} (Y_0, (A_{n-k+1}, B_{n-k+1})_{1 \leq k \leq n})$$

und damit

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y_0 \prod_{j=1}^n A_j + \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Um herauszufinden unter welchen Annahmen an (A_1, B_1) und Y_0 der stochastische Prozeß $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert, benutzen wir einen Satz aus Embrechts et al. [17], der auf Vervaat [41] zurückgeht. Dieser Satz liefert uns auch einige Eigenschaften der Grenzverteilung.

Satz 3.2

Sei (Y_n) ein stochastischer Prozess wie in (3.1) gegeben mit

$$\mathbf{E}(\ln^+ |B_1|) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(\ln |A_1|) < 0. \quad (3.4)$$

Dann gilt:

a) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ mit $Y \stackrel{d}{=} A_1 Y + B_1$, wobei Y unabhängig von (A_1, B_1) ist.

b) Die Gleichung $Y \stackrel{d}{=} A_1 Y + B_1$ besitzt eine in Verteilung eindeutige Lösung

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j. \quad (3.5)$$

c) Falls $Y_0 \stackrel{d}{=} Y$, dann ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strikt stationär.

Falls zusätzlich gilt, daß

$$\mathbf{E}(|B_1|^p) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(|A_1|^p) < 1 \quad \text{für ein } p \in [1, \infty), \quad (3.6)$$

dann gilt weiter

$$d) \mathbf{E}(|Y|^p) < \infty,$$

$$e) \mathbf{E}(|Y|^m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathbf{E}(A_1^k B_1^{m-k}) \mathbf{E}(Y^k), \quad m = 1, 2, \dots, \lfloor p \rfloor,$$

$\lfloor p \rfloor$ bezeichne die größte ganze Zahl $n \leq p$.

Bemerkung:

Aus (3.6) lassen sich die Bedingungen (3.4) folgern, d.h. wenn die Voraussetzungen (3.6) gelten, dann sind alle Aussagen a) bis e) gültig. Dies zeigen wir mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung, indem wir ausnützen, daß \ln und \ln^+ konvexe Funktionen sind.

Falls $\mathbf{E}(|B_1|^p) < \infty$ für ein $p \in [1, \infty)$, dann ist

$$\mathbf{E}(\ln^+ |B_1|) = \frac{1}{p} \mathbf{E}(\ln^+ (|B_1|^p)) \leq \frac{1}{p} \ln^+ \mathbf{E}(|B_1|^p) < \infty,$$

und falls $\mathbf{E}(|A_1|^p) < 1$ für ein $p \in [1, \infty)$, dann gilt

$$\mathbf{E}(\ln |A_1|) = \frac{1}{p} \mathbf{E}(\ln(|A_1|^p)) \leq \frac{1}{p} \ln \mathbf{E}(|A_1|^p) < 1.$$

Für den Beweis des Satzes 3.2 benötigen wir den folgenden Satz über die Konvergenz einer Folge von Zufallsvariablen. Einen Beweis zu diesem Satz findet man etwa in Billingsley [4, Kap. 5].

Satz 3.3 (Continuous mapping theorem)

Sei $h : K \rightarrow K'$ eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen K und K' , die beide mit den Borelschen σ -Algebren ausgestattet seien. Weiter gelte für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, daß $A_n \xrightarrow{d} A$ in K , für eine Zufallsvariable A mit Verteilung P_A .

Falls die Menge der Unstetigkeitsstellen der Abbildung h das P_A -Maß 0 besitzt, dann gilt

$$h(A_n) \xrightarrow{d} h(A) \quad \text{in } K'.$$

Beweis von Satz 3.2:

Für verschiedene Start-ZV Y_0 und Y'_0 im Modell (3.1) ergibt sich nach Gleichung (3.2)

$$\begin{aligned} Y_n(Y_0) &= Y_0 \prod_{j=1}^n A_j + \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j, \\ Y_n(Y'_0) &= Y'_0 \prod_{j=1}^n A_j + \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j \end{aligned}$$

und damit

$$Y_n(Y_0) - Y_n(Y'_0) = (Y_0 - Y'_0) \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Durch die Bezeichnung $Y_n(Y_0)$ soll die Abhängigkeit des stochastischen Prozesses $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von der Start-ZV Y_0 ausgedrückt werden.

Das starke Gesetz der großen Zahlen zusammen mit $\mathbf{E}(\ln |A_1|) < 0$ ergibt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |A_j| \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}(\ln |A_1|) < 0$$

und damit

$$\prod_{j=1}^n |A_j| = \exp \left\{ n \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |A_j| \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{f.s.}$$

Wir betrachten nun $Y_n^* := \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j$. Wegen Gleichung (3.3) gilt

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y_0 \prod_{j=1}^n B_j + Y_n^*.$$

Die Y_n^* sind die Partialsummen der unendlichen Reihe in Gleichung (3.5). Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz in Verteilung der Folge $(Y_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die fast sichere Konvergenz dieser unendlichen Reihe.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen und wegen den Bedingungen (3.4) gilt

$$\frac{1}{m} \ln^+ |B_m| \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \ln |A_j| \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}(\ln |A_1|) < 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j \right| &\leq \exp \left\{ \ln |B_m| + \sum_{j=1}^{m-1} \ln |A_j| \right\} \\ &\leq \exp \left\{ m \left[\frac{1}{m} \ln^+ |B_m| + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \ln |A_j| \right] \right\} \\ &< e^{-am} \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

für ein $a \in (0, |\mathbf{E}(\ln |A_1|)|)$ und hinreichend großes m .

Also konvergiert die rechte Seite von (3.5) fast sicher.

Desweiteren gilt

$$(A_n, B_n, Y_{n-1}) \xrightarrow{d} (A_1, B_1, Y), \quad Y \text{ unabhängig von } (A_1, B_1),$$

da (A_n, B_n) unabhängig von Y_{n-1} , $n \in \mathbb{N}$, $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid und $Y_{n-1} \xrightarrow{d} Y$, $n \rightarrow \infty$.

Mit dem Continuous mapping theorem (Satz 3.3) folgt dann

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n \xrightarrow{d} A_1 Y + B_1$$

und wegen $Y_n \xrightarrow{d} Y$ schließlich

$$Y \stackrel{d}{=} A_1 Y + B_1.$$

Um die Eindeutigkeit von Y zu zeigen, nehmen wir an, daß $Y_n \xrightarrow{d} Y$ und $Y_n \xrightarrow{d} Y'$, wobei Y und Y' verschiedene Verteilungen besitzen, aber beide die Gleichung aus a) erfüllen.

Dann gilt

$$Y_1(Y') = A_1 Y' + B_1 \stackrel{d}{=} Y',$$

und weil $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid und unabhängig von der Start-ZV ist, gilt

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y' \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{also } Y \stackrel{d}{=} Y',$$

im Widerspruch zur Annahme.

Für die strikte Stationarität von Y müssen wir zeigen, daß

$$(Y_0, Y_1, \dots, Y_m) \stackrel{d}{=} (Y_l, Y_{l+1}, \dots, Y_{l+m}) \quad m, l \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen hier den Fall $m = 1$; den allgemeinen Fall erhält man durch Erweiterung des folgenden Arguments.

$$\begin{aligned} (Y_l, Y_{l+1}) &= (Y_l, A_{l+1} Y_l + B_{l+1}) \\ &\stackrel{d}{=} (Y_0, A_1 Y_0 + B_1) = (Y_0, Y_1). \end{aligned}$$

Zum Beweis von d) definieren wir uns zunächst eine Norm, mittels

$$\|Z\|_p = [\mathbf{E}(|Z|^p)]^{1/p} \quad \text{für beliebige ZV } Z.$$

Wegen (3.6) gilt $\|B_1\|_p < \infty$ und $\|A_1\|_p < 1$ und damit

$$\begin{aligned} \|Y\|_p &= \left\| \sum_{m=1}^{\infty} B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j \right\|_p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left\| B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j \right\|_p \\ &= \|B_1\|_p \sum_{m=1}^{\infty} (\|A_1\|_p)^{m-1} = \|B_1\|_p \frac{1}{1 - \|A_1\|_p} < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{E}(|Y|^p) < \infty$.

Aus $Y \stackrel{d}{=} A_1 Y + B_1$ folgt weiter

$$Y^m \stackrel{d}{=} (A_1 Y + B_1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A_1^{m-k} B_1^k Y^k,$$

und daraus

$$\mathbf{E}(Y^m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \mathbf{E}(A_1^{m-k} B_1^k) \mathbf{E}(Y^k).$$

Damit ist auch e) bewiesen. \square

3.2 Tailverhalten der stationären Verteilung

Ziel des weiteren Vorgehens ist es, das Tailverhalten der stationären Verteilung eines durch Modell (3.1) gegebenen Prozesses zu bestimmen. Insbesondere sind wir an der Berechnung eines Tailindexes, wie in Definition 2.24 gegeben, interessiert. Die dazu notwendigen Sätze sind aus Goldie [20] entnommen.

Satz 3.4 (Satz von Goldie)

A und Y seien unabhängige ZV und A erfülle die folgenden Bedingungen.

(B1) Es gibt ein $\kappa > 0$, so daß $\mathbf{E}(|A|^\kappa) = 1$.

(B2) Für dieses κ gilt $\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln^+ |A|) < \infty$.

(B3) Die Verteilung von $\ln |A|$ gegeben $A \neq 0$ ist nicht-arithmetisch, d.h.

$$\mathbf{P}(\ln |A| \in \{n\lambda, n \in \mathbf{Z}\} | A \neq 0) < 1 \quad \forall \lambda > 0.$$

1. Fall: $\mathbf{P}(A < 0) = 0$

$$\text{Falls} \quad \int_0^\infty |\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t)| t^{\kappa-1} dt < \infty \quad (3.7)$$

$$\text{bzw.} \quad \int_0^\infty |\mathbf{P}(Y < -t) - \mathbf{P}(AY < -t)| t^{\kappa-1} dt < \infty,$$

dann gilt

$$\mathbf{P}(Y > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(Y < -t) \sim C_- t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

wobei

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t)) t^{\kappa-1} dt, \\ C_- &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (\mathbf{P}(Y < -t) - \mathbf{P}(AY < -t)) t^{\kappa-1} dt, \\ m &:= \mathbf{E}(|A|^\kappa \ln |A|). \end{aligned}$$

2. Fall: $\mathbf{P}(A < 0) > 0$

Falls die Bedingungen (3.7) erfüllt sind, dann gilt (3.8) mit

$$C = C_+ = C_- = \frac{1}{2m} \int_0^\infty (\mathbf{P}(|Y| > t) - \mathbf{P}(|AY| > t)) t^{\kappa-1} dt. \quad (3.9)$$

Bemerkungen:

(i) Wenn die Voraussetzungen des Satzes 3.4 erfüllt sind, dann erhalten wir den Tailindex κ der Zufallsvariable Y als Lösung der Gleichung $\mathbf{E}(|A|^\kappa) = 1$.

Der Satz ist allerdings in der jetzigen Form, aufgrund der nachzuweisenden Voraussetzung (3.7), in der Praxis nicht anwendbar. Für den GARCH(1,1) werden wir den noch folgenden Satz 3.7 benützen, der auf dem Satz von Goldie aufbaut.

(ii) Der obige Satz besitzt nur dann eine relevante Aussage, wenn $\mathbf{E}|Y|^\kappa = \infty$.

Wenn $\mathbf{E}|Y|^\kappa = \int_0^\infty t^\kappa d\mathbf{P}(|Y| \leq t) < \infty$, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(|Y| > t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty s^\kappa d\mathbf{P}(|Y| \leq s) = 0. \quad (3.10)$$

Analog gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(|AY| > t) = 0$, weil A und Y stochastisch unabhängig sind.

Partielle Integration und (3.9) liefert dann

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2m} \int_0^\infty \left(\mathbf{P}(|Y| > t) - \mathbf{P}(|AY| > t) \right) t^{\kappa-1} dt \\ &= \frac{1}{2m} \left(\int_0^\infty t^{\kappa-1} \mathbf{P}(|Y| > t) dt - \int_0^\infty t^{\kappa-1} \mathbf{P}(|AY| > t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\left[\frac{t^\kappa}{\kappa} \mathbf{P}(|Y| > t) \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{t^\kappa}{\kappa} d\mathbf{P}(|Y| > t) - \left[\frac{t^\kappa}{\kappa} \mathbf{P}(|AY| > t) \right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty \frac{t^\kappa}{\kappa} d\mathbf{P}(|AY| > t) \right) \\ &= \frac{1}{2m\kappa} \left(\mathbf{E}|Y|^\kappa - \mathbf{E}|AY|^\kappa \right), \quad \text{wegen (3.10),} \\ &= \frac{1}{2m\kappa} \left(\mathbf{E}|Y|^\kappa - \underbrace{\mathbf{E}|A|^\kappa}_{=1} \mathbf{E}|Y|^\kappa \right), \quad \text{da } A, Y \text{ stoch. unabhängig,} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dann kann man (3.8) verstehen als

$$\mathbf{P}(|Y| > t) = o(t^{-\kappa}), \quad \text{d.h.} \quad t^\kappa \mathbf{P}(|Y| > t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Der Beweis des Satzes von Goldie ist sehr umfangreich, weshalb wir uns anschließend in einem eigenen Abschnitt damit befassen werden.

Korollar 3.5

Y sei reellwertige ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{A}$ -meßbare Abbildung. Es gelte die stochastische Gleichung

$$Y \stackrel{d}{=} \psi(Y), \quad \psi, Y \text{ stochastisch unabhängig.} \quad (3.11)$$

A sei eine von Y unabhängige ZV, die die Bedingungen **(B1)** bis **(B3)** aus Satz 3.4 erfüllt. Falls die folgenden Voraussetzungen gelten,

$$\mathbf{E} \left| (\psi(Y)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa} \right| < \infty \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{E} \left| (\psi(Y)^-)^{\kappa} - ((AY)^-)^{\kappa} \right| < \infty, \quad (3.13)$$

dann erhält man

$$\mathbf{P}(Y > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{und} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P}(Y < -t) \sim C_- t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Dabei gilt

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} \mathbf{E} \left((\psi(Y)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa} \right), \quad (3.16)$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m} \mathbf{E} \left((\psi(Y)^-)^{\kappa} - ((AY)^-)^{\kappa} \right). \quad (3.17)$$

Für den Beweis des Korollars benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.6

X und Y seien beliebige reelle ZV auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum.

Es gilt

$$\int_0^{\infty} |\mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t)| t^{\kappa-1} dt \leq \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} |(X^+)^{\kappa} - (Y^+)^{\kappa}|. \quad (3.18)$$

Falls die linke Seite von (3.18) endlich ist, gilt sogar

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t)) t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left((X^+)^{\kappa} - (Y^+)^{\kappa} \right).$$

Beweis:

O.E. seien $X, Y \geq 0$, da $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(X^+ > t)$ für nichtnegative t gilt.

Zuerst schreiben wir $\mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t)$ um.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t) &= \\ &= \mathbf{P}(X > t, Y \leq t) + \mathbf{P}(X > t, Y > t) - \mathbf{P}(Y > t, X \leq t) - \mathbf{P}(Y > t, X > t) \\ &= \mathbf{P}(X > t, Y \leq t) - \mathbf{P}(Y > t, X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |\mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t)| t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty |\mathbf{P}(X > t, Y \leq t) - \mathbf{P}(Y > t, X \leq t)| t^{\kappa-1} dt \\
 &\leq \int_0^\infty \mathbf{P}(Y \leq t < X) t^{\kappa-1} dt + \int_0^\infty \mathbf{P}(X \leq t < Y) t^{\kappa-1} dt \\
 &= \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{\{Y < X\}} \int_Y^X t^{\kappa-1} dt \right] + \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{\{X < Y\}} \int_X^Y t^{\kappa-1} dt \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{\{Y < X\}} (Y^\kappa - X^\kappa) + \mathbf{1}_{\{X < Y\}} (X^\kappa - Y^\kappa) \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} |X^\kappa - Y^\kappa| \\
 &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} |(X^+)^{\kappa} - (Y^+)^{\kappa}|, \quad \text{da } X, Y > 0.
 \end{aligned}$$

Falls $\int_0^\infty |\mathbf{P}(X > t, Y \leq t) - \mathbf{P}(Y > t, X \leq t)| t^{\kappa-1} dt < \infty$, gilt sogar

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty (\mathbf{P}(X > t) - \mathbf{P}(Y > t)) t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty (\mathbf{P}(Y \leq t < X) t^{\kappa-1} - \mathbf{P}(X \leq t < Y)) t^{\kappa-1} dt \\
 &= \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{\{Y < X\}} \int_Y^X t^{\kappa-1} dt - \mathbf{1}_{\{X < Y\}} \int_X^Y t^{\kappa-1} dt \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left[\mathbf{1}_{\{Y < X\}} (Y^\kappa - X^\kappa) - \mathbf{1}_{\{X < Y\}} (X^\kappa - Y^\kappa) \right] \\
 &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left((X^+)^{\kappa} - (Y^+)^{\kappa} \right).
 \end{aligned}$$

Damit ist dieses Lemma bewiesen. □

Beweis von Korollar 3.5:

Wir zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes 3.4 erfüllt sind.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t)| t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty |\mathbf{P}(\psi(Y) > t) - \mathbf{P}(AY > t)| t^{\kappa-1} dt \\
 &\leq \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left| (\psi(Y)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa} \right|, \quad \text{nach Lemma 3.6,} \\
 &< \infty \quad \text{nach Voraussetzung (3.12).}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |\mathbf{P}(Y < -t) - \mathbf{P}(AY < -t)| t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty |\mathbf{P}(\psi(Y) < -t) - \mathbf{P}(AY < -t)| t^{\kappa-1} dt \\
 &= \int_0^\infty |\mathbf{P}(-\psi(Y) > t) - \mathbf{P}(-AY > t)| t^{\kappa-1} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\kappa} \mathbf{E} \left| \underbrace{((- \psi(Y))^+)^{\kappa}}_{=\psi(Y)^-} - \underbrace{((-AY)^+)^{\kappa}}_{=(AY)^-} \right|, \quad \text{nach Lemma 3.6,} \\ &< \infty \quad \text{nach Voraussetzung (3.13).} \end{aligned}$$

Aus Satz 3.4 ergeben sich die Gleichungen (3.14) und (3.15) und aus Lemma 3.6 erhalten wir schließlich die Gleichungen für C_+ und C_- .

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(\psi(Y) > t) - \mathbf{P}(AY > t) \right) t^{\kappa-1} dt \\ &= \frac{1}{m\kappa} \mathbf{E} \left((\psi(Y)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa} \right). \end{aligned}$$

Analog läßt sich auch C_- berechnen. □

Nun betrachten wir eine spezielle Rekurrenzgleichung, indem wir für die Abbildung ψ

$$\psi(t) := At + B, \quad t \in \mathbb{R},$$

wählen, wobei der Zufallsvektor (A, B) unabhängig von Y sei. Dabei sei Y die stationäre Verteilung des im Modell (3.1) definierten Prozesses Y_n . Nach Satz 3.2 gilt dann $Y \stackrel{d}{=} \psi(Y)$.

Weiter definieren wir

$$\psi_n(t) := A_n t + B, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $\psi_n(Y_{n-1})$ erhalten wir die Rekurrenzgleichung des Modells (3.1) und aus Satz 3.2 ergibt sich, daß

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \prod_{l=1}^{k-1} A_l, \quad (A_j, B_j) \text{ iid } (A, B),$$

die in Verteilung eindeutige Lösung dieser Rekurrenzgleichung ist.

Satz 3.7

A und B seien reelle ZV auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und A erfülle die Bedingungen (B1) - (B3).

Weiter erfülle B die Momentenbedingung

$$\mathbf{E}|B|^{\kappa} < \infty \quad \text{für } \kappa \text{ wie in (B1)}. \quad (3.19)$$

Dann existiert eine eindeutige Verteilung für Y, so daß

$$Y \stackrel{d}{=} AY + B, \quad Y \text{ unabhängig von } (A, B).$$

Für diese Verteilung gilt

$$\mathbf{P}(Y > t) \sim C_+ t^{-\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(Y < -t) \sim C_- t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty,$$

wobei im Fall $\mathbf{P}(A < 0) = 0$

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} \mathbf{E} \left[((AY + B)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa} \right],$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m} \mathbf{E} \left[((AY + B)^-)^{\kappa} - ((AY)^-)^{\kappa} \right]$$

und im Fall $\mathbf{P}(A < 0) > 0$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} \mathbf{E} \left[|AY + B|^{\kappa} - |AY|^{\kappa} \right].$$

Bemerkung:

Für den Prozeß $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem GARCH(1,1)-Prozeß (vgl. Beispiel 3.1) ist die Momentenbedingung (3.19) offensichtlich erfüllt, denn dann ist $B = \alpha_0 \in (0, \infty)$.

Beweis:

Ziel des Beweises ist, das Korollar 3.5 anwenden zu können. Es müssen also die Voraussetzungen (3.12) und (3.13) erfüllt sein - dabei entspricht $\psi(Y)$ nun $AY + B$.

Die linke Seite von (3.12) können wir schreiben als

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |((AY + B)^+)^{\kappa} - ((AY)^+)^{\kappa}| &= \underbrace{\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{-B < AY \leq 0\}} (AY + B)^{\kappa} \right)}_{=: J_1} + \underbrace{\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{0 < AY \leq -B\}} (AY)^{\kappa} \right)}_{=: J_2} + \\ &+ \underbrace{\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{B > 0, AY > 0\}} ((AY + B)^{\kappa} - (AY)^{\kappa}) \right)}_{=: J_3} + \underbrace{\mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{B < 0, AY + B > 0\}} ((AY)^{\kappa} - (AY + B)^{\kappa}) \right)}_{=: J_4}. \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme ergibt sich dann

$$J_1 \leq \mathbf{E}(|B|^{\kappa}) < \infty \quad \text{nach Voraussetzung (3.19),}$$

$$J_2 \leq \mathbf{E}(|B|^{\kappa}) < \infty \quad \text{nach Voraussetzung (3.19).}$$

Um die Endlichkeit von J_3 und J_4 zu zeigen, benötigt man die folgenden elementaren Ungleichungen für $x, y \in \mathbb{R}$ und $r > 0$.

$$|x + y|^r \leq c_r (|x|^r + |y|^r), \quad c_r = \max\{2^{r-1}, 1\}. \quad (3.20)$$

$$||x|^r - |y|^r| \leq \begin{cases} |x - y|^r, & 0 < r \leq 1 \\ r|x - y|(\max\{|x|, |y|\})^{r-1}, & 1 < r < \infty. \end{cases} \quad (3.21)$$

Mit Ungleichung (3.21) folgt für J_3 und den Fall $\kappa \leq 1$

$$J_3 \leq \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{B > 0, AY > 0\}} B^{\kappa} \right) \leq \mathbf{E}|B|^{\kappa} < \infty.$$

Für den Fall $\kappa > 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 J_3 &\leq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{B>0, AY>0\}} \kappa B (AY + B)^{\kappa-1}\right) \quad \text{mit (3.21),} \\
 &\leq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{B>0, AY>0\}} \kappa C_{\kappa-1} B \left(B^{\kappa-1} + (AY)^{\kappa-1}\right)\right) \quad \text{mit (3.20),} \\
 &\leq \kappa C_{\kappa-1} \left(\mathbf{E}(|B|^\kappa) + \mathbf{E}(|B||A|^{\kappa-1}) \mathbf{E}(|Y|^{\kappa-1})\right), \quad \text{da } Y \text{ unabhängig von } (A, B), \\
 &\leq \kappa C_{\kappa-1} \left(\underbrace{\mathbf{E}(|B|^\kappa)}_{<\infty} + \underbrace{\mathbf{E}(|B|^\kappa)}_{<\infty}^{1/\kappa} \left(\underbrace{\mathbf{E}(|A|^\kappa)}_{<\infty \text{ wg. (B1)}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \mathbf{E}(|Y|^{\kappa-1})\right) \quad \text{Hölder-Ungl.,} \\
 &< \infty, \quad \text{da } \mathbf{E}(|Y|^{\kappa-1}) < \infty \quad \text{nach Satz 3.2 d) und Lemma 3.9.}
 \end{aligned}$$

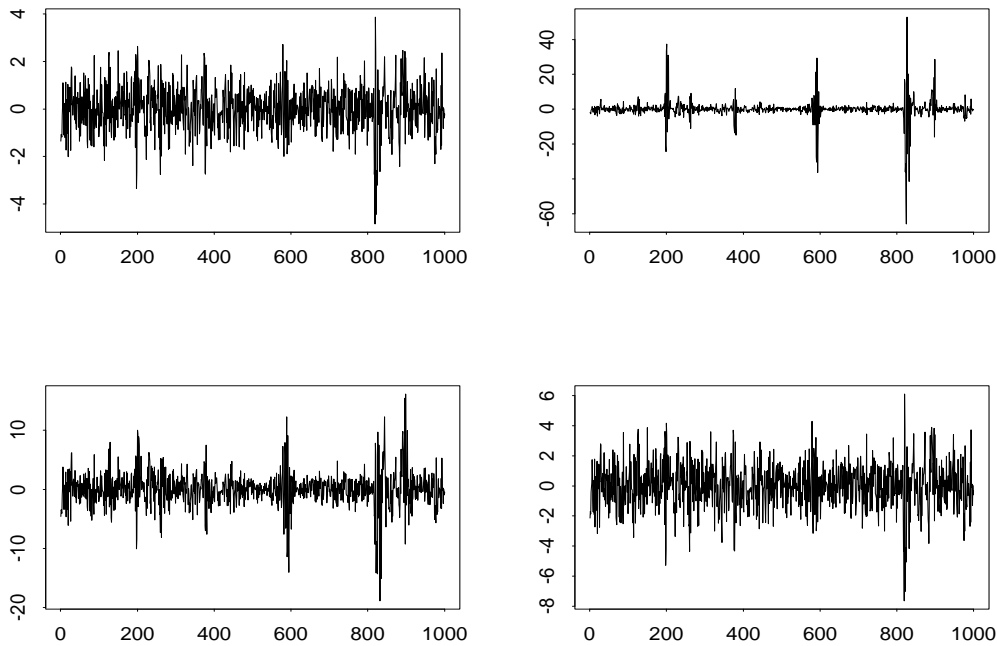


Abbildung 3.3: Jeweils 1000 simulierte Daten von GARCH(1,1)-Prozessen $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2$, mit unterschiedlichen Parametern, wobei die Noise-Variable standardnormalverteilt ist. Die Parametertripel $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ sind links oben $(0.4, 0.4, 0.2)$, rechts oben $(0.4, 1, 0.2)$, links unten $(0.4, 0.4, 0.6)$ und rechts unten $(1, 0.4, 0.2)$. Die Noise-Variable ist in allen vier Simulationen standardnormalverteilt.

Für J_4 gilt im Fall $\kappa \leq 1$

$$J_4 \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{B<0, AY>-B\}} (-B)^\kappa\right) \leq \mathbf{E}(|B|^\kappa) < \infty \quad \text{mit (3.21).}$$

Falls $\kappa > 1$, gilt

$$J_4 \leq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{B<0, AY>-B\}} \kappa |B| |AY|^{\kappa-1}\right) \quad \text{mit (3.21),}$$

$$\begin{aligned} &\leq \kappa \mathbf{E}(|B||A|^{\kappa-1}) \mathbf{E}(|Y|^{\kappa-1}), \quad \text{da } Y \text{ unabhängig von } (A, B), \\ &< \infty \quad (\text{wie oben}). \end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung (3.12) erfüllt.

Indem wir $-Y$ für Y und $(A, -B)$ anstatt (A, B) in die Rekurrenzgleichung einsetzen, erhalten wir die zweite Voraussetzung (3.13).

Nun können wir das Korollar 3.5 anwenden, woraus alle angegebenen Resultate folgen. \square

Die Abbildung 3.3 zeigt den Einfluß der verschiedenen Modellparameter auf die Gestalt der Renditenreihen. Dabei ist die Skalierung der Bilder besonders zu beachten. Wir erkennen, daß die Parameter α_1 und β_1 starken Einfluß auf die extremalen Ausschläge haben, während der Parameter α_0 nur eine leichte Umskalierung bewirkt. Insbesondere verändern die Parameter α_1 und β_1 die für Finanzdaten typische Eigenschaft des Wechsels zwischen Phasen hoher Volatilität und Perioden mit schwachen Ausschlägen.

3.3 Beweis des Satzes von Goldie

Die Struktur des nachfolgenden Beweis von Satzes 3.7 wurde weitgehend aus Goldie [20] übernommen. Die für den Beweis nötigen Lemmata werden vorab bereitgestellt, zunächst folgt allerdings eine Notation.

Notation 3.8

Wir setzen

$$0^a \ln 0 := 0 \text{ für } a > 0.$$

Die Berechtigung dieser Notation ergibt sich aus der Limesbetrachtung

$$\lim_{x \downarrow 0} x^a \ln x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-a}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{-ax^{-(a+1)}} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{x^a}{a} = 0.$$

Lemma 3.9

A sei ZV, die die Bedingungen (B1) bis (B3) erfüllt.

Dann ist die Funktion f , definiert durch

$$f(u) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^u) = \mathbf{E}(|A|^u), \quad u \in [0, \kappa],$$

eine strikt konvexe Funktion in $(0, \kappa)$ und es gilt

$$a) \quad -\infty \leq \mathbf{E}(\ln |A|) < 0,$$

$$b) \quad m = \mathbf{E}(|A|^\kappa \ln |A|) \in (0, \infty).$$

Beweis:

Wegen **(B1)** gilt unter Ausnutzung der Hölder-Ungleichung

$$0 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^u) \stackrel{u > 0}{\leq} \mathbf{E}(|A|^u) = \mathbf{E}\left((|A|^\kappa)^{u/\kappa}\right) \stackrel{u \leq \kappa}{\leq} (\mathbf{E}(|A|^\kappa))^{u/\kappa} = 1^{u/\kappa} = 1.$$

Damit ist f eine beschränkte Funktion auf $[0, \kappa]$.

Nun wollen wir die Krümmung dieser Funktion bestimmen, d.h. wir benötigen die zweite Ableitung. Um in den folgenden Rechnungen Differentiation und Integration vertauschen zu können brauchen wir den Differentiationsatz für parameterabhängige Integrale (Satz 2.14).

Wir wollen den Satz nun zweimal anwenden, benötigen also eine stetige erste und zweite Ableitung von $\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$ sowie P_A -integrierbare Majoranten von $\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$, $\frac{d}{du} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$ und von $\frac{d^2}{du^2} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$. Dabei bezeichne P_A die Verteilung der ZV A .

- $\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$ ist beliebig oft stetig differenzierbar nach u , denn für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^k}{du^k} \left(\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u \right) = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} \frac{d^k}{du^k} e^{u \ln |x|} = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} (\ln |x|)^k |x|^k.$$

- $\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u$ besitzt eine von u unabhängige P_A -integrierbare Majorante.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u dP_A(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u d\mathbf{P}(A \leq x) \\ &= \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{A \neq 0, |A| \leq 1\}} |A|^u + \mathbf{1}_{\{|A| > 1\}} |A|^u \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} (1 + |A|^\kappa) \right) < \infty \quad \text{nach (B1)}. \end{aligned}$$

- $\left| \frac{d}{du} (\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u) \right| = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x| |\ln |x||$ besitzt eine von u unabhängige P_A -integrierbare Majorante.

Für den folgenden Erwartungswert nützen wir aus, daß $|x|^u |\ln |x||$ stetig und beschränkt auf $[0, 1]$ ist, wegen

$$\lim_{x \downarrow 0} x^u \ln x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-u}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{1/x}{-u x^{-u-1}} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{1}{u} x^u = 0. \quad (3.22)$$

Für eine Konstante $K > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left| \frac{d}{du} (\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^u) \right| \right) &= \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{|A| > 1\}} |A|^u \ln |A| \right) + \mathbf{E} \left(\mathbf{1}_{\{|A| \leq 1, A \neq 0\}} |A|^u |\ln |A|| \right) \\ &\leq \mathbf{E} (|A|^\kappa \ln^+ |A|) + K \mathbf{P}(\{|A| \leq 1\}) < \infty \quad \text{nach (B2)}. \end{aligned}$$

- Für beliebiges $\tilde{u} \in (0, \kappa)$ existiert eine Umgebung U von \tilde{u} , so daß für alle $u \in U$ eine von u unabhängige P_A -integrierbare Majorante für

$$\left| \frac{d^2}{du^2} (\mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} |x|^u) \right| = \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}} (\ln |x|)^2 |x|^u \quad \text{existiert.}$$

Sei $\tilde{u} \in (0, \kappa)$ beliebig, dann wählen wir $\delta := \kappa - \tilde{u} > 0$ und $U := (0, \tilde{u} + \frac{\delta}{2})$.

Mit **(B1)** gilt

$$\mathbf{E}(|A|^\kappa) = \int_{\mathbb{R}} |x|^\kappa d\mathbf{P}(A \leq x) < \infty \quad \text{und damit auch}$$

$$\mathbf{E}\left(|A|^{u+\delta/2}(\ln^+ |A|)^2\right) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{\kappa-\delta/2}(\ln |x|)^2 d\mathbf{P}(A \leq x) < \infty, \quad \text{weil}$$

$$\frac{|x|^{\kappa-\delta/2}(\ln |x|)^2}{|x|^\kappa} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Für den folgenden Erwartungswert nutzen wir aus, daß $|x|^u(\ln |x|)^2$ stetig und beschränkt ist auf $[0, 1]$, wegen

$$\lim_{x \downarrow 0} x^u (\ln x)^2 = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{x^{-u}} \stackrel{Hospital}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-u x^{-u-1}} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{2}{u} x^u \ln x \stackrel{(3.22)}{=} 0.$$

Für eine Konstante $K' > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\left|\frac{d^2}{du^2}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}}|A|^u)\right|\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{|A| > 1\}}|A|^u(\ln |A|)^2\right) + \mathbf{E}\left(|A|^u(\ln |A|)^2\right) \\ &\leq \mathbf{E}\left(|A|^{u+\delta/2}(\ln^+ |A|)^2\right) + K' \cdot \mathbf{P}(\{|A| \leq 1\}) < \infty. \end{aligned}$$

Nun wird die Funktion f mit Hilfe des Differentiationsatzes (2.14) zweimal abgeleitet; als erste Ableitung ergibt sich

$$f'(u) = \frac{d}{du} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}}|A|^u) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}}|A|^u \ln |A|),$$

und für die zweite Ableitung ergibt sich

$$f''(u) = \frac{d}{du} \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}}|A|^u\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}}|A|^u(\ln |A|)^2\right).$$

Die Bedingung **(B3)** macht nur Sinn, wenn $\mathbf{P}(A \neq 0) > 0$ gilt. Dies muß aber wegen **(B1)** gelten, denn $\mathbf{E}(|A|^\kappa) = 1$ für ein $\kappa > 0$.

Aus **(B3)** folgt nun wiederum

$$\mathbf{P}(\ln(|A|) = 0 \mid A \neq 0) = \mathbf{P}(|A| = 1 \mid A \neq 0) = \frac{\mathbf{P}(|A| = 1)}{\mathbf{P}(A \neq 0)} < 1$$

und damit $\mathbf{P}(|A| = 1) < \mathbf{P}(A \neq 0)$.

Also erhalten wir

$$\mathbf{P}(|A| \in \{0, 1\}) = \mathbf{P}(A = 0) + \mathbf{P}(|A| = 1) < 1,$$

und damit

$$f''(u) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} \underbrace{(\ln(|A|))^2 |A|^u}_{>0 \text{ mit pos. W'keit}}) > 0, \quad u \in (0, \kappa).$$

Also ist f strikt konvex in $(0, \kappa)$.

Um nun die Aussage a) zu zeigen, betrachtet man die beiden Fälle $\mathbf{P}(A = 0) = 0$ und $\mathbf{P}(A = 0) > 0$ getrennt.

- $\mathbf{P}(A = 0) = 0$
Wegen **(B1)** gilt

$$f(0) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^0) = \mathbf{P}(A \neq 0) = 1 = \mathbf{E}(|A|^\kappa) = f(\kappa). \quad (3.23)$$

Da $f(u)$ strikt konvex und stetig ist in $(0, \kappa)$, gilt

$$0 > f'(0) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^0 \ln |A|) = \mathbf{E}(\ln |A|).$$

- $\mathbf{P}(A = 0) > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\ln |A|) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A=0\}} \ln |A|) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{\ln |A| < 0\}} \ln |A|) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{|A| > 1\}} \ln |A|) \\ &= \underbrace{\mathbf{P}(A = 0) \ln 0}_{-\infty} + \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0, |A| < 1\}} \ln |A|)}_{\leq 0} + \underbrace{\mathbf{E}(\ln^+ |A|)}_{< \infty, \text{ siehe unten}} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

$\mathbf{E}(\ln^+ |A|) < \infty$, denn angenommen $\mathbf{E}(\ln^+ |A|) = \infty$, dann würde gelten

$$\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln^+ |A|) = \mathbf{E}(\underbrace{\mathbf{1}_{\{|A| > 1\}}}_{>1} |A|^\kappa \ln^+ |A|) \geq \mathbf{E}(\ln^+ |A|) = \infty,$$

im Widerspruch zu **(B2)**.

Damit ergibt sich die Aussage a)

$$-\infty \leq \mathbf{E}(\ln(|A|)) < 0.$$

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß $\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln |A|) \in (0, \infty)$.

Zunächst weiß man wegen der Konvexität von f und (3.23), daß (unter Verwendung der Notation 3.8)

$$\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln |A|) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^\kappa \ln |A|) = f'(\kappa) > 0.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|A|^\kappa \ln |A|) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{\ln |A| < 0\}} |A|^\kappa \ln |A|) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{\ln |A| > 0\}} |A|^\kappa \ln |A|) \\ &= \underbrace{\mathbf{E}(\underbrace{\mathbf{1}_{\{|A| < 1\}}}_{\geq 0} \underbrace{|A|^\kappa}_{\geq 0} \underbrace{\ln(|A|)}_{\leq 0})}_{\leq 0} + \underbrace{\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln^+ |A|)}_{< \infty \text{ nach (B2)}} < \infty. \end{aligned}$$

Damit folgt Aussage b). □

Lemma 3.10

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \geq 0$.

Falls es eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ gibt, so daß $\theta(\varepsilon) \rightarrow 1$ für $\varepsilon \downarrow 0$ und

$$f(t + \varepsilon) \geq \theta(\varepsilon)f(t) \quad \forall \varepsilon > 0, t \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

dann ist f dRi.

Beweis:

O.E. gelte $\theta(\varepsilon) \uparrow 1$ monoton wachsend für $\varepsilon \downarrow 0$.

Falls dies nicht der Fall ist, dann wählen wir die Funktion

$$\tilde{\theta} : \varepsilon \mapsto \begin{cases} \theta(\varepsilon), & \text{falls } \theta(\varepsilon) \leq 1, \\ 2 - \theta(\varepsilon), & \text{falls } \theta(\varepsilon) > 1. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{\theta}(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon)$.

Weiter wählen wir

$$\theta' : \varepsilon \mapsto \inf_{\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon} \tilde{\theta}(\tilde{\varepsilon}).$$

Dann ist $\theta'(\varepsilon) \leq \tilde{\theta}(\varepsilon) \leq \theta(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$.

Nun ist (3.24) für θ' anstatt θ erfüllt, und θ' ist monoton wachsend für $\varepsilon \downarrow 0$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $t'_n := \arg \inf\{f(t), t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} \inf_{t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]} f(t) &\stackrel{(3.24)}{\geq} \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\theta(t'_n - n\varepsilon)}_{\leq \varepsilon} f(n\varepsilon) \\ &\geq \varepsilon \theta(\varepsilon) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\varepsilon), \text{ da } f \geq 0 \text{ und } \theta \uparrow 1 \text{ monoton wachsend für } \varepsilon \downarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon \theta(\varepsilon) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^1 f(n\varepsilon) ds \\
 &= \theta(\varepsilon) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon \int_0^1 f((n-1)\varepsilon + s\varepsilon + (1-s)\varepsilon) ds \\
 &\stackrel{(3.24)}{\geq} \theta(\varepsilon) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon \int_0^1 \underbrace{\theta((1-s)\varepsilon)}_{\leq \varepsilon} f((n-1)\varepsilon + s\varepsilon) ds \\
 &\geq \theta^2(\varepsilon) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon \int_0^1 f((n-1)\varepsilon + s\varepsilon) ds, \text{ da } f \geq 0 \text{ und } \theta \uparrow 1 \text{ monoton wachsend f\u00fcr } \varepsilon \downarrow 0, \\
 &= \theta(\varepsilon)^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} f(y) dy \quad \text{Substitution } y := (n-1)\varepsilon + \varepsilon s \\
 &= \theta(\varepsilon)^2 \int_{\mathbf{R}} f(y) dy < \infty, \text{ da } f \in L^1(\mathbf{R}).
 \end{aligned}$$

Ähnlich wird nun die Rechnung für die Suprema durchgeführt.

ε sei so klein gewählt, daß $\theta(\varepsilon) > 0$ und $t'_n := \arg \sup\{f(t), t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sup_{t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]} f(t) &\stackrel{(3.24)}{\leq} \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\underbrace{\theta((n+1)\varepsilon - t'_n)}_{\leq \varepsilon}} f((n+1)\varepsilon) \\
 &\leq \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\theta(\varepsilon)} f((n+1)\varepsilon), \text{ da } f \geq 0 \text{ und } \theta(\varepsilon) \uparrow 1 \text{ monoton wachsend f\u00fcr } \varepsilon \downarrow 0, \\
 &= \frac{1}{\theta(\varepsilon)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon \int_0^1 f((n+1)\varepsilon - s\varepsilon - (1-s)\varepsilon) ds \\
 &\leq \frac{1}{\theta(\varepsilon)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{\theta((1-s)\varepsilon)}_{\geq \theta(\varepsilon)}} f((n+1)\varepsilon - s\varepsilon) ds, \text{ da } \theta(\varepsilon) \uparrow 1 \text{ monoton wachsend f\u00fcr } \varepsilon \downarrow 0, \\
 &\leq \frac{1}{\theta(\varepsilon)^2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} f(y) dy \quad \text{Substitution } y := (n+1)\varepsilon - s\varepsilon \\
 &= \frac{1}{\theta(\varepsilon)^2} \int_{\mathbf{R}} f(y) dy < \infty, \text{ da } f \in L^1(\mathbf{R}).
 \end{aligned}$$

Wegen $f \in L^1(\mathbf{R})$ und

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{Z}} \sup\{f(t); t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]\} = \int_{\mathbf{R}} f(y) dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \sum_{n \in \mathbf{Z}} \inf\{f(t); t \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]\}$$

ist f nach Definition dRi. □

Vor dem nächsten Lemma führen wir erst noch den Glättungsoperator $\check{\cdot}$ ein.

Definition 3.11 (Glättungsoperator)

Der Glättungsoperator $\check{\cdot}$ ist definiert durch

$$\check{\cdot} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}), \quad f \mapsto e^{-\cdot} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\cdot) * f,$$

$$\text{also } \check{f}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} f(u) du, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.12

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Dann ist \check{f} dRi.

Beweis:

O.E sei $f \geq 0$; ansonsten betrachtet man f^+ und f^- separat.

Wir zeigen, daß \check{f} die Voraussetzungen von Lemma 3.10 erfüllt.

- $\check{f}(t + \delta) = e^{-\delta} \int_{-\infty}^{t+\delta} \underbrace{e^{-(t-u)} f(u)}_{\geq 0} du \geq e^{-\delta} \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} f(u) du = e^{-\delta} \check{f}(t) \quad t \in \mathbb{R}.$
- $e^{-\delta} \rightarrow 1$ für $\delta \downarrow 0$.
- $\check{f} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\cdot) e^{-\cdot} * f \in L^1(\mathbb{R})$, da $\int_0^\infty e^{-t} dt < \infty$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$ (nach Satz 2.12 zur Faltung).

Nach Lemma 3.10 folgt die Behauptung. □

Lemma 3.13

Sei R eine ZV und $\kappa > 0$, $C > 0$ Konstanten.

Falls $\int_0^t u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du \sim Ct$, $t \rightarrow \infty$, dann ist $\mathbf{P}(R > t) \sim Ct^{-\kappa}$, $t \rightarrow \infty$.

Beweis:

Der Beweis ist mit Hilfe des Theorems 1.7.5 aus Bingham et al. [5, Exercise 1.11.14] möglich.

Wir wählen allerdings den direkten Weg.

Sei dazu $b > 1$ fest.

$$\begin{aligned} \frac{b^{\kappa+1} - 1}{\kappa + 1} t^{\kappa+1} \mathbf{P}(R > t) &= \int_t^{bt} u^\kappa du \mathbf{P}(R > t) \\ &\geq \int_t^{bt} u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du, \text{ da } \mathbf{P}(R > t) \geq \mathbf{P}(R > u) \quad \text{für } u \in [t, bt], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{bt} u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du - \int_0^t u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du \\
 &\sim Ct(b-1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Also ist $\liminf_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) \geq C(b-1) \frac{\kappa+1}{b^{\kappa+1}-1}$.

Für $b \downarrow 1$ folgt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) \geq C(\kappa+1) \lim_{b \downarrow 1} \frac{b-1}{b^{\kappa+1}-1} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} C(\kappa+1) \lim_{b \downarrow 1} \frac{1}{(\kappa+1)b^\kappa} = C.$$

Analog zeigen wir $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) \leq C$.

Sei dazu $b \in (0, 1)$ fest.

$$\begin{aligned}
 \int_{bt}^t u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du &\geq \int_{bt}^t u^\kappa du \mathbf{P}(R > t), \text{ da } \mathbf{P}(R > u) \geq \mathbf{P}(R > t) \quad \text{für } u \in [bt, t], \\
 &= \frac{t^{\kappa+1} - (bt)^{\kappa+1}}{\kappa+1} \mathbf{P}(R > t) \\
 &= \frac{1 - b^{\kappa+1}}{\kappa+1} t^{\kappa+1} \mathbf{P}(R > t).
 \end{aligned}$$

Mit $\int_{bt}^t u^\kappa \mathbf{P}(R > u) du \sim C(1-b)t$ für $t \rightarrow \infty$ gilt also

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) \leq C \frac{1-b}{1-b^{\kappa+1}} (\kappa+1).$$

Für $b \uparrow 1$ folgt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) \leq \lim_{b \uparrow 1} C(\kappa+1) \frac{1-b}{1-b^{\kappa+1}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} C(\kappa+1) \lim_{b \uparrow 1} \frac{-1}{-(\kappa+1)b^\kappa} = C.$$

Aus den beiden Ungleichungen folgt damit letztendlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbf{P}(R > t) = C,$$

also gilt $\mathbf{P}(R > t) \sim Ct^{-\kappa}$, $t \rightarrow \infty$. □

Damit haben wir alle notwendigen Lemmata für den nun folgenden Beweis bereitgestellt.

Beweis des Satzes von Goldie

O.E. führen wir den Beweis nur für den rechten Tail durch, d.h. wir zeigen

$$\int_0^\infty |\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t)| t^{\kappa-1} dt < \infty \implies \mathbf{P}(Y > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty. \tag{3.25}$$

Ansonsten wählen wir $\tilde{Y} := -Y$, um die Aussage für den linken Tail zu erhalten.

Zuerst seien hier einige nützliche Definitionen und abkürzende Schreibweisen vorgestellt, die für den gesamten Beweis gelten sollen.

$$C_k := \ln |A_k|, \quad \text{wobei } A_1, A_2, \dots \text{ unabhängige ZV sind und } A_k \stackrel{d}{=} A, \quad k \in \mathbf{N}.$$

$$V_k := \ln \left| \prod_{l=1}^k A_l \right| = \sum_{l=1}^k \ln |A_l| = \sum_{l=1}^k C_l, \quad V_0 := 0.$$

$$\Pi_k := \prod_{l=1}^k A_l, \quad \Pi_0 := 1.$$

$$r(t) := e^{\kappa t} \mathbf{P}(Y > e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\delta_n(t) := e^{\kappa t} \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$g_1(t) := e^{\kappa t} \left(\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$g_{-1}(t) := e^{\kappa t} \left(\mathbf{P}(Y < -e^t) - \mathbf{P}(AY < -e^t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Fall: $\mathbf{P}(A < 0) = 0$

Für diesen Fall führen wir zusätzlich zu den obigen Definitionen noch das Maß v_n ein, mittels

$$dv_n(t) := e^{\kappa t} \sum_{k=0}^n d\mathbf{P}(V_k \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gilt

$$\Pi_k = \left| \prod_{l=1}^k A_l \right| = e^{V_k} \quad \text{f.s., da } A \geq 0 \text{ f.s.}$$

Die Aussage (3.25) werden wir mit Hilfe der Erneuerungstheorie beweisen. Um die Sätze daraus anwenden zu können, müssen wir einige Vorbereitungen treffen. Deshalb sei hier zuerst eine grobe Übersicht über den Ablauf des Beweises vorangestellt.

- (i) Zunächst werden wir die Gleichung $r(t) = g_1 * v_{n-1}(t) + \delta_n(t)$ herleiten, aus der sich später die Erneuerungsgleichung herausbildet.
- (ii) Darauf wenden wir dann den Glättungsoperator an, um die Gleichung $\check{r}(t) = \check{g}_1 * v_{n-1}(t) + \check{\delta}_n(t)$ zu erhalten.

- (iii) Als nächstes definieren wir uns ein neues Maß η , aus dem wir das Erneuerungsmaß $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{(k)}$ erhalten.
- (iv) Danach zeigen wir die Grenzübergänge $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1 * v_n(t) = \check{g}_1 * v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, und
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.
- (vi) Schließlich wenden wir auf die Gleichung $\check{r}(t) = \check{g}_1 * v(t)$ das Key Renewal Theorem (Satz 2.21) an und erhalten letztendlich die gewünschten Ergebnisse.

(i) Zuerst schreiben wir $\mathbf{P}(Y > e^t)$ in eine Teleskopsumme um.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Y > e^t) &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{P}(\Pi_{k-1}Y > e^t) - \underbrace{\mathbf{P}(\Pi_k Y > e^t)}_{=\mathbf{P}(\Pi_{k-1}AY > e^t)} \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{P}(e^{V_{k-1}}Y > e^t) - \mathbf{P}(e^{V_{k-1}}AY > e^t) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \left(\mathbf{P}(e^u Y > e^t \mid V_k = u) - \mathbf{P}(e^u AY > e^t \mid V_k = u) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbf{P}(Y > e^{t-u}) - \mathbf{P}(AY > e^{t-u}) \right) d\mathbf{P}(V_k \leq u) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t),
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile aus der Unabhängigkeit von Y und $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ folgt.

Mit den vorangestellten Definitionen können wir diesen Ausdruck umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 r(t) &= e^{\kappa t} \mathbf{P}(Y > e^t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa(t-u)} \left(\mathbf{P}(Y > e^{t-u}) - \mathbf{P}(AY > e^{t-u}) \right) e^{\kappa u} \sum_{k=0}^{n-1} d\mathbf{P}(V_k \leq u) + e^{\kappa t} \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g_1(t-u) dv_{n-1}(u) + \delta_n(t) \\
 &= g_1 * v_{n-1}(t) + \delta_n(t).
 \end{aligned}$$

(ii) Auf diese Gleichung wenden wir nun den Glättungsoperator an.

$$\begin{aligned}
 \check{r}(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} r(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} \left((g_1 * v_{n-1})(u) + \delta_n(u) \right) du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} \int_{\mathbb{R}} g_1(u-s) dv_{n-1}(s) du + \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} \delta_n(u) du \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} g_1(u-s) du dv_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(t), \quad \text{nach dem Satz von Fubini, s.u.,} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t e^{-((t-s)-(u-s))} g_1(u-s) du dv_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{-\infty}^{t-s} e^{-((t-s)-w)} g_1(w) dw}_{=\check{g}_1(t-s)} dv_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(t) \quad \text{Substitution } w:=t-s \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-s) dv_{n-1}(s) + \check{\delta}_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Um den Satz von Fubini anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} |e^{-(t-u)} g_1(u-s)| dv_{n-1}(s) du < \infty. \\
 &\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-u)} |g_1(u-s)| dv_{n-1}(s) du = \\
 &= \int_{-\infty}^t e^{-t} \int_{\mathbb{R}} e^u e^{\kappa(u-s)} \underbrace{|\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t)|}_{\leq 2} e^{\kappa s} \sum_{k=0}^{n-1} d\mathbf{P}(V_k \leq s) du \\
 &\leq \int_{-\infty}^t e^{-t} \int_{\mathbb{R}} e^u e^{\kappa u} \cdot 2 \sum_{k=0}^{n-1} d\mathbf{P}(V_k \leq s) du \\
 &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^t e^{u(\kappa+1)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} d\mathbf{P}(V_k \leq s)}_{=1} du \\
 &\leq 2ne^{-t} \int_{-\infty}^t e^{u(\kappa+1)} du \\
 &= 2ne^{-t} \left[\frac{1}{\kappa+1} e^{u(\kappa+1)} \right]_{u=-\infty}^t \\
 &= 2ne^{-t} \frac{e^{t(\kappa+1)}}{\kappa+1} < \infty, \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\check{r}(t) = \check{g}_1 * v_{n-1}(t) + \check{\delta}_n(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

(iii) Damit wir die Sätze aus der Erneuerungstheorie anwenden können, müssen wir nun zeigen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ein Erneuerungsmaß ist.

Dazu definieren wir ein Maß η mittels

$$d\eta(u) := e^{\kappa u} d\mathbf{P}(C_1 \leq u)$$

und zeigen einige Eigenschaften dieses Maßes.

1. η ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} d\eta(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa u} d\mathbf{P}(\ln |A_1| \leq u) \\ &= \int_0^{\infty} y^{\kappa} d\mathbf{P}(\ln |A_1| \leq \ln y) \quad \text{Substitution } y := e^u \\ &= \int_0^{\infty} y^{\kappa} d\mathbf{P}(|A_1| \leq y) \\ &= \mathbf{E}(|A_1|^{\kappa}), \quad \text{da } A_1 \geq 0 \text{ f.s.,} \\ &= 1 \quad \text{nach (B1).} \end{aligned}$$

2. η besitzt keine Masse bei $-\infty$, d.h. $\mathbf{P}(\eta = -\infty) = 0$.

Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta([-\infty, z]) &= \int_{[-\infty, z]} e^{\kappa u} d\mathbf{P}(C_1 \leq u) \\ &\leq \int_{[-\infty, z]} e^{\kappa z} d\mathbf{P}(C_1 \leq u), \quad \text{da } \kappa > 0, \\ &= e^{\kappa z} \underbrace{\mathbf{P}(C_1 \in [-\infty, z])}_{\leq 1} \\ &\leq e^{\kappa z} \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

3. $\mu_{\eta} := \int_{\mathbb{R}} x d\eta(x) \in (0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x d\eta(x) &= \int_{\mathbb{R}} x e^{\kappa x} d\mathbf{P}(C_1 \leq x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x e^{\kappa x} d\mathbf{P}(\ln(|A_1|) \leq x) \\ &= \int_0^{\infty} \ln(y) y^{\kappa} d\mathbf{P}(|A_1| \leq y) \quad \text{Substitution } y := e^x \\ &= \mathbf{E}(|A_1|^{\kappa} \ln |A_1|) \in (0, \infty) \text{ nach Lemma 3.9.} \end{aligned}$$

4. η ist nichtarithmetisch.

Angenommen es existiert ein $d > 0$, so daß η arithmetisch ist mit Span d ; dann gilt

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta(\{nd\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\kappa nd} \mathbf{P}(C_1 = nd) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\kappa nd} \mathbf{P}(\ln |A_1| = nd) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\kappa nd} \mathbf{P}(\{\ln A_1 = nd\} \cap \{A_1 \neq 0\}) \quad , \text{ da } A_1 \geq 0 \text{ f.s.}, \\
 &= \mathbf{P}(A_1 \neq 0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\kappa nd} \mathbf{P}(\ln A_1 = nd \mid A_1 \neq 0) \\
 &< \mathbf{P}(A_1 \neq 0) \mathbf{E}\left(e^{\kappa \ln A_1} \mid A_1 \neq 0\right), \quad \text{nach (B3)} \\
 &= \mathbf{P}(A_1 \neq 0) \mathbf{E}(A_1^\kappa \mid A_1 \neq 0) \\
 &= \mathbf{E}(A_1^\kappa) - \underbrace{\mathbf{E}(A_1^\kappa \mid A_1 = 0)}_{=0} \underbrace{\mathbf{P}(A_1 = 0)}_{\leq 1} \\
 &= \mathbf{E}(A_1^\kappa) = 1 \quad \text{nach (B1)},
 \end{aligned}$$

und somit erhält man den Widerspruch $1 < 1$.

Da η ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, lassen sich iid ZV Z_i , $i \in \mathbb{N}$, definieren, die nach η verteilt sind.

Nun definieren wir noch das Maß ν mittels

$$d\nu(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} d\nu_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_k \leq t)$$

und zeigen durch vollständige Induktion, daß

$$d\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d\eta^{(k)}(t),$$

wobei $\eta^{(k)}$ die k -fache Faltung des Maßes η bezeichnet.

Induktionsanfang

$$d\eta^{(0)}(t) := d\mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) = \delta_0(t) = e^{\kappa t} d\mathbf{1}_{[0, \infty)}(t) = e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_0 \leq t).$$

$$d\eta^{(1)}(t) := e^{\kappa t} d\mathbf{P}(C_1 \leq t) = e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_1 \leq t).$$

Induktionsschritt

Falls die Induktionsvoraussetzung $d\eta^{(k)}(t) = e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_k \leq t)$ erfüllt ist, dann gilt

$$\int_{-\infty}^z d\eta^{(k+1)}(t) = \int_{-\infty}^z \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa(t-x)} d\mathbf{P}(V_k \leq t-x) e^{\kappa x} d\mathbf{P}(C_{k+1} \leq x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t \in \mathbb{R}} e^{\kappa t} \mathbf{1}_{(-\infty, z]}(t) d\mathbf{P}(V_k \leq t - x) d\mathbf{P}(C_{k+1} \leq x), && \text{nach Fubini und Satz 2.12,} \\
 &= \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{y \in \mathbb{R}} e^{\kappa x} e^{\kappa y} \mathbf{1}_{(-\infty, z]}(x + y) d\mathbf{P}(V_k \leq y) d\mathbf{P}(C_{k+1} \leq x) && \text{Substitution } y := t - x \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\kappa(x+y)} \mathbf{1}_{(-\infty, z]}(x + y) d(\mathbf{P}(V_k \leq y) \otimes \mathbf{P}(C_{k+1} \leq x)), && \text{nach Fubini,} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa s} \mathbf{1}_{(-\infty, z]}(s) d\mathbf{P}(V_k + C_{k+1} \leq s), && \text{da } V_k, C_{k+1} \text{ stoch. unabhängig,} \\
 &= \int_{-\infty}^z e^{\kappa s} d\mathbf{P}(V_{k+1} \leq s), && z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Damit ist $d\eta^{(k+1)}(t) = e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_{k+1} \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Also wurde durch $dv(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d\eta^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\kappa t} d\mathbf{P}(V_k \leq t)$ ein Erneuerungsmaß für eine Irrfahrt $(S_k)_{k \geq 0}$ mit $S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$ definiert; also ist S_k nach $\eta^{(k)}$ verteilt.

(iv) Als nächstes zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1 * v_n(t) = \check{g}_1 * v(t).$$

Dies ergibt sich aus dem Satz von Fubini. Darin benötigen wir allerdings, daß

$$|\check{g}_1| * v(t) < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dieses wiederum zeigen wir nun in zwei Schritten.

- \check{g}_1 ist dRi.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |g_1(t)| dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa t} |\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t)| dt \\
 &= \int_0^{\infty} y^{\kappa-1} |\mathbf{P}(Y > y) - \mathbf{P}(AY > y)| dy && \text{Substitution } y := e^t \\
 &< \infty && \text{nach Voraussetzung 3.7.}
 \end{aligned}$$

Also ist $g_1 \in L^1(\mathbb{R})$ und nach Lemma 3.12 ist \check{g}_1 damit dRi.

- $|\check{g}_1| * v(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}$.
 \check{g}_1 ist dRi und nach Satz 2.16 ist damit auch $|\check{g}_1| = \check{g}_1^+ + \check{g}_1^-$ dRi. Weiter gilt

$$|\check{g}_1| * v(t) = \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1(t-u)| dv(u) = \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1(t-u)| \sum_{k=0}^{\infty} d\eta^{(k)}(u), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Um die Beschränktheit dieses Faltungsprodukts zu zeigen, benutzt man Satz 2.20. Danach ist $|\check{g}_1| * v$ eine beschränkte Lösung der Erneuerungsgleichung $G = |\check{g}_1| + G * v$.

Also gilt $|\check{g}_1| * v(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Damit läßt sich jetzt weiter zeigen, daß

$$\begin{aligned}
 \check{g}_1 * v(t) &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} d\eta^{(k)}(u) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\kappa u} d\mathbf{P}(V_k \leq u) \\
 &= \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(t-V_k) e^{\kappa V_k} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^n \check{g}_1(t-V_k) e^{\kappa V_k} \right), \quad \text{nach Fubini,} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-u) \sum_{k=0}^n d\mathbf{P}(V_k \leq u) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1 * v_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

(v) Als nächstes zeigen wir, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}_n(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\check{\delta}_n(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} \delta_n(u) du = \int_{-\infty}^t \underbrace{e^{-(t-u)} e^{\kappa u}}_{\leq e^{\kappa u}} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n A_j Y > e^u \right) du.$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n A_j Y > e^u \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \ln A_j + \ln Y > u \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \ln A_j > u - \ln Y \mid Y \right) \right) = 0,
 \end{aligned}$$

denn nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln A_j \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbf{E}(\ln A_1) \stackrel{A \geq 0 \text{ f.s.}}{=} \mathbf{E}(\ln |A_1|) < 0, \quad \text{nach Lemma 3.9,}$$

$$\text{also } \sum_{j=1}^n \ln A_j \xrightarrow{\text{f.s.}} -\infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Da $\check{\delta}_n(t) \geq 0$ gilt, folgt damit

$$\check{\delta}_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(vi) Aus Gleichung 3.26 ergibt sich damit für $n \rightarrow \infty$

$$\check{r}(t) = \check{g}_1 * v(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierauf wenden wir jetzt das Key Renewal Theorem (Satz 2.21) an, mit Irrfahrt $S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$, $\mathbf{E}Z_i = \mu_\eta = \mathbf{E}(A^\kappa \ln(A)) = m \in (0, \infty)$ nach Lemma 3.9, $v = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{(k)}$ als Erneuerungsmaß und der dRi-Funktion $|\check{g}_1|$.

Dann gilt also

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \check{g}_1 * v(t) &= \frac{1}{\mu_\eta} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1 dt \\ &= \frac{1}{\mu_\eta} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\cdot) e^{-\cdot}) * g_1(t) dt \\ &= \frac{1}{\mu_\eta} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{=1} \cdot \int_{\mathbb{R}} g_1 dx, \quad \text{nach Satz 2.12,} \\ &= \frac{1}{\mu_\eta} \int_{\mathbb{R}} g_1 dx < \infty, \quad \text{da } \mu_\eta > 0, g_1 \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Für \check{r} ergibt sich also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \check{r}(t) = \frac{1}{\mu_\eta} \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx =: K.$$

Andererseits gilt für $\check{r}(t)$ auch

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \check{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} r(u) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-u)} e^{\kappa u} \mathbf{P}(Y > e^u) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{e^t} e^{-t} y^{\kappa+1} \mathbf{P}(Y > y) \frac{dy}{y} \quad \text{Substitution } y := e^u \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \int_0^{e^t} y^\kappa \mathbf{P}(Y > y) dy. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\int_0^{e^t} y^\kappa \mathbf{P}(Y > y) dy \sim K e^t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Mit Lemma 3.13 folgt dann

$$\mathbf{P}(Y > e^t) \sim K(e^t)^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty$$

$$\text{bzw. } \mathbf{P}(Y > s) \sim Ks^{-\kappa}, \quad s \rightarrow \infty.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes von Goldie im Wesentlichen bewiesen. Wir haben nur noch zu zeigen, was sich hinter der Konstanten K verbirgt.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\mu_\eta} \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa t} (\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t)) dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty u^\kappa (\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t)) \frac{du}{u} \quad \text{Substitution } u := e^t \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty u^{\kappa-1} (\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t)) du \\ &= C_+. \end{aligned}$$

2. Fall: $\mathbf{P}(A < 0) > 0$

A) $\mathbf{P}(A > 0) > 0$

Neben den Definitionen für den gesamten Beweis definieren wir noch eine ZV für das Vorzeichen von Π_k und ein neues Maß \tilde{P} .

$$X_n := \text{sgn}(\Pi_n) = \text{sgn} \left(\prod_{j=1}^n A_j \right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

$$d\tilde{P}(A \leq y) := |y|^\kappa d\mathbf{P}(A \leq y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Bei diesem Maß handelt es sich wiederum um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{P}(A \leq y) = \int_{\mathbb{R}} |y|^\kappa d\mathbf{P}(A \leq y) = \mathbf{E}(|A|^\kappa) = 1 \quad \text{nach (B1)}.$$

Außerdem gilt $\tilde{P}(A = 0) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A=0\}} |A|^\kappa) = 0$, weshalb wir im weiteren den Fall $A = 0$ vernachlässigen können. Ein Erwartungswert bezüglich \tilde{P} werde mit \tilde{E} bezeichnet.

Aufbauend auf \tilde{P} definiert man sich weitere neue Maße $v_{n,x}$.

$$dv_{n,x}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} d\tilde{P}(X_k = x, V_k \leq t), \quad x \in \{-1, 1\}.$$

Ziel ist es wiederum, die Sätze aus der Erneuerungstheorie zu verwenden. Dazu benötigen wir eine Erneuerungsgleichung wie im ersten Fall, wobei die Definition geeigneter Irrfahrten wesentlich aufwendiger ist. Dies geschieht, indem wir die Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Teilfolgen mit gleichem Vorzeichen von Π_k aufspalten. Vorab sei hier wieder ein kurzer Abriß über den bevorstehenden Beweisteil gegeben.

- (i) Als Grundlage der späteren Erneuerungsgleichung leiten wir, mit Hilfe des Maßes \tilde{P} , die Gleichung

$$\check{r}(t) = \check{g}_1 * v_{n-1,1}(t) + \check{g}_{-1} * v_{n-1,-1}(t) + \check{\delta}_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.27)$$

her und zeigen den Grenzübergang $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}_n(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$.

- (ii) Danach formen Gleichung (3.27) derart um, daß die Teilabschnitte mit positivem bzw. negativem Vorzeichen von Π_k getrennt sind.
- (iii) Anschließend definieren wir aus den “positiven” Folgengliedern eine Irrfahrt und weisen einige Eigenschaften für das Wahrscheinlichkeitsmaß der Zuwächse nach.
- (iv) Dasselbe führen wir dann für die “negativen” Folgenglieder durch, wobei im wesentlichen dasselbe Wahrscheinlichkeitsmaß benutzt wird.
- (v) Schließlich bringen wir beide Irrfahrten in einer Erneuerungsgleichung zusammen und wenden darauf das Key Renewal Theorem an.

- (i) Wie im ersten Fall bilden wir zunächst eine Teleskopsumme.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y > e^t) &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{P}(\Pi_{k-1}Y > e^t) - \mathbf{P}(\Pi_k Y > e^t) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{P}(\Pi_{k-1}Y > e^t) - \mathbf{P}(\Pi_{k-1}A_k Y > e^t) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{P}(X_{k-1} = 1, \Pi_{k-1}Y > e^t) + \mathbf{P}(X_{k-1} = -1, \Pi_{k-1}Y > e^t) + \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}(X_{k-1} = 1, \Pi_{k-1}AY > e^t) - \mathbf{P}(X_{k-1} = -1, \Pi_{k-1}AY > e^t) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t), \\ &\quad \text{da } \mathbf{P}(X_k = 0, \Pi_{k-1}Y > e^t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{P}(X_k = 1, e^{V_k}Y > e^t) + \mathbf{P}(X_k = -1, -e^{V_k}Y > e^t) + \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}(X_k = 1, e^{V_k}AY > e^t) - \mathbf{P}(X_k = -1, -e^{V_k}AY > e^t) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{P}(X_k = 1, Y > e^{t-V_k}) - \mathbf{P}(X_k = 1, AY > e^{t-V_k}) \right) + \\ &\quad + \left(\mathbf{P}(X_k = -1, AY < -e^{t-V_k}) - \mathbf{P}(X_k = -1, AY < -e^{t-V_k}) \right) + \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t). \end{aligned}$$

Mit den allgemeinen Definitionen erhalten wir daraus

$$r(t) = e^{\kappa t} \mathbf{P}(Y > e^t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\kappa t} \left[\mathbf{P}(X_k = 1, Y > e^{t-V_k}) - \mathbf{P}(X_k = 1, AY > e^{t-V_k}) \right] \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\kappa t} \left[\mathbf{P}(X_k = -1, Y < -e^{t-V_k}) - \mathbf{P}(X_k = -1, AY < -e^{t-V_k}) \right] \\
 &\quad + e^{\kappa t} \mathbf{P}(\Pi_n Y > e^t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\kappa V_k} e^{\kappa(t-V_k)} \left[\mathbf{P}(Y > e^{t-V_k} \mid X_k = 1) \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{P}(AY > e^{t-V_k} \mid X_k = 1) \right] \cdot \mathbf{P}(X_k = 1) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} e^{\kappa V_k} e^{\kappa(t-V_k)} \left[\mathbf{P}(Y < -e^{t-V_k} \mid X_k = -1) \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{P}(AY < -e^{t-V_k} \mid X_k = -1) \right] \cdot \mathbf{P}(X_k = -1) \\
 &\quad + \delta_n(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \left[e^{\kappa V_k} g_{X_k}(t - V_k) \right] + \delta_n(t).
 \end{aligned}$$

Den Erwartungswert auf der rechten Seite formen wir jetzt zu einem Erwartungswert bezüglich \tilde{P} um.

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E} \left[e^{\kappa V_k} g_{X_k}(t - V_k) \right] + \delta_n(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{\text{sgn}(y)}(t - \ln |y|) |y|^{\kappa} d\mathbf{P}(\Pi_k \leq y) + \delta_n(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{\text{sgn}(y)}(t - \ln |y|) d\tilde{P}(\Pi_k \leq y) + \delta_n(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E} [g_{X_k}(t - V_k)] + \delta_n(t). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Maße $v_{n,x}$, $x = \pm 1$, spalten wir diesen Erwartungswert auf.

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{\text{sgn}(y)}(t - \ln |y|) d\tilde{P}(X_k = 1, \Pi_k \leq y) \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}} g_{\text{sgn}(y)}(t - \ln |y|) d\tilde{P}(X_k = -1, \Pi_k \leq y) + \delta_n(t) \\
 &= \int_0^{\infty} g_1(t - \ln |y|) \sum_{k=0}^{n-1} d\tilde{P}(X_k = 1, \Pi_k \leq y) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^0 g_{-1}(t - \ln |y|) \sum_{k=0}^{n-1} d\tilde{P}(X_k = -1, \Pi_k \leq y) + \delta_n(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t - x) \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{d\tilde{P}(X_k = 1, \Pi_k \leq e^x)}_{=d\tilde{P}(X_k=1, |\Pi_k| \leq e^x), \text{ da } X_k=1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-\infty}^{-\infty} g_{-1}(t-x) \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{d\tilde{P}(X_k = -1, \Pi_k \leq -e^x)}_{=d\tilde{P}(X_k=-1, -|\Pi_k|\leq -e^x), \text{ da } X_k=-1} + \delta_n(t), \\
 & \quad \text{nach Substitution } x := \ln|y|, \text{ d.h. } y = \pm e^x, \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-x) \sum_{k=0}^{n-1} d\tilde{P}(X_k = 1, |\Pi_k| \leq e^x) \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} g_{-1}(t-x) \sum_{k=0}^{n-1} d\tilde{P}(X_k = -1, |\Pi_k| \leq e^x) + \delta_n(t) \\
 & = g_1 * v_{n-1,1}(t) + g_{-1} * v_{n-1,-1}(t) + \delta_n(t).
 \end{aligned}$$

Wenden wir darauf jetzt den Glättungsoperator an, dann erhalten wir auf die gleiche Weise, wie wir (3.26) bekommen hat, die Gleichung (3.27)

$$\check{r}(t) = \check{g}_1 * v_{n-1,1}(t) + \check{g}_{-1} * v_{n-1,-1}(t) + \check{\delta}_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bei der Untersuchung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ gehen wir wie in Teil 1(v) vor, betrachten uns aber zuvor δ_n .

$$\delta_n(t) = e^{\kappa t} \mathbf{P}(e^{V_n} X_n Y > e^t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
 \delta_n(t) & \leq e^{\kappa t} \mathbf{P} \left(\left(\prod_{j=1}^n |A_j| \right) |Y| > e^t \right) \\
 & = e^{\kappa t} \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \ln |A_j| + \ln |Y| > t \right), \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $\check{\delta}_n$ wiederum mit Hilfe des starken Gesetzes der großen Zahlen

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}_n(t) & \leq \int_{-\infty}^t e^{\kappa u} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \ln |A_j| + \ln |Y| > u \right) \\
 & = \int_{-\infty}^t e^{\kappa u} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\mathbf{P} \left(\sum_{j=1}^n \ln |A_j| > u - \ln |Y| \mid \ln |Y| \right) \right] = 0, \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

(ii) Um später die Sätze aus der Erneuerungstheorie anwenden zu können, müssen wir nun eine passende Irrfahrt suchen und ein dazugehöriges Erneuerungsmaß definieren. Vorbereitend dafür betrachten wir die Markovkette (X_n) , die die Vorzeichen der Folge $(\Pi_n) = \left(\prod_{k=0}^n A_k \right)$ wiedergibt.

Sei also $\mathbf{X} := (X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette auf $\{-1, 1\}$ mit $X_0 := 1$ und Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$, wobei

$$p := \tilde{P}(A > 0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y) d\tilde{P}(A \leq y) = \int_0^{\infty} |y|^{\kappa} d\mathbf{P}(A \leq y) = \mathbf{E} \mathbf{1}_{\{A > 0\}} |A|^{\kappa} = \tilde{E} \mathbf{1}_{\{A > 0\}},$$

$$q := \tilde{P}(A < 0) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{A < 0\}}|A|^\kappa.$$

Nach Voraussetzung ist im zweiten Fall $p > 0$, $q > 0$ und $p + q = 1$, da \tilde{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und $\tilde{P}(A = 0) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{A=0\}}|A|^\kappa = 0$.

Weiter definieren wir uns

$$d\eta_+(y) := d\tilde{P}(A > 0, \ln(|A|) \leq y)/p,$$

$$d\eta_-(y) := d\tilde{P}(A < 0, \ln(|A|) \leq y)/q.$$

Wir zeigen nun, daß die ZV $C_i | \mathbf{X}$, $i \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig bezüglich \tilde{P} sind, und daß sich die Verteilung von $C_i | \mathbf{X}$ durch η_+ und η_- darstellen läßt.

Wir beweisen hier nur die Unabhängigkeit zweier ZV $C_1 | \mathbf{X}$ und $C_2 | \mathbf{X}$. Den allgemeinen Fall erhält man durch Verallgemeinerung des folgenden Arguments.

Da die ZV $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig sind, sind auch die ZV $(C_i = \ln |A_i|)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1, C_2 \in \mathfrak{C}_2 | \mathbf{X}) &= \tilde{P}(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2 | \text{sgn}(A_1), \text{sgn}(A_1 A_2), \dots) \\ &= P(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2 | \text{sgn}(A_1), \text{sgn}(A_2), \text{sgn}(A_3), \dots) \\ &= \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 > 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2, A_1 > 0, A_2 > 0)}{\tilde{P}(A_1 > 0, A_2 > 0)} \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 > 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2, A_1 < 0, A_2 > 0)}{\tilde{P}(A_1 < 0, A_2 > 0)} \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 < 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2, A_1 > 0, A_2 < 0)}{\tilde{P}(A_1 > 0)\tilde{P}(A_2 < 0)} \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 < 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_1| \in \mathfrak{C}_1, \ln |A_2| \in \mathfrak{C}_2, A_1 < 0, A_2 < 0)}{\tilde{P}(A_1 < 0)\tilde{P}(A_2 < 0)} \\ &= \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1, A_1 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2, A_2 > 0) / p^2 \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1, A_1 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2, A_2 > 0) / qp \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1, A_1 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2, A_2 < 0) / pq \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1, A_1 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2, A_2 < 0) / q^2 \\ &= \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_2 > 0) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_2 > 0) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_2 < 0) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_2 < 0) \\ &= \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 > 0, A_2 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_1 > 0, A_2 > 0) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 > 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 < 0, A_2 > 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_1 < 0, A_2 > 0) \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{A_1 > 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 | A_1 > 0, A_2 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 | A_1 > 0, A_2 < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{1}_{\{A_1 < 0, A_2 < 0\}} \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 \mid A_1 < 0, A_2 < 0) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 \mid A_1 < 0, A_2 < 0) \\
 & = \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 \mid \operatorname{sgn}(A_1), \operatorname{sgn}(A_1 A_2), \dots) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 \mid \operatorname{sgn}(A_1), \operatorname{sgn}(A_1 A_2), \dots) \\
 & = \tilde{P}(C_1 \in \mathfrak{C}_1 \mid \mathbf{X}) \tilde{P}(C_2 \in \mathfrak{C}_2 \mid \mathbf{X}).
 \end{aligned}$$

Damit sind $C_1 \mid \mathbf{X}$ und $C_2 \mid \mathbf{X}$ stochastisch unabhängig.

Weiter gilt für $\mathfrak{C} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(C_n \in \mathfrak{C} \mid \mathbf{X}) & = \tilde{P}(\ln |A_n| \in \mathfrak{C} \mid \operatorname{sgn}(A_l), l \in \mathbb{N}) \\
 & = \mathbf{1}_{\{A_n > 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_n| \in \mathfrak{C}, A_n > 0)}{\tilde{P}(A_n > 0)} + \\
 & \quad + \mathbf{1}_{\{A_n < 0\}} \frac{\tilde{P}(\ln |A_n| \in \mathfrak{C}, A_n < 0)}{\tilde{P}(A_n < 0)} \\
 & = \mathbf{1}_{\{X_{n-1} = X_n\}} \eta_+(\mathfrak{C}) + \mathbf{1}_{\{X_{n-1} \neq X_n\}} \eta_-(\mathfrak{C}).
 \end{aligned}$$

Es folgen weitere Definitionen:

$$N_0^{(+)} := 0 \quad \text{und} \quad N_i^{(+)} := N_{i-1}^{(+)} + \min\{k : X_k = 1, k > N_{i-1}^{(+)}\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

$$N_0^{(-)} := \min\{k > 0 : X_k = -1\} \quad \text{und} \quad N_i^{(-)} := N_{i-1}^{(-)} + \min\{k : X_k = -1, k > N_{i-1}^{(-)}\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

$N_0^{(+)} < N_1^{(+)} < \dots$ bzw. $N_0^{(-)} < N_1^{(-)} < \dots$ sind also die wachsenden Folgen von Zahlen $n \in \mathbb{N}$ an denen Π_n positives bzw. negatives Vorzeichen besitzt (vergleiche Abbildung 3.4).

$$J_n^{(+)} := \max\{i : N_i^{(+)} \leq n - 1\} \quad \text{und} \quad J_n^{(-)} := \max\{i : N_i^{(-)} \leq n - 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$W_k^{(+)} := V_{N_k^{(+)}} \quad \text{und} \quad W_k^{(-)} := V_{N_k^{(-)}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit den obigen Definitionen können wir Gleichung (3.28) umschreiben, dabei benutzen wir

$$\sum_{k=0}^{n-1} V_k = \sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} W_k^{(+)} + \sum_{k=0}^{J_n^{(-)}} W_k^{(-)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus den Gleichungen (3.27) und (3.28) folgt damit

$$\begin{aligned}
 \check{r}(t) & = \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} \check{g}_{X_{W_k^{(+)}}}(t - W_k^{(+)}) \right) + \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(-)}} \check{g}_{X_{W_k^{(-)}}}(t - W_k^{(-)}) \right) + \check{\delta}_n(t) \\
 & = \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) + \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(-)}} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right) + \check{\delta}_n(t),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

wobei $\check{\delta}_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $t \in \mathbb{R}$.

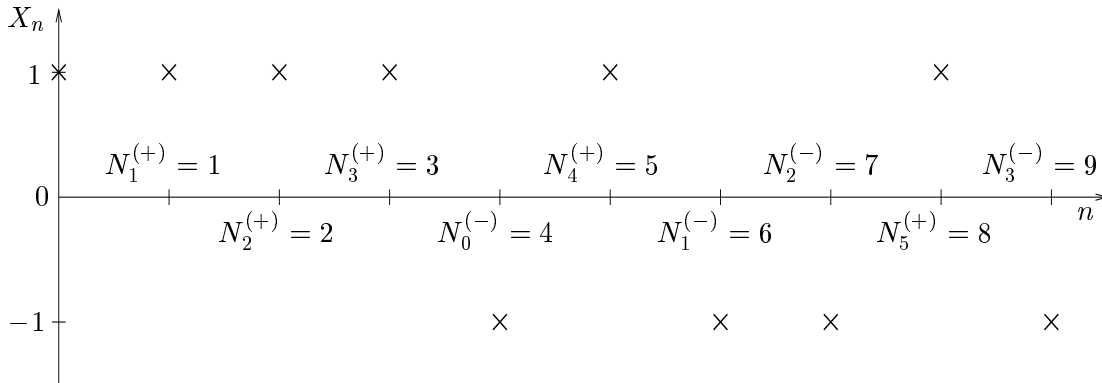


Abbildung 3.4: Werte für $N^{(+)}$ bzw. $N^{(-)}$ für eine Realisierung von $(X_n)_{1 \leq n \leq 9}$; weiter ergibt sich hier $J_9^{(+)} = 5$ und $J_9^{(-)} = 2$.

(iii) Damit ist $(W_k^{(+)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Irrfahrt mit Zuwächsen $Z_j^{(+)} = \sum_{l=N_{j-1}^{(+)}+1}^{N_j^{(+)}} C_l$, denn

$$W_k^{(+)} = V_{N_k^{(+)}} = \sum_{l=1}^{N_k^{(+)}} C_l = \sum_{j=1}^k Z_j^{(+)},$$

$$\tilde{P}(N_1^{(+)} = 1) = \tilde{P}(A_1 > 0) = p = \tilde{P}(A_{N_{n-1}^{(+)}+1} > 0) = \tilde{P}(N_n^{(+)} = 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(N_1^{(+)} = n) &= \tilde{P}(A_1 < 0, A_2 > 0, \dots, A_{n-1} > 0, A_n < 0) \\ &\stackrel{A_i \text{ iid}}{=} \tilde{P}(A_1 < 0) \tilde{P}(A_2 > 0) \cdots \tilde{P}(A_{n-1} > 0) \tilde{P}(A_n < 0) \\ &= q^2 p^{n-2} \\ &= \tilde{P}(A_{N_{k-1}^{(+)}+1} < 0) \tilde{P}(A_{N_{k-1}^{(+)}+2} > 0) \cdots \tilde{P}(A_{N_{k-1}^{(+)}+n-1} > 0) \tilde{P}(A_{N_{k-1}^{(+)}+n} < 0) \\ &= \tilde{P}(N_k^{(+)} = n), \quad n \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun η als Wahrscheinlichkeitsmaß von $C_1 + C_2 + \dots + C_{N_1}^{(+)}$,

$$d\eta(y) := d\tilde{P}(C_1 + \dots + C_{N_1}^{(+)} \leq y)$$

und zeigen einige Eigenschaften dieses Maßes. Falls nun $N_1^{(+)} = 1$, dann ist $Z_1^{(+)} = C_1$ nach η_+ verteilt, denn

$$d\tilde{P}(C_1 \leq y \mid \mathbf{X}) = d\tilde{P}(A_1 > 0, \ln(|A_1| \leq y)/p) = d\eta_+(y) \quad \text{nach Definition.}$$

Falls $N_1^{(+)} = n$, dann sind C_1 und C_n nach η_+ und C_k für $k \in \{2, \dots, n-1\}$ nach η_- verteilt.

Daraus folgt für $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \eta(B) &= \eta(B \mid \mathbf{X}) = \eta(B \mid N_1^{(+)} = 1) \tilde{P}(N_1^{(+)} = 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \eta(B \mid N_1^{(+)} = n) \tilde{P}(N_1^{(+)} = n) \\ &= p\eta_+(B) + \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{P}(C_1 + \dots + C_n \in B \mid A_1 < 0, A_2 > 0, \dots, A_{n-1} > 0, A_n < 0) \\ &= p\eta_+(B) + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}(B). \end{aligned}$$

$$\text{Also ist} \quad \eta = p \cdot \eta_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}. \quad (3.30)$$

Als nächstes zeigen wir

$$\int_{\mathbb{R}} y \, d\eta(y) = 2m = 2\mathbf{E}(|A^k| \ln |A|).$$

Dazu definieren wir

$$m_+ := \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta_+(y) \quad \text{und} \quad m_- := \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta_-(y).$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta(y) &= \int_{\mathbb{R}} y \, d\left(p\eta_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}\right)(y) \\ &= p \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta_+(y) + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \int_{\mathbb{R}} y \, d(\eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)})(y) \\ &= p m_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n y_i \, d(\eta_- \otimes \eta_- \otimes \underbrace{\eta_+ \otimes \dots \otimes \eta_+}_{(n-2)\text{-mal}})((y_1, \dots, y_n)^T) \\ &= p m_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \left[2 \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta_-(y) + (n-2) \int_{\mathbb{R}} y \, d\eta_+(y) \right] \\ &= p m_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} (2m_- + (n-2)m_+) \\ &= p m_+ + q^2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n (2m_- + n m_+) \\ &= p m_+ + q^2 (2m_- \sum_{n=0}^{\infty} p^n + m_+ \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1}) \\ &= p m_+ + q^2 \left(2m_- \frac{1}{1-p} + m_+ p \frac{d}{dp} \sum_{n=1}^{\infty} p^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= p m_+ + q^2 \left(\frac{2m_-}{q} + m_+ p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) \right) \\
 &= p m_+ + q^2 \left(\frac{2m_-}{q} + \frac{m_+ p}{q^2} \right) \\
 &= 2m_- q + 2m_+ p = 2 \tilde{E}(\mathbf{1}_{\{A < 0\}} \ln |A|) + 2 \tilde{E}(\mathbf{1}_{\{A > 0\}} \ln |A|) \\
 &= 2 (\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A < 0\}} |A|^\kappa \ln |A|) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{A > 0\}} |A|^\kappa \ln |A|)) \\
 &= 2 \mathbf{E}(\ln(|A|) \mathbf{1}_{\{A \neq 0\}} |A|^\kappa) = 2 m.
 \end{aligned}$$

Um die Ergebnisse aus der Erneuerungstheorie anwenden zu können, benötigen wir noch, daß η nicht-arithmetisch ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß $\ln |A|$ unter \tilde{P} nicht-arithmetisch ist. Nach Voraussetzung **(B3)** ist $(\ln |A| | A \neq 0)$ unter \mathbf{P} nicht-arithmetisch, d.h.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\ln |A| = n \lambda | A \neq 0) < 1 \quad \forall \lambda > 0.$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\ln |A| = n \lambda | A \neq 0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n \lambda|^\kappa \mathbf{P}(\ln |A| = n \lambda | A \neq 0) \\
 &< \int_{\mathbb{R}} |y|^\kappa d\mathbf{P}(\ln |A| \leq y | A \neq 0) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} d\tilde{P}(\ln |A| \leq y) \\
 &= \tilde{P}(\ln |A| \in \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Träger $T = \text{supp}(\ln |A|)$ von $\ln |A|$ und zeigen, daß die von T erzeugte additive Gruppe \mathfrak{T} dicht ist in \mathbb{R} .

Sei $z \in \mathbb{R}$ beliebig.

$\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $\xi \in \mathfrak{T}$ mit $\xi - z < \varepsilon$, denn

es existieren $x, y \in T$ so daß $kx - ly < \varepsilon$ für bestimmte $k, l \in \mathbb{Z}$ (sonst wäre $\ln |A|$ arithmetisch), und wegen $\mathbb{Z}a \in \mathfrak{T}$ und $a - b \in \mathfrak{T}$ für $a, b \in \mathfrak{T}$ existiert ein $N \in \mathbb{Z}$: $N(kx - ly) - z < \varepsilon$.

Sei nun weiter

$$T_+ := \text{supp}(\mathbf{1}_{\{A > 0\}} \ln |A|),$$

$$T_- := \text{supp}(\mathbf{1}_{\{A < 0\}} \ln |A|),$$

$$\mathfrak{T}^* := \{b : b \in T_+\} \cup \{2b : b \in T_-\}.$$

Also erzeugt \mathfrak{T}^* eine additive Gruppe, die in \mathbb{R} dicht liegt.

Sei nun $b \in \mathfrak{T}^*$ und $\varepsilon > 0$.

Falls $b \in T_+$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(|Z_1^{(+)} - b| < \varepsilon) &= \tilde{P}\left(\left|\sum_{l=1}^{N_1^{(+)}} \ln |A_l| - b\right| < \varepsilon\right) \\
 &= \tilde{P}\left(Z_1^{(+)} \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)\right) \\
 &= \eta((b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \\
 &\geq p \underbrace{\eta_+((b - \varepsilon, b + \varepsilon))}_{>0, \text{ da } b \in T_+} \quad \text{nach (3.30)} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Falls $b/2 \in T_-$, dann ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(|Z_1^+ - b| < \varepsilon) &= \tilde{P}(Z_1^+ \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \\
 &= \eta((b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \\
 &= p \eta_+((b - \varepsilon, b + \varepsilon)) + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}((b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \\
 &\geq q^2 \eta_-^{(2)}((b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \\
 &= q^2 \int_{\mathbb{R}} \eta_-((b - \varepsilon - x, b + \varepsilon - x)) d\eta_-(x) \\
 &\geq q^2 \int_{(b-\varepsilon)/2}^{(b+\varepsilon)/2} \eta_- \left(\underbrace{(b - \varepsilon - x, b + \varepsilon - x)}_{\supseteq (b-\varepsilon-(b-\varepsilon)/2, b+\varepsilon-(b-\varepsilon)/2)} \right) d\eta_-(x) \\
 &\geq q^2 \eta_- \left(\left((b - \varepsilon)/2, b + \varepsilon/2 \right) \right) \int_{(b-\varepsilon)/2}^{(b+\varepsilon)/2} d\eta_-(x) \\
 &= \underbrace{q^2}_{>0} \left(\underbrace{\eta_- \left(\left((b - \varepsilon)/2, b + \varepsilon/2 \right) \right)}_{>0, \text{ da } b/2 \in T_-} \right)^2 \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Also ist $b \in \text{supp}(Z_1^{(+)})$ und damit $\mathfrak{T}^* \subseteq \text{supp}(Z_1^{(+)})$ bzw. $\mathfrak{T}^* \subseteq \text{supp}(\eta)$.

Weil \mathfrak{T}^* eine in \mathbb{R} dicht liegende additive Gruppe erzeugt, ist somit auch η nicht-arithmetisch.

Wie im ersten Fall sei nun $v := \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}$ das von η erzeugte Erneuerungsmaß. Mit den vorab bewiesenen Eigenschaften von η und mit Hilfe von Satz 2.20 ergibt sich

$$|\check{g}_1| * v(t) < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daraus resultiert

$$\check{g}_1 * v(t) = \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t - u) \sum_{n=0}^{\infty} d\eta^{(n)}(u)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} d\tilde{P}(\underbrace{C_1 + C_2 + \dots + C_{N_k^{(+)}}}_{W_k^{(+)}} \leq u) \\
 &= \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) \\
 &= \tilde{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right), \\
 &\quad \text{da } J_n^{(+)} = \max\{i : N_i^{(+)} \leq n-1\} \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \text{ wegen } \tilde{P}(A > 0) > 0, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(t-u) \sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} d\eta^{(k)}(u) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1 * v_{n+}(t), \quad \text{mit } v_{n+} := \sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} d\eta^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{J_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) = \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) = \check{g}_1 * v(t). \quad (3.31)$$

(iv) Für den zweiten Erwartungswert in Gleichung (3.29) benutzen wir die Irrfahrt

$$W_k^{(-)} = V_{N_k^{(-)}} = \sum_{l=1}^{N_k^{(-)}} C_l = \sum_{l=N_{j-1}^{(-)}+1}^{N_j^{(-)}} \ln |A_l| =: \sum_{j=1}^k Z_j^{(-)}$$

Die $Z_j^{(-)}$, $j \in \mathbb{N}_0$, sind unabhängig, da die A_l , $l \in \mathbb{N}$, unabhängig sind.

Sei nun $j > 0$.

$$\tilde{P}(N_j^{(-)} - N_{j-1}^{(-)} = 1) = \tilde{P}(A_{N_{j-1}^{(-)}+1} > 0) = p.$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(N_j^{(-)} - N_{j-1}^{(-)} = n) &= \tilde{P}(A_{N_{j-1}^{(-)}+1} < 0, A_{N_{j-1}^{(-)}+2} > 0, \dots, A_{N_{j-1}^{(-)}+n-1} > 0, A_{N_{j-1}^{(-)}+n} < 0) \\
 &= q^2 p^{n-2}.
 \end{aligned}$$

Also ist $Z_j^{(-)}$ nach η verteilt, für $j \geq 1$.

Aber für $j = 0$ ergibt sich eine andere Verteilung.

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(N_0^{(-)} = n) &= \tilde{P}(A_1 > 0, \dots, A_{n-1} > 0, A_n < 0) \\
 &= \tilde{P}(A_1 > 0) \cdots \tilde{P}(A_{n-1} > 0) \cdot \tilde{P}(A_n < 0) \quad , \text{ da die } A_i \text{ iid,} \\
 &= p^{n-1} q, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Wie bei Gleichung (3.30) erhalten wir, daß

$$Z_0^{(-)} \text{ verteilt ist nach } \eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} qp^{n-1} \eta_- * \eta_+^{(n-1)}.$$

Wir zeigen wie bei \check{g}_1 im ersten Fall, daß \check{g}_{-1} dRi ist.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g_{-1}(t)| dt &= \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{P}(Y < -e^t) - \mathbf{P}(AY < -e^t)| dt \\ &= \int_0^{\infty} y^{\kappa-1} |\mathbf{P}(Y < -y) - \mathbf{P}(AY < -y)| dy \quad \text{Substitution } y := e^t \\ &< \infty \quad \text{nach Voraussetzung (3.25)}. \end{aligned}$$

Damit ist $g_{-1} \in L^1(\mathbb{R})$ und weil η_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ist auch $g_{-1} * \eta_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Nach Lemma 3.12 ist damit $\check{g}_{-1} * \eta_0$ dRi.

Wie für \check{g}_1 gilt mit Satz 2.20

$$|\check{g}_{-1}| * \eta_0 * v(t) < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analog zu Gleichung (3.31) können wir daraus herleiten

$$\begin{aligned} \check{g}_{-1} * \eta_0 * v(t) &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_{-1}(t-u) d\left(\eta_0 * \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}\right)(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \check{g}_{-1}(t-u) \sum_{k=0}^{\infty} d\tilde{P}\left(\underbrace{C_1 + \dots + C_{N_k^{(-)}}}_{W_k^{(-)}} \leq u\right) \\ &= \tilde{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{J_n^{(-)}} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right) \\ &= \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right). \end{aligned}$$

(v) Aus Gleichung (3.29) erhalten wir für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \check{r}(t) &= \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) + \tilde{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right) \\ &= \check{g}_1 * v(t) + \check{g}_{-1} * \eta_0 * v(t) \\ &= (\check{g}_1 + \check{g}_{-1} * \eta_0) * v(t). \end{aligned}$$

Da $\check{g}_1 + \check{g}_{-1} * \eta_0$ dRi ist, läßt sich erneut das Key Renewal Theorem (Satz 2.21) anwenden.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (\check{g}_1 + \check{g}_{-1} * \eta_0) * v(t) &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (\check{g}_1 + \check{g}_{-1} * \eta_0)(t) dt \\
&= \frac{1}{2m} \left(\int_{\mathbb{R}} g_1 dt + \int_{\mathbb{R}} g_{-1} dt \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\eta_0(t)}_{=1} \right), \quad \text{nach Satz 2.12,} \\
&= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (g_1 + g_{-1})(t) dt \\
&= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa t} \left(\mathbf{P}(Y > e^t) - \mathbf{P}(AY > e^t) + \mathbf{P}(Y < -e^t) - \mathbf{P}(AY < -e^t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} e^{\kappa t} \left(\mathbf{P}(|Y| > e^t) - \mathbf{P}(|AY| > e^t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} y^{\kappa-1} \left(\mathbf{P}(|Y| > y) - \mathbf{P}(|AY| > y) \right) dy \quad \text{Subst. } y := e^t.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.13 erhalten wir daraus

$$\mathbf{P}(Y > s) \sim K \cdot s^{-\kappa} \quad \text{für } s \rightarrow \infty,$$

$$\text{mit } K = \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} y^{\kappa-1} \left(\mathbf{P}(|Y| > y) - \mathbf{P}(|AY| > y) \right) dy.$$

Damit ist der zweite Fall für $\mathbf{P}(A > 0) > 0$ abgeschlossen.

$$\text{B) } \mathbf{P}(A > 0) = 0$$

Diesen Beweisteil lösen wir durch Zurückführen auf den ersten Fall. Dazu zeigen wir die folgende Gleichung.

$$\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AA_1 Y > t) \right| t^{\kappa-1} dt < \infty. \quad (3.32)$$

Dafür betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(AY > t) - \mathbf{P}(AA_1 Y > t) \right| t^{\kappa-1} dt = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 \left| \mathbf{P}(uY > t) - \mathbf{P}(uA_1 Y > t) \right| d\mathbf{P}(A \leq u) \right) t^{\kappa-1} dt, \quad \text{da } A \leq 0 \text{ f.s.,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y < -v) - \mathbf{P}(A_1 Y < -v) \right| (-uv)^{\kappa-1} (-u) dv \right) d\mathbf{P}(A \leq u) \quad \text{Subst. } v := -\frac{t}{u} \\
 &= \int_{-\infty}^0 (-u)^{\kappa} d\mathbf{P}(A \leq u) \int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y < -v) - \mathbf{P}(A_1 Y < -v) \right| v^{\kappa-1} dv \\
 &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |u|^{\kappa} d\mathbf{P}(A \leq u)}_{=\mathbf{E}(|A|^{\kappa})=1} \underbrace{\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y < -v) - \mathbf{P}(A_1 Y < -v) \right| v^{\kappa-1} dv}_{<\infty \text{ nach Voraussetzung 3.25}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Damit läßt sich jetzt Gleichung (3.32) zeigen.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AA_1 Y > t) \right| t^{\kappa-1} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t) + \mathbf{P}(AY > t) - \mathbf{P}(AA_1 > t) \right| t^{\kappa-1} dt \\
 &\leq \underbrace{\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t) \right| t^{\kappa-1} dt}_{<\infty \text{ nach Voraussetzung 3.25}} + \underbrace{\int_0^{\infty} \left| \mathbf{P}(AY > t) - \mathbf{P}(AA_1 > t) \right| t^{\kappa-1} dt}_{<\infty \text{ vgl. oben}} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Weil $AA_1 \geq 0$ f. s., können wir auf Gleichung (3.32) den 1. Fall anwenden.

$$\mathbf{P}(Y > t) \sim C'_+ t^{-\kappa} \quad , \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\text{mit } C'_+ = \frac{1}{m'} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AA_1 Y > t) \right) t^{\kappa-1} dt$$

$$\text{und } m' = \mathbf{E} \left(|AA_1|^{\kappa} \ln |AA_1| \right).$$

Schließlich betrachten wir noch C'_+ und m' .

$$\begin{aligned}
 C'_+ &= \frac{1}{m'} \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AA_1 Y > t) \right) t^{\kappa-1} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t) \right) t^{\kappa-1} dt + \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(AY > t) - \mathbf{P}(AA_1 > t) \right) t^{\kappa-1} dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y > t) - \mathbf{P}(AY > t) \right) t^{\kappa-1} dt + \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y < -v) - \mathbf{P}(A_1 Y < -v) \right) v^{\kappa-1} dv \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(Y > t) + \mathbf{P}(Y < -t) - \mathbf{P}(AY > t) - \mathbf{P}(AY < -t) \right) t^{\kappa-1} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \left(\mathbf{P}(|Y| > t) - \mathbf{P}(|AY| > t) \right) t^{\kappa-1} dt \\
&= C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m' &= \mathbf{E} \left(|A|^{\kappa} |A_1|^{\kappa} (\ln |A| + \ln |A_1|) \right) \\
&= \underbrace{\mathbf{E}(|A|^{\kappa})}_{=1} \underbrace{\mathbf{E}(|A_1|^{\kappa} \ln |A_1|)}_{=m} + \underbrace{\mathbf{E}(|A_1|^{\kappa})}_{=1} \cdot \underbrace{\mathbf{E}(|A|^{\kappa} \ln |A|)}_{=m} \\
&= 2m.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen. □

Kapitel 4

Tailindexbestimmung beim GARCH(1,1)-Prozeß

In diesem Kapitel benutzen wir die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts, um den Tailindex des GARCH(1,1)-Prozesses

$$X_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha X_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_0, \alpha, \beta > 0,$$

mit beliebiger Start-ZV X_0 und beliebiger Startvarianz h_0 zu bestimmen. Aus Beispiel 3.1 wissen wir, daß der Prozess $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ die Form (3.1) besitzt und Satz 3.2 liefert die Bedingungen, unter denen dieser Prozeß eine stationäre Grenzverteilung besitzt. Weil für den GARCH(1,1)-Prozeß σ_n unabhängig von ε_n , $n \in \mathbb{N}$, gilt, besitzt dieser unter genau den gleichen Bedingungen ebenfalls eine stationäre Verteilung. Zur Bestimmung des Tailindex für den Prozeß $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir Satz 3.7 benutzen. Wenn wir nun den Tailindex für ein Parameterpaar (α, β) kennen, dann liefert Satz 2.25 von Breiman den Tailindex für den dazugehörigen GARCH(1,1)-Prozeß. Angenommen es gilt

$$\mathbf{P}(\sigma_n^2 > x) \sim Cx^{-\kappa},$$

d.h. $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt Tailindex κ , dann gilt mit Substitution $y = \sqrt{x}$

$$\mathbf{P}(|\sigma_n| > y) \sim Cy^{-2\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(\sigma_n > y) \sim \frac{C}{2}y^{-2\kappa},$$

d.h. $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt den Tailindex 2κ . Die ZV ε_n sind unabhängig von σ_n , $n \in \mathbb{N}$, und besitzen einen größeren Tailindex als $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mit Satz 2.25 folgt dann, daß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den gleichen Tailindex wie $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt.

Mit welchen Verfahren wir den Parameterbereich, für den eine stationäre Verteilung existiert, und den Tailindex konkret bestimmt haben, ist im folgenden Abschnitt beschrieben.

4.1 Verfahren zur Bestimmung des Stationaritätsbereichs und des Tailindexes

Nach Satz 3.2 und Beispiel 3.1 existiert eine stationäre Grenzverteilung für den Prozeß $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$, falls $\mathbf{E}(\ln |\alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1|) < 0$ und $\mathbf{E}(\ln^+ \alpha_0) < \infty$, wobei die letzte Bedingung keine Einschränkung darstellt, da $a \in (0, \infty)$ deterministisch ist. Weil für den GARCH(1,1)-Prozeß $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$ und σ_n unabhängig von ε_n , $n \in \mathbb{N}$, ist, besitzt dieser unter genau den gleichen Bedingungen ebenfalls eine stationäre Verteilung. Um den Bereich für die Parameter α und β zu bestimmen, in dem Stationarität vorliegt, lösten wir die Integralgleichung

$$\mathbf{E}(\ln |\alpha \varepsilon^2 + \beta|) = 0, \quad (4.1)$$

was allerdings nur numerisch möglich war. Dazu haben wir auf das Mathematikprogramm Maple zurückgegriffen. Die Werte in den nachfolgenden Tabellen für den Stationaritätsbereich sind alle numerisch berechnete Näherungen aus einem in Maple programmierten Iterationsverfahren. Mit Hilfe von Newton-Iterationen wurde die Lösung der Gleichung (4.1) für feste Werte von α bzw. β bis auf eine Genauigkeit von 10^{-4} bestimmt. Um die Konvergenz der Iteration zu sichern, müssen allerdings die Startwerte geeignet, d.h. in der Nähe der tatsächlichen Lösung, gewählt werden. Während wir bei den ersten Berechnungen die Startwerte grob abschätzten und die Berechnung notfalls bei geänderten Startwerten wiederholten, konnten wir später die wahre Lösung anhand der bereits bekannten Werte die Lösung abschätzen und die Startwerte entsprechend wählen. Die Berechnung eines Wertes benötigte dann im Schnitt etwa 30 Sekunden.

Schwieriger wurde die Bestimmung des Tailindexes aus der Integralgleichung

$$\mathbf{E}(|\alpha \varepsilon^2 + \beta|^{u/2}) = 1 \quad (4.2)$$

für festes (α, β) . Dabei benutzten wir zwei verschiedene Methoden, um Näherungen für den wahren Wert des Tailindexes zu bekommen.

Analytische Methode

Dabei lösen wir die Integralgleichung $\int_{\mathbb{R}} |\alpha x^2 + \beta|^{u/2} p(x) dx = 1$, wobei p die Lebesgue-Dichte der Noise-Variablen ε bezeichnet.

Hierfür benutzten wir wiederum das Mathematikprogramm Maple. Da dieses bei der Integralauswertung für "schiefe" Werte von u - darunter verstehen wir alle Werte von u , die sich nicht durch einfache Brüche darstellen lassen - entweder Fehlermeldungen produzierte oder eine sehr lange Rechenzeit benötigte (z.B. bei $u=1/10$ bereits eine Minute), war allerdings ein Iterationsverfahren, wie wir es zur Bestimmung des Stationaritätsbereichs benutzten, unbrauchbar, da dieses Verfahren in aller Regel eben solche "schiefe" Werte für u liefert und dann weiterbenutzt. Also näherten wir die Lösung durch eine spezielle Intervallschachtelung. Dabei waren die Intervallgrenzen entweder ganze Zahlen oder einfache Brüche, wie $1/2$, $1/4$ oder $1/8$, um die Rechenzeit in einem angemessenen Rahmen zu halten. So wurde z.B. für ein Parameterpaar

(α, β) der Integralwert für $u = 1$ und $u = 2$ bestimmt; war dieser für $u = 2$ größer als 1 und für $u = 1$ kleiner als 1, so wurde dann zusätzlich der Wert für $u = 3/2$ bestimmt. War der Integralwert bei $u = 3/2$ dann beispielsweise größer als 1, dann mußte der Tailindex im Intervall $(1, 3/2)$ liegen, welches dann wiederum aufgeteilt wurde. Die wahre Lösung wurde mit diesem aufwendigen Verfahren in einem Intervall von maximaler Größe $1/16$ lokalisiert und dann durch Linearisieren zwischen den Werten an den Intervallgrenzen angenähert. Auf diese Weise erreichten wir eine Genauigkeit von etwa 10^{-2} .

Simulationsmethode

Dabei lösen wir die Gleichung $\sum_{i=1}^n |\alpha x_i^2 + \beta|^{u/2} = 1$, wobei x_i , $i = 1, \dots, n$, die Realisierungen von iid ZV darstellen, die wie die Noise-Variable ε verteilt sind.

Dazu wurden mit dem Statistik-Programm S-Plus 500.000 Daten simuliert und anschließend wurde die obige Gleichung, die das empirische Äquivalent der Gleichung 4.2 darstellt, mit dem oben beschriebenen Iterationsverfahren gelöst. Dabei stellten wir fest, daß insbesondere bei Tailindexwerten > 3 die so ermittelten Schätzungen meist deutlich größer als die vorher mit Maple ermittelten Werte waren. Für Tailindexwerte kleiner als 2 stimmte die Schätzung mit den von Maple ermittelten Werten überein, so daß diese Werte relativ zuverlässig mit einer Genauigkeit von 10^{-2} angegeben werden können. Pitts et al. [31] haben bewiesen, daß die mit diesem Verfahren ermittelten Werte asymptotisch gegen eine Normalverteilung mit dem gesuchten Tailindex als Erwartungswert konvergieren. Zu den Voraussetzungen zählt allerdings, daß das Integral aus (4.2) auch für $u = 2\kappa + \delta$, κ der gesuchte Tailindex und $\delta > 0$, existieren muß. Bei der Student-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden sind also Tailindexwerte größer als $\nu/2$ nicht mehr zuverlässig zu bestimmen (vgl. Anhang B).

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Tailindexwerte kleiner als 2 relativ zuverlässig mit einer Genauigkeit von 10^{-2} angegeben werden können. Dagegen ist bei den größeren Indexwerten keine Absicherung der analytischen Maple-Ergebnisse durch Simulationen in S-Plus möglich, so daß für diese Werte eigentlich nur das Intervall angegeben werden kann, in dem sich die Lösung befindet. In den Tabellen ist allerdings der durch Linearisierung ermittelte Wert angegeben, so daß mit Abweichungen vom tatsächlichen Tailindex von maximal ± 0.02 zu rechnen ist.

4.2 Stationarität und Tailindex für verschiedene Verteilungen der Noise-Variablen

In diesem Abschnitt vergleichen wir den Parameterbereich, für den eine stationäre Verteilung existiert, und die Tailindexwerte für verschiedene Verteilungen der Noise-Variablen ε beim GARCH(1,1)-Prozeß. In den folgenden Teilabschnitten untersuchen wir zunächst in den jeweils ersten beiden Tabellen, für welche Parameterpaare (α, β) , $\alpha, \beta > 0$, die Existenz einer stationären Grenzverteilung gesichert ist, um anschließend in der dritten Tabelle für diese Parameter

die Tailindizes zu dokumentieren.

4.2.1 Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden

Die Noise-Variable ε besitzt dabei die Lebesgue-Dichte $p(x) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi(3+x^2)^2}$. Um festzustellen, für welche Parameterpaare eine stationäre Verteilung existiert, lösen wir die Integralgleichung

$$\mathbf{E}(\ln |\alpha\varepsilon^2 + \beta|) = 0 \quad (4.3)$$

für festes α bzw. β . Die Werte in der Tabelle 4.1 sind so zu verstehen, daß z.B. bei festem $\beta = 0.4$ und für $\alpha = 0.59$ der Erwartungswert aus Gleichung (4.3) gerade noch kleiner 0 ist, und damit nach Satz 3.2 eine stationäre Verteilung existiert, während für $\beta = 0.4$ und $\alpha = 0.6$ der Erwartungswert größer als 0 ist und die Konvergenz des GARCH(1,1)-Prozesses nicht mehr gewährleistet ist. Insbesondere folgt aber auch, daß bei $\beta = 0.4$ für alle Werte $\alpha \in (0, 0.59]$ eine stationäre Verteilung existiert.

Tabelle 4.1: Numerisch ermitteltes Supremum für α , abhängig von β , damit Stationarität vorliegt.

$\beta =$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
$\alpha <$	2.46	1.41	1.05	0.59	0.31	0.11	0.05	0.02

Wie aus der Gleichung (4.3) zu erwarten war, reduziert sich der Wert für α in Abhängigkeit von β von 2.45 bei $\beta = 0$ bis auf 0.02 bei $\beta = 0.95$. Je mehr sich β an 1 annähert, umso kleiner werden die möglichen α -Werte. Für $\beta = 1$ existiert kein $\alpha > 0$, so daß der Erwartungswert aus Gleichung (4.3) kleiner als 0 wird, wie man auch am Erwartungswert selbst erkennen kann.

Genauso wie wir die Maximalwerte für α in Abhängigkeit von β ermittelten, berechnen wir nun umgekehrt die Suprema von β in Abhängigkeit von α . Die Tabelle zeigt also wiederum den numerisch bis auf zwei Stellen genau ermittelten Maximalwert für β , so daß der Erwartungswert in (4.3) kleiner als 0 ist und somit im Modell Stationarität vorliegt.

Tabelle 4.2: Numerisch ermitteltes Supremum für β , abhängig von α , so daß Stationarität vorliegt.

$\alpha =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.4
$\beta <$	0.82	0.70	0.53	0.39	0.29	0.21	0.08	0.01	<0.01

Wie wir bereits aus Tabelle 4.1 wissen, kann β keine Werte ≥ 1 annehmen, bei $\alpha = 0.1$ ist sogar maximal nur noch 0.82 möglich. Die Tabelle 4.2 kann als Spiegelbild der Tabelle 4.1 betrachtet werden. Aus letzterer wissen wir beispielsweise, daß bei $\beta = 0.4$ ein Maximalwert $\alpha = 0.59$ möglich war, während bei $\beta = 0.6$ der Wert für $\alpha \leq 0.31$ sein mußte. Wenn wir nun in Tabelle 4.2 den maximalen Wert von β bei $\alpha = 0.4$ bestimmen, wissen wir bereits, daß dieser zwischen

0.4 und 0.6 liegen muß.

Für eine Reihe von (α, β) -Paaren, für die nach den Tabellen 4.1 und 4.2 eine stationäre Verteilung existiert, bestimmten wir daraufhin den Tailindex. Dazu lösten wir die Integralgleichung (4.2) sowohl analytisch als auch mit Simulationen, wie im letzten Abschnitt beschrieben. Diese Lösung stellt nach dem Satz 3.4 von Goldie den Tailindex der stationären Verteilung dar. Die Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die ermittelten Tailindexwerte; dabei kennzeichnet " - " ein Parameterpaar (α, β) für das keine stationäre Verteilung existiert. Wie wir aus den vorangegangenen Tabellen wissen, liegt für $\beta \geq 1$ und $\alpha \geq 2.5$ keine Stationarität vor, so daß diese Werte auch in der Tabelle 4.3 gar nicht vorkommen.

Tabelle 4.3: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von α und β .

		$\alpha =$								
		0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.4
$\beta =$	0.0	2.78	2.43	1.80	1.35	1.02	0.78	0.39	0.14	0.01
	0.2	2.73	2.29	1.47	0.86	0.41	0.07	-	-	-
	0.4	2.63	2.00	0.82	-	-	-	-	-	-
	0.6	2.37	1.19	-	-	-	-	-	-	-
	0.8	0.77	-	-	-	-	-	-	-	-

Aus der vorliegenden Tabelle 4.3 erkennen wir zunächst, daß alle Tailindexwerte kleiner als 3 sind. Dies hängt mit der verwendeten Verteilung für die Noise-Variablen zusammen. Verwenden wir eine Student-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden, dann gilt $\mathbf{E}(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^{\nu/2}) = \infty$, da $\mathbf{E}(\varepsilon^\nu) = \infty$ (nach Johnson et al. [24]). Die Lösungen der Gleichung (4.2) müssen also kleiner als 3 sein. Für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen haben wir diese Eigenschaft explizit in Abschnitt 6.3 bewiesen. Zudem beobachten wir eine Abnahme der Tailindexwerte mit zunehmenden Parameterwerten α bzw. β . Auch solche Monotonieeigenschaften werden in Abschnitt 6.3 für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen nachgewiesen. Im GARCH(1,1)-Fall läßt sich diese Entwicklung bereits aus der Gleichung (4.2) erahnen. Je größer die Parameter sind, umso größer ist auch der Erwartungswert $\mathbf{E}(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^u)$ und umso kleiner muß u gewählt werden, damit die Gleichung (4.2) erfüllt ist.

4.2.2 Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden

In diesem Teilabschnitt besitzt die Noise-Variable die Lebesgue-Dichte $p(x) = \frac{8}{3\sqrt{5\pi}(1+x^2/5)^3}$. Wiederum betrachten wir zunächst den Parameterbereich, für den eine stationäre Lösung existiert. Dazu begutachten wir die Tabellen 4.4 und 4.5.

Dabei fällt sofort auf, daß sich für festes β der Bereich der möglichen Werte für α gegenüber den

Tabelle 4.4: Numerisch ermitteltes Supremum für α , abhängig von β , damit Stationarität vorliegt.

$\beta =$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
$\alpha <$	2.87	1.70	1.27	0.74	0.40	0.16	0.07	0.03

Tabelle 4.5: Numerisch ermitteltes Supremum für β , abhängig von α , so daß Stationarität vorliegt.

$\alpha =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5
$\beta <$	0.86	0.76	0.60	0.47	0.37	0.29	0.14	0.05	<0.01

Tabellen 4.1 und 4.2 vergrößert hat. Dasselbe gilt für festes α und den Bereich von β . Dies liegt an der stärker abfallenden Dichte der Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden, gegenüber der vorher behandelten mit 3 Freiheitsgraden. Bei festem β ist so z.B., wegen der geringeren Wahrscheinlichkeit in den Enden der Dichte, ein größerer Wert für α möglich. Anders ausgedrückt sinkt das Gewicht für große x -Werte im Integral $\int_{\mathbb{R}} \ln |\alpha x^2 + \beta| p(x) dx$, weshalb dann auch noch für größere α -Werte das Integral kleiner als 0 ist. Insgesamt hat sich somit der Parameterbereich ausgeweitet, für den eine stationäre Lösung existiert.

Interessant ist nun, wie sich bei Änderung der Noise-Variablen die Tailindexwerte verändert haben. Dazu begutachten wir die Werte in der Tabelle 4.6 und vergleichen sie mit denen aus Tabelle 4.3.

Tabelle 4.6: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von α und β .

		$\alpha =$								
		0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5
$\beta =$	0.0	4.71	4.00	2.76	2.00	1.50	1.14	0.61	0.29	0.10
	0.2	4.68	3.84	2.40	1.50	0.89	0.44	-	-	-
	0.4	4.62	3.52	1.70	0.58	-	-	-	-	-
	0.6	4.40	2.64	0.05	-	-	-	-	-	-
	0.8	2.99	-	-	-	-	-	-	-	-

Wir erkennen, daß sich nicht nur der Stationaritätsbereich, sondern auch die Tailindexwerte geändert haben. Ein Vergleich mit Tabelle 4.3 zeigt, daß alle Werte angestiegen sind. So ist z.B. der Wert für das Parameterpaar $(\alpha, \beta) = (0.2, 0.4)$ von 1.47 auf 2.40 angewachsen, d.h. für den GARCH(1,1)-Prozess mit Parametern $\alpha = 0.2$ und $\beta = 0.4$ und der Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden als Verteilung der Noise-Variablen existiert die Varianz, während sie bei

Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden nicht existiert. Dieser Anstieg läßt sich wieder mit der geringeren Masse in den Verteilungsenden der Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden, gegenüber der mit 3 Freiheitsgraden, begründen. Im Integral $\int_{\mathbb{R}} |\alpha x^2 + \beta|^u p(x) dx$ werden dadurch die betragsmäßig großen x -Werte weniger stark gewichtet und u muß deshalb größer gewählt werden, um die Integralgleichung (4.2) zu erfüllen. Wiederum erkennen wir auch die bereits im vorigen Teilabschnitt angesprochenen Monotonien, und daß alle Werte kleiner als 5 sind. Dies hängt wieder mit dem Freiheitsgrad der Student-t-Verteilung zusammen. Dennoch ist die Monotonie erstaunlich, da ja nicht nur die Tails, sondern die gesamte Verteilung in den Erwartungswert eingeht, und sich damit auch die größere Masse um den Wert 0 bei der Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden auswirkt.

4.2.3 Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden

Wir wählen hier $p(x) = \frac{128}{105\pi(1+x^2/9)^5}$ als Lebesgue-Dichte der Noise-Variablen ε im Modell (3.1). Nun vergleichen wir die Tabellen für den Stationaritätsbereich (Tab. 4.7 und 4.8) mit denen der aus den vorhergehenden Teilabschnitten.

Tabelle 4.7: Numerisch ermitteltes Supremum für α , abhängig von β , damit Stationarität vorliegt.

$\beta =$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
$\alpha <$	3.17	1.90	1.44	0.85	0.47	0.19	0.08	0.04

Tabelle 4.8: Numerisch ermitteltes Supremum für β , abhängig von α , so daß Stationarität vorliegt.

$\alpha =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\beta <$	0.88	0.79	0.64	0.52	0.42	0.34	0.18	0.08	0.02	<0.01

Dabei erkennen wir eine weitere Ausdehnung des Parameterbereichs, für den eine stationäre Lösung existiert, so hat sich etwa der Maximalwert für α bei festem $\beta = 0.2$ von 1.05 (Tab. 4.1) über 1.27 (Tab. 4.4) auf 1.44 in Tabelle 4.7 erhöht.

Aus diesem Grunde lassen sich für immer mehr Parameterpaare (α, β) die Tailindizes bestimmen. So ist in Tabelle 4.9 ein Tailindex für das Parameterpaar $(0.8, 0.4)$ vorhanden, welcher in den Tabellen 4.3 und 4.6 noch fehlte, da für kleinere Freiheitsgrade der Student-t-Verteilung noch keine stationäre Verteilung existierte.

Insgesamt erkennen wir beim Vergleich der Tabellen 4.3, 4.6 und 4.9 einen Anstieg der Tailindexwerte, der dem Anstieg der Freiheitsgrade entspricht. Markant ist auch der schnelle Abfall der Werte für $\alpha = 1$ und $\beta > 0.6$. Wie wir aus Tabelle 4.7 wissen, können wir bei $\alpha = 0.1$ den

Tabelle 4.9: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von α und β .

		$\alpha =$									
		0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\beta =$	0.0	8.23	6.21	3.82	2.63	1.93	1.47	0.80	0.42	0.20	0.04
	0.2	8.16	5.94	3.39	2.10	1.31	0.77	-	-	-	-
	0.4	8.03	5.45	2.57	1.02	0.20	-	-	-	-	-
	0.6	7.67	4.31	0.76	-	-	-	-	-	-	-
	0.8	5.73	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tailindex bis maximal $\beta = 0.88$ berechnen. An dieser Stelle ist der Tailindex bereits annähernd 0; eine Änderung des Parameters β von 0.6 auf 0.88 bewirkt also eine Änderung des Tailindexes um etwa 7.6. In diesem Bereich ist der Tailindex also sehr sensitiv gegenüber Veränderungen in den Parameterwerten.

4.2.4 Standardnormalverteilung

Abschließend behandeln wir noch den Fall einer normalverteilten Noise-Variablen, also mit Lebesgue-Dichte $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Weil die Student-t-Verteilung mit Freiheitsgrad ν für $\nu \rightarrow \infty$ gegen die Normalverteilung konvergiert, vermuten wir, daß sich die Entwicklung aus den letzten Teilabschnitten fortsetzt.

Tabelle 4.10: Numerisch ermitteltes Supremum für α , abhängig von β , damit Stationarität vorliegt.

$\beta =$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
$\alpha <$	3.56	2.16	1.65	1.00	0.56	0.23	0.10	0.05

Tabelle 4.11: Numerisch ermitteltes Supremum für β , abhängig von α , so daß Stationarität vorliegt.

$\alpha =$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\beta <$	0.90	0.82	0.69	0.57	0.48	0.40	0.23	0.12	0.05	0.01

Die Tabellen 4.10 und 4.11 bestätigen die Vermutung, daß sich der Parameterbereich für die Existenz stationärer Lösungen weiter vergrößert. Für den Beispielwert $\beta = 0.2$ hat sich dabei der maximale Wert von α von 1.05 bei der Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden über 1.27

bei 5 Freiheitsgraden und und 1.44 bei 9 Freiheitsgraden bis auf 1.65 bei der Standardnormalverteilung (Tab. 4.10) erhöht.

Tabelle 4.12: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von α und β .

		$\alpha =$									
		0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\beta =$	0.0	26.48	12.89	6.09	3.82	2.68	2.00	1.08	0.62	0.33	0.14
	0.2	24.24	11.66	5.32	3.14	2.00	1.27	0.19	-	-	-
	0.4	21.67	10.17	4.18	2.00	0.79	0.02	-	-	-	-
	0.6	18.45	7.91	2.00	-	-	-	-	-	-	-
	0.8	12.49	2.00	-	-	-	-	-	-	-	-
	0.9	2.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Auch bei den Tailindexwerten in Tabelle 4.12 hat sich unsere Prognose bestätigt. Im Vergleich zur Tabelle 4.9 haben sich wieder alle numerisch ermittelten Werte für den Tailindex erhöht. Wenn wir als Parameterpaar $(\alpha, \beta) = (0.6, 0.2)$ nehmen, dann beobachten wir einen Anstieg des Tailindexes von 0.86 in Tabelle 4.3 über 1.50 (Tab. 4.6) und 2.10 (Tab. 4.9) bis auf 3.14 in Tabelle 4.12 für die Normalverteilung. Bei der stationären Verteilung eines GARCH(1,1)-Prozesses mit Parametern $\alpha = 0.6$ und $\beta = 0.2$ sowie normalverteilter Noise-Variablen existiert also das dritte Moment, im Gegensatz zu denen mit Student-t-verteilten Noise-Variablen. Eine Besonderheit in der Tabelle 4.12 ist außerdem das Auftreten des Tailindexes 2, immer dann wenn $\alpha + \beta = 1$ gilt. Dies läßt sich ganz einfach aus der Gleichung 4.2 erklären, denn für $u = 2$ gilt bei standardnormalverteilten Noise-Variablen

$$\mathbf{E}(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^{u/2}) = \alpha\mathbf{E}(\varepsilon^2) + \beta = \alpha + \beta.$$

Für $\alpha + \beta = 1$ ergibt sich damit offensichtlich der Tailindex 2.

Vergleichen wir abschließend die Tabellen für die verschiedenen Verteilungen bei den Noise-Variablen, so erkennen wir, daß der Tailindex umso kleiner ist, je mehr Masse in den Verteilungsenden der Noise-Variablen liegt.

Die Abbildung 4.1 zeigt einen Vergleich von GARCH(1,1)-Prozessen mit gleichen Parametern, aber unterschiedlichen Verteilungen der Noise-Variablen. Dabei ist die unterschiedliche Skalierung der Bilder zu beachten. Es zeigt sich, daß die Ausschläge umso extremer sind, je mehr Masse in den Tails der Noise-Verteilung liegt.

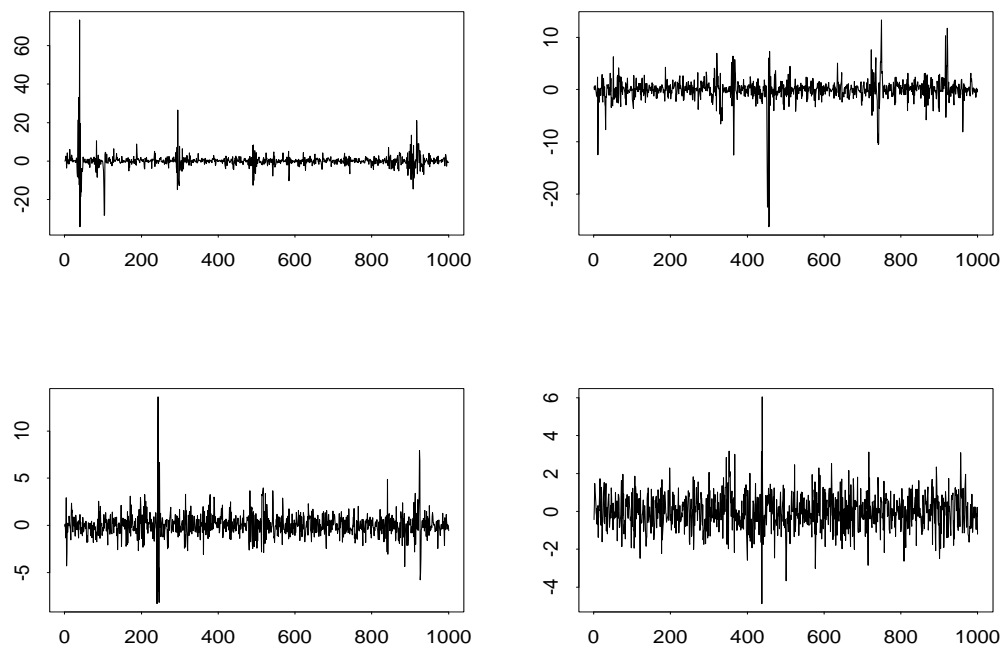


Abbildung 4.1: Jeweils 1000 simulierte Daten von GARCH(1,1)-Prozessen $X_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = 0.4 + 0.4X_{n-1}^2 + \beta\sigma_n^2$ mit unterschiedlichen Noise-Variablen. Die Verteilungen der Noise-Variablen sind die Student-t-Verteilung mit 3 (links oben), 5 (rechts oben) und 9 Freiheitsgraden (links unten) bzw. die Standardnormalverteilung.

Kapitel 5

AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen

5.1 Vorstellung des Modells und Anforderungen an die Noise-Variablen

Der autoregressive Prozess mit ARCH(1)-Innovationen soll mit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet werden, und über folgende stochastische Rekurrenzgleichung definiert sein.

$$X_n = \gamma X_{n-1} + \sqrt{\beta + \lambda X_{n-1}^2} \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}, X_0 \text{ beliebige ZV.} \quad (5.1)$$

Dabei sei $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ und $\lambda > 0$.

Die Zufallsvariablen ε_n , $n \in \mathbb{N}$, seien iid und unabhängig von X_0 . Um Aussagen zur Stationarität und zum Tailverhalten zu bekommen, werden wir später weitere Bedingungen an die Noise-Variablen stellen.

Dieses Modell gehört zur Klasse der ARMA-Prozesse mit ARCH-Innovationen, welche 1984 von Weiss [42] eingeführt wurde. Borkovec und Klüppelberg [9] untersuchten den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen ausführlich bezüglich den Voraussetzungen zur Existenz einer stationären Verteilung, um dann das Tailverhalten einer solchen stationären Verteilung zu bestimmen. Dieses Kapitel faßt ihre Ergebnisse zusammen.

Zunächst sei bemerkt, daß es sich bei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine homogene Markovkette handelt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(X_n \in B \mid X_{n-1} = x_1, \dots, X_0 = x_n\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\gamma X_{n-1} + \sqrt{\beta + \lambda X_{n-1}^2} \varepsilon_n \in B \mid X_{n-1} = x_1, \dots, X_0 = x_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\gamma x_1 + \sqrt{\beta + \lambda x_1^2} \varepsilon_n \in B\right), \quad \text{da } \varepsilon_n \text{ unabhängig von } X_{n-1}, X_{n-2}, \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wie oben angekündigt, sollen die ZV ε_n , $n \in \mathbb{N}$, einige Voraussetzungen erfüllen, welche zum Beweis der nachfolgenden Sätze notwendig sind. Bei einigen dieser Voraussetzungen ist es schwie-

rig, sie im konkreten Fall schnell nachzuprüfen, weswegen wir zu Beginn des nächsten Kapitels diese Voraussetzungen für einige häufig verwendete Verteilungen explizit durchrechnen werden. Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Modell (5.1) festgelegt und sei $\varepsilon \stackrel{d}{=} \varepsilon_1$. Dafür sollen nun zunächst diese Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} &\text{Der Träger von } \varepsilon \text{ sei ganz } \mathbb{R} : \text{supp}(\varepsilon) = \mathbb{R}, \\ &\varepsilon \text{ besitze eine um } 0 \text{ symmetrische Lebesgue-Dichte } p \text{ und} \\ &\varepsilon \text{ besitze endliches zweites Moment : } \mathbf{E}(\varepsilon^2) < \infty. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Zusätzlich sollen die folgenden drei Anforderungen erfüllt sein:

$$\mathbf{(D1)} \quad p(x) \geq p(x') \quad \forall x' \geq x > 0.$$

$\mathbf{(D2)}$ Für jedes beliebige feste $c \geq 0$ existiere eine Konstante $q = q(c) \in (0, 1)$ und Funktionen

$$f_+(c, \cdot) \text{ bzw. } f_-(c, \cdot) \text{ mit } f_+(c, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \text{ bzw. } f_-(c, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1,$$

so daß $\forall x > 0$ und $t > x^q$

$$p\left(\frac{x+c+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) \geq p\left(\frac{x+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) f_+(c, x),$$

$$p\left(\frac{x+c-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) \geq p\left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) f_-(c, x).$$

$\mathbf{(D3)}$ Es existiere eine Konstante $\eta > 0$, so daß mit q aus $\mathbf{(D2)}$ und

$$N := \inf\{u \geq 0; \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u > 2)\} \text{ gilt:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) x^{(N+1+\eta+3q)/(1-q)} = 0.$$

In Abschnitt 5.2 werden wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine stationäre Grenzverteilung für AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen existiert. Falls eine solche Grenzverteilung existiert, sei X eine ZV, die nach dieser verteilt sei. Wegen (5.1) muß dann X die folgende Fixpunktgleichung erfüllen.

$$X \stackrel{d}{=} \gamma X + \sqrt{\beta + \lambda X^2} \varepsilon \tag{5.4}$$

Bemerkung:

Für eine ZV X , wie gerade beschrieben, und N aus der Bedingung $\mathbf{(D3)}$ gilt

$$\mathbf{E}\left(|X|^M\right) = \infty \text{ für } M > N, \tag{5.5}$$

denn angenommen der Erwartungswert wäre endlich, dann würde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(|X|^M) &\stackrel{(5.4)}{=} \mathbf{E}\left(|\gamma X + \sqrt{\beta + \lambda X^2} \varepsilon|^M\right) \\
 &\geq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{X \neq 0\}} |X|^M \left|\gamma + \sqrt{\frac{\beta}{X^2} + \lambda} \varepsilon\right|^M\right) \\
 &\geq \mathbf{E}\left(|X|^M \mathbf{1}_{\{\varepsilon > 0\}} |\sqrt{\lambda} \varepsilon|^M\right) \\
 &= \mathbf{E}(|X|^M) \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{\varepsilon > 0\}} |\sqrt{\lambda} \varepsilon|^M\right), \text{ da } X, \varepsilon \text{ unabhängig,} \\
 &> \mathbf{E}(|X|^M), \text{ da } \mathbf{E}\left(|\sqrt{\lambda} \varepsilon|^M\right) \geq 2 \text{ und } \varepsilon \text{ symmetrisch.}
 \end{aligned}$$

gelten und damit einen Widerspruch ergeben.

Später in diesem Kapitel (Satz 5.3) werden wir zeigen, daß

$$\mathbf{P}(X > x) \sim Cx^{-\kappa}, \quad C, \kappa > 0.$$

Aus (5.5) zusammen mit (2.4) folgt dann $N \geq \kappa$. Nach Bedingung **(D3)** existiert ein $\eta > 0$ und $q \in (0, 1)$, so daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) x^{(N+1+\eta+3q)/(1-q)} = 0.$$

Damit gilt für hinreichend großes $s > 0$ und wegen dem monotonen Abfallen der Dichte p für $x > 0$ (Bedingung **(D1)**)

$$p(x) < x^{-(N+1+\eta+3q)} \quad \text{für } x > s,$$

und damit für $\delta \in (0, \eta)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa+\delta}) &= \int_{\mathbb{R}} |x|^{\kappa+\delta} p(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^{\kappa+\delta} p(x) dx \\
 &< \underbrace{2 \int_0^s x^{\kappa+\delta} p(x) dx}_{=: K, \text{ konstant}} + 2 \int_s^{\infty} x^{\kappa+\delta} x^{-(N+1+\eta+3q)} dx \\
 &\leq 2K + 2 \int_s^{\infty} x^{(\delta-\eta)-1} dx = 2K + 2 \left[\frac{x^{\delta-\eta}}{\delta-\eta} \right]_{x=s}^{\infty} = 2K + 2 \frac{s^{\delta-\eta}}{\delta-\eta} < \infty.
 \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus

$$\mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa+\delta}) < \infty \quad \text{für ein } \eta > 0. \tag{5.6}$$

5.2 Existenz einer stationären Verteilung

Wie bei dem in Kapitel 3 und 4 untersuchten GARCH(1,1)-Prozeß, stellen wir uns zunächst die Frage, unter welchen Voraussetzungen an das Modell (5.1) eine stationäre Verteilung für den

Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert. Die folgende Proposition beschreibt die Eigenschaften des Erwartungswerts $\mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u\right)$ in Abhängigkeit von der Potenz u . Dieser Erwartungswert wird für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen dieselbe Rolle spielen wie der Erwartungswert $\mathbf{E}\left(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^{u/2}\right)$ für den GARCH(1,1)-Prozeß (vgl. Gleichungen (4.1) und (4.2)).

Proposition 5.1

ε sei eine ZV, wie in Modell (5.1) verlangt, die die Bedingungen (5.3) und **(D1)** - **(D3)** erfüllt. Sei $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(\gamma, \lambda, u) = \mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u\right). \quad (5.7)$$

Für festes (γ, λ) werde die Funktion $h(\gamma, \lambda, \cdot)$ als $h_{\gamma, \lambda}(\cdot)$ bezeichnet.

Es gilt:

Die Funktion $h_{\gamma, \lambda}$ ist in $[0, T)$ strikt konvex, wobei $T := \inf\{u \geq 0; \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = \infty\}$.

Falls die Parameter γ und λ so gewählt werden, daß

$$\frac{d}{du}h(\gamma, \lambda, u)|_{u=0} = h'_{\gamma, \lambda}(0) = \mathbf{E}(\ln|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|) < 0, \quad (5.8)$$

dann existiert eine eindeutige Lösung $\kappa = \kappa(\gamma, \lambda) > 0$ für die Gleichung $h_{\gamma, \lambda}(u) = 1$.

Unter Bedingung (5.8) gilt sogar

$$\kappa(\gamma, \lambda) \begin{cases} > 2, & \gamma^2 + \lambda\mathbf{E}(\varepsilon^2) < 1 \\ = 2, & \gamma^2 + \lambda\mathbf{E}(\varepsilon^2) = 1 \\ < 2, & \gamma^2 + \lambda\mathbf{E}(\varepsilon^2) > 1 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Beweis:

Nach Satz 2.14 ist $h_{\gamma, \lambda}$ beliebig oft differenzierbar in $[0, T)$, weil $\forall k \in \mathbb{N}$

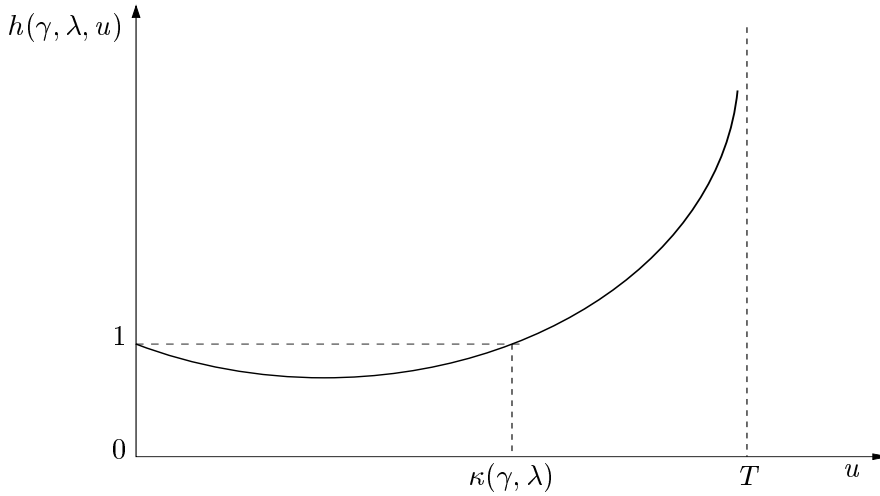
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k}{du^k} \left(|\gamma + \sqrt{\lambda}x|^u\right) p(x) dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d^k}{du^k} \left(c_u(|\gamma|^u + |\sqrt{\lambda}x|^u)\right) p(x) dx \quad \text{nach (3.20)} \\ &= c_u |\gamma|^u (\ln|\gamma|)^k + c_u \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{\lambda}x|^u (\ln|\sqrt{\lambda}x|)^k p(x) dx \\ &< \infty, \quad \text{da } |\sqrt{\lambda}x|^u (\ln|\sqrt{\lambda}x|)^k < |\sqrt{\lambda}x|^{(u+T)/2}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \text{und } \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) < \infty. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für die ersten Ableitungen von $h_{\gamma, \lambda}$

$$\begin{aligned} h'_{\gamma, \lambda}(u) &= \mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u \ln|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|\right), \\ h''_{\gamma, \lambda}(u) &= \mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u (\ln|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|)^2\right) > 0 \quad \forall u \in [0, T). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wegen $\text{supp}(\varepsilon) = \mathbb{R}$ ist der Erwartungswert in (5.10) echt positiv.

Aus der ersten Ableitung ergibt sich nun die Gleichheit in (5.8) und aus (5.10) ergibt sich die strikte Konvexität der Funktion $h_{\gamma, \lambda}$ in $[0, T)$.

Abbildung 5.1: Qualitativer Verlauf der Funktion $h(\gamma, \lambda, u)$.

Im folgenden nehmen wir ohne Einschränkung an, daß $\gamma \geq 0$ gilt.

Denn wegen $\varepsilon \stackrel{d}{=} -\varepsilon$ gilt

$$h_{-\gamma, \lambda}(u) = \mathbf{E}(|-\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = \mathbf{E}(|-\gamma - \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = \mathbf{E}(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = h_{\gamma, \lambda}(u). \quad (5.11)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} h_{\gamma, \lambda}(u) &\geq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{\varepsilon \geq 2/\sqrt{\lambda}\}}|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u\right) \geq \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{\varepsilon \geq 2/\sqrt{\lambda}\}}|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u\right) \\ &\geq 2^u \underbrace{\mathbf{E}\mathbf{1}_{\{\varepsilon \geq 2/\sqrt{\lambda}\}}}_{>0, \text{ da } \text{supp}(\varepsilon)=\mathbf{R}} \longrightarrow \infty, \quad u \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$h_{\gamma, \lambda}(0) = \mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^0\right) = 1.$$

Ist nun (5.8) erfüllt, d.h. die Ableitung von $h_{\gamma, \lambda}$ an der Stelle 0 ist negativ, dann ergibt sich schematisch ein Funktionsgraph wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

Wie aus der Zeichnung ersichtlich, existiert ein $\kappa > 0$ mit $h_{\gamma, \lambda}(\kappa) = 1$. Dieses κ ist auch eindeutig, denn angenommen $0 < \kappa_1 < \kappa_2$ und $h_{\gamma, \lambda}(\kappa_1) = h_{\gamma, \lambda}(\kappa_2) = 1$, dann gilt

$$h_{\gamma, \lambda}(0) = h_{\gamma, \lambda}(\kappa_1) = h_{\gamma, \lambda}(\kappa_2)$$

im Widerspruch zur strikten Konvexität, wonach alle Werte $h_{\gamma, \lambda}(u)$, $u \in (0, \kappa_2)$ im Graphen unterhalb der Verbindungsgerade von $h_{\gamma, \lambda}(0)$ und $h_{\gamma, \lambda}(\kappa_2)$ liegen müssen.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} h_{\gamma, \lambda}(2) &= \mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^2\right) = \mathbf{E}\left((\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon)^2\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\lambda}\varepsilon + \lambda\varepsilon^2\right) \\ &= \gamma^2 + \lambda\mathbf{E}(\varepsilon^2), \quad \text{da } \mathbf{E}(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der Zeichnung 5.1, ergibt sich daraus die Aussage (5.9). \square

Der folgende Satz liefert uns Aussagen über die Existenz einer stationären Verteilung des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen. Für den Beweis des Satzes verweisen wir auf Borkovec und Klüppelberg [9, Theorem 3.3].

Satz 5.2

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß, wie in Modell (5.1) gegeben, mit Parametern γ und λ , die die Bedingung (5.8) aus Proposition 5.1 erfüllen, und einen Noise-Prozeß $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, der die Voraussetzungen (5.3) erfüllt.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist geometrisch ergodisch. Insbesondere besitzt der Prozeß $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine eindeutige stationäre Verteilung und erfüllt die strong-mixing-Bedingung mit geometrischer Konvergenzrate. Die stationäre Verteilung ist stetig und symmetrisch.
- (ii) Falls $\gamma^2 + \lambda \mathbf{E}(\varepsilon^2) < 1$, dann besitzt die stationäre Verteilung von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ endliches zweites Moment.

Die Voraussetzungen (5.8) liefern also Bedingungen für die Existenz einer stationären Verteilung in Abhängigkeit von den Parametern, ähnlich wie wir sie auch für den GARCH(1,1)-Prozeß hatten (vgl. Bedingung (3.4)).

5.3 Tailverhalten der stationären Verteilung

Wir suchen wieder einen Satz, ähnlich Satz 3.7 für den GARCH(1,1)-Prozeß, der uns das Tailverhalten der stationären Verteilung in Abhängigkeit von den Modellparametern liefert. Dazu dient uns der folgende Satz.

Zuvor betrachten wir jedoch die Abbildung 5.2 (nächste Seite), die den Einfluß der verschiedenen Modellparameter auf den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen zeigt. Offensichtlich haben die Parameter γ und λ entscheidende Bedeutung für das extremale Verhalten des Prozesses, während β lediglich die Skalierung ändert. Dementsprechend erwarten wir, daß die Parameter γ und λ den Tailindex einer stationären Verteilung dieses Prozesses bestimmen.

Satz 5.3 (Satz von Borkovec und Klüppelberg)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozeß, wie in Modell (5.1) gegeben, und X besitze als Verteilung die nach Satz 5.2 eindeutige stationäre Grenzverteilung dieses Prozesses.

Dabei erfülle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingungen (5.3) sowie **(D1)** - **(D3)**, die Modellparameter γ und λ erfüllen die Ungleichung (5.8) und κ sei die nach Proposition 5.1 eindeutige Lösung der Gleichung

$$\mathbf{E} \left(|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^\kappa \right) = 1. \tag{5.12}$$

Dann gilt

$$\mathbf{P}(X > x) \sim l(x)x^{-\kappa}, \quad x \rightarrow \infty,$$

wobei l eine langsam variierende Funktion ist.

Dieser Satz wird in Borkovec und Klüppelberg [9, Theorem 3.11] mit Hilfe des Drasin-Shea Theorems (vergleiche etwa Bingham et al. [5]) bewiesen.

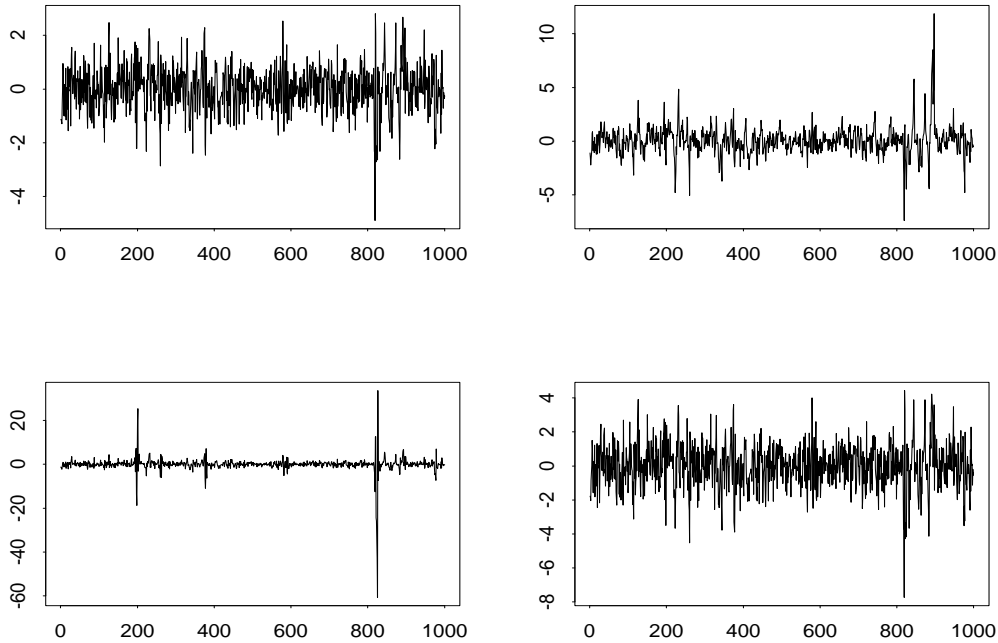


Abbildung 5.2: Jeweils 1000 simulierte Daten von AR(1)-Prozessen mit ARCH(1)-Innovationen $X_n = \gamma X_{n-1} \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = \beta + \lambda X_{n-1}^2$ mit unterschiedlichen Parametern, wobei die Noise-Variable standardnormalverteilt ist. Die Parametertriple (γ, β, λ) sind links oben $(0.2, 0.4, 0.4)$, rechts oben $(0.6, 0.4, 0.4)$, links unten $(0.2, 0.4, 1)$ und rechts unten $(0.4, 1, 0.4)$. Die Noise-Variable war in allen vier Simulationen standardnormalverteilt.

Für den Fall $\gamma = 0$, den ARCH(1) - Prozeß, ist ein solches Resultat schon aus Satz 3.4 bekannt. Die langsam variierende Funktion ist in diesem Fall eine Konstante. Aber auch im Fall $\gamma \neq 0$ kann l konstant gewählt werden, wie sich im folgenden herausstellen wird. Dazu führen wir anstelle von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, gegeben durch Modell (5.1), einen neuen stochastischen Prozess $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein.

$$Y_n := \left| \gamma Y_{n-1} + \sqrt{\beta + \lambda Y_{n-1}^2} \varepsilon_n \right|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

Die Parameter γ, β und λ seien wie im Modell (5.1) gegeben, Y_0 sei eine beliebige Start-ZV und $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfülle die Bedingungen (5.3) sowie **(D1)** - **(D3)**.

Für diesen Prozess zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.4

Falls $|X_0| = Y_0$ f.s., dann ist $(|X_n|)_{n \in \mathbb{N}_0} \stackrel{d}{=} (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis:

Sowohl $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als auch $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind homogene Markovketten.

Aus Gleichung 5.2 wissen wir bereits, daß der Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette bildet. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Y_n \in B \mid Y_{n-1} = y_1, \dots, Y_0 = y_n\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(|\gamma Y_{n-1} + \sqrt{\beta + \lambda Y_{n-1}^2} \varepsilon_n| \in B \mid Y_{n-1} = y_1, \dots, Y_0 = y_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(|\gamma y_1 + \sqrt{\beta + \lambda y_1^2} \varepsilon_n| \in B\right), \quad \text{da } \varepsilon_n \text{ unabhängig von } Y_{n-1}, Y_{n-2}, \dots \end{aligned}$$

Damit ist auch $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette.

Es reicht deshalb zu zeigen, daß die eindimensionalen Übergangswahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_1 \leq x \mid Y_0) &= \mathbf{P}\left(|\gamma Y_0 + \sqrt{\beta + \lambda Y_0^2} \varepsilon_1| \leq x \mid Y_0\right) \\ &= \mathbf{P}\left(|\gamma |X_0| + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1| \leq x \mid |X_0|\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-x \leq \gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1 \leq x, X_0 \geq 0 \mid |X_0|\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(-x \leq -\gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1 \leq x, X_0 < 0 \mid |X_0|\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-x \leq \gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1 \leq x, X_0 \geq 0 \mid |X_0|\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(-x \leq -\gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} (-\varepsilon_1) \leq x, X_0 < 0 \mid |X_0|\right), \quad \text{da } -\varepsilon_1 \stackrel{d}{=} \varepsilon_1, \\ &= \mathbf{P}\left(-x \leq \gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1 \leq x, X_0 \geq 0 \mid |X_0|\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(x \geq \gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1 \geq x, X_0 < 0 \mid |X_0|\right) \\ &= \mathbf{P}\left(|\gamma X_0 + \sqrt{\beta + \lambda X_0^2} \varepsilon_1| \leq x \mid |X_0|\right) \\ &= \mathbf{P}\left(|X_1| \leq x \mid |X_0|\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage des Lemmas bewiesen. □

Im folgenden Korollar zum Satz 5.3 zeigen wir, daß die darin enthaltene Funktion l konstant gewählt werden kann, und geben diese Konstante explizit an.

Korollar 5.5

Mit den Voraussetzungen, wie in Satz 5.3, kann die Funktion l konstant gewählt werden, nämlich

$$l(x) = l = \frac{1}{2\kappa} \frac{\mathbf{E} \left(\left| \gamma |X| + \sqrt{\beta + \lambda X^2} \varepsilon \right|^\kappa - \left| (\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon) |X| \right|^\kappa \right)}{\mathbf{E} \left(\left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right|^\kappa \ln \left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right| \right)}.$$

Beweis:

In diesem Beweis verwenden wir das Korollar 3.5. Es gilt, die Voraussetzungen aus diesem Korollar nachzuweisen.

Für $A := |\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|$ gilt

$$\mathbf{E}(|A|^\kappa) = 1, \quad \text{nach Voraussetzung (5.12) ,}$$

$$\mathbf{E}(|A|^\kappa \ln^+ |A|) = \mathbf{E} \left(\left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right|^\kappa \ln^+ \left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right| \right) < \infty,$$

da $\mathbf{E}(\varepsilon^{\kappa+\eta}) < \infty$ für ein $\eta > 0$ nach Gleichung (5.6),

und $\ln |A|$ gegeben $A \neq 0$, d.h. $\ln |\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|$ gegeben $\varepsilon \neq -\frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}}$, ist nicht-arithmetisch, da $\text{supp}(\varepsilon) = \mathbf{R}$.

Also sind die Bedingungen **(B1)** - **(B3)** aus Korollar 3.5 erfüllt.

Weil nach Lemma 5.4 die stationären Verteilungen von $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ und $(|X_n|)_{n \in \mathbf{N}_0}$ gleich sind, gilt nach Satz 5.3

$$\mathbf{P}(|X| > x) = \mathbf{P}(Y > x) \sim l(x)x^{-\kappa}, \quad x \rightarrow \infty,$$

und damit gilt insbesondere $\mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) < \infty$.

Es bleibt also, die Voraussetzung (3.12) aus Korollar 3.5 zu zeigen. Voraussetzung (3.13) ist wegen $A > 0$ und $Y > 0$ offensichtlich erfüllt.

Zuerst sei $\kappa > 1$. Mit den Gleichungen (3.20) und (3.21) gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|^\kappa - \left| (\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon) Y \right|^\kappa \right) &\leq \\ &\leq \mathbf{E} \left[\kappa \left| (\gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon) - (\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon) Y \right| \left(\max \left\{ \left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|, \left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right| Y \right\} \right)^{\kappa-1} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[\left| \sqrt{\beta} \varepsilon + \sqrt{\lambda Y^2} \varepsilon - \sqrt{\lambda Y^2} \varepsilon \right| \left(\left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right| + \left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right| Y \right)^{\kappa-1} \right] \\ &\leq \mathbf{E} \left[\kappa \sqrt{\beta} |\varepsilon| c_{\kappa-1} \left(\left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|^{\kappa-1} + \left| \gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon \right|^{\kappa-1} Y^{\kappa-1} \right) \right] \\ &\leq \kappa \sqrt{\beta} c_{\kappa-1}^2 \mathbf{E} \left[|\varepsilon| \left(\left| \gamma Y \right|^{\kappa-1} + \left| \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|^{\kappa-1} \right) + \left(\left| \gamma \right|^{\kappa-1} Y^{\kappa-1} + \lambda^{(\kappa-1)/2} |\varepsilon|^{\kappa-1} Y^{\kappa-1} \right) \right] \\ &\leq \kappa \sqrt{\beta} c_{\kappa-1}^2 \left[\gamma^{\kappa-1} \mathbf{E} |\varepsilon| \mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) + c_{(\kappa-1)/2} \left(\beta^{(\kappa-1)/2} \mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa-1}) + \lambda^{(\kappa-1)/2} \mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa-1}) \mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^{\kappa-1} \mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) + \lambda^{(\kappa-1)/2} \mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa-1}) \mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) \\
& < \infty, \text{ denn} \\
& \quad \mathbf{E}|\varepsilon| < \infty, \quad \text{nach Voraussetzung (5.3),} \\
& \quad \mathbf{E}(|\varepsilon|^{\kappa-1}) < \infty, \quad \text{da } \mathbf{E}(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^\kappa) < \infty, \\
& \quad \mathbf{E}(Y^{\kappa-1}) < \infty \quad (\text{siehe oben}).
\end{aligned}$$

Nun sei $0 < \kappa \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|^\kappa - |\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^\kappa Y^\kappa \right| & \leq \\
& \leq \mathbf{E} \left(\left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon - \gamma Y - \sqrt{\lambda} \varepsilon Y \right|^\kappa \right), \quad \text{nach (3.21),} \\
& \leq \mathbf{E} \left(\left| \sqrt{\beta + \lambda Y^2} - \sqrt{\lambda Y^2} \right|^\kappa \right) \mathbf{E}(|\varepsilon|^\kappa) \\
& = \beta^{\kappa/2} \mathbf{E}(|\varepsilon|^\kappa) < \infty, \quad \text{da } \mathbf{E}(|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^\kappa) = 1.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 3.5 erfüllt und es folgt

$$\mathbf{P}(Y > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned}
C_+ & = \frac{1}{\kappa m} \mathbf{E} \left[\left| \gamma Y + \sqrt{\beta + \lambda Y^2} \varepsilon \right|^\kappa - \left(|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon| Y \right)^\kappa \right], \\
m & = \mathbf{E} \left[|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^\kappa \ln |\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon| \right].
\end{aligned}$$

Da $Y = |X|$ und X nach Satz 5.2(i) symmetrisch verteilt ist, gilt

$$\mathbf{P}(X > t) = \frac{\mathbf{P}(|X| > t)}{2} \sim \frac{C_+}{2} t^{-\kappa}, \quad t \rightarrow \infty,$$

und damit ergibt sich die Behauptung. □

Kapitel 6

Tailindex beim AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen

6.1 Mögliche Verteilungen für die Noise-Variable

Die Auswahl der möglichen Verteilungen für die Noise-Variable ε im Modell (5.1) wurde durch die Bedingungen (5.3) sowie **(D1)** - **(D3)** verkleinert. Auf den ersten Blick scheint es schwierig, Verteilungen zu finden, die die sehr technischen Bedingungen **(D2)** und **(D3)** erfüllen. Wir zeigen aber, daß einige wichtige Verteilungen, insbesondere die Normalverteilung, die Student-t-Verteilungen und die Laplace-Verteilung diese Voraussetzungen erfüllen.

Beispiel 6.1 (Normalverteilung $N(0, \sigma^2)$)

Lebesgue-Dichte: $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Voraussetzungen (5.3) sind offensichtlich erfüllt, ebenso wie die Bedingung **(D1)**.

Da die Exponentialfunktion stärker als jede Potenz anwächst für $x \rightarrow \infty$, ist die Bedingung **(D3)** für beliebige Konstanten $\eta > 0$ und $q \in (0, 1)$ erfüllt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) x^{(N+1+\eta+3q)/(1-q)} = 0, \quad N = \inf\{u \geq 0; \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u > 2)\}.$$

Es bleibt also lediglich die Bedingung **(D2)** nachzuweisen.

Wähle $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ (unabhängig von c), und sei $x > 0$, $c \geq 0$ und $t > x^q$.

$$\begin{aligned} p\left(\frac{x+c+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x+c+\gamma t)^2}{2\sigma^2(\beta+\lambda t^2)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x+\gamma t)^2}{2\sigma^2(\beta+\lambda t^2)} - \frac{c(x+\gamma t)}{\sigma^2(\beta+\lambda t^2)} - \frac{c^2}{2\sigma^2(\beta+\lambda t^2)}\right] \\ &= p\left(\frac{x+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right) \exp\left[-\frac{c}{\sigma^2} \left(\frac{x+\gamma t}{\beta+\lambda t^2} + \frac{c}{2(\beta+\lambda t^2)}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\geq p \left(\frac{x + \gamma t}{\sqrt{\beta + \lambda t^2}} \right) \exp \left[-\frac{c}{\sigma^2} \left(\frac{x}{\lambda x^{2q}} + \frac{|\gamma|}{\lambda x^q} + \frac{c}{2\lambda x^{2q}} \right) \right].$$

Wir wählen also

$$f_+(c, x) = \exp \left[\frac{c}{\sigma^2 \lambda} \left(x^{1-2q} + |\gamma| x^{-q} + \frac{c}{2} x^{-2q} \right) \right].$$

Dann gilt $f_+(c, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$, da $q \in (1/2, 1)$.

Analoges läßt sich für $p\left(\frac{x+c-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}}\right)$ zeigen, wobei $f_-(c, \cdot) = f_+(c, \cdot)$ gewählt wird.

Beispiel 6.2 (Student-t-Verteilung mit Freiheitsgrad $\nu > 2$)

$$\text{Lebesgue-Dichte: } p_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} =: C_\nu \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aus Johnson et al. [24, S.362 ff.] ist unter anderem bekannt, daß für eine Student-t-verteilte ZV ε mit ν Freiheitsgraden

$$\text{Var}(\varepsilon) = \frac{\nu}{\nu-2} < \infty \quad \text{für } \nu > 2 \quad \text{und}$$

$$\mathbf{E}(\varepsilon^r) < \infty \quad \text{für } 0 \leq r < \nu \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\varepsilon^r) = \infty \quad \text{für } r \geq \nu. \quad (6.1)$$

Die Voraussetzungen (5.3) und **(D1)** sind also erfüllt und wir müssen die Voraussetzungen **(D2)** und **(D3)** überprüfen.

Wir zeigen zunächst die Bedingung **(D2)**.

Sei $q \in (0, 1)$ beliebig (unabhängig von c), $c \geq 0$, $x > 0$ und $t > x^q$.

$$\begin{aligned} p_\nu \left(\frac{x + c + \gamma t}{\sqrt{\beta + \lambda t^2}} \right) &= C_\nu \left(1 + \frac{(x + c + \gamma t)^2}{\nu(\beta + \lambda t^2)} \right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \\ &= C_\nu \left(\underbrace{\left(\frac{x + \gamma t}{x + c + \gamma t} \right)^2}_{\leq 1} + \frac{(x + \gamma t)^2}{\nu(\beta + \lambda t^2)} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{x + c + \gamma t}{x + \gamma t} \right)^{-(\nu+1)} \\ &\geq p_\nu \left(\frac{x + \gamma t}{\sqrt{\beta + \lambda t^2}} \right) \left(1 + \frac{c}{x + \gamma t} \right)^{-(\nu+1)} \\ &\stackrel{t > x^q}{\geq} p_\nu \left(\frac{x + \gamma t}{\sqrt{\beta + \lambda t^2}} \right) \left(1 + \frac{c}{x + \gamma x^q} \right)^{-(\nu+1)}. \end{aligned}$$

Dann gilt $f_+(c, x) := \left(1 + \frac{c}{x + \gamma x^q} \right)^{-(\nu+1)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$.

$$\begin{aligned}
 p_\nu \left(\frac{x+c-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}} \right) &= C_\nu \left(1 + \frac{(x+c-\gamma t)^2}{\nu(\beta+\lambda t^2)} \right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \\
 &= C_\nu \left(\underbrace{\left(\frac{x-\gamma t}{x+c-\gamma t} \right)^2}_{\leq 1} + \frac{(x-\gamma t)^2}{\nu(\beta+\lambda t^2)} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(\frac{x+c-\gamma t}{x-\gamma t} \right)^{-(\nu+1)} \\
 &\geq p_\nu \left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}} \right) \left(1 + \frac{c}{x-\gamma t} \right)^{-(\nu+1)} \\
 &\stackrel{t > x^q}{\geq} p_\nu \left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}} \right) \left(1 + \frac{c}{x-\gamma x^q} \right)^{-(\nu+1)}.
 \end{aligned}$$

Dann gilt $f_-(c, x) := \left(1 + \frac{c}{x-\gamma x^q} \right)^{-(\nu+1)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$.

Nun zeigen wir die Bedingung **(D3)**.

Da $\mathbf{E}(|\varepsilon|^\nu) = \infty$ nach Eigenschaft (6.1) für p_ν -verteiltes ε und $N = \inf\{u \geq 0; \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u)\}$, ist $\nu < N$, und es existieren Konstanten $\eta > 0$ und $q \in (0, 1)$ (keine Beschränkung aus **(D2)**), so daß

$$\nu > N + \eta + q(3 + \nu + 1) = N + \eta + q(\nu + 1) + 3q. \quad (6.2)$$

Für $x \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\begin{aligned}
 p_\nu(x) &\sim C_\nu x^{-(\nu+1)}, \\
 p_\nu(x) x^{(1+N+\eta+3q)/(1+q)} &\sim C_\nu x^{(1+N+\eta+3q+(q+1)(\nu+1))/(1+q)} \\
 &\sim C_\nu x^{(N+\eta+3q+q(\nu+1)-\nu)/(1+q)}.
 \end{aligned}$$

Wegen (6.2) ist der Exponent strikt negativ und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_\nu(x) x^{(1+N+\eta+3q)/(1+q)} = 0.$$

Beispiel 6.3 (Laplace-Verteilung)

Lebesgue-Dichte: $p_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$

Wie für die Normalverteilung sind die Bedingungen (5.3), **(D1)** und **(D3)** problemlos nachzuprüfen.

Wir beweisen hier lediglich die Bedingung **(D2)**.

Sei $q \in (0, 1)$ beliebig, $c \geq 0$, $x > 0$ und $t > x^q$.

$$\begin{aligned}
 p_\theta \left(\frac{x+c-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}} \right) &= \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{-|x+c-\gamma t|}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{-x-c+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right), & x+c-\gamma t \geq 0 \\ \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{x+c-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right), & x+c-\gamma t < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{-x+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right), & x+c-\gamma t \geq 0 \\ \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{c}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right), & x+c-\gamma t < 0 \end{cases} \\
 &\geq \begin{cases} \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{-x+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\lambda x^{2q}\theta}} \right), & x-\gamma t \geq 0 \\ \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{-|x-\gamma t|}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\lambda x^{2q}\theta}} \right), & x+c-\gamma t \geq 0 > x-\gamma t \\ \frac{1}{2\theta} \exp \left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\lambda x^{2q}\theta}} \right), & x+c+\gamma t < 0 \end{cases} \\
 &= p_\theta \left(\frac{x-\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2\theta}} \right) \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\lambda x^{2q}\theta}} \right).
 \end{aligned}$$

Also gilt $f_-(c, x) := \exp \left(\frac{-c}{\sqrt{\lambda x^{2q}}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$.

Analoges läßt sich für $p_\theta \left(\frac{x+c+\gamma t}{\sqrt{\beta+\lambda t^2}} \right)$ zeigen, wobei $f_+(c, \cdot) := f_-(c, \cdot)$ ist.

6.2 Tailindex und Stationaritätsbereich bei verschiedenen Noise-Variablen

In diesem Abschnitt gehen wir ganz analog wie in dem Abschnitt 4.2 für den GARCH(1,1)-Prozeß vor. Beim Vergleich der beiden Modelle scheinen die Parameter α bzw. β im GARCH(1,1)-Prozeß ähnliche Bedeutung wie die Parameter λ und γ im AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen zu besitzen. Betrachten wir die für den Stationaritätsbereich und den Tailindex entscheidenden Integralgleichungen, so werden die Parameter α und λ im Erwartungswert mit den entsprechenden Noise-Variablen multipliziert, während die Parameter β und γ als additive Konstanten in die Erwartungswerte eingehen. Die Beschreibung der Verfahren zur Bestimmung des Stationaritätsbereichs und des Tailindexes kann fast wortwörtlich aus Abschnitt 4.1 übernommen werden. Mit Hilfe der Integralgleichung

$$\mathbf{E}(\ln |\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|) = 0 \tag{6.3}$$

bestimmen wir den Bereich für die Modellparameter, so daß der AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen eine stationäre Grenzverteilung besitzt. Zur numerischen Bestimmung des Parameterbereichs benutzen wir Maple-Programme wie sie in Anhang A1 abgedruckt sind. Dabei

erhalten wir die Bereichsgrenzen für die Modellparameter, für die eine stationäre Lösung existiert, wie beim GARCH(1,1)-Prozeß, bis auf eine Genauigkeit von 10^{-4} und geben sie in den Tabellen bis auf zwei Stellen nach dem Komma an.

Zur Bestimmung des Tailindex benötigen wir die Gleichung (5.12),

$$\mathbf{E} \left(|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^\kappa \right) = 1.$$

Analog zum GARCH(1,1)-Prozeß berechnen wir mit Maple- und S-Plus-Programmen die Indizes, wobei auch die gleichen Schwierigkeiten auftreten, die wir auch in Kapitel 4.1 beschrieben haben. Für größere Werte des Tailindex können also Ungenauigkeiten von ± 0.02 vorkommen, während bei Werten ≤ 2 die angegebenen Werte relativ zuverlässig bis auf zwei Stellen nach dem Komma angegeben werden können. Für eine genauere Verfahrensbeschreibung verweisen wir auf den Abschnitt 4.1 dieser Diplomarbeit.

6.2.1 Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden

Wir beginnen wieder mit einer Student-t-verteiltern Noise-Variablen. Wie in Kapitel 4 beim GARCH(1,1)-Prozeß, studieren wir zunächst den Parameterbereich für den eine stationäre Lösung existiert, um dann deren Tailindex zu bestimmen. Eine Interpretation der angegebenen Werte haben wir bereits ausführlich im Abschnitt 4.2 gegeben. Wir werden uns deshalb auf in den Tabellen auftretende Besonderheiten für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen und Vergleiche mit den Tabellen für den GARCH(1,1)-Prozeß beschränken.

Tabelle 6.1: Numerisch ermittelter Bereich der λ -Werte, abhängig von $|\gamma|$, für die Stationarität vorliegt.

$ \gamma =$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.1	1.16
$\lambda \in$	(0,2.46]	(0,2.42]	(0,2.30]	(0,2.09]	(0,1.77]	(0,1.31]	[0.12,0.96]	[0.34,0.59]

Die Tabelle 6.1 gibt für festes γ die möglichen Werte von λ an, für die eine stationäre Lösung existiert. Dabei fällt im Vergleich zu den Tabellen für den GARCH(1,1)-Prozeß auf, daß hier auch γ -Werte möglich sind, die größer als 1 sind. Wenn wir die für den Stationaritätsbereich entscheidenden Integralgleichungen (4.1) und (6.3) vergleichen, dann ergibt sich aus

$$|\gamma + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^2 = \gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\lambda}\varepsilon + \lambda\varepsilon^2, \tag{6.4}$$

daß der Term $2\gamma\sqrt{\lambda}\varepsilon$ den Unterschied zwischen den beiden Gleichungen ausmacht. Während der Inhalt des Betrages bei (4.1) für alle Realisierungen von ε nichtnegativ ist, kann der Inhalt des Betrages bei (6.3) auch negative Werte annehmen. Aus diesem Grunde existieren bis zu einer gewissen Grenze auch für γ -Werte größer als 1 immer noch λ -Werte, so daß Stationarität für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen vorliegt. Allerdings muß der Einfluß der Noise-Variablen im Erwartungswert von Gleichung (6.3) ein gewisses Mindestmaß erreichen, um den

Erwartungswert auf unter 0 drücken zu können. Deshalb ist der Erwartungswert für sehr kleine λ -Werte noch größer als 0 (es existiert keine stationäre Verteilung), während er für größeres λ auf unter 0 fällt. Für $\gamma = 1.1$ ist dies z.B. im Bereich $\lambda \in [0.12, 0.96]$ der Fall. Bei größeren λ -Werten überwiegt dann wieder der Einfluß der positiven Terme in (6.4) so sehr, daß der Erwartungswert größer als 0 ist, und damit keine stationäre Lösung existiert.

Tabelle 6.2: Numerisch ermitteltes Supremum für $|\gamma|$, abhängig von λ , so daß Stationarität vorliegt.

$\lambda =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$ \gamma <$	1.09	1.13	1.15	1.16	1.16	1.15	1.14	1.13	1.11
$\lambda =$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.46
$ \gamma <$	1.09	1.03	0.96	0.88	0.78	0.66	0.50	0.25	0.01

Die Tabelle 6.2 stellt das Spiegelbild von Tabelle 6.1 dar. Erhalten wir z.B. in der Tabelle 6.1 für $|\gamma| = 1$ einen maximalen λ -Wert von 1.31, so muß für $\lambda = 1.4$ in Tabelle 6.2 der maximal mögliche Wert von γ kleiner als 1 sein. Auf diese Weise konnten gute Startwerte für die Maple-Programme zur Bestimmung der Werte in Tabelle 6.2 ermittelt werden. Im Vergleich mit den Tabellen 4.1 und 4.2, die den Parameterbereich beim GARCH(1,1)-Prozeß mit gleicher Verteilung der Noise-Variablen festlegen, erkennen wir einen deutlich größeren Bereich für den Fall des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen, wobei wir allerdings betonen, daß die Bedeutung der Parameter nicht eins zu eins übereinstimmt.

In der Tabelle 6.3 sind die Tailindizes für Parameterpaare (γ, λ) eingetragen, für die eine stationäre Verteilung des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen existiert. Dabei kennzeichnet " - " wiederum ein Parameterpaar, für das keine stationäre Verteilung existiert.

Tabelle 6.3: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von $|\gamma|$ und λ .

		$\lambda =$								
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.2	2.4
$ \gamma =$	0.0	2.43	1.80	1.35	1.02	0.78	0.45	0.23	0.08	0.01
	0.2	2.41	1.76	1.31	0.99	0.75	0.43	0.21	0.06	0.01
	0.4	2.31	1.62	1.18	0.88	0.66	0.36	0.16	0.02	-
	0.6	2.06	1.35	0.96	0.70	0.51	0.26	0.09	-	-
	0.8	1.50	0.93	0.64	0.45	0.32	0.12	-	-	-
	1.0	0.59	0.41	0.28	0.18	0.10	-	-	-	-
	1.1	0.13	0.15	0.10	0.04	-	-	-	-	-

Für die numerisch ermittelten Tailindizes in Tabelle 6.3 erkennen wir ähnliche Monotonieei-

genschaften, wie in den entsprechenden Tabellen für den GARCH(1,1)-Prozeß. Außerdem sind aufgrund der Student-t-Verteilung wieder keine Tailindexwerte ≥ 3 möglich. Einige dieser aus der Tabelle ersichtlichen Eigenschaften haben wir in Abschnitt 6.3 nachgewiesen. Ungewöhnlich in Tabelle 6.3 ist das Verhalten der Tailindexwerte für $\gamma > 1$. Bei zunehmenden λ wächst in diesem Bereich augenscheinlich der Tailindex zunächst an, um dann wieder gegen 0 abzufallen. Diese Anomalie hängt mit dem Erwartungswert in der Gleichung (6.3) zusammen. Wie bereits bei der Diskussion des Parameterbereichs besprochen, kann der Inhalt des Betrages im Erwartungswert $\mathbf{E}(\ln|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|)$ negative Werte annehmen, im Gegensatz zum entsprechenden Erwartungswert für den GARCH(1,1)-Prozesses. Im Vergleich zu Tabelle 4.1 fällt zudem auf, daß die Werte für $\gamma = 0$ (Tab. 6.3) und $\beta = 0$ (Tab. 4.3) übereinstimmen. Dies muß natürlich auch der Fall sein, da dann in beiden Modellen der Spezialfall des ARCH(1)-Prozesses eintritt.

6.2.2 Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden

Als nächste Verteilung für die Noise-Variablen benutzen wir die Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden und der Lebesgue-Dichte $p(x) = \frac{8}{3\pi\sqrt{5}(1+x^2/5)^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Wir beobachten, wie sich Stationaritätsbereich und Tailindexwerte gegenüber der Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden geändert haben.

Tabelle 6.4: Numerisch ermittelter Wertebereich für λ , abhängig von $|\gamma|$, damit Stationarität vorliegt.

$ \gamma =$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.1	1.2
$\lambda \in$	(0,2.87]	(0,2.83]	(0,2.71]	(0,2.50]	(0,2.18]	(0,1.72]	[0.13,1.40]	[0.44,0.85]

Tabelle 6.5: Numerisch ermitteltes Supremum für $|\gamma|$, abhängig von λ , so daß Stationarität vorliegt.

$\lambda =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$ \gamma <$	1.08	1.14	1.17	1.19	1.20	1.21	1.21	1.20	1.19	1.18
$\lambda =$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	2.87
$ \gamma <$	1.14	1.10	1.04	0.97	0.89	0.79	0.67	0.52	0.27	0.09

Wenn wir die Tabellen 6.4 und 6.5 betrachten, sehen wir zunächst, daß sich insgesamt der Parameterbereich, für den stationäre Verteilungen existieren, vergrößert hat. Dieses Phänomen ist schon beim GARCH(1,1)-Prozeß aufgetreten und läßt sich wieder begründen mit geringeren Wahrscheinlichkeiten in den Verteilungsenden bei der Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden, gegenüber der mit 3 Freiheitsgraden. Allerdings fällt uns auf, daß der Parameterbereich den wir aus den Tabellen 6.4 und 6.5 ablesen, nicht vollständig den Parameterbereich für Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden (Tab. 6.1 und 6.2) beinhaltet. Bei Werten von $\gamma > 1$, haben

sich die möglichen λ -Werte (auf der Zahlenachse) nach rechts verschoben. Da die Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden weniger Gewicht in den Tails hat, ist die Bedingung (5.8) also für größere λ -Werte erfüllt.

Tabelle 6.6: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von $|\gamma|$ und λ .

		$\lambda =$									
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	2.8
$ \gamma =$	0.0	4.00	2.76	2.00	1.50	1.14	0.69	0.41	0.21	0.07	0.02
	0.2	3.93	2.68	1.92	1.44	1.10	0.66	0.39	0.20	0.06	0.01
	0.4	3.70	2.41	1.70	1.27	0.97	0.58	0.32	0.15	0.03	-
	0.6	3.14	1.93	1.36	1.01	0.77	0.44	0.23	0.08	-	-
	0.8	2.10	1.29	0.92	0.68	0.51	0.28	0.11	-	-	-
	1.0	0.78	0.60	0.45	0.34	0.24	0.09	-	-	-	-
	1.1	0.19	0.27	0.22	0.16	0.10	<0.01	-	-	-	-
	1.2	-	-	0.02	0.01	-	-	-	-	-	-

Aus der Tabelle 6.6 und dem Vergleich mit Tabelle 6.3 ist wieder ein Anstieg der Tailindexwerte zu beobachten, wie wir in schon beim GARCH(1,1)-Prozeß erkannten. Der Tailindexwert für das Parameterpaar $(\gamma, \lambda) = (0.4, 0.6)$ hat sich beispielsweise von 1.18 auf 1.70 erhöht.

6.2.3 Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden

Nun besitzt die Noise-Variable die Dichte $p(x) = \frac{128}{105\pi(1+x^2/9)^5}$, $x \in \mathbb{R}$. Wieder vergleichen wir die Tabellenwerte mit denen in den letzten Teilabschnitten.

Tabelle 6.7: Numerisch ermittelter Wertebereich für λ , abhängig von $|\gamma|$, damit Stationarität vorliegt.

$ \gamma =$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\lambda \in$	(0,3.17]	(0,3.13]	(0,3.01]	(0,2.80]	(0,2.48]	(0,2.02]
$ \gamma =$	1.1	1.2	1.24			
$\lambda \in$	[0.14,1.71]	[0.39,1.25]	[0.69,0.85]			

Im Vergleich zu den Tabellen 4.1 und 4.2 bzw. den Tabellen 4.4 und 4.5 für die Student-t-Verteilungen mit 3 bzw. 5 Freiheitsgraden hat sich der Parameterbereich, für den eine stationäre Verteilung des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen existiert, weiter ausgeweitet. Auch für den Bereich $\gamma > 1$ hat sich die Entwicklung fortgesetzt, d.h. die möglichen λ -Werte

Tabelle 6.8: Numerisch ermitteltes Supremum für $|\gamma|$, abhängig von λ , so daß Stationarität vorliegt.

$\lambda =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2
$ \gamma <$	1.07	1.13	1.17	1.20	1.22	1.23	1.24	1.24	1.23	1.23	1.20
$\lambda =$	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.17	
$ \gamma <$	1.17	1.12	1.07	1.01	0.93	0.84	0.73	0.60	0.41	0.06	

haben sich weiter nach rechts verlagert. Für den Wert $\gamma = 1.1$ hat sich inzwischen der Bereich der möglichen λ -Werte von $[0.12, 0.96]$ bei der Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden auf $[0.14, 1.71]$ verlagert, vor allem aber auch vergrößert.

 Tabelle 6.9: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von $|\gamma|$ und λ .

		$\lambda =$										
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.1
$ \gamma =$	0.0	6.21	3.82	2.63	1.93	1.47	0.90	0.56	0.33	0.16	0.04	0.01
	0.2	5.99	3.64	2.52	1.85	1.41	0.86	0.53	0.31	0.15	0.03	0.01
	0.4	5.29	3.14	2.17	1.60	1.23	0.75	0.46	0.25	0.11	<0.01	-
	0.6	4.09	2.40	1.68	1.26	0.97	0.59	0.34	0.17	0.05	-	-
	0.8	2.52	1.55	1.13	0.85	0.66	0.39	0.21	0.07	-	-	-
	1.0	0.88	0.71	0.57	0.44	0.34	0.18	0.05	-	-	-	-
	1.1	0.19	0.34	0.31	0.25	0.19	0.07	-	-	-	-	-
	1.2	-	0.01	0.07	0.07	0.04	-	-	-	-	-	-

Die Tailindexwerte in der Tabelle 6.9 haben sich wie erwartet gegenüber den Tabellen 6.3 und 6.6 im allgemeinen erhöht. Nur im Bereich $\gamma > 1$ zeigt sich die bereits im letzten Teilabschnitt beobachtete Anomalie.

6.2.4 Standardnormalverteilung

Falls wir den Freiheitsgrad der Student-t-Verteilung gegen ∞ gehen lassen, erhalten wir wieder den Fall einer standardnormalverteilten Noise-Variablen. Dabei werden wir wieder den Vergleich mit dem GARCH(1,1)-Prozeß anstellen. Wie bei diesem, erwarten wir auch hier, daß der Parameterbereich bei dieser Verteilung seine im Vergleich größte Ausdehnung erlangt und die Tailindizes die größten Werte annimmt.

Aus den Tabellen 6.10 und 6.11 erkennen wir, daß der Parameterbereich tatsächlich im Vergleich zu den Student-t-Verteilungen hier wieder am größten ist. Je mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in

Tabelle 6.10: Numerisch ermittelter Wertebereich für λ , abhängig von $|\gamma|$, damit Stationarität vorliegt.

$ \gamma =$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\lambda \in$	(0,3.56]	(0,3.52]	(0,3.39]	(0,3.18]	(0,2.87]	(0,2.42]
$ \gamma =$	1.1	1.2	1.27			
$\lambda \in$	[0.17,2.11]	[0.38,1.69]	[0.75,1.19]			

 Tabelle 6.11: Numerisch ermitteltes Supremum für $|\gamma|$, abhängig von λ , so daß Stationarität vorliegt.

$\lambda =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4
$ \gamma <$	1.05	1.11	1.16	1.20	1.23	1.25	1.26	1.27	1.28	1.28	1.26	1.24
$\lambda =$	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.56	
$ \gamma <$	1.21	1.17	1.13	1.07	1.00	0.92	0.83	0.72	0.59	0.39	0.04	

den Verteilungsenden der Noise-Variablen vorhanden ist, umso kleiner ist also der Bereich der Parameter γ und λ , für die eine stationäre Verteilung existiert. Die Verschiebung der möglichen λ -Werte nach rechts im Bereich $\gamma > 1$, die wir für die Student-t-Verteilungen mit wachsendem Freiheitsgrad feststellten, wird im Fall der Normalverteilung, also für den Limes $\nu \rightarrow \infty$ der Student-t-Verteilungen mit ν Freiheitsgraden, augenscheinlich durch die insgesamt Vergrößerung des Parameterbereichs überdeckt. Im Vergleich zum GARCH(1,1)-Fall fällt auf, daß der Bereich der möglichen Modellparameter wesentlich größer ist, insbesondere in Richtung des Parameters γ . Dies hängt mit dem für die Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden beschriebenen Unterschied zwischen den Integralgleichungen (4.1) und (6.3) zusammen.

Auch die Tailindexwerte nehmen für die Normalverteilung ihre vergleichsweise größten Werte an, wie aus Tabelle 6.12 herauslesen können. Je mehr Momente für die Verteilung der Noise-Variablen existieren, je weniger Masse in den Tails liegt, umso größere Tailindexwerte erhalten wir. Betrachten wir als Beispiel das Parameterpaar $(\gamma, \lambda) = (0.2, 0.4)$, so ist der zugehörige Tailindex von 1.76 (Tab. 6.3) über 2.68 (Tab. 6.6) und 3.64 (Tab. 6.9) bis auf 5.50 in der Tabelle 6.12 angewachsen. Je mehr Momente die Noise-Variable besitzt, desto mehr Moment der stationären Verteilung des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen existieren. Eine Ausnahme bildet der Bereich mit $\gamma > 1$, dessen Besonderheit wir bereits bei der Diskussion des Parameterbereichs behandelt haben. Dieser Parameterbereich ist in der Praxis auch nicht sonderlich relevant, da die Tailindexwerte allesamt unter 1 liegen, während sie bei Finanzdaten zwischen 2 und 4 geschätzt werden.

Vergleichen wir die Tabelle 6.12 mit der entsprechenden für den GARCH(1,1)-Prozeß, so fällt

Tabelle 6.12: Numerisch ermittelter Tailindex in Abhängigkeit von $|\gamma|$ und λ .

		$\lambda =$											
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.5
$ \gamma =$	0.0	12.89	6.09	3.82	2.68	2.00	1.21	0.77	0.49	0.29	0.14	0.03	0.01
	0.2	11.00	5.50	3.54	2.52	1.89	1.16	0.74	0.47	0.28	0.13	0.02	<0.01
	0.4	8.14	4.30	2.88	2.11	1.61	1.00	0.64	0.40	0.23	0.10	-	-
	0.6	5.45	3.03	2.12	1.60	1.24	0.79	0.50	0.30	0.15	0.04	-	-
	0.8	3.02	1.85	1.37	1.07	0.85	0.55	0.33	0.18	0.06	-	-	-
	1.0	0.96	0.83	0.70	0.57	0.47	0.29	0.15	0.04	-	-	-	-
	1.1	0.12	0.39	0.40	0.35	0.29	0.17	0.07	-	-	-	-	-
	1.2	-	0.01	0.12	0.14	0.12	0.05	-	-	-	-	-	-

neben dem viel größeren Parameterbereich, für den sich der Tailindex bestimmen läßt, auch das für wachsende Parameterwerte langsamere Abfallen des Tailindex beim AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen auf. Die Tailindexwerte reagieren für diesen Prozeß also weniger sensitiv, wie im Falle des GARCH(1.1)-Prozesses.

6.2.5 Laplace-Verteilung

Abschließend behandeln wir noch den Fall einer Noise-ZV mit Lebesgue-Dichte $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, um den Vergleich mit einem anderen Verteilungstyp, der weniger Masse um den Wert 0 besitzt, anstellen zu können. Dabei interessiert vor allem, ob der Einfluß des Tails gegenüber der restlichen Verteilung dermaßen überwiegt, daß allein das Tailverhalten der Noise-ZV über den Tailindex des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen entscheidet.

 Tabelle 6.13: Numerisch ermittelter Wertebereich für λ , abhängig von $|\gamma|$, damit Stationarität vorliegt.

$ \gamma =$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\lambda \in$	(0,3.17]	(0,3.04]	(0,2.76]	(0,2.38]	(0,1.89]	(0,1.29]
$ \gamma =$	1.1	1.15	1.168			
$\lambda \in$	[0.11,0.90]	[0.22,0.63]	[0.37,0.43]			

In den Tabellen 6.13 und 6.14, die den Parameterbereich für stationäre Lösungen angeben, fällt auf, daß dieser Bereich für die Laplace-Verteilung kleiner als der für die Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden ist, obwohl die Tails der Laplace-Verteilung, im Gegensatz zur Student-t-

Tabelle 6.14: Numerisch ermitteltes Supremum für $|\gamma|$, abhängig von λ , so daß Stationarität vorliegt.

$\lambda =$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2
$ \gamma <$	1.10	1.14	1.16	1.16	1.16	1.15	1.13	1.12	1.10	1.07	1.02
$\lambda =$	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.172	
$ \gamma <$	0.96	0.90	0.83	0.76	0.67	0.59	0.49	0.38	0.24	< 0.01	

Verteilung, exponentiell abfallen. Beim Parameterbereich entscheiden also nicht nur die Tails der Verteilung, sondern die gesamte Verteilung. Da die Laplace-Verteilung im Vergleich zu Student-t-Verteilungen weniger Masse um 0 besitzt, ist der Parameterbereich kleiner als bei einer Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden.

Tabelle 6.15: Tailindex in Abhängigkeit von $|\gamma|$ und λ .

		$\lambda =$										
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.1
$ \gamma =$	0.0	4.05	2.41	1.69	1.27	1.00	0.63	0.40	0.24	0.12	0.03	<0.01
	0.2	3.91	2.32	1.63	1.22	0.95	0.60	0.37	0.21	0.10	<0.01	-
	0.4	3.51	2.08	1.44	1.07	0.82	0.49	0.29	0.14	0.05	-	-
	0.6	2.83	1.66	1.14	0.83	0.62	0.34	0.16	0.06	-	-	-
	0.8	1.85	1.09	0.74	0.52	0.36	0.14	0.05	-	-	-	-
	1.0	0.69	0.45	0.30	0.18	0.10	-	-	-	-	-	-
	1.15	-	0.05	0.05	-	-	-	-	-	-	-	-

Auch die Tailindexwerte (Tabelle 6.15) bei einer Laplace-Verteilung sind kleiner als bei einer Student-t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden und bei den meisten Tabellenwerten sogar kleiner als bei einer Student-t-Verteilung mit 5 Freiheitsgraden. Dies liegt wie beim Stationaritätsbereich an der geringeren Masse um 0 bei der Laplace-Verteilung. Allerdings fällt beim Vergleich der Tabellen 6.6 und 6.15 auf, daß der Tailindex bei der Laplace-Verteilung für kleine λ -Werte stärker ansteigt. Dies liegt daran, daß der Tailindex bei Student-t-Verteilungen durch deren Freiheitsgrad beschränkt ist, während er bei der Laplace-Verteilung, wie bei der Normalverteilung, für $\lambda \rightarrow 0$ gegen unendlich strebt (vgl. Abschnitt 6.3).

Insgesamt folgt damit, daß der Stationaritätsbereich und die Tailindexwerte nicht nur von den Verteilungsschwänzen der Noise-Variablen abhängen, sondern von der gesamten Verteilung. Bei ähnlichen Verteilungen, wie den Student-t-Verteilungen und der Normalverteilung, überwiegt dann allerdings das Verhalten der Tails.

Die Abbildung 6.1 zeigt einen Vergleich von AR(1)-Prozessen mit ARCH(1)-Innovationen, wobei die Parameter γ und λ überall gleich, die Verteilungen der Noise-Variablen allerdings unter-

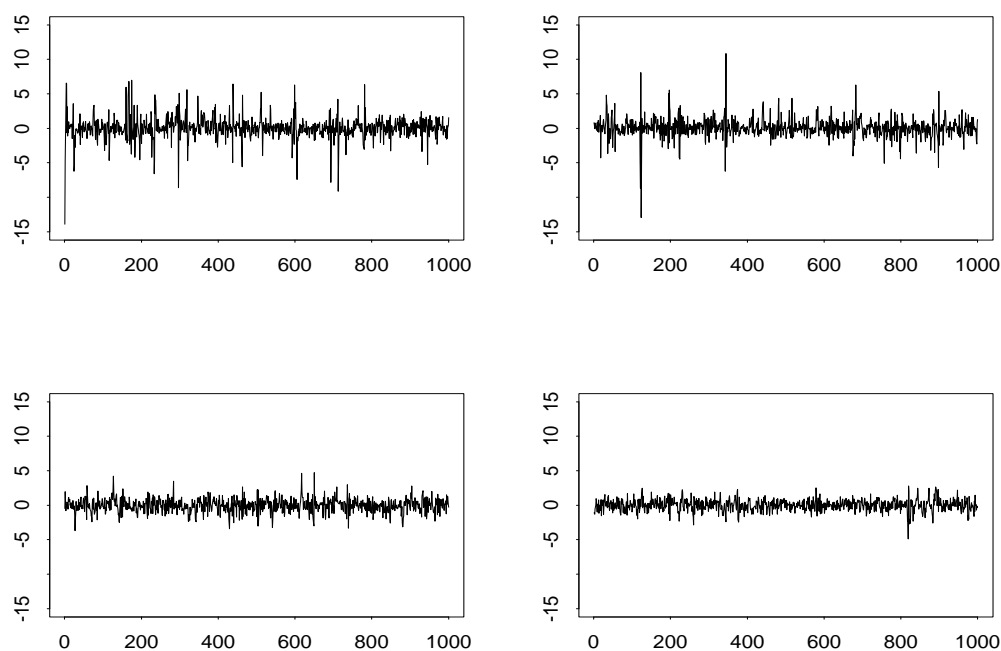


Abbildung 6.1: Jeweils 1000 simulierte Daten von AR(1)-Prozessen mit ARCH(1)-Innovationen $X_n = 0.2X_{n-1} + \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = 0.4 + 0.4X_{n-1}^2$ mit unterschiedlichen Noise-Variablen. Die Verteilungen der Noise-Variablen sind die Student-t-Verteilung mit 3 (links oben), 5 (rechts oben) und 9 Freiheitsgraden (links unten) bzw. die Standardnormalverteilung.

schiedlich gewählt wurden. Wie in Abbildung 4.1 für GARCH(1,1)-Prozesse zeigt sich, daß die Ausschläge umso extremer sind, je mehr Masse in den Tails der Noise-Verteilung liegt.

6.3 Monotonieeigenschaften für den Tailindex

Für die Tabellen im letzten Abschnitt können wir einige Eigenschaften beweisen. Dazu sei wiederum ε eine ZV, die die Bedingungen (5.3) sowie **(D1)** - **(D3)** erfüllt. Zudem sei die Dichte p der Noise-Variablen ε differenzierbar. Diese Bedingung ist für alle in den Tabellen verwendeten Verteilungen offensichtlich erfüllt.

Unter $\kappa(\gamma, \lambda)$ verstehen wir im folgenden die nach Proposition 5.1 eindeutige Lösung der Gleichung (5.12) für ein Parameterpaar (γ, λ) .

Satz 6.4

Für festes $\lambda > 0$ und $|\gamma|$ wachsend, ist der Tailindex $\kappa(\gamma, \lambda)$ streng monoton fallend.

Beweis:

Wir nehmen $\lambda > 0$ fest an.

O.E. sei $\gamma \geq 0$, denn nach Gleichung (5.11) ist $h(\gamma, \lambda, u) = h(-\gamma, \lambda, u)$.

Außerdem wählen wir $u \in (0, N)$, wobei N die Konstante aus der Bedingung **(D3)** bezeichnet. Dabei stellen wir fest, daß $\kappa(\gamma, \lambda) < N$ ist für beliebiges γ gelten muß, damit dieser Tailindex die Gleichung (5.12) erfüllen kann, denn $\mathbf{E}(X^M) = \infty$ für $M > N$ und $\mathbf{E}(X^\kappa) = \infty$ nach den Gleichungen (5.5) und (2.4). Der für die Aussage des Satzes relevante Wertebereich ist also abgedeckt.

Für den Beweis benötigen wir den Differentiationssatz 2.14, angewandt auf $h(\cdot, \lambda, u)$.

$$\begin{aligned} h(\gamma, \lambda, u) &= \mathbf{E} \left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u \right) = \int_{\mathbb{R}} |\gamma + \sqrt{\lambda}x|^u p(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |y|^u p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \frac{dy}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{Substitution } y := \gamma + \sqrt{\lambda}x. \end{aligned}$$

- $|\gamma + \sqrt{\lambda}x|^u p(x)$ ist für alle $u \in [0, N)$ Lebesgue-integrierbar.
- $\frac{d}{d\gamma} \left(|y|^u p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} |y|^u \frac{dp(t)}{dt} \Big|_{t=\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}}}$ existiert, da p differenzierbar ist.
- Mittels partieller Integration läßt sich zeigen, daß

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\gamma} \left(|y|^u p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \right) \right| dy < \infty,$$

und damit Lebesgue-integrierbar ist.

Für die erste Ableitung nach γ ergibt sich danach

$$\frac{d}{d\gamma} h(\gamma, \lambda, u) = \int_0^\infty uy^{u-1} \left[p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) - p \left(\frac{y+\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] dy.$$

Da die Lebesgue-Dichte p der Noise-ZV ε symmetrisch um 0 und für wachsendes $|x|$ monoton fallend ist (vergleiche Abbildung 6.2), ergibt sich für $y \in [0, \infty)$, wegen $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) &\geq p \left(\frac{y+\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad \text{und} \\ p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) &> p \left(\frac{y+\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \quad \text{für } y \in A \in \mathfrak{B} \text{ mit } \mathbf{P}(A) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Ableitung von h nach γ strikt positiv in $[0, \infty)$, d.h.

$$\frac{d}{d\gamma} h(\gamma, \lambda, u) = \int_0^\infty uy^{u-1} \left[p \left(\frac{y-\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) - p \left(\frac{y+\gamma}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] dy > 0.$$

Für $\gamma_1 > \gamma_2 \geq 0$ ergibt sich daraus

$$h(\gamma_1, \lambda, u) > h(\gamma_2, \lambda, u), \quad \lambda > 0, \quad u \in [0, N).$$

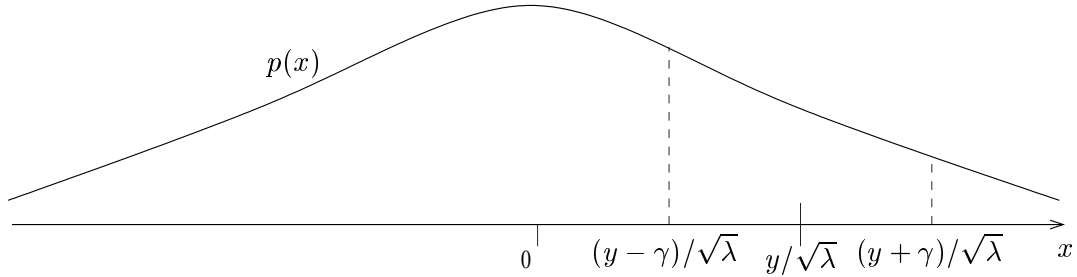


Abbildung 6.2: Qualitativer Graph der Dichtefunktion p .

Mittels Beweis durch Widerspruch ergibt sich nun die Behauptung.

Wir nehmen an, daß $\kappa(\gamma_1) \geq \kappa(\gamma_2)$ gilt, wobei $\kappa(\gamma_1), \kappa(\gamma_2) \leq N$ sein muß, da die Konstante N nur von λ abhängig ist, nicht aber von γ (vgl. Bedingung **(D3)**). Mit Proposition 5.1 und der Jensenschen Ungleichung erhalten wir

$$1 = h_{\gamma_2, \lambda}(\kappa(\gamma_2)) < h_{\gamma_1, \lambda}(\kappa(\gamma_2)) = \mathbf{E} \left[|\gamma_1 + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^{\kappa(\gamma_2)} \right] = \mathbf{E} \left[|\gamma_1 + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^{\kappa(\gamma_1) \frac{\kappa(\gamma_2)}{\kappa(\gamma_1)}} \right]$$

$$\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \left(\mathbf{E} \left[|\gamma_1 + \sqrt{\lambda} \varepsilon|^{\kappa(\gamma_1)} \right] \right)^{\frac{\kappa(\gamma_2)}{\kappa(\gamma_1)}} = (h_{\gamma_1, \lambda}(\kappa(\gamma_1)))^{\frac{\kappa(\gamma_2)}{\kappa(\gamma_1)}} = 1$$

und damit den gewünschten Widerspruch.

Also ist $\kappa(\gamma_1) < \kappa(\gamma_2)$ für $\gamma_1 > \gamma_2 \geq 0$. □

Satz 6.5

Für festes $\gamma \leq 1$ und für solche λ mit $\kappa(\gamma, \lambda) \geq 1$ ist der Tailindex $\kappa(\gamma, \lambda)$ streng monoton fallend für wachsendes λ .

Beweis:

Wegen (5.11) sei o.E. $\gamma \in [0, 1]$ und γ fest.

Zuerst behandeln wir den Fall, für den der Tailindex κ strikt größer als 1 ist. Wir müssen also zeigen, daß für λ_1 mit $\kappa(\gamma, \lambda) > 1$ und beliebiges $\lambda_2 > \lambda_1$ die Ungleichung $\kappa(\gamma, \lambda_2) < \kappa(\gamma, \lambda_1)$ gilt. Statt der Funktion h benutzen wir zunächst die Funktion \tilde{h} mit

$$\tilde{h}(\gamma, \mu, u) := \mathbf{E} \left(|\gamma + \mu \varepsilon|^u \right) = h(\gamma, \mu^2, u), \quad \mu > 0.$$

Dabei seien die Parameter μ_1 bzw. μ_2 als $\sqrt{\lambda_1}$ bzw. $\sqrt{\lambda_2}$ definiert.

Wir zeigen, daß für $\mu_2 > \mu_1 > 0$ und Tailindex $\kappa(\gamma, \mu_1^2) > 1$ die folgende Ungleichung gilt.

$$\tilde{h}(\gamma, \mu_1, u) = \mathbf{E} (|\gamma + \mu_1 \varepsilon|^u) < \mathbf{E} (|\gamma + \mu_2 \varepsilon|^u) = \tilde{h}(\gamma, \mu_2, u). \tag{6.5}$$

Diese Aussage zeigen wir, indem wir die Krümmung der Funktion $h(\gamma, \cdot, u)$, $u > 1$, bestimmen. Dazu benutzen wir den Differentiationssatz für parameterabhängige Integrale (Satz 2.14).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\mu} (|\gamma + \mu x|^u) p(x) \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |ux| |\gamma + \mu x|^{u-1} p(x) dx \\ &\leq \frac{u}{\mu} \int_{\mathbb{R}} |\gamma + \mu x|^{u-1} (|\gamma + \mu x| + \gamma) p(x) dx \\ &= \frac{u}{\mu} \tilde{h}(\gamma, \mu, u) + \frac{u\gamma}{\mu} \tilde{h}(\gamma, \mu, u-1) < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^2}{d\mu^2} (|\gamma + \mu x|^u p(x)) \right| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| ux \frac{d}{d\mu} (|\gamma + \sqrt{\lambda} x|^{u-1} \operatorname{sgn}(\gamma + \mu x)) \right| p(x) dx \\ &\leq \int_{-\gamma/\mu}^{\infty} u|x| \frac{d}{d\mu} ((\gamma + \mu x)^{u-1}) p(x) dx + \int_{-\infty}^{-\gamma/\mu} -ux \frac{d}{d\mu} ((-\gamma - \mu x)^{u-1}) p(x) dx \\ &= \int_{-\gamma/\mu}^{\infty} u(u-1)x^2 (\gamma + \mu x)^{u-2} p(x) dx + \int_{-\infty}^{-\gamma/\mu} u(u-1)x^2 (-\gamma - \mu x)^{u-2} p(x) dx \\ &\leq \frac{u(u-1)}{\mu^2} \int_{\mathbb{R}} |\gamma + \mu x|^{u-2} (|\gamma + \mu x|^2 + |2\mu\gamma x| + \gamma^2) p(x) dx \\ &= \frac{u(u-1)}{\mu^2} (\tilde{h}(\gamma, \mu, u) + \gamma^2 \tilde{h}(\gamma, \mu, u-2) + 2\gamma \tilde{h}(\gamma, \mu, u-1) + 2\gamma^2 \tilde{h}(\gamma, \mu, u-2)) \\ &< \infty, \quad \text{da } \tilde{h}(\gamma, \mu, u-2) < \infty \quad \text{für } 1 < u < T. \end{aligned}$$

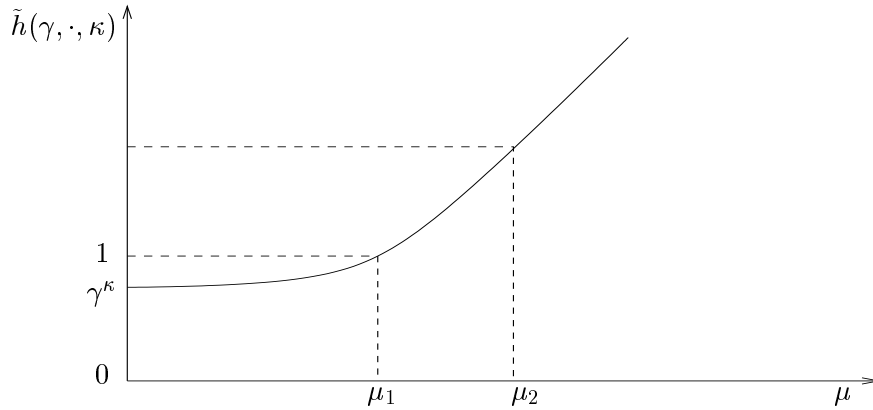
Damit ist die Vertauschung von Integration und Differentiation im Fall $u > 1$ erlaubt. Für $\kappa := \kappa(\gamma, \lambda_1) > 1$ ergibt die zweite Ableitung der Funktion $\tilde{h}(\gamma, \cdot, u)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\mu^2} \tilde{h}(\gamma, \mu, \kappa) &= \int_{\mathbb{R}} \kappa x \frac{d}{d\mu} (|\gamma + \mu x|^{\kappa-1} \operatorname{sgn}(\gamma + \mu x)) p(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\kappa(\kappa-1)x^2 |\gamma + \mu x|^{\kappa-2} + \kappa x |\gamma + \mu x|^{\kappa-1} 2\delta_{-\gamma/\mu}(x)) p(x) dx, \\ &\quad \text{wobei } \delta_{-\gamma/\mu} \text{ die Diracfunktion an der Stelle } -\gamma/\mu \text{ bezeichnet,} \\ &= \kappa(\kappa-1) \int_{\mathbb{R}} x^2 |\gamma + \mu x|^{\kappa-2} p(x) dx > 0, \quad \text{da } \operatorname{supp}(\varepsilon) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $\tilde{h}(\gamma, 0, \kappa) = \gamma^\kappa < 1$ und $\tilde{h}(\gamma, \mu_1, \kappa) = 1$, ist die Funktion $\tilde{h}(\gamma, \cdot, \kappa)$ streng monoton wachsend für $\mu > \mu_1$. Abbildung 6.3 zeigt einen möglichen Verlauf der Funktion $\tilde{h}(\gamma, \cdot, \kappa)$; für kleine μ kann die Funktion auch abfallend sein.

Damit ist die Ungleichung (6.5) erfüllt und daraus folgt auch

$$h(\gamma, \lambda_2, \kappa) = h(\gamma, \mu_2^2, \kappa) = \tilde{h}(\gamma, \mu_2, \kappa) > \tilde{h}(\gamma, \mu_1, \kappa) = h(\gamma, \mu_1^2, \kappa) = h(\gamma, \lambda_1, \kappa)$$


 Abbildung 6.3: Möglicher Verlauf der Funktion $\tilde{h}(\gamma, \cdot, \kappa)$.

und damit erhält man genau wie in Satz 6.4 durch Widerspruchsbeweis die Behauptung des Satzes für den Falle $\kappa > 1$.

Jetzt betrachten wir den Fall $\kappa := \kappa(\gamma, \lambda_1) = 1$ für fest gewähltes λ_1 . Wir müssen wieder zeigen, daß für beliebiges $\lambda_2 > \lambda_1$ die Ungleichung $\kappa(\gamma, \lambda_2) < \kappa(\gamma, \lambda_1)$ gilt. Dafür zeigen wir erst die Ungleichung (6.5), wobei μ_1 und μ_2 wie im obigen Fall definiert seien.

Für den Differentiationssatz 2.14 betrachten wir zunächst die erste Ableitung

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\mu_1} (|\gamma + \mu_1 x|) p(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}} |x \operatorname{sgn}(\gamma + \mu_1 x)| p(x) dx < \infty$$

Wir erhalten also

$$\frac{d}{d\mu} \tilde{h}(\gamma, \mu_1, \kappa) = \int_{-\gamma/\mu}^{\infty} x p(x) dx + \int_{-\infty}^{-\gamma/\mu} -x p(x) dx$$

und daraus ergibt sich für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\mu^2} \tilde{h}(\gamma, \mu, 1) &= \frac{d}{d\mu} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\gamma + \mu x) x p(x) dx \\ &= \frac{d}{d\mu} \int_{-\gamma/\mu}^{\infty} x p(x) dx + \frac{d}{d\mu} \int_{-\infty}^{-\gamma/\mu} -x p(x) dx \\ &= -\frac{\gamma}{\mu^2} \left(\frac{-\gamma}{\mu} \right) p\left(\frac{-\gamma}{\mu} \right) + \frac{\gamma}{\mu^2} \frac{\gamma}{\mu} p\left(\frac{-\gamma}{\mu} \right) \\ &= 2 \frac{\gamma^2}{\mu^3} p\left(\frac{\gamma}{\mu} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit liegt auch im Fall $\kappa = 1$ eine konvexe Funktion $\tilde{h}(\gamma, \cdot, \kappa)$ vor und wir können die Argumentation aus dem ersten Fall für $\kappa > 1$ übernehmen. \square

Satz 6.6

Sei $T := \inf\{u > 0; \mathbf{E}(|\sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) < \infty\}$ wie in Proposition 5.1. Für $|\gamma| < 1$ gilt $\kappa(\gamma, \lambda) < T$, $\lambda > 0$, und $\lim_{\lambda \downarrow 0} \kappa(\gamma, \lambda) = T$.

Beweis:

Wegen (5.11) sei o.E. $\gamma \in [0, 1)$ und γ sei fest gewählt.

Nach Definition von T muß der Tailindex $\kappa(\gamma, \lambda)$, als Lösung der Integralgleichung

$$h(\gamma, \lambda, u) = \mathbf{E}(|\alpha + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = 1,$$

kleiner als T sein.

Nach Satz 6.5 ist $\kappa(\gamma, \lambda)$ monoton wachsend für fallendes λ und $\kappa(\gamma, \lambda) \geq 1$. Wir müssen also nur noch $\lim_{\lambda \downarrow 0} \kappa(\gamma, \lambda) = T$ zeigen.

Aus den Voraussetzungen an die ZV ε (existierende Varianz, 5.3) und der Definition von T wissen wir, daß $T \geq 2$ sein muß. Wir wählen dann $1 < u < T$, u beliebig nahe an T .

Dafür gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\gamma, \lambda, u) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|\alpha + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u) = \infty, \quad \text{und}$$

$$h(\gamma, 0, u) = \gamma^u < 1.$$

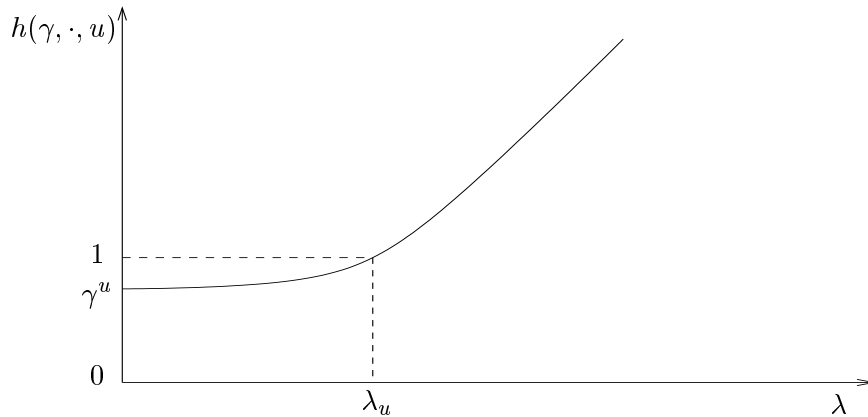


Abbildung 6.4: Möglicher Verlauf der Funktion $h(\gamma, \cdot, u)$.

Der Funktionsverlauf ist dann qualitativ so, wie in Abbildung 6.4 dargestellt. Aufgrund der Stetigkeit der Funktion $h(\gamma, \cdot, u)$ muß also ein $\lambda_u > 0$ existieren, so daß $h(\gamma, \lambda_u, u) = 1$ und damit $u = \kappa(\gamma, \lambda_u)$.

Für beliebiges $\lambda < \lambda_u$ gilt dann nach Satz 6.5, wegen $u > 1$ und $\kappa(\gamma, \lambda) < T$ für beliebiges $\lambda > 0$,

$$T > \kappa(\gamma, \lambda) > \kappa(\gamma, \lambda_u), \quad \text{also } \kappa(\gamma, \lambda) \in (u, T) \quad \text{für } \lambda \in (0, \lambda_u).$$

Da wir u beliebig nahe an T wählen können und für alle $\lambda \in (0, \lambda_u)$ der Tailindex $\kappa(\gamma, \lambda)$ größer als u ist, gilt schließlich $\lim_{\lambda \downarrow 0} \kappa(\gamma, \lambda) = T$. □

Kapitel 7

Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse dieser Arbeit

In diesem abschließenden Kapitel wollen wir erörtern, wie sich die Resultate aus dieser Arbeit in der Praxis einsetzen lassen. Ziel aller Modellbildungen auf dem Gebiet der Finanzzeitreihen ist es, in gewissem Sinne optimale Modelle für die untersuchten Datensätze zu finden. Dabei versucht man mit möglichst wenig Aufwand eine möglichst gute Übereinstimmung mit den realen Daten zu erreichen. Zu den wesentlichen Eigenschaften, bei denen die verwendeten Modelle gut auf die Daten passen sollten, zählt das Tailverhalten, welches sich durch den Tailindex κ beschreiben läßt. Wie der Tailindex beim GARCH(1,1)-Prozeß und beim AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen ermittelt wird haben wir in dieser Diplomarbeit ausführlich besprochen. Nun wollen wir uns kurz der Tailindexschätzung bei realen Daten widmen.

7.1 Schätzen des Tailindexes

Wir werden zunächst einige bekannte Schätzer vorstellen, um uns dann auf den Hill-Schätzer zu konzentrieren, und diesen auf einige Datensätze praktisch anzuwenden. Eine Übersicht über Tailindexschätzer bzw. Schätzer des Formparameters $\xi = 1/\kappa$, bei der die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren kurz beschrieben ist, findet man etwa in Embrechts, Klüppelberg und Mikosch [17].

(i) **Pickands-Schätzer** nach Pickands [32]

Für eine Menge $X_i, i = 1, \dots, n$ von iid-ZV mit gemeinsamer Extremwertverteilung und Ordnungsstatistik $X_{k,n}, k = 1, \dots, n$, d.h. $X_{n,n} \geq \dots \geq X_{1,n}$, definieren wir den Pickands-Schätzer für den Formparameter ξ als

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} := \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}.$$

Für diesen Schätzer lassen sich die folgenden Konsistenzeigenschaften zeigen. Falls $k \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

und falls $k/n \rightarrow 0$, $k/\ln \ln n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \xi, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) **Hill-Schätzer** nach Hill [22]

Wiederum sei $X_{k,n}, k = 1, \dots, n$, die Ordnungsstatistik einer Menge $X_i, i = 1, \dots, n$, von iid-ZV mit gemeinsamer Extremwertverteilung. Dann definieren wir den Hill-Schätzer für den Tailindex κ als

$$\hat{\kappa}_{k,n}^{(H)} := \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}.$$

Wie für den Pickands-Schätzer lassen sich die folgenden Konsistenzeigenschaften zeigen. Falls $k \rightarrow \infty$ und $k/n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\kappa}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{P} \kappa, \quad n \rightarrow \infty,$$

und falls $k/n \rightarrow 0$, $k/\ln \ln n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\hat{\kappa}_{k,n}^{(H)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \kappa, \quad n \rightarrow \infty.$$

Um die schwache Konsistenz für den Hill-Schätzer zu zeigen, lassen sich die Voraussetzungen an die ZV $X_i, i = 1, \dots, n$ abschwächen. Rootzén et al. [38] und Hsing [23] zeigten die schwache Konsistenz auch für schwach abhängige ZV. Wegen der Abhängigkeiten in den Renditenreihen von Finanzdaten, werden wir diesen Schätzer für einige Beispielschätzungen nutzen.

Neben den aufgeführten gibt es noch eine Reihe weitere Schätzmethoden, wie etwa den Dekkers-Einmahl-de Haan-Schätzer nach Dekkers et al. [14], der eine Verallgemeinerung des Hill-Schätzers darstellt, oder die “Peaks Over Threshold”-Methode.

Alle hier vorgestellten Methoden sind mit äußerster Vorsicht zu genießen. Insbesondere die Wahl von k ist schwierig, da sich zeigt, daß die Schätzungen bei sich änderndem k starken Schwankungen unterliegen. In der Praxis plottet man die Schätzungen für ξ oder κ gegen k und sucht einen Bereich von k , in dem der Schätzer einigermaßen konstante Werte liefert.

Im Laufe der Zeit wurden die Schätzmethoden immer weiter verfeinert, um die Bestimmung

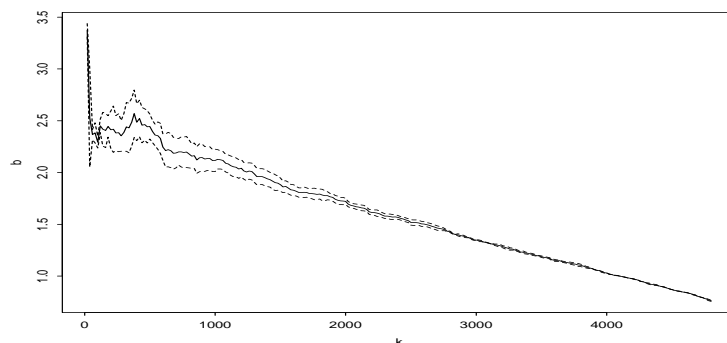


Abbildung 7.1: Hillschätzer für 6000 simulierte Daten des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen $X_n = 0.2X_{n-1} + \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n^2 = 0.4 + 0.4X_{n-1}^2$, $n \in \mathbb{N}$, wobei die Noise-Variablen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Student-t-verteilt sind mit 5 Freiheitsgraden.

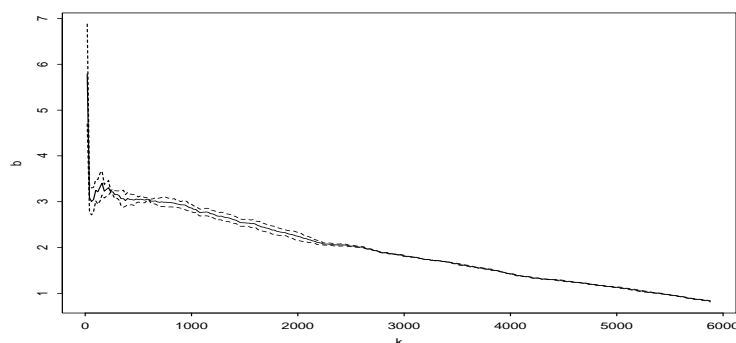


Abbildung 7.2: Hillschätzer für die Daxrenditen aus Abbildung 1.2.

des optimalen Wertes für k zu erleichtern. Erwähnt seien dabei die Arbeiten von Resnick und Stărică [35] [36] [37] sowie die Arbeit von Kratz und Resnick [26].

Die Abbildungen 7.1 und 7.2 zeigen den Hillschätzer für einen simulierten Prozeß und für die Daxrenditen aus Abbildung 1.2. Für den Prozeß aus Abbildung 7.1 ist der Tailindex aus der Tabelle 6.6 mit 2.68 für $(\gamma, \lambda) = (0.2, 0.4)$ bekannt.

In den Abbildungen 7.3 und 7.4 wurden die Ordnungsstatistiken so skaliert bzw. der Bildausschnitt so eingengt, daß der für die Schätzung interessante Bereich der Ordnungsstatistiken deutlicher sichtbar wurde.

Um eine einigermaßen gesicherte Aussage über den Tailindex einer Datenreihe zu erhalten, ist allerdings ein Vergleich der Ergebnisse von verschiedenen Schätzmethoden unerlässlich.

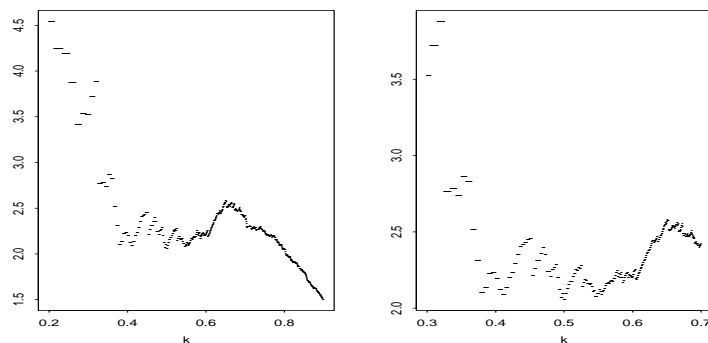


Abbildung 7.3: Hillschätzer bei skaliertem Ordnungsstatistik für die gleichen Daten wie in Abbildung 7.1

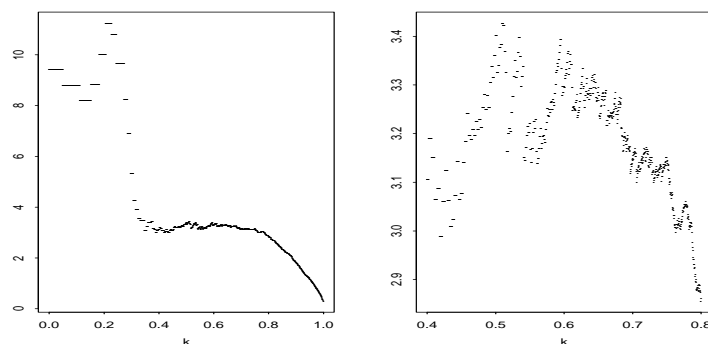


Abbildung 7.4: Hillschätzer bei skaliertem Ordnungsstatistik für die Daxrenditen aus Abbildung 1.2.

7.2 Anwendungsmöglichkeiten

Angenommen wir haben uns für ein Modell zum Anpassen an die Finanzdaten entschieden und der Tailindex des Datensatzes wurde mit Methoden, wie wir sie im letzten Abschnitt beschrieben haben, geschätzt.

Die Parameter für das Modells lassen sich mit der in der Einleitung angesprochenen Methode der Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzung bestimmen. Die einzige Freiheit die bei Modellwahl noch bleibt, ist die Wahl der Verteilung der Noise-Variablen. Um einen möglichst gute Übereinstimmung mit den Verteilungstails der Daten zu erhalten, können wir nun diese Verteilung, mit Hilfe der Tabellen in dieser Diplomarbeit oder weiterer Berechnungen für andere Verteilungen, entsprechend günstig wählen. Allerdings können sich dann andere Kenngrößen wie die Autokorrelationen des Prozesses im Vergleich zu den empirischen Autokorrelationen aus den Daten

verschlechtern. Die genaue Analyse der Daten sowie das Testen verschiedener Modelle bleiben also weiterhin wesentliche Aufgaben, um günstige Modelle für Finanzzeitreihen zu finden.

Anhang A

Maple-Programme zur Bestimmung des Stationaritätsbereichs und des Tailindexes

Im folgenden sind die in den Abschnitten 4.2 und 6.2 zur Bestimmung der Tabellenwerte verwendeten Maple-Programme abgedruckt. Die Beschreibung dieser Programme befindet sich im wesentlichen in Abschnitt 4.1.

A.1 Programme zur Bestimmung des Parameterbereichs, für den stationäre Lösungen existieren

Zunächst die für den GARCH(1,1)-Prozess notwendigen Programme:

```
normbsvg1:=proc(alpha,a,b)
  local x,beta,dn,ew,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
  dn:=x->exp(-1*(x**2)/2)/sqrt(2*Pi);      #Definition der Dichte
  ew:=beta->int(log(abs(alpha*(x**2)+beta))*dn(x),x=-infinity..infinity);
      #Integraldefinition
  x1:=a; x2:=b;                          #Startwerte
  f1:=evalf(ew(x1));                      #Integralauswertung
  f2:=evalf(ew(x2));
  while abs(f2)>10^(-4) do #Newton-Iteration
  x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2;
  f3:=evalf(ew(x3));
  print(x3,f3);
  x1:=x2; x2:=x3;
  f1:=f2; f2:=f3;
  od;
```

```

x2;          #Ergebnisausgabe
end:

normbsvg2:=proc(beta,a,b)
  local x,alpha,dn,ew,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
  dn:=x->exp(-1*(x**2)/2)/sqrt(2*Pi);
  ew:=alpha->int(log(abs(alpha*(x**2)+beta))*dn(x),x=-infinity..infinity);
  x1:=a; x2:=b;
  f1:=evalf(ew(x1));
  f2:=evalf(ew(x2));
  while abs(f2)>10^(-4) do      #Newton-Iteration
  x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2;
  f3:=evalf(ew(x3));
  print(x3,f3);
  x1:=x2; x2:=x3;
  f1:=f2; f2:=f3;
  od;
  x2;
end:

```

Diese beiden Programme bestimmen für vorgegebenen Parameter α bzw. β den Parameterwert von β bzw. α für den der Erwartungswert $\mathbf{E}(\ln(\alpha\varepsilon^2 + \beta))$ den Wert 0 annimmt. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe einer Newton-Iteration bis auf eine Genauigkeit von 10^{-4} . Die Übergabeparameter a und b sind die Startwerte für die Newton-Iteration. In den dargestellten Programmen ist die ZV ε normalverteilt, analog verfährt man mit einer Student-t-verteilter oder Laplaceverteilter ZV. Einzige Änderung im Programmtext ist das Austauschen der Normalverteilungsdichte `dn:=x->exp(-1*(x**2)/2)/sqrt(2*Pi)` gegen die entsprechende Dichte der Student-t-Verteilung oder Laplaceverteilung.

Im wesentlichen die gleichen Programme benötigten wir auch für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen.

```

stu5bsva1:=proc(lambda,a,b)
  local x,gamma,dstu5,ew,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
  dstu5:=x->8/(3*sqrt(5)*Pi*(1+(x**2)/5)**3);
  ew:=gamma->int(log(abs(gamma+sqrt(lambda)*x))*dstu5(x),x=-infinity..infinity);
  x1:=a; x2:=b;
  f1:=evalf(ew(x1));
  f2:=evalf(ew(x2));
  while abs(f2)>10^(-4) do      #Newton-Iteration

```

```

x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2;
f3:=evalf(ew(x3));
print(x3,f3);
x1:=x2; x2:=x3;
f1:=f2; f2:=f3;
od;
x2;
end:

```

```

stu5bsva2:=proc(gamma,a,b)
local x,lambda,dstu5,ew,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
dstu5:=x->8/(3*sqrt(5)*Pi*(1+(x**2)/5)**3);
ew:=lambda->int(log(abs(gamma+sqrt(lambda)*x))*dstu5(x),x=-infinity..infinity);
x1:=a; x2:=b;
f1:=evalf(ew(x1));
f2:=evalf(ew(x2));
while abs(f2)>10^(-4) do #Newton-Iteration
x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2;
f3:=evalf(ew(x3));
print(x3,f3);
x1:=x2; x2:=x3;
f1:=f2; f2:=f3;
od;
x2;
end:

```

Diese Programme bestimmen bei vorgegebenem Parameter λ bzw. γ den Parameterwert für γ bzw. λ , so daß der Erwartungswert $\mathbf{E}(\ln(\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon))$ mit einer Genauigkeit von 10^{-4} gleich 0 ist. Ansonsten laufen die Programme genau wie diejenigen für den GARCH(1,1)-Prozeß ab. Als Beispieldichte wurde hier die Dichte der Student-t-Verteilung mit fünf Freiheitsgraden gewählt.

A.2 Programme zur Bestimmung des Tailindex bei stationären Verteilungen

Beim GARCH(1,1)-Prozeß wurde zur Tailindexbestimmung das folgende Programm benutzt.

```

normtailg:=proc(alpha,beta,a,b)
local x,u,dn,ew2,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
dn:=x->exp(-1*(x**2)/2)/sqrt(2*Pi); #Dichte
ew2:=u->int(abs(alpha*(x**2)+beta)^u*dn(x),x=-infinity..infinity)-1;

```

```

#Integraldefinition
x1:=a; x2:=b;    #Startwerte
f1:=evalf(ew2(x1)); #Integralauswertung
f2:=evalf(ew2(x2));
x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2; # Lineare Approximation
print(2*x3);
end:

```

Für ein Parameterpaar (α, β) , das die Bedingung zur Existenz einer stationären Lösung erfüllt, liefert dieses Programm eine approximative Lösung für den Tailindex, d.h. ein u , daß die Integralgleichung $\mathbf{E}\left(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^{u/2}\right) = 1$ annähernd löst. Dabei wird der Integralwert für die beiden Startwerte **a** und **b** ermittelt und durch lineare Approximation der Wert für u bestimmt, an dem bei vorliegender Linearität das Integral den Wert 1 annehmen würde.

Wiederum haben wir nur ein Beispielprogramm dargestellt; für andere Verteilungen der Noise-Variablen muß nur die Dichte ausgetauscht werden.

Analog verfahren wir im Fall des AR(1)-Prozesses mit ARCH(1)-Innovationen. Dabei ermittelt das folgende Programm bei gegebenem Parameterpaar (γ, λ) und gegebenen Startwerten die approximative Lösung der Integralgleichung $\mathbf{E}\left(|\gamma + \sqrt{\lambda}\varepsilon|^u\right) = 1$.

```

stu3taila:=proc(gamma,lambda,a,b)
local x,u,dstu3,ew2,f1,f2,f3,x1,x2,x3;option trace:
dstu3:=x->6*sqrt(3)/(Pi*(3+x**2)**2); #Dichte
ew2:=u->int((gamma+sqrt(lambda)*x)^u*dstu3(x),x=(-1*gamma/sqrt(lambda))
..infinity)+int((-gamma-sqrt(lambda)*x)^u*dstu3(x),
x=-infinity..(-1*gamma/sqrt(lambda))) -1;
#Integraldefinition
x1:=a; x2:=b;    #Startwerte
f1:=evalf(ew2(x1)); #Integralauswertung
f2:=evalf(ew2(x2));
x3:=-f2*(x2-x1)/(f2-f1)+x2; #Lineare Approximation der Loesung
print(x3);
end:

```

Anhang B

S-Plus-Programme zur Schätzung des Tailindexes aus Simulationen

Im folgenden sind die S-Plus-Programme aufgeführt, die in den Abschnitten 4.2 und 6.2 zur Schätzung des Tailindexes herangezogen wurden. Die Bedeutung dieser Programme wird in Abschnitt 4.1 erklärt.

Zunächst werden die Programme für den GARCH(1,1)-Prozeß mit Parametern α und β vorgestellt.

```
kappagarch_function(alpha, beta, noise, k1, k2)
{
  f1 <- ewg(alpha, beta, noise, k1) - 1
  f2 <- ewg(alpha, beta, noise, k2) - 1
  while(abs(f2) > 10^(-4)) { # Newton-Iteration
    k3 <- (-1 * f2 * (k2 - k1))/(f2 - f1) + k2
    k1 <- k2
    k2 <- k3
    f1 <- f2
    f2 <- ewg(alpha, beta, noise, k2) - 1
    print(k2, f2, digits = 12)
  }
  k2
}
ewg_function(alpha, beta, noise, k) # berechnet Mittelwert
{
  garch <- (alpha * (noise)^2 + beta)^k
  mean(garch)
}
```

Mit Hilfe des Programms `kappagarch` haben wir für die Parameter `alpha`, `beta` und n Realisierungen der entsprechenden Noise-Variablen mittels einer Newton-Iteration, wie bei den Maple-Programmen in Anhang A1, eine Schätzung für den Tailindex bestimmt. An die Stelle des Parameters `noise` trat dabei die Realisierung eines iid Zufallsvektors, etwa `rt(500000,3)` bei der Student-t-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden. Wie in diesem Beispiel haben wir für alle Berechnungen $n = 500000$ gewählt. Die Parameter `k1` und `k2` bezeichnen die Startwerte für die Newton-Iteration.

Fast identisch stellt sich das Programm `kappaararch` für den AR(1)-Prozeß mit ARCH(1)-Innovationen dar.

```
kappaararch_function(gamma, lambda, noise, k1, k2)
{
  f1 <- ewa(gamma, lambda, noise, k1) - 1
  f2 <- ewa(gamma, lambda, noise, k2) - 1
  while(abs(f2) > (10.^(-4))) { # Newton-Iteration
    k3 <- (-1 * f2 * (k2 - k1))/(f2 - f1) + k2
    k1 <- k2
    k2 <- k3
    f1 <- f2
    f2 <- ewa(gamma, lambda, noise, k2) - 1
    print(k2, f2, digits = 12)
  }
  k2
}
ewa_function(gamma, lambda, noise, k) # berechnet Mittelwert
{
  ararch <- (gamma + sqrt(lambda) * noise)^k
  mean(ararch)
}
```

Lediglich die Zuweisung `ararch` bei der Mittelwertbildung ändert sich im Vergleich zum GARCH(1,1)-Prozeß. Ansonsten gelten die gleichen Bemerkungen wie für das Programm `kappagarch`.

Wie in Abschnitt 4.1 erwähnt haben Pitts et al. [31] nachgewiesen, daß der durch obige Programme `kappagarch` und `kappaararch` ermittelte Tailindexschätzer $\hat{\kappa}$ für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch normalverteilt ist mit dem wahren Tailindex κ als Erwartungswert und Varianz σ^2 . Für den GARCH(1,1)-Fall ist $\hat{\kappa}$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\alpha x_i^2 + \beta|^{u/2} = 1$$

für feste Parameter α, β mit $\alpha, \beta > 0$ und $x_i, i = 1, \dots, n$, iid Realisierungen der Noise-Variablen ε . Als Varianz der Normalverteilung erhielten Pitts et al. [31] dann

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \frac{\mathbf{E}(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^\kappa)}{\mathbf{E}(|\alpha\varepsilon^2 + \beta|^{\kappa/2} \ln |\alpha\varepsilon^2 + \beta|)}.$$

Für einige Werte von (α, β) berechneten wir die Werte von $\hat{\sigma}^2$, wobei wir das folgende Programm benutzten, bei dem der Erwartungswert durch sein empirisches Äquivalent, den Mittelwert, ersetzt wurde und anstatt des wahren Tailindex κ die Schätzung $\hat{\kappa}$ verwendet wurde.

```
sigma_function(alpha, beta, noise, k)
{
  n <- length(noise)
  x <- abs(alpha*(noise)^2 + beta)
  z <- x^k
  y <- (x^{k/2}) * log(x)
  sigma <- mean(z[101.:n])/(n - 100.)/mean(y[101.:n])
  sigma
}
```

Für Student-t-verteilte Noise-Variablen mit 9 Freiheitsgraden wurde z.B bei $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.2)$ ein Wert $\hat{\sigma}^2 = 0.02$ und für $(\alpha, \beta) = (0.8, 0.2)$ ein Wert für $\hat{\sigma}^2$ kleiner als 10^{-4} berechnet. Allerdings gilt, wie in Abschnitt 4.1 angesprochen, bei Student-t-verteilten Noise-Variablen mit ν Freiheitsgraden die oben beschriebene Asymptotik nur für κ -Werte, die kleiner als $\nu/2$ sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Alsmeyer, G. (1991): Erneuerungstheorie. Teubner, Stuttgart.
- [2] Asmussen, S. (1996): Applied Probability and Queues. Wiley, Chichester.
- [3] Bauer, H. (1992): Maß- und Integrationstheorie. De Gruyter, Berlin.
- [4] Billingsley, P. (1968): Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.
- [5] Bingham, N. H., Goldie, C. M. und Teugels, J. L. (1987): Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Black, und Scholes, (1973): The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy **81**, 637-659.
- [7] Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditonal heteroskedasticity. J. Econometrics **31**, 307-327.
- [8] Bollerslev, T. und Wooldridge, J. M. (1992): Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. Economic Reviews **11**, 143-172.
- [9] Borkovec, M. und Klüppelberg, C. (1998): The tail of the stationary distribution of an autoregressive process with ARCH(1) errors. Submitted for publication. Preprint unter URL: <http://www.ma.tum.de/stat/>
- [10] Bougerol, P. und Piccard, N. (1992): Strict stationarity of generalised autoregressive processes. Ann. Probab. **20**, 1714-1730.
- [11] Brockwell, P. J. und Davis, R. A. (1991): Time Series: Theory and Methods. Springer, New York.
- [12] Breiman, L. (1965): On some limit theorems similar to the arc-sin law. Theory Probab. Appl. **10**, 323-331.
- [13] Davis, R. A., Mikosch, T. und Basrak, B. (1999): Sample ACF of Multivariate Stochastic Recurrence Equations With Application to GARCH. Preprint.

- [14] Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J. und Haan, L. de (1989): A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Statist.* **17**, 1833-1855.
- [15] Duffie, D. (1992): *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, Princeton.
- [16] Elstrodt, J. (1996): *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Heidelberg.
- [17] Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Heidelberg.
- [18] Engle, R. F. (1982): Autoregressive conditional heteroscedastic models with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* **50**, 987-1007.
- [19] Fama, E. F. (1965): The behaviour of stock market prices. *Journ. Business* **38**, 34-105.
- [20] Goldie, C. M. (1991): Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Prob.* **1**, 126-166.
- [21] Gourieroux, C., Monfort, A. und Trognon, A. (1984): Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory. *Econometrica* **52**, 681-700.
- [22] Hill, B. M. (1975): A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statist.* **3**, 1163-1174.
- [23] Hsing, T. (1991): On tail index estimation using dependent data. *Ann. Statist.* **19**, 1547-1569.
- [24] Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995): *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 2. Wiley, New York.
- [25] Kesten, H. (1973): Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.* **131**, 207-248.
- [26] Kratz, M. und Resnick, S. I. (1996): The QQ-estimator and heavy tails. *Commun. Statist. Stochastic Models* **12**, 699-724.
- [27] Lee, S. W. und Hansen, B. E. (1994): Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory* **10**, 29-52.
- [28] Mandelbrot, B. (1963): The variation of certain speculative prices. *Journ. Business* **36**, 394-419.
- [29] Mikosch, T. und Stărică, C. (1998): Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of a GARCH(1,1) process. Technical Report, University of Groningen.
- [30] Nelson, D. B. (1990): Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory* **6**, 318-334.

- [31] Pitts, S. M., Grübel, R. und Embrechts, P. (1996): Confidence bounds for the adjustment coefficient. *Adv. Appl. Prob.* **28**, 802-827.
- [32] Pickands, J. III (1975): Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* **3**, 119-131.
- [33] Resnick, S. I. (1987): *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer, New York.
- [34] Resnick, S. I. (1992): *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, Boston.
- [35] Resnick, S. I und Stărică, C. (1995): Consistency of Hill's estimator for dependent data. *J. Appl. Probab.* **32**, 239-267.
- [36] Resnick, S. I und Stărică, C. (1996): Smoothing the Hill estimator. *J. Appl. Probab.* **32**, To appear.
- [37] Resnick, S. I und Stărică, C. (1996): Asymptotic behaviour of Hill's estimator for autoregressive data. Preprint, Cornell University.
- [38] Rootzén, H., Leadbetter, M. R. und Haan, L. de (1992): Tail and quantile estimators for strongly mixing stationary processes. Report, Department of Statistics, University of North Carolina.
- [39] Taylor, S. J. (1986): *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.
- [40] Tong, H. (1990): *Non-linear Time Series - A Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.
- [41] Vervaat, W. (1979): On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. *Adv. Appl. Probab.* **11**, 750-783.
- [42] Weiss, A. A. (1984): ARMA models with ARCH errors. *J. Time Series Anal.* **5**, 129-143.
- [43] Weiss, A. A. (1986): Asymptotic theory for ARCH models: Estimating and testing. *Economic Theory* **2**, 107-131.