

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Statik

## **Effiziente Simulation großer Mauerwerksstrukturen mit diskreten Rissmodellen**

**Joseph Jordan**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Oliver Fischer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
2. O. Univ.-Prof. Dr. techn. Günter Hofstetter,  
Universität Innsbruck / Österreich

Die Dissertation wurde am 10.10.2011 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 06.12.2011 angenommen.

Schriftenreihe des Lehrstuhls für Statik TU München

Band 18

**Joseph Jordan**

**Effiziente Simulation großer Mauerwerksstrukturen  
mit diskreten Rissmodellen**

Shaker Verlag  
Aachen 2011

## Effiziente Simulation großer Mauerwerksstrukturen mit diskreten Rissmodellen

### Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Strukturmodell für die effiziente Berechnung von großen Mauerwerksstrukturen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode entwickelt. Bei großskaligen experimentellen Versuchen zeigten sich typische Rissmuster mit überwiegend horizontaler, vertikaler und diagonaler Ausrichtung, die auf den Mauerwerksverband mit der regelmäßigen Struktur von Stein und Mörtelfugen zurückzuführen sind. Im numerischen Modell wird mit einer sogenannten *Einheitszelle* das Tragverhalten eines repräsentativen Mauerwerksausschnitts beschrieben. Die Einheitszelle besteht aus einem Element-Patch, um mit entsprechend orientierten Kontaktelementen die jeweiligen Versagensmoden diskret abzubilden. Mit dieser Vernetzung werden Struktureigenschaften des Mauerwerksverbands makroskopisch beschrieben und geometrische Größen wie Steinformat und Überbindemaß berücksichtigt. Das treppenförmige Fugenversagen durch Stoß- und Lagerfuge wird vereinfacht mit einem diagonalen Kontaktelement beschrieben. Dadurch konnte die gute Qualität der diskreten Rissmodellierung auf der Mesoskala mit der numerischen Effizienz von herkömmlichen Makromodellen kombiniert werden.

Für Fugen- und Steinversagen sind separate Materialgesetze vorgesehen. Im Vergleich zu einem homogenisierten Ersatzwerkstoff bleiben die Versagensmodelle und die Identifizierung von Materialparametern für die Komponenten Stein und Mörtel relativ einfach. Das Strukturmodell erzielte bei der Validierung an Schubwänden bestehend aus quadratischen Steinen sehr gute Berechnungsergebnisse. Durch einfache geometrische Anpassung bei der Vernetzung konnte die Einheitszelle auf weitere Steinformate angewendet werden.

## Efficient simulation of large masonry structures with discrete crack models

### Abstract

In this thesis a numerical model for the efficient simulation of large scale masonry structures with the finite element method is developed. In experimental large scale tests, a typical crack pattern with a preferred horizontal, vertical and diagonal orientation was observed, which can be attributed to the masonry bond. In the numerical calculations, a so-called *unit cell* was used to describe the typical load carrying behaviour of a representative sample of masonry. The unit cell consists of an element patch in order to model the respective failure modes with corresponding oriented interface elements (discrete crack model). With this finite element mesh structural properties of the masonry bond can be described macroscopically while the geometry of the stones is taken into account. The step-wise failure in the mortar joints through vertical and horizontal joints is described by a diagonal interface element. Using this method, the high quality of discrete crack models at meso scale simulations can be combined with the numerical efficiency of classical macromodels.

Individual material models for the cracks in the mortar joint and failure of the units are developed. Compared to a homogenised material description the failure criteria and the determination of material parameters for the components mortar and stone remain relatively simple. The unit cell was validated with large scale experimental tests of shear walls. Using square-shaped units, the simulation achieved very good results even under complex cyclic loading. Simple geometric adaption in the meshing procedure allow for the unit cell to also be applied to other shapes of the units.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2007 bis 2011 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Mein Doktorvater, Herr Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger, hat mir ausreichend Zeit und Freiraum gegeben, mich in das Thema umfassend einzuarbeiten und neue Wege in der Mauerwerksforschung anzudenken. Durch seinen fachlichen Beistand und sein beharrliches Ziel, ein geeignetes Makromodell zu finden, konnte ich eine effiziente Berechnungsmethode für große Mauerwerksgebäude entwickeln. Für das in mich gesetzte Vertrauen möchte ich ihm herzlich danken.

Großes Lob möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Günter Hofstetter für sein hervorragendes Fachwissen aussprechen, das er nicht nur beim CISM-Kurs „Numerical Modeling of Concrete Cracking“, sondern auch bei der Begutachtung meiner Arbeit gezeigt hat. Herrn Prof. Dr.-Ing. Oliver Fischer danke ich für die Leitung der Prüfungskommission.

Ebenso möchte ich meinem Kollegen Dipl.-Ing. Wolfgang Scheufler größte Anerkennung für die Durchführung der aufwändigen experimentellen Versuche am Lehrstuhl für Massivbau aussprechen. Wolfgang Scheufler hat trotz meiner Bedenken kein Risiko und keine Mühen gescheut, für diesen Werkstoff eine neue, optimal angepasste Prüfmaschine zu entwickeln. An dieser Stelle danke ich auch der Deutschen Forschungsgesellschaft für die Finanzierung dieses Gemeinschaftsprojektes. Die enge Verknüpfung von experimentellen und numerischen Methoden an den beiden Lehrstühlen hat wesentlich zum Gelingen beigetragen.

Ebenso möchte ich Herrn Dr.-Ing. Norbert Bergmann und den Mitarbeitern seines Ingenieurbüros danken. Als Tragwerksplaner habe ich in seinem Büro von 2004 bis 2007 wichtige praktische Erfahrung mit Mauerwerk bei historischen Bauten gesammelt.

Allen Kollegen am Lehrstuhl, allen Freunden und besonders meinen Eltern möchte ich danken, die mich emotional durch alle Höhen und Tiefen bei der wissenschaftlichen Arbeit begleitet haben. Ein ganz besonderer Dank gilt meiner lieben Frau Silke, die mir in jeder Situation den Rücken freigehalten hat und mit großer Geduld die Arbeit Korrektur gelesen hat.

München, im Dezember 2011

Joseph Jordan



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung und Ziele der Arbeit . . . . .	1
1.2	Vorgehensweise . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Mechanische Eigenschaften von Mauerwerk</b>	<b>5</b>
2.1	Steinsorten und Mauerwerksverband . . . . .	5
2.2	Prüfverfahren von Schubwänden . . . . .	6
2.3	Versagensmechanismus von Schubwänden . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Modellierungsstrategien für Mauerwerk</b>	<b>11</b>
3.1	Mauerwerk als periodischer Verbundwerkstoff . . . . .	11
3.2	Skalenmodelle für Mauerwerk . . . . .	13
3.2.1	Mikroskala . . . . .	14
3.2.2	Mesoskala . . . . .	14
3.2.3	Makroskala mit Einheitszellen . . . . .	15
3.3	Rissmodelle für kohäsive Reibungsmaterialien . . . . .	15
3.3.1	Entfestigung und Lokalisierung . . . . .	15
3.3.2	Rissmodelle bei der Finite-Elemente-Methode . . . . .	17
3.4	Modellierung von Mauerwerk mit Einheitszellen . . . . .	19
3.4.1	Aufbau der Einheitszelle . . . . .	19
3.4.2	Modellierung von Wandscheiben . . . . .	21
3.5	Bekannte Berechnungsmodelle für Mauerwerk . . . . .	22

---

<b>4</b>	<b>Konstitutive Gesetze</b>	<b>25</b>
4.1	Überblick Materialmodelle . . . . .	25
4.2	Schädigungsmodell . . . . .	26
4.3	Kombiniertes Schädigungs- / Plastizitätsmodell . . . . .	29
4.3.1	Mechanische Größen an einer Grenzschicht . . . . .	30
4.3.2	2-Phasen-Materialmodell . . . . .	30
4.3.3	Kontakt- und Reibmodell . . . . .	32
4.3.4	Eigenschaften des 2-Phasen-Materialmodells . . . . .	34
4.4	Lösungsverfahren und Zeitintegration . . . . .	36
4.4.1	Zeitintegration des Schädigungsmodells . . . . .	37
4.4.2	Zeitintegration des Kontakt- und Reibmodells . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Finite Elemente und Lösungsverfahren</b>	<b>41</b>
5.1	Starke und schwache Form der Elasto-Mechanik . . . . .	41
5.2	Diskretisierung mit Finiten Elementen . . . . .	43
5.3	Lösungsverfahren für das quasi-statische Problem . . . . .	44
5.4	Pseudo-dynamische Analyse . . . . .	45
5.4.1	Zeitintegrationsverfahren . . . . .	47
5.4.2	Anpassung der Zeitschrittweite . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Modellierung des Kontinuums Mauerwerk</b>	<b>49</b>
6.1	Experimentelle Versuche auf der Mikroskala . . . . .	49
6.2	Homogenisierung der elastischen Eigenschaften . . . . .	50
6.2.1	Randbedingungen für ebene periodische Medien . . . . .	50
6.2.2	Mikromodell des Mauerwerks . . . . .	51
6.3	Schädigungsmodell . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Mörtel: Modellierung des Fugenversagens</b>	<b>57</b>
7.1	Modellierung auf der Mikroskala . . . . .	57
7.1.1	Experimentelle Beschreibung der Mörtelfuge . . . . .	57
7.1.2	Materialmodell . . . . .	60
7.1.3	Validierung des Materialmodells . . . . .	67
7.2	Traglast-Modell von Mann/Müller . . . . .	69

---

7.3	Horizontales Fugenversagen . . . . .	71
7.3.1	Numerische Untersuchung auf der Mikroskala . . . . .	71
7.3.2	Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala) . . . . .	74
7.4	Treppenförmiges Fugenversagen . . . . .	77
7.4.1	Mechanik einer treppenförmigen Grenzschicht . . . . .	77
7.4.2	Numerische Untersuchung auf der Mikroskala . . . . .	79
7.4.3	Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala) . . . . .	81
7.5	Validierung des Fugenversagens . . . . .	85
7.6	Kontaktformulierung am Rand der Wandscheibe . . . . .	90
7.6.1	Integrationsverfahren beim Kontakt- und Übergangselement . . . . .	91
7.6.2	Kontaktelemente mit nicht koinzidenten Knoten . . . . .	93
<b>8</b>	<b>Mauerstein: Modellierung des Steinversagens</b>	<b>95</b>
8.1	Das erweiterte diskrete Rissmodell . . . . .	95
8.1.1	Erweitertes Schädigungsmodell . . . . .	96
8.1.2	Erweitertes Kontaktelement . . . . .	101
8.1.3	Kontrolle der Rissorientierung . . . . .	103
8.2	Modellierung auf der Mikroskala . . . . .	106
8.3	Vertikales Steinversagen . . . . .	109
8.3.1	Belastung des Steins in der Schubwand . . . . .	109
8.3.2	Numerische Untersuchung auf der Mikroskala . . . . .	110
8.3.3	Experimentelles Bestimmen der Versagenskräfte . . . . .	112
8.3.4	Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala) . . . . .	113
8.4	Diagonales Steinversagen . . . . .	118
8.4.1	Mechanische Ursache des diagonalen Steinversagens	118
8.4.2	Elementformulierung für die Einheitszelle (Makroskala) . . . . .	119
8.4.3	Materialmodell für die Einheitszelle (Makroskala) . . . . .	121
8.5	Validierung des Steinversagens . . . . .	125
8.5.1	Prüfverfahren und Belastung der Schubwand . . . . .	125
8.5.2	Numerisches Modell . . . . .	126

8.5.3	Abgleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse . . . . .	127
<b>9</b>	<b>Numerische Untersuchungen</b>	<b>131</b>
9.1	Robustheit des Makromodells bei einer großen Wandscheibe	131
9.1.1	Einfluss der Materialparameter beim Fugenversagen	132
9.1.2	Einfluss der Modell- und Materialparameter beim Steinversagen . . . . .	136
9.2	Anwendungsgrenzen der Makroskala . . . . .	138
<b>10</b>	<b>Anwendungsbeispiel: Gebäudemodell</b>	<b>141</b>
10.1	Geometrie, Modell und Belastung des Gebäudes . . . . .	141
10.2	Statische Analyse und Lastabtragung . . . . .	142
10.3	Kombination von Meso- und Makromodell . . . . .	145
<b>11</b>	<b>Kalksandstein mit rechteckigem Steinformat</b>	<b>149</b>
11.1	Mechanik der Schubwände . . . . .	150
11.2	Homogenisierung . . . . .	152
11.3	Dilatanzmodell für den geschädigten Zustand . . . . .	156
11.4	Validierung . . . . .	161
11.4.1	Wandversuch und Diskretisierung . . . . .	161
11.4.2	Validierung des Fugenversagens . . . . .	161
11.4.3	Validierung des Stein- und Fugenversagens . . . . .	163
11.5	Grenzen und Erweiterung des Makromodells . . . . .	167
11.6	Modellierung auf der Mesoskala . . . . .	169
11.6.1	Einheitszelle für die Mesoskala . . . . .	169
11.6.2	Validierung der Mesoskala . . . . .	172
11.6.3	Erweiterung der Mesoskala . . . . .	174
11.7	Zusammenfassung 8DF-Stein . . . . .	175
<b>12</b>	<b>Hochlochziegel</b>	<b>177</b>
12.1	Mechanische Eigenschaften . . . . .	177
12.2	Homogenisierung . . . . .	180

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>IX</b>
12.3 Validierung . . . . .	184
<b>13 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>191</b>
13.1 Zusammenfassung des Strukturmodells . . . . .	191
13.2 Ausblick . . . . .	193
<b>A Homogenisierungsschritte für die Einheitszelle</b>	<b>197</b>
<b>B Linearisierung der Materialmodelle</b>	<b>201</b>
B.1 Schädigungsmodell von Abs. 6.3 . . . . .	201
B.2 Schädigungsmodell von Abs. 7.1.2 . . . . .	201
B.3 Plastizitätsmodell von Abs. 7.1.2 . . . . .	202
B.4 Erweitertes diskretes Rissmodell von Abs. 8.2 . . . . .	203
<b>Notation</b>	<b>205</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>207</b>





# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung und Ziele der Arbeit

Im modernen Mauerwerksbau werden tragende Wände mit möglichst kleinen Konstruktionsflächen gefordert, um maximale Nutzungenflächen zu erzielen. Dünne Wandscheiben werden als tragende Bauteile eingesetzt, so dass bei mehrgeschossigen Gebäuden oder bei Erdbebenbeanspruchung aufgrund der höheren Belastung ein genauere statischer Nachweis erforderlich wird.

Hochlochziegel, künstlich hergestellter Kalksandstein und Betonsteine sind die häufigsten Steinsorten für tragendes, unbewehrtes Mauerwerk. Bei unterschiedlichen Steinformaten (Breite und Dicke) hat sich eine einheitliche Steinhöhe von 25 cm durchgesetzt. Im Zuge einer rationellen Herstellung werden die Plansteine in Dünnbettmörtel versetzt und die vertikalen Stoßfugen bleiben unvermörtelt [SSS07]. Im Gegensatz zu historischen Mauerwerksarten mit kleinen Steinformaten [Kra03], weisen die modernen Mauerwerksarten mit zum Teil hochfesten Steinen und unvermörtelten Stoßfugen ein anderes Tragverhalten auf. Beim Versagen von Schubwänden wirken die Mörtelfugen als schwache Schichten, so dass Kontakt- und Reibeffekte in der Dünnbettfuge maßgeblich werden.

#### **Bekannte Berechnungsmethoden für Mauerwerk**

In Abs. 3.5 ist eine Übersicht über bekannte Berechnungsmethoden anhand eines Literaturstudiums gegeben. Mit bisherigen Makromodellen wird das Mauerwerk mit einem homogenisierten Materialmodell beschrieben und Risse als *verschmiertes Rissmodell* in die Finite-Elemente-Methode eingebaut. Mit der EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD (X-FEM) werden die kontinuierlichen Ansatzfunktionen um diskontinuierliche Ansätze erweitert und Risswachstum mit einem *diskreten Rissmodell* umgesetzt. Vergleichende Studien von Jirásek [Jir00] zeigten, dass der diskrete Ansatz entschei-

dende Vorteile bei der Lokalisierung von Rissen und der Kontaktmechanik zwischen den Rissflanken besitzt. Aus dieser Motivation heraus wurden in jüngerer Zeit *diskrete Rissmodelle* für Mauerwerk auf der Mesoskala vorangetrieben, bei denen Stein und Mörtel getrennt werden. Aufgrund des großen numerischen Aufwands erscheint auch diese detaillierte Methode für die Anwendung auf große Strukturen nur bedingt praxistauglich.

### **Ziele der Arbeit**

In dieser Arbeit soll ein robustes Berechnungsverfahren entwickelt werden, mit dem große Strukturen, wie z. B. ganze Gebäude, effizient berechnet werden können. Zu diesem Zweck wird ein Strukturmodell entwickelt, das auf sogenannten *Einheitszellen* basiert. Die Einheitszelle bildet einen charakteristischen Ausschnitt vom Mauerwerksverband auf der Makroskala ab. Innerhalb der Zelle werden alle wesentlichen Versagensmoden mit einem diskreten Rissmodell abgebildet und Stein- und Fugenversagen mit separaten Materialmodellen beschrieben (siehe Abs. 3.4). Im Gegensatz zu einer homogenisierten Beschreibung bleiben die Versagensmodelle und die Identifizierung von Materialparametern aus Versuchen relativ einfach. Gleichzeitig können die Materialmodelle und Elementformulierungen modular in kommerzielle Finite-Elemente-Programme übertragen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein physikalisch nichtlineares Berechnungsverfahren für Mauerwerk unter ebener Belastung entwickelt. Die Materialgesetze sollen das inelastische Verhalten von Mauerwerk durch eine geeignete Kombination von Schädigungs- und Plastizitätsmodellen beschreiben, so dass auch die Simulation einer zyklischen Belastung wie beim Lastfall Erdbeben möglich ist.

## **1.2 Vorgehensweise**

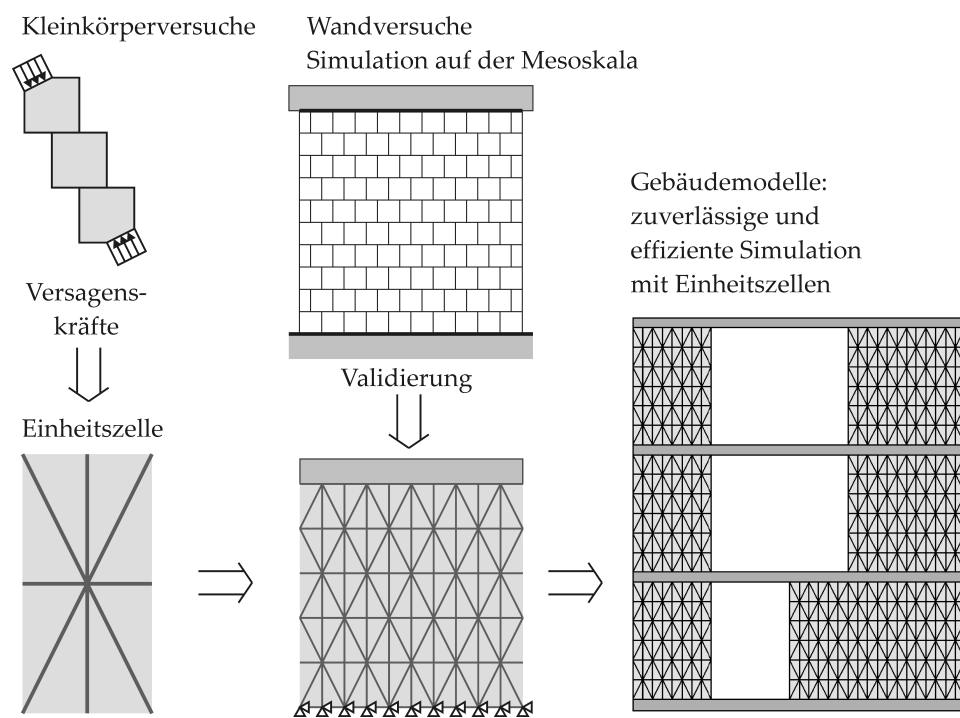
Aufgrund des komplizierten Tragverhaltens von Mauerwerk sind experimentelle Versuche zur Entwicklung eines zuverlässigen Berechnungsmodells unumgänglich. Zu diesem Zweck wurden zahlreiche Versuche am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München durchgeführt [ZGS08, ZFG<sup>+</sup>08, ZFG<sup>+</sup>04, ZS11]. Bei diesen Versuchen an geschosshohen Wänden zeigten sich vier wesentliche Rissmuster: horizontales und treppenförmiges Fugenversagen sowie diagonales und vertikales Steinversagen.

Das Strukturmodell der Einheitszelle wird auf die Beschreibung dieser horizontalen, vertikalen und diagonalen Versagensmoden abgestimmt. Die

Struktur des Mauerwerksverbands wird mit einem regelmäßigen Element-Patch makroskopisch abgebildet. Mit Scheibenelementen wird die elastische Verformung des Kontinuums Mauerwerk diskretisiert und mit Kontaktelementen das diskrete Rissmodell für die lokalen Versagensmoden umgesetzt. Das treppenförmige Fugenversagen durch Stoß- und Lagerfuge wird vereinfacht mit einem diagonalen Kontaktelement abgebildet. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade weiter reduziert und so die Effizienz von klassischen Makromodellen erreicht.

Neben den Großversuchen wurden weitere Kleinkörperversuche an einem kleinen Mauerwerksausschnitt durchgeführt. Mit diesen Versuchen werden weniger Materialeigenschaften bestimmt, sondern vielmehr die Versagenskräfte des Steins in der Struktur des Verbands experimentell ermittelt. Dadurch können Versagenskriterien einfacher formuliert und die Versuchsergebnisse direkt auf die Einheitszelle übertragen werden. Die Entwicklung des Strukturmodells ausgehend von experimentellen Versuchen ist schematisch in Abb. 1.1 dargestellt.

Die mechanischen Eigenschaften des Mauerwerks, von experimentellen Versuchen abgeleitet, sind in Kapitel 2 zusammengefasst. Bekannte Modellierungsstrategien für diesen spröden Verbundwerkstoff werden in Kapitel 3 mit dem eigenen Berechnungsansatz basierend auf Einheitszellen verglichen. Grundlagen des numerischen Modells inklusive der inelastischen Materialmodelle und der Elementtechnologie werden in Kapitel 4 und 5 erläutert. Die Berechnungsmethode basierend auf Einheitszellen wird zunächst für einen quadratischen Vollstein aus Kalksandstein entwickelt. Im Gegensatz zu gelochten Steinen besitzt dieser Stein keine aufwändige Mikrostruktur und verhält sich aufgrund der relativ hohen Bruchenergie noch nicht zu spröde. In Kapitel 6 bis 8 werden die Elementformulierungen und Materialgesetze für die einzelnen Versagensmoden anhand dieser Steinsorte beschrieben und die Berechnungsergebnisse mit geschosshohen Wandversuchen validiert. Die Robustheit und Effizienz der Berechnungsmethode wird in Kapitel 9 anhand einer großen Wandscheibe untersucht. In Kapitel 10 wird die Einheitszelle auf ein mehrgeschossiges Gebäudemodell angewendet und die Interaktion mit anderen Bauteilen wie z.B. Stahlbetondecken untersucht. Die Anpassung und Anwendung des Strukturmodells auf ein weiteres Steinformat (rechteckiger Vollstein aus Kalksandstein) und auf einen gelochten Stein aus einem anderen Steinmaterial (Hochlochziegel) wird in Kapitel 11 und 12 aufgezeigt.



**Abbildung 1.1:** Entwicklung des numerischen Modells

## Kapitel 2

# Mechanische Eigenschaften von Mauerwerk

Bei geschosshohen Wandversuchen aus unbewehrtem Mauerwerk zeigten sich typische Versagensmechanismen und Rissmuster. In diesem Kapitel wird der Aufbau des Verbundwerkstoffs Mauerwerk sowie das Prüfverfahren und Tragverhalten von Wandscheiben erläutert. Die mechanischen Eigenschaften der Komponenten Stein und Mörtel werden in den Kapiteln 7 und 8 beschrieben.

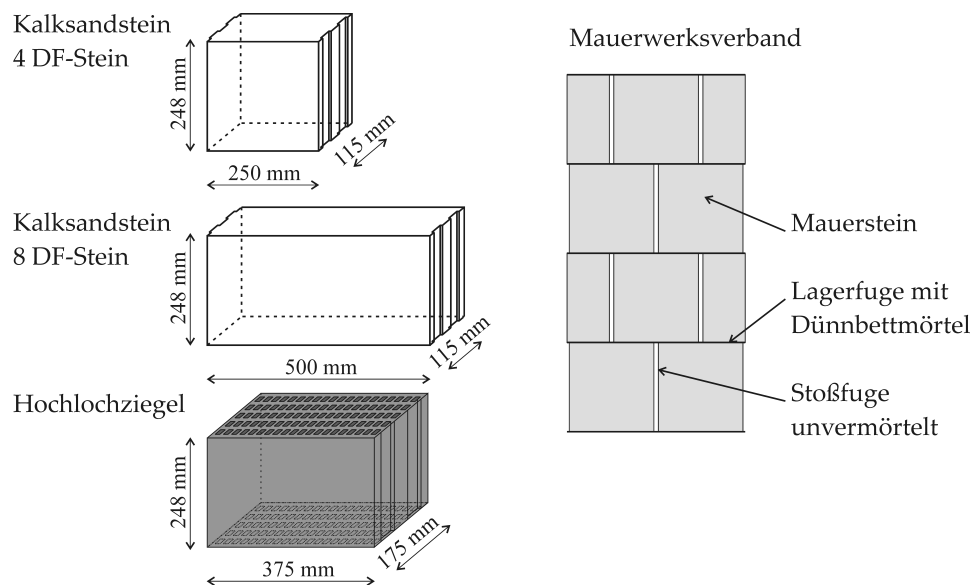
### 2.1 Steinsorten und Mauerwerksverband

Im Rahmen dieses Forschungsprojekts werden drei praxisrelevante Steinsorten untersucht (siehe Abb. 2.1, links):

- quadratischer Vollstein aus Kalksandstein (4DF-Stein)
- rechteckiger Vollstein aus Kalksandstein (8DF-Stein)
- Hochlochziegel

Mit Kalksandstein wird künstlich hergestellter Stein aus Sand und Calciumcarbonat bezeichnet, der ähnliche Werkstoffeigenschaften wie unbewehrter Beton aufweist. Der in Kapitel 12 untersuchte Hochlochziegel hat einen geringen Lochanteil und relativ dicke Stege. Vollsteine aus Ziegelmaterial werden aufgrund der schwierigen Trocknung und der Gefahr von Brandrisen nur im Kleinformat hergestellt. Alle drei Steinsorten weisen eine hohe Festigkeit auf und werden daher für tragendes Mauerwerk eingesetzt.

Die Verarbeitung und der Mauerwerksverband sind für alle Steinsorten identisch (siehe Abb. 2.1, rechts). Die Steine werden mit halbsteinigem Überbindemaß in Dünnbettmörtel versetzt. Aufgrund der hohen Maßhaltigkeit der Plansteine ist eine Mörtelfuge von 1 – 2 mm ausreichend. Die



**Abbildung 2.1:** Steinsorten (links) und Mauerwerksverband (rechts)

vertikalen Stoßfugen bleiben unvermörtelt. Die Profilierung der Steine an der Stoßfuge wird aus konstruktiven Gründen hergestellt und hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Lastabtragung.

## 2.2 Prüfverfahren von Schubwänden

Das nachfolgend beschriebene Prüfverfahren bildet weitgehend die Belastung der Schubwand unter Erdbebeneinwirkung ab. Die horizontale Fußpunkterregung bei einem Erdbeben führt zu hohen Schubkräften in den Wänden und ist ein kritischer Lastfall für die Bemessung der Gebäudeaussteifung mit gemauerten Wänden.

Am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München wurden geschosshohe Wände aus den jeweiligen Steinsorten maßstabsgetreu geprüft [ZGS08, ZFG<sup>+</sup>08, ZFG<sup>+</sup>04, ZS11]. Die Wand ist am Wandfuß fixiert und wird am Wandkopf über einen aufgemörtelten Lasteinleitungsbalken mit drei Hydraulikzylindern quasi-statisch belastet (siehe Abb. 2.2). Über die erste Presse wird weggesteuert eine zyklische Horizontalverschiebung mit ansteigenden Amplituden aufgebracht. Die zwei vertikalen Pressen belasten die Wand lastgesteuert, so dass die Summe der vertikalen Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  konstant bleibt und dem Eigengewicht des Gebäudemodells entspricht. Der asymmetrische Anteil der vertikalen Kräfte ist so geregelt, dass

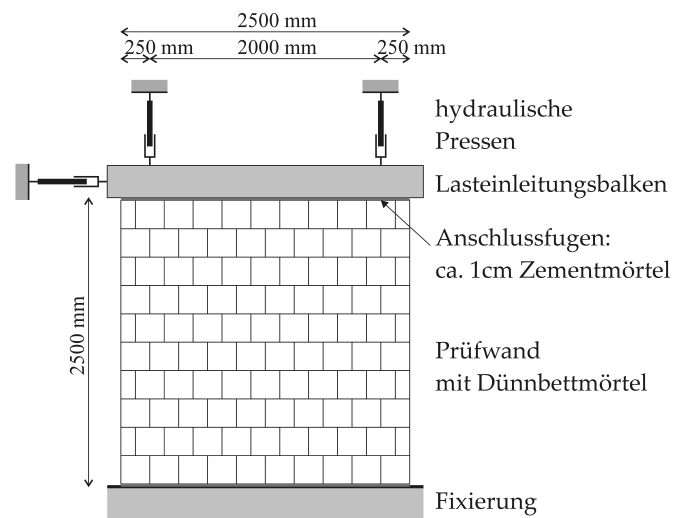


Abbildung 2.2: Prüfaufbau von Schubwänden

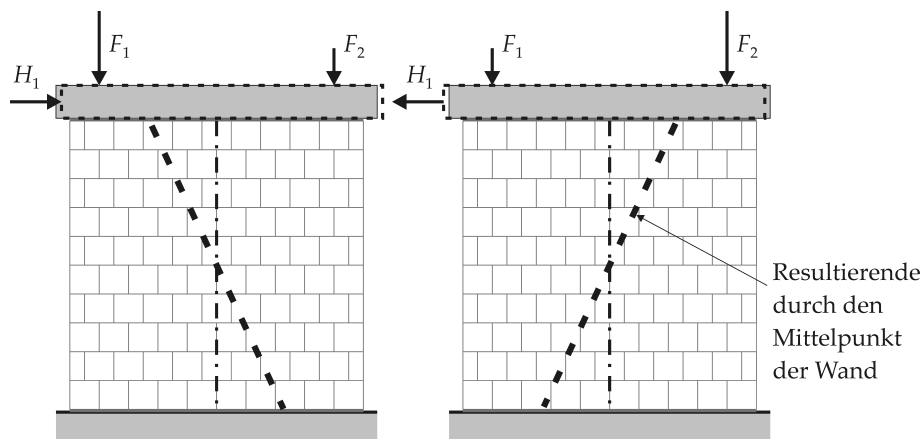


Abbildung 2.3: Belastungssteuerung beim Prüfen einer Schubwand

die Wirkungslinie der resultierenden Kraft im Mittelpunkt der Wand liegt (siehe Abb. 2.3). Das vertikale Kräftepaar ist dadurch abhängig von der horizontalen Auflagerreaktion der Wand gesteuert und wird daher auch als antizyklisches Moment bezeichnet. Bei dieser Belastung verdreht sich der obere Lasteinleitungsbalken nur geringfügig. Dieser Prüfaufbau entspricht weitgehend der Belastung in einem Gebäude, da auch hier die Verdrehung der steifen Stahlbetondecken durch Querwände oder Stützen behindert ist.

## 2.3 Versagensmechanismus von Schubwänden

Das Tragverhalten von aussteifenden Wänden wird hier exemplarisch für den quadratischen Kalksandstein aufgezeigt. Die beiden anderen Steinsorten sind in Kapitel 11 und 12 dokumentiert.

Die mittlere Pressung aus der vertikalen Belastung beträgt je nach Gebäudemodell zwischen  $0,5$  und  $2,0 \text{ N/mm}^2$  und ist damit gering im Vergleich zur Druckfestigkeit des Steins von ca.  $13,0 \text{ N/mm}^2$ . Das Versagen der Wand wird wesentlich durch die Schubbelastung aus der zyklischen Horizontalverschiebung verursacht.

Zunächst werden Zugspannungen in der Wand durch zahlreiche Risse in den Mörtelfugen abgebaut, die als schwache Schichten wirken. Innerhalb der Wand dominieren treppenförmige Fugenrisse, die abwechselnd durch die Stoß- und Lagerfugen verlaufen. An der Anschlußfuge zwischen Wand und Lasteinleitungsbalken stellt sich ein durchgehender horizontaler Riss in der Lagerfuge ein (siehe Abb. 2.4, links).

Erst bei weiteren Lastzyklen mit größeren Verschiebungen kommt es zu einem vertikalen und diagonalen Versagen der Mauersteine (siehe Abb. 2.4, rechts). Da Zugspannungen bereits durch Risse in den Mörtelfugen abgebaut sind, wird das Abscheren der Steine durch eine kombinierte Druck-Schubbelastung hervorgerufen (siehe auch numerische Untersuchung in Abs. 8.3.1). Das Versagen eines einzelnen Mauerwerkssteins ist sehr spröde, was mit einem dynamischen und instabilen Risswachstum verbunden ist. Dagegen kann das mechanische Verhalten von gedrunzenen Wandscheiben unter moderater Auflast als quasi duktil eingestuft werden, da erst eine Vielzahl von Fugen- und Steinrissen zu einem vollständigen Versagen der Wand führt.

Zusammenfassend lässt sich das Versagen der Schubwand mit vier wesentlichen Moden beschreiben:

- Horizontales Fugenversagen
- Treppenförmiges Fugenversagen
- Vertikale Steinrisse
- Diagonale Steinrisse

Die Wandversuche werden mit einem optischen Messsystem aufgezeichnet, mit dem das Verschiebungsfeld flächig über die gesamte Belastungsgeschichte erfasst wird. Mit diesem Messsystem können die Rissbilder sehr genau anhand der effektiven Dehnung ausgewertet werden (siehe Abb. 2.5).



- ① horizontales Fugenversagen
- ② treppenförmiges Fugenversagen

- ③ vertikale Steinrisse
- ④ diagonale Steinrisse

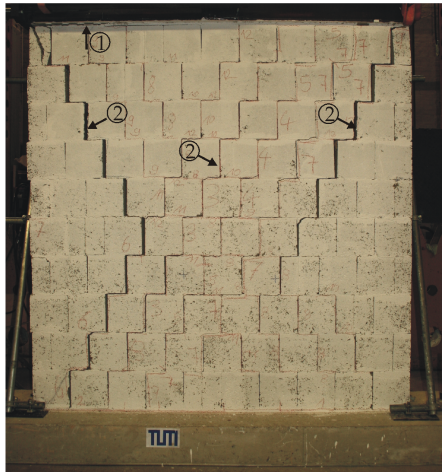


Abbildung 2.4: Versagensmechanismus von Schubwänden

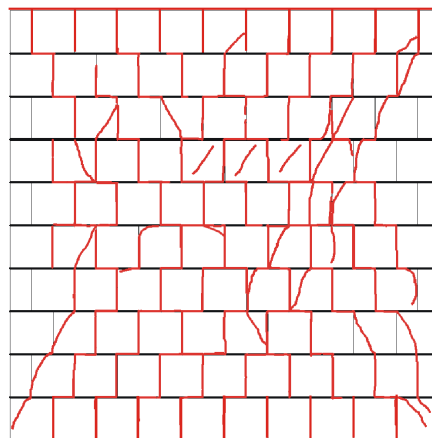
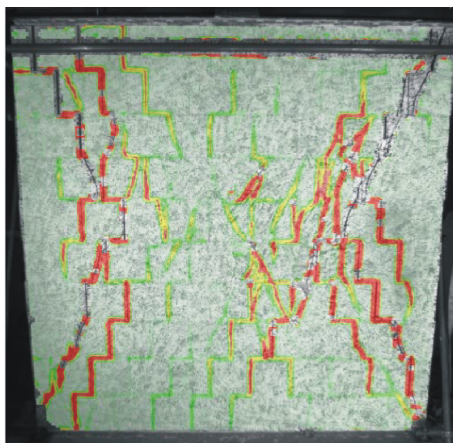


Abbildung 2.5: Rissbild mit dem optischen Messsystem (links), schematisches Rissbild (rechts)



## Kapitel 3

# Modellierungsstrategien für Mauerwerk

Mit der regelmäßigen Anordnung von Stein und Mörtelfugen stellt Mauerwerk einen periodischen Verbundwerkstoff dar. Homogenisierungsmethoden und Skalenmodelle für Mauerwerk werden in Abs. 3.1 und 3.2 gezeigt.

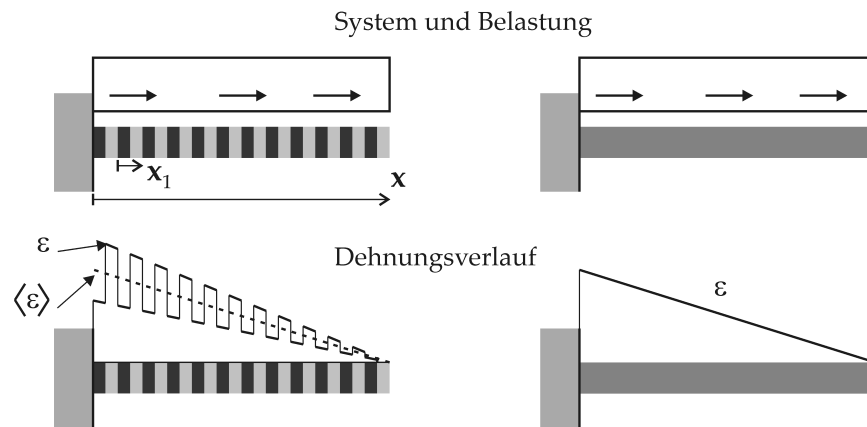
Die Komponenten Stein und Mörtel gehören aufgrund des spröden Verhaltens zur Gruppe der *kohäsiven Reibmaterialien*. Diese Werkstoffgruppe zeichnet sich durch die Lokalisierung von Mikrorissen und Bildung von Makrorissen aus. Entsprechende Rissmodelle für die Elementtechnologie werden in Abs. 3.3 vorgestellt.

Die effiziente Modellierung von Mauerwerk mit *Einheitszellen* wird in Abs. 3.4 aufgezeigt. Mit der Einheitszelle wird ein Makromodell entwickelt, welches die wesentlichen Versagensmoden bei einem charakteristischen Mauerwerksausschnitt mit einem *diskreten Rissmodell* abbilden kann.

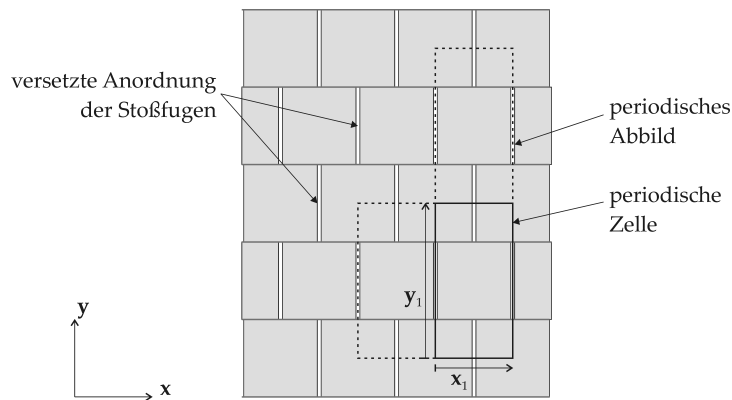
### 3.1 Mauerwerk als periodischer Verbundwerkstoff

Der einfachste Verbundwerkstoff ist ein 1-dimensionaler Fachwerkstab mit geschichteter Anordnung von zwei Materialien. In Abb. 3.1 ist das mechanische Verhalten des Verbundwerkstoffs unter Annahme linear-elastischen Verhaltens der einzelnen Materialkomponenten aufgezeigt. Durch die inhomogene Materialverteilung kommt es auf der kleinen Skala zu starken Oszillationen im Dehnungsfeld. Beim Hochskalieren auf die größere Skala wird ein homogenisierter Ersatzwerkstoff definiert, so dass gilt:

$$\begin{array}{ccc} \text{Makroskala} & & \text{Mikroskala} \\ \epsilon & \equiv & \langle \epsilon \rangle \\ \sigma & \equiv & \langle \sigma \rangle \end{array}$$



**Abbildung 3.1:** Beispiel Zugstab mit Kompositwerkstoff: Oszillationen im Dehnungsfeld der kleinen Skala (links) - Analyse der homogenisierten Dehnung am Makromodell (rechts)



**Abbildung 3.2:** Mauerwerk als periodischer Verbundwerkstoff mit den Komponenten Stein, Lager- und Stoßfuge

Mit dem Zeichen  $\langle \bullet \rangle$  wird die gemittelte Größe über die periodische Länge  $x_1$  bezeichnet. Das Verschiebungs- und Dehnungsfeld der Makroskala mit der glatten Charakteristik kann mit der Finite-Elemente-Methode wesentlich effizienter beschrieben werden als die Mechanik der kleineren Skala. Mehrskalenmodelle und ihre Anwendung auf Mauerwerk sind u.a. in [HH98a, HH98b, ZL07] beschrieben.

Beim Mauerwerk ist der kleinste periodische Ausschnitt durch die Basisvektoren  $x_1$  und  $y_1$  definiert (siehe Abb. 3.2). Pahr bezeichnet diesen Ausschnitt als repräsentatives Volumen Element oder als Einheitszelle [Pah04]. In dieser Arbeit wird dieses periodische Teilgebiet als *periodische Zelle* be-

zeichnet im Unterschied zu dem, in Abs. 3.4 definierten Makromodell basierend auf *Einheitszellen*, die einen größeren Mauerwerksausschnitt abbilden. Die Größe der periodischen Zelle ist so definiert, dass die angrenzenden Nachbarn identische Abbilder darstellen. Anthoine [Ant95] konnte mit einer schiefwinkligen Zelle die Größe nochmals halbieren, was aber in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird.

Mit der versetzten Anordnung der Stoßfuge besitzt Mauerwerk eine komplizierte Mikrostruktur, welche zu Spannungskonzentrationen in der Nähe der Stoßfugen führt (siehe Abs. 6.2.2). Während die homogenisierten Eigenschaften beim geschichteten Werkstoff mit einfachen Federmodellen analytisch bestimmt werden können, ist bei der Analyse von Mauerwerk ein Mikromodell mit numerischer Homogenisierung erforderlich.

### 3.2 Skalenmodelle für Mauerwerk

Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung von Mauerwerk auf der Makroskala basierend auf Einheitszellen, mit der die Mechanik von großen Strukturen - wie z.B. Gebäudemodellen - effizient beschrieben werden kann (siehe Abs. 3.4). Für die detaillierte Analyse der Versagensmoden und für die Validierung der Makroskala werden zusätzliche numerische Versuche auf den Mikro- und Mesoskalen durchgeführt. In Abb. 3.3 werden die Modellierungsstrategien der einzelnen Skalen verglichen. Da bei allen Skalen das Spannungs- und Dehnungsfeld unterschiedlich genau aufgelöst wird, sind für jede Modellierung eigene Materialmodelle erforderlich.

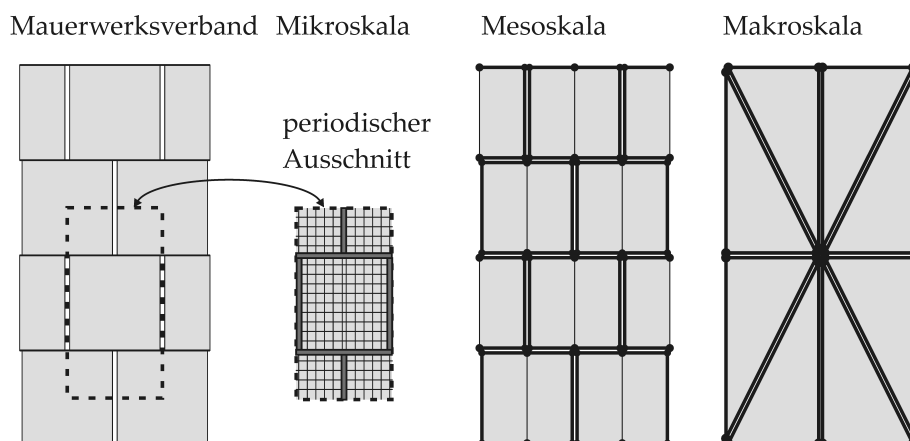


Abbildung 3.3: Verschiedene Skalen bei Mauerwerk

### 3.2.1 Mikroskala

Ziel der Mikroskala ist eine detaillierte Modellierung der periodischen Zelle, um mit Homogenisierungsschritten effektive Größen für die Meso- und Makroskala zu bestimmen.

Auf dieser Skala werden die Mauerwerkssteine mit Kontinuumselementen und die Mörtelfuge mit Kontaktelementen (sog. *interface-elements*) getrennt modelliert. Entlang der vertikalen Stoßfuge ist das FE-Modell entkoppelt. Mit einer feinen Diskretisierung werden die Spannungskonzentrationen in der Nähe der Stoßfuge sehr gut abgebildet.

Die Poren und Zuschlagsstoffe des Steinmaterials stellen weitere Inhomogenitäten auf noch kleineren Skalen dar, die bei der gewählten Mikroskala bereits durch einen homogenisierten Werkstoff beschrieben werden. Die gewählte Skala wird dadurch gerechtfertigt, dass experimentelle Kenngrößen wie E-Modul und Festigkeit ebenfalls für das homogenisierte Steinmaterial bestimmt werden. Daher wird diese Skala auch als *Laborskala* bezeichnet.

### 3.2.2 Mesoskala

Die gewählte Mesoskala ist für die Modellierung von geschosshohen Wänden konzipiert. Numerische Ergebnisse dieser Skala dienen zusammen mit den Versuchsergebnissen zur Validierung der Makroskala. Kostenintensive experimentelle Versuche liefern die zuverlässigsten Daten zur Traglast von Schubwänden. Die numerische Untersuchung auf der Mesoskala ergänzt den Versuch und liefert einen genaueren Einblick in die innere Lastabtragung der Wand.

Bei der Mesoskala werden Fuge und Stein getrennt mit Kontakt- und Kontinuumselementen abgebildet. Um große Wandscheiben für die Validierung effizient zu simulieren, wird eine grobe Vernetzung gewählt, bei der jede Steinhälfte mit einem 4-knotigen Scheibenelement und jede Überbindelänge der Lagerfuge mit einem Kontaktelement modelliert wird.

In Abs. 7.5 wird ein einfaches Mesomodell für das Fugenversagen verwendet, um das Makromodell für dieses Versagen zu validieren. Die Erweiterung des Mesomodells um das Steinversagen wird in Abs. 11.6 aufgezeigt. In Abs. 10.3 werden Meso- und Makromodelle innerhalb eines Gebäudemodells kombiniert, um das gesamte Modell makroskopisch zu simulieren und einzelne Bauteile genauer mit dem Mesomodell zu untersuchen.

### 3.2.3 Makroskala mit Einheitszellen

Mit der Makroskala basierend auf *Einheitszellen* können ganze Gebäudemodelle mit dem Verbundwerkstoff Mauerwerk effizient berechnet werden. Die Abbildung der horizontalen, diagonalen und vertikalen Versagensmoden innerhalb der Einheitszelle wird in Abs. 3.4 beschrieben. Vergleicht man den Modellierungsaufwand bei einem Mauerwerksausschnitt von 2x4 Steinen, so reduziert sich die Vernetzung von ca. 200 Knoten bei der Mesoskala auf 25 Knoten bei der Makroskala (siehe Abb. 3.3). Auch die numerischen Untersuchungen in Kapitel 9 zeigen ein sehr robustes Verhalten. Daher erscheint dieses Makromodell robust und effizient genug, um es auch auf ein 3-dimensionales Berechnungsmodell mit entsprechend größerer Anzahl an Freiheitsgraden erweitern zu können.

## 3.3 Rissmodelle für kohäsive Reibungsmaterialien

### 3.3.1 Entfestigung und Lokalisierung

Kalksandstein und Mörtel gehören zur Gruppe der kohäsiven Reibungsmaterialien (*cohesive frictional materials*). Weitere Beispiele für diese Materialgruppe sind unbewehrter Beton, Naturstein oder Fels. Diese Werkstoffe verhalten sich nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit sehr spröde, was zu einer Konzentration von Rissen in lokalen Zonen führt.

Die Mechanik der Entfestigung wird an einer 1-achsigen Zugprobe des Steinmaterials aufgezeigt (siehe Abb. 3.4). Zwischen dem linear-elastischen Verhalten und der Maximalspannung gibt es eine *Mikroriss-Phase*. Diese Mikrorisse stellen sich fein verteilt über die Zugprobe an inhärenten Störstellen, wie z.B. Poren oder Einschlüssen, ein. Meistens sind Mikrorisse nur auf einer kleinen Skala erkennbar. Die Last-Verschiebungskurve der Zugprobe weicht nur geringfügig vom linearen Verhalten ab.

Mit dem Überschreiten der Maximalspannung nimmt die Schädigung nur in einem sehr schmalen Band zu. In dieser *Rissprozesszone* konzentrieren sich Mikrorisse und bilden makroskopische Risse, was als *Lokalisierung* bezeichnet wird. In Abb. 3.4 ist die Last-Verschiebungskurve mit dem Übergang vom kontinuierlichen zum diskontinuierlichen Verschiebungsfeld dargestellt. Der Übergang vom Kontinuum zum Diskontinuum in der Rissprozesszone wird u.a. von Kuhl und Thomée [Kuh00, Tho05] detailliert beschrieben und stellt eine große Herausforderung für die Element-Technologie dar (siehe Abs. 3.3.2).

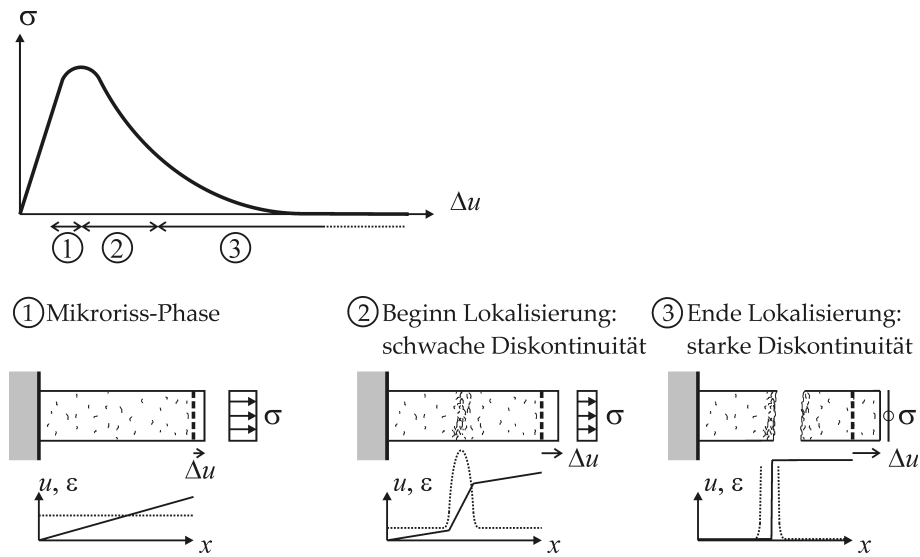


Abbildung 3.4: Lokalisierungseffekte bei kohäsiven Reibungsmaterialien

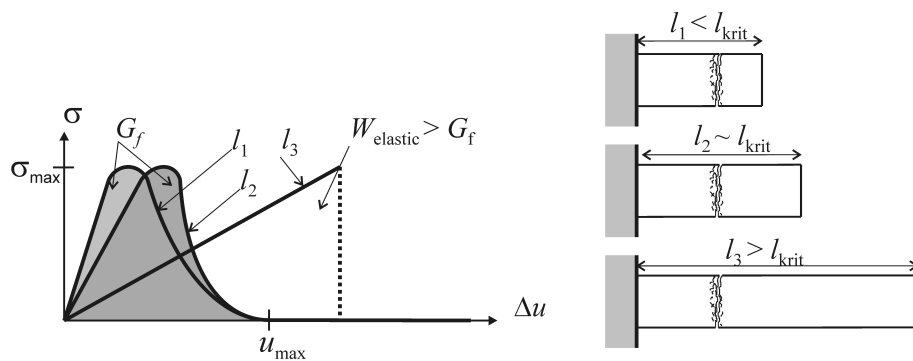


Abbildung 3.5: Entfestigung einer Zugprobe abhängig von der Probenlänge

Für das Durchtrennen einer Zugprobe ist eine auf die Querschnittsfläche bezogene Bruchenergie erforderlich, die unabhängig von der Probenlänge ist. Bei längeren Zugproben steigt das Volumen und damit die elastische Energie, die vor dem Erreichen der Maximalspannung in der Probe gespeichert ist. Wird eine kritische Probenlänge  $l_{krit}$  überschritten, ist die elastische Energie bei Maximallast größer als die Bruchenergie. Die Entfestigung tritt schlagartig mit einem dynamischen Risswachstum ein (siehe Abb. 3.5).

Aufgrund der geringen Bruchenergie des Steinmaterials ist bei typischen Abmessungen von Zugproben die kritische Länge bereits deutlich überschritten. Daher kann beim *direkten Zugversuch* lediglich die Maximallast geprüft werden. Zur Bestimmung der Bruchenergie empfiehlt sich ein sog.



*indirekter Zugversuch*, z.B. ein 3-Punkt-Biegeversuch. Die Interaktion zwischen der volumengesteuerten elastischen Energie und der oberflächengesteuerten Bruchenergie des Risses ist eine wesentliche Ursache für sog. Maßstabseffekte (*size effect*), vgl. Bažant [Baz83, Baz04, Mie97].

### 3.3.2 Rissmodelle bei der Finite-Elemente-Methode

#### Verschmiertes Rissmodell (siehe Abb. 3.6, Mitte)

Beim *verschmierten Rissmodell* wird der Riss innerhalb der Kontinuumselemente abgebildet und die Rissöffnung durch eine äquivalente Dehnung berücksichtigt. Da die materialspezifische Bruchenergie oberflächenspezifisch ist, die Kontinuumselemente aber die Mechanik eines Volumens abbilden, muss die Entfestigung im Materialmodell auf die jeweilige Elementgröße abgestimmt werden (sog. Regularisierung der Bruchenergie).

#### Diskretes Rissmodell (siehe Abb. 3.6, rechts)

Beim *diskreten Rissmodell* wird das FE-Netz entlang der Risse entkoppelt. Das ungeschädigte Gebiet wird mit Kontinuumselementen diskretisiert, die Oberflächen von makroskopischen Rissen mit Kontaktelementen abgebildet. Diese Kontaktelemente besitzen keine Volumenausdehnung und können daher die Mechanik dieser makroskopischen Risse mittels Kontakt- und Reibmodellen sehr gut abbilden. Wird ein Rissfortschrittskriterium überschritten, wird das FE-Netz an der Risspitze getrennt und neue Kontaktelemente eingefügt. Um die adaptive Vernetzung an der Risspitze zu vermeiden, baut u.a. Carol [CWC08] vor der Simulation zwischen den Kontinuumselementen eine Vielzahl von Kontaktelementen ein.

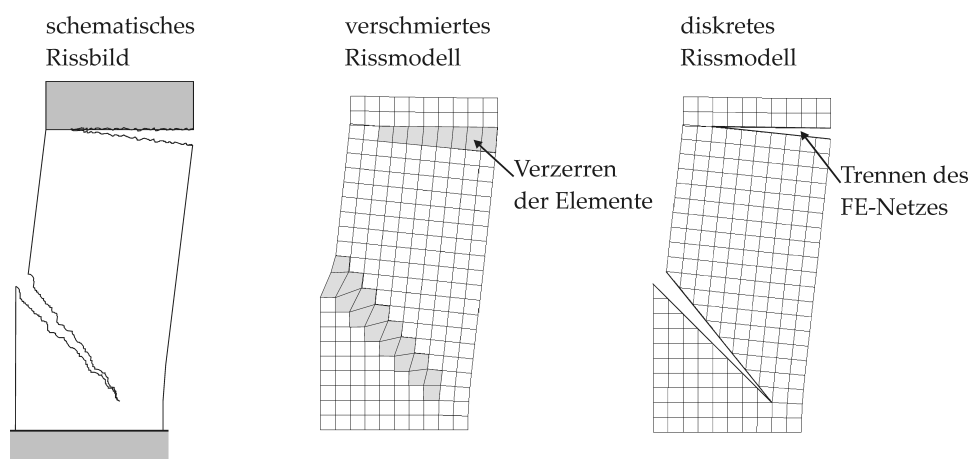


Abbildung 3.6: Rissmodelle bei der Finiten Element Methode

### Gegenüberstellung der Rissmodelle

Beim verschmierten Rissmodell kann mit einer einfachen Vernetzung ein beliebig orientierter Riss abgebildet werden (siehe [Bor86]). Diesem Vorteil steht aber die ungenügende Abbildung des diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes gegenüber. Die kontinuierlichen Ansatzfunktionen der Kontinuumselemente führen zu einer künstlichen Versteifung im FE-Modell (*stress-locking*) und zu einer starken Netzabhängigkeit, bei der sich die Risse bevorzugt parallel zu den Elementkanten einstellen (*directional bias*). Dieses Defizit wurde erstmals von Rots [Rot88] beschrieben. Weitere Untersuchungen folgten von [Lac99, GJ08, BRN06]. Für netzunabhängige Ergebnisse wurden daher neben der Regularisierung der Bruchenergie weitere Regularisierungsmethoden entwickelt: eine gradienten-erweiterte Theorie oder nicht-lokale Formulierungen sind in [JB02a, Jir05] aufgezeigt. Unabhängig von den Regularisierungsmethoden ist beim verschmierten Ansatz eine feine Diskretisierung erforderlich.

Ein wesentlicher Vorteil des *diskreten Rissmodells* ist die bessere Abbildung des diskontinuierlichen Verschiebungsfelds. Programmiertechnisch aufwändig ist das Entkoppeln des FE-Netzes für beliebig orientierte Risse. Das Netz entlang der Elementkanten aufzutrennen, stellt die einfachste programmiertechnische Lösung dar. Um einen beliebig orientierten Riss abzubilden, ist eine adaptive Neuvernetzung im Bereich der Risspitze erforderlich. Mit der EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD (X-FEM) kann die adaptive Neuvernetzung vermieden werden (siehe [MB96, MSMB00]). Durch die Anreicherung der Ansatzfunktionen können die diskontinuierlichen Verschiebungen innerhalb eines Elements abgebildet werden. Die Anreicherung der Ansatzfunktionen führt zu zusätzlichen Freiheitsgraden an den FE-Knoten (sogenanntes *nodal enrichment*). Daher bleibt X-FEM bei der Abbildung einer Vielzahl von Rissen ein anspruchsvoller Algorithmus.

Der *strong discontinuity approach* in der Form als *elements with embedded discontinuities* stellt einen Kompromiss zwischen dem verschmierten und dem diskreten Ansatz dar (siehe [Fei04, JB02b]). Dabei werden die Elemente wieder mit diskontinuierlichen Ansatzfunktionen angereichert. Durch statische Kondensation auf Elementebene werden zusätzliche Freiheitsgrade an den Knoten vermieden.

Jirásek [Jir00] vergleicht die unterschiedlichen Modellierungsstrategien. In den numerischen Beispielen von [FKLH04, OHS06] wird gezeigt, dass der verschmierte Ansatz bei ausreichend feiner Vernetzung zur Lösung des diskreten Modells konvergiert.

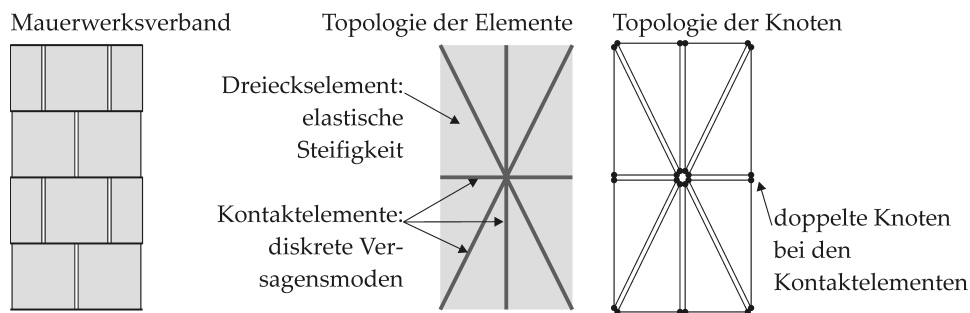


Abbildung 3.7: Einheitszelle mit der Topologie der Elemente und Knoten

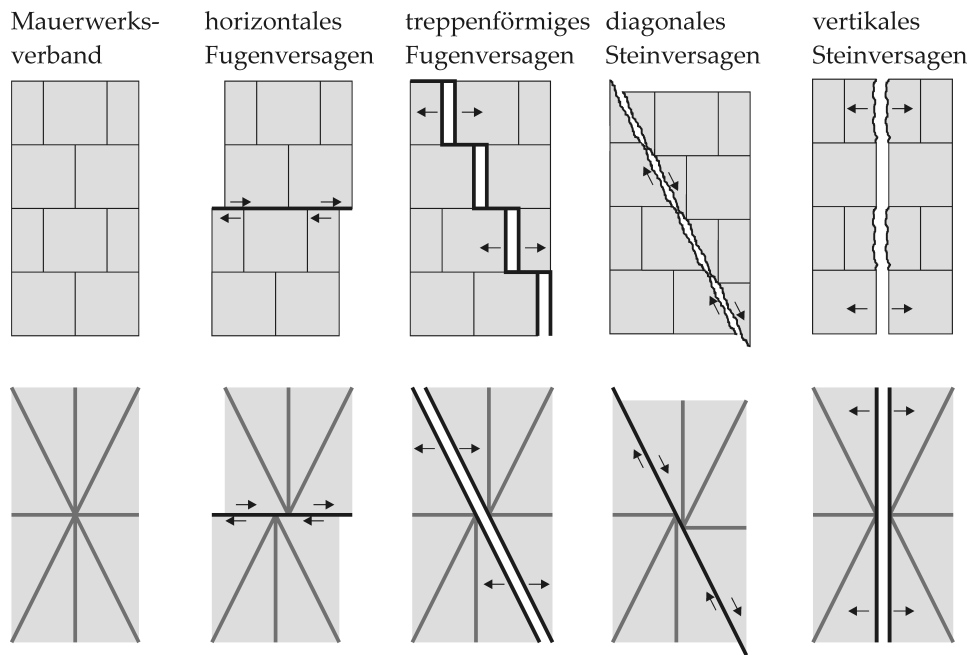
## 3.4 Modellierung von Mauerwerk mit Einheitszellen

### 3.4.1 Aufbau der Einheitszelle

Die Modellierung von Mauerwerk mit Einheitszellen stellt ein Makromodell dar, mit dem große Wandscheiben effizient simuliert werden können. Die generische Zelle ist mit der Zellgröße und der Vernetzung auf das Steinformat abgestimmt und bildet so die Struktur des Mauerwerksverbands makroskopisch ab. Für das quadratische Steinformat konnte eine Größe von  $2 \times 4$  Steinen als geeignete Abmessung für die Zelle identifiziert werden. Bei anderen Steinformaten und/oder Verbandsarten ist die Zelle anzupassen. In Abb. 3.7 ist der Aufbau der Einheitszelle mit dem dazugehörigen Mauerwerksverband dargestellt. Das Seitenverhältnis der Zelle ist auf die diagonalen Versagensmoden abgestimmt. Bei der gewählten Größe der Zelle kann eine ausreichende Anzahl an Rissen abgebildet werden und gleichzeitig der Werkstoff *Mauerwerk* makroskopisch nach der Homogenisierungstheorie beschrieben werden.

Die Einheitszelle besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Kontinuums- und Kontaktelementen mit folgenden Aufgaben:

- Dreieckselement:  
elastische Verformung des Kontinuums
- horizontales Kontaktelement:  
horizontales Fugenversagen
- diagonales Kontaktelement:  
treppenförmiges Fugenversagen und diagonalen Steinriss
- vertikales Kontaktelement:  
vertikaler Steinriss



**Abbildung 3.8:** charakteristische Versagensmoden beim Mauerwerksverband (oben), Abbildung mit diskreten Rissmodellen innerhalb der Einheitszelle (unten)

Mit diesem Aufbau der Einheitszelle können alle wesentlichen Versagensmoden, die bei den Wandversuchen beobachtet wurden, makroskopisch abgebildet werden. Für alle Versagensarten sind innerhalb der Einheitszelle entsprechende Kontaktelemente vorgesehen, um die Risse mit einem *diskreten Rissmodell* zu berücksichtigen. In Abb. 3.8 werden die Rissmuster mit der numerischen Abbildung innerhalb der Einheitszelle verglichen. Der treppenförmige Riss wird zugunsten der numerischen Effizienz mit einem diagonalen Kontaktelement angenähert. Da das treppenförmige Fugenversagen und das diagonale Steinversagen die gleiche makroskopische Rissorientierung haben, können beide Rissmuster mit einem Kontaktelement abgebildet werden. Die unterschiedlichen Versagenskriterien für Stein und Mörtel mit der unterschiedlichen horizontalen und tangentialen Kinematik werden auf Materialebene mit einem geeigneten Schädigungsmodell berücksichtigt. Die Elementformulierung und die dazugehörigen Materialmodelle sind in den Kapitel 6, 7 und 8 beschrieben.

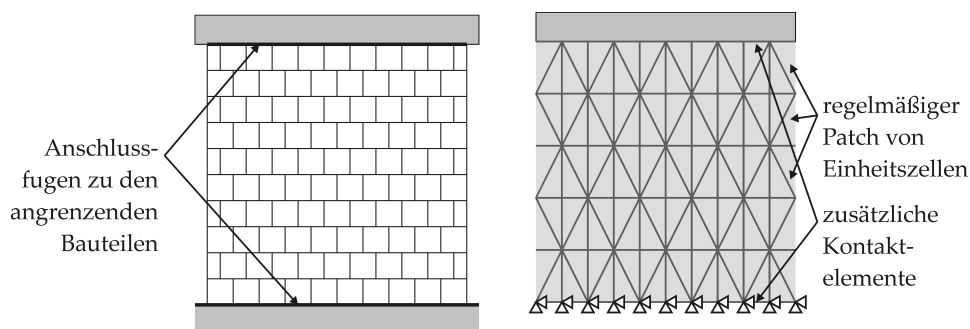
Bei den Kontaktelementen werden aufeinanderliegende Knoten vernetzt (siehe Abb. 3.7). Im ungeschädigten Zustand der Kontaktelemente bleiben die doppelten Knoten mit einer hohen Penalty-Steifigkeit gekoppelt. Wird ein Versagenskriterium erreicht, kann mit den Kontaktelementen eine Viel-

zahl von Rissen abgebildet werden, ohne die Topologie der Vernetzung zu ändern. Mit dieser Strategie können die Element- und Materialformulierungen modular und einfach in kommerzielle Programme übertragen werden. Diese Strategie, mit einer speziellen Vernetzung die wesentlichen Rissmuster zu berücksichtigen, wurde u.a. von Lourenço [Lou96, Sch04, For04] bei der Modellierung von Mauerwerk auf der Mesoskala verfolgt. Auch bei Beton wird diese Modellierungsstrategie auf der Mesoskala bereits sehr erfolgreich u.a. von Carol [CWC08] angewendet. Mit der vereinfachten Abbildung des treppenförmigen Fugenversagens mit einem diagonalen Kontaktelement wird diese erfolgreiche Modellierungsstrategie von der Meso- auf die Makroskala übertragen.

### 3.4.2 Modellierung von Wandscheiben

Wandscheiben können mit einer regelmäßigen Anordnung von Einheitszellen abgebildet werden (siehe Abb. 3.9). Die Mörtelfugen zwischen angrenzenden Bauteilen werden im numerischen Modell durch eine zusätzliche Lage an Kontaktelementen abgebildet.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Netzgenerator für diese Einheitszellen implementiert. Damit können rechteckige Wandscheiben mit Einheitszellen vernetzt werden und die zusätzlichen Kontaktelemente an der Grenzschicht von Linienlagern und anderen Bauteilen generiert werden.



**Abbildung 3.9:** Modellierung von Wandscheiben (links) mit einer regelmäßigen Anordnung von Einheitszellen (rechts)

### 3.5 Bekannte Berechnungsmodelle für Mauerwerk

Ähnlich wie bei anderen spröden Materialien wurden auch für Mauerwerk Berechnungsansätze mit diskreten und verschmierten Rissmodellen entwickelt (siehe Abs. 3.3). Bei Mauerwerk wurden diese beiden Methoden auf unterschiedliche Skalen angewendet.

#### **Makromodell mit verschmiertem Rissmodell:**

Bei Makromodellen wird das Tragverhalten phänomenologisch mit einem homogenisierten Ersatzwerkstoff *Mauerwerk* beschrieben. Da bei der Diskretisierung auf Elementebene nicht mehr in Stein und Mörtel unterschieden wird, sind komplizierte anisotrope Versagenskriterien erforderlich, um den Mauerwerksverband im Materialmodell zu berücksichtigen. In den 80-er Jahren wurde von Ganz und Thürlimann ein Mehrflächen-Plastizitätsmodell entwickelt, das aus fünf Versagensflächen zusammengesetzt ist [Gan85]. Diese Versagenskriterien wurden u.a. von Seim, Lourenço, Schlegel, Mistler und Furtmüller in [Gan85, Sei94, Lou96, Sch04, Mis06, Fur10] weiterentwickelt und mit dem verschmierten Risskonzept in die FE-Analyse eingebaut. Um die anisotropen Materialmodelle einfach zu halten, wurde auf eine Kombination von Schädigung und Plastizität verzichtet, so dass diese Makromodelle eine zyklische Belastung wie unter Erdbeben nicht abbilden können. Dieses verschmierte Rissmodell wurde u.a. in [Moj95] auf eine 3-dimensionale Formulierung erweitert.

#### **Mesomodell mit diskretem Rissmodell:**

Da man bei Makromodellen trotz der homogenisierten Beschreibung wegen der Defizite des verschmierten Rissmodells auf eine feine Diskretisierung angewiesen ist, wurde in jüngerer Zeit u.a. in [Sch04, MPG04] die Simulation von Mauerwerk auf der Mesoskala mit einem diskreten Rissmodell vorangetrieben. Im Vergleich zum verschmierten Ansatz wird damit auch die Lokalisierung von Rissen wesentlich besser erfasst. Das Mesomodell und die Umsetzung des diskreten Ansatzes mit Kontaktelementen ist in Abs. 3.2.2 beschrieben. Spada [SGR09] konnte mit kombinierten konstitutiven Gesetzen auch eine zyklische Belastung simulieren (siehe Abs. 4.3.2). Mesomodelle beschränken sich meist auf Fugenversagen und vertikales Steinversagen. Bei der Anwendung auf große Strukturen ist aufgrund des hohen numerischen Aufwands ein paralleles Rechnen erforderlich [For04].

#### **Weitere Berechnungsansätze:**

In Anlehnung an die *applied element method* wird in jüngster Zeit in [MM03, Mil11] ein diskreter Berechnungsansatz verfolgt, bei dem sowohl die Ver-

formung des Kontinuums als auch diskontinuierliche Verschiebungen bei Rissen mit Federmodellen abgebildet werden.

Aufgrund des komplexen Verhaltens von Mauerwerk wurden auch Ersatzmethoden entwickelt, die ganze Wandscheiben phänomenologisch mit einem Ersatzstab beschreiben. Diese empirischen Berechnungsmethoden, die weitgehend auf den Daten von experimentellen Großversuchen beruhen, werden u.a. von Gellert in [Gel10, BGM10, MBFS07, Stü11] beschrieben.



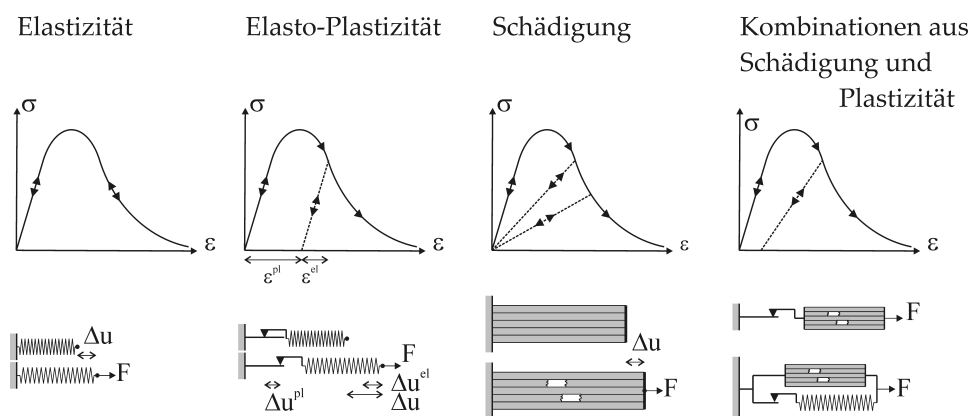


# Kapitel 4

## Konstitutive Gesetze

### 4.1 Überblick Materialmodelle

Um die wesentlichen Effekte beim komplexen Tragverhalten von Mauerwerk zu beschreiben, sind nichtlineare inelastische Materialgesetze erforderlich. Die verschiedenen Materialgesetze werden in Elastizitäts-, Schädigungs- und Plastizitätsmodelle unterteilt (siehe [Leu05, Tho05]). Entsprechend Abb. 4.1 kann mit allen Modellen eine nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehung mit Ver- und Entfestigungsverhalten formuliert werden. Die drei Modelle unterscheiden sich dabei wesentlich im Entlastungsverhalten. Bei der Elastizitätstheorie ist der Be- und Entlastungspfad identisch. Die Spannungs-Dehnungsbeziehung ist unabhängig von der Belastungsgeschichte definiert. Für Schädigungs- und Plastizitätsmodelle wird die Belastungsgeschichte zusätzlich durch eine geeignete Anzahl an internen Variablen  $\alpha$  beschrieben.



**Abbildung 4.1:** Spannungs-Dehnungsbeziehung von Materialmodellen (oben) - rheologische Modelle (unten)

**Elastizität:**

In dieser Arbeit wird ein lineares Elastizitätsmodell verwendet. Nichtlineares Verhalten wird mit den inelastischen Modellen von Abs. 4.2 und 4.3 beschrieben. Der Spannungstensor wird mit dem Hooke'schen Gesetz zu

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon \quad (4.1)$$

bestimmt. Im allgemeinen Fall ist das Elastizitätsmodell anisotrop und der Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  voll besetzt. Für die makroskopische Beschreibung von Mauerwerk ist ein orthotropes Modell ausreichend (siehe Abs. 6.2).

**Plastizität:**

Da hier ein Elastizitäts- mit einem Plastizitätsmodell kombiniert wird, spricht man auch von der Elasto-Plastizität. Mit diesem mathematischen Modell kann das Fließen von duktilen Materialien, wie z.B. Metallen, sehr gut beschrieben werden. Das Verhalten von spröden Materialien unter zyklischer Belastung kann ein Plastizitätsmodell nicht abbilden. Ein einfaches Plastizitätsmodell wird beim Reibmodell in Abs. 4.3.3 aufgezeigt. Eine ausführliche Beschreibung von Plastizitätsmodellen findet sich bei [SH00].

**Schädigungsmodell:**

Ein Schädigungsmodell beschreibt das nichtlineare Verhalten durch eine Reduktion der Steifigkeit (siehe Abs. 4.2). Für das nichtlineare Verhalten des Kontinuums *Mauerwerk* im Druckbereich wird ein Schädigungsmodell angewendet (siehe Abs. 6.3). Zur realistischen Beschreibung von Rissen inklusive des Kontakt- und Reibverhaltens im geschädigten Zustand ist ein kombiniertes Schädigungs- und Plastizitätsmodell erforderlich (siehe Abs. 4.3).

## 4.2 Schädigungsmodell

Mit Schädigungsmodellen kann bei Mauerwerk und anderen spröden Materialien das Risswachstum ideal abgebildet werden. Für die Kombination der Schädigung mit Plastizität in Abs. 4.3 eignet sich ein isotropes Schädigungsmodell mit einer skalaren Schädigungsvariable  $d$  ( $d$  für *damage*).

**1-dimensionales Schädigungsmodell:**

Schädigungsmodelle gehen zurück auf die Arbeiten von Kachanov und Lemaitre [Kac86, Lem92]. Im 1-dimensionalen Fall wird eine gleichmäßig verteilte Konzentration an Mikrodefekten angenommen. Die gesamte Quer-

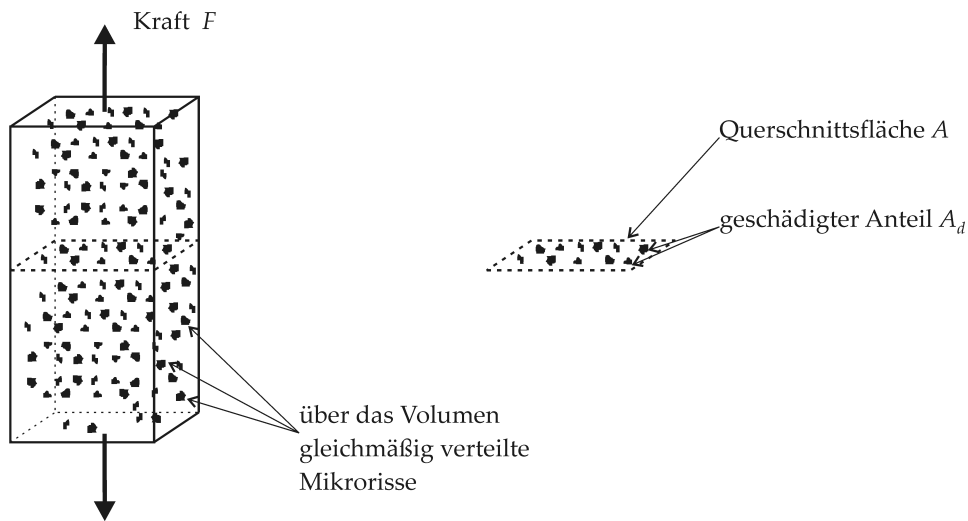


Abbildung 4.2: geschädigtes Kontinuum unter 1-dimensionaler Belastung

schnittsfläche wird als  $A$ , der geschädigte Anteil als  $A_d$  bezeichnet, womit die isotrope Schädigungsvariable definiert wird:

$$d = \frac{A_d}{A} \quad \text{mit } d \in [0;1] \text{ und } d|_{t=0} = 0 \quad (4.2)$$

Demnach entspricht  $1 - d$  dem ungeschädigten Anteil an der Querschnittsfläche. Für die makroskopische Beschreibung wird die sogenannte nominelle Spannung  $\sigma$  weiterhin als der Quotient aus Kraft  $F$  und der gesamten Querschnittsfläche  $A$  definiert.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.3)$$

Die effektive Spannung  $\tilde{\sigma}$  wird auf den ungeschädigten Flächenanteil bezogen.

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{(1-d)A} = \frac{1}{1-d}\sigma \quad (4.4)$$

Durch Umstellen von (4.4) und der Definition eines konstitutiven Gesetzes für die effektive Spannung  $\tilde{\sigma} = E\epsilon$  erhält man das konstitutive Gesetz für die makroskopische Beschreibung:

$$\sigma = (1-d)\tilde{\sigma} = (1-d)E\epsilon \quad (4.5)$$

Wie bei der 3-dimensionalen Formulierung muss die Schädigung  $d$  mit geeigneten Evolutionsgesetzen beschrieben werden.

**3-dimensionale Formulierung des Schädigungsmodells:**

Das einfachste Modell für ein Kontinuum ist ein skalares Schädigungsmodell, bei der die Schädigung  $d$  abhängig von der internen Variablen  $\alpha_d$  formuliert ist:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C}\epsilon \quad \text{effektive Spannung} \quad (4.6)$$

$$\sigma = (1 - d)\tilde{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C}\epsilon \quad \text{konstitutives Gesetz} \quad (4.7)$$

$$\sigma^{eq} = \sigma^{eq}(\tilde{\sigma}) \quad \text{Vergleichsspannung} \quad (4.8)$$

$$d = g(\alpha_d) \quad \text{Evolutionsgesetz} \quad (4.9)$$

$$\dot{d} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_d} \dot{\alpha}_d = H \dot{\alpha}_d \quad (4.10)$$

$$f_d = \sigma^{eq} - \alpha_d \leq 0 \quad \text{Schädigungsbedingung} \quad (4.11)$$

Je nach Anwendung kann mit  $g(\alpha_d)$  ein beliebiges Schädigungsgesetz definiert werden. Die Funktion  $\sigma^{eq}(\tilde{\sigma})$  transferiert den 2-stufigen Tensor  $\tilde{\sigma}$  in einen positiven skalaren Wert. Die Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  kann abhängig von der Dehnung  $\epsilon$  oder alternativ abhängig von der effektiven Spannung  $\tilde{\sigma}$  formuliert werden. In dieser Arbeit wird  $\sigma^{eq}$  mit  $\tilde{\sigma}$  formuliert, um das Schädigungsmodell auch für das erweiterte Rissmodell von Abs. 8.1.1 anwenden zu können. Die Variable  $\alpha_d$  ist die zur Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  korrespondierende interne Variable.

Die Be- und Entlastungsbedingung wird durch eine Kuhn-Tucker-Bedingung definiert:

$$\dot{\alpha}_d \geq 0; \quad f_d \leq 0; \quad \dot{\alpha}_d f_d = 0 \quad \text{Kuhn-Tucker-Bedingung} \quad (4.12)$$

$$\dot{\alpha}_d \dot{f}_d = 0 \quad \text{Konsistenzbedingung} \quad (4.13)$$

**Linearisierung des Schädigungsmodells:**

Durch Differentiation des konstitutiven Gesetzes (4.7) erhält man:

$$\dot{\sigma} = (1 - d)\dot{\tilde{\sigma}} - \tilde{\sigma}\dot{d} = (1 - d)\mathbf{C}\dot{\epsilon} - \tilde{\sigma}\dot{d}$$

$$\text{mit (4.10): } \dot{\sigma} = (1 - d)\mathbf{C}\dot{\epsilon} - H\tilde{\sigma}\dot{\alpha}_d \quad (4.14)$$

Im elastischen Schritt gilt  $f_d < 0$  und aus (4.12) folgt  $\dot{\alpha}_d = 0$ . Den elastischen Operator  $\mathbf{C}^{tan,el}$  erhält man aus (4.14):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C}^{tan,el} \dot{\epsilon} \\ \mathbf{C}^{tan,el} &= (1 - d)\mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im inelastischen Schritt ist  $\dot{\alpha}_d > 0$ . Die Evolution der internen Variable wird mit der Konsistenzbedingung (4.13) bestimmt. Für  $\dot{\alpha}_d > 0$  gilt  $\dot{f}_d = 0$  und somit

$$\begin{aligned} \dot{f}_d = \dot{\sigma}^{eq}(\tilde{\sigma}) - \dot{\alpha}_d &= \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} - \dot{\alpha}_d = 0 \\ \text{Einsetzen von (4.6): } \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \tilde{\sigma}} \mathbf{C} \dot{\epsilon} - \dot{\alpha}_d &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Durch Auflösen von (4.16) nach  $\dot{\alpha}_d$  und Einsetzen in (4.14) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C}^{tan,in} \dot{\epsilon} \\ \text{mit: } \mathbf{C}^{tan,in} &= (1-d)\mathbf{C} - H\tilde{\sigma} \otimes \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \tilde{\sigma}} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Zusammenfassend erhält man folgendes Materialgesetz:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C}^{tan} \dot{\epsilon} \\ \mathbf{C}^{tan} &= \begin{cases} \mathbf{C}^{tan,el} & \text{elastischer Schritt nach (4.15)} \\ \mathbf{C}^{tan,in} & \text{inelastischer Schritt nach (4.17)} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Im Allgemeinen ist der Operator  $\mathbf{C}^{tan,in}$  in (4.17) unsymmetrisch. Durch die Verwendung einer quadratischen Funktion für die Definition der Vergleichsspannung (z.B. die spezifische Dehnungsenergie  $\sigma^{eq} = 1/2\sqrt{\tilde{\sigma}\mathbf{C}^{-1}\tilde{\sigma}}$ ) erhält man wieder einen symmetrischen Operator. Für die makroskopische Beschreibung von kohäsiven Reibmaterialien sind unterschiedliche Festigkeiten im Zug- und Druckbereich erforderlich, die nicht mit einer quadratischen Definition beschrieben werden können. Daher wird in dieser Arbeit weiterhin mit der allgemeinen unsymmetrischen Formulierung gearbeitet.

### 4.3 Kombiniertes Schädigungs- / Plastizitätsmodell

Schädigung und Plastizität können mit verschiedenen rheologischen Modellen miteinander kombiniert werden (siehe Abb. 4.1). Entsprechende Materialmodelle sind in [Val11, GJ06, Leu05, Sua95] vorgestellt.

In dieser Arbeit wird das sogenannte 2-Phasen-Modell von G. Alfano und E. Sacco für die Beschreibung einer Grenzschicht (*interface*) weiterverfolgt. In [AS06, SGR09] wird ein einfaches konstitutives Gesetz vorgestellt, welches das Risswachstum mit einem Schädigungsmodell und das Kontakt- und Reibverhalten an einer geschädigten Fuge mit einem Plastizitätsmodell zutreffend beschreibt.

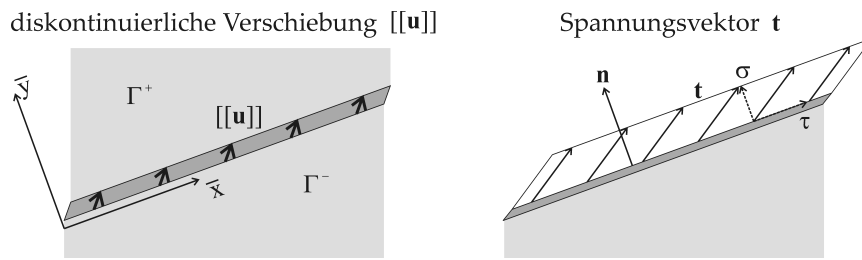


Abbildung 4.3: Kinematik und Spannungsvektor an einer Grenzschicht

### 4.3.1 Mechanische Größen an einer Grenzschicht

Bei einem *diskreten Rissmodell* wird eine Grenzschicht mit einer Spannungs-Rissöffnungsbeziehung beschrieben. Bei diesem konstitutiven Gesetz wird der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  abhängig von der Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  und einer geeigneten Anzahl an internen Variablen  $\alpha$  formuliert:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}([[\mathbf{u}]], \alpha)$$

Für das konstitutive Gesetz eignet sich eine Formulierung im lokalen  $\bar{x}\bar{y}$ -Koordinatensystem der Grenzschicht (siehe Abb. 4.3). Im 2-dimensionalen Fall werden die Komponenten der vektoriellen Größen  $[[\mathbf{u}]]$  und  $\mathbf{t}$  folgendermaßen bezeichnet:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \tau \\ \sigma \end{bmatrix} \quad [[\mathbf{u}]] = \begin{bmatrix} [[u]]_{\bar{x}} \\ [[u]]_{\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

### 4.3.2 2-Phasen-Materialmodell

Bei einem 2-Phasen-Materialmodell werden zwei verschiedene konstitutive Gesetze (Phasen) miteinander kombiniert:

adhäsive Phase: elastische Kopplung der ungeschädigten Fuge

Reib-Phase: Kontakt- und Reibmodell für die geschädigte Fuge

Die adhäsive Phase wird mit Index  $A$ , die Reib-Phase mit Index  $F$  (*friction*) bezeichnet. Bei diesem Modell wird das mechanische Verhalten der zwei Phasen additiv mit der skalaren Schädigungsvariable  $d$  überblendet. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  berechnet sich mit

$$\mathbf{t} = (1 - d)\mathbf{t}_A + d\mathbf{t}_F \quad \text{mit } d \in [0; 1] \quad \text{und } d|_{t=0} = 0 \quad (4.20)$$

Die Grenzschicht hat auch im geschädigten Zustand eine Resttragfähigkeit

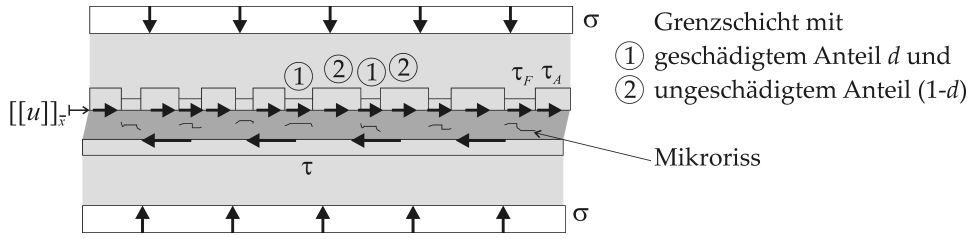


Abbildung 4.4: Rheologisches Modell des 2-Phasen-Materialmodells

(siehe Abb. 4.4), was mit  $\mathbf{t}_F$  im numerischen Modell berücksichtigt wird. Dieses Materialmodell stellt eine Erweiterung des skalaren Schädigungsmodells von Abs. 4.2 dar. Zur Berechnung der Spannungskomponenten von beiden Phasen wird folgende kinematische Annahme an die Verschiebung der Grenzschicht gemacht:

$$[[\mathbf{u}]]_A = [[\mathbf{u}]]_F \equiv [[\mathbf{u}]] \quad (4.21)$$

Die Evolution der Schädigungsvariable  $d$  wird durch die adhäsive Phase gesteuert. Analog zu Abs. 4.2 ist eine Schädigungsbedingung  $f_d$  und ein Schädigungsgesetz  $g$  definiert. Durch Differentiation von (4.20) erhält man die ratenabhängige Formulierung des konstitutiven Gesetzes:

$$\dot{\mathbf{t}} = (1-d)\dot{\mathbf{t}}_A + d\dot{\mathbf{t}}_F + (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A)\dot{d} \quad \text{konstitutives Gesetz} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A([[ \mathbf{u} ]]) \quad \text{adhäsive Phase} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{t}_F([[ \mathbf{u} ]], [[ \mathbf{u} ]]^{pl}) \quad \text{Reib-Phase} \quad (4.24)$$

$$\sigma^{eq} = \sigma^{eq}(\mathbf{t}_A) \quad \text{Vergleichsspannung} \quad (4.25)$$

$$d = g(\alpha_d) \quad \text{Evolutionsgesetz} \quad (4.26)$$

$$\dot{d} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_d} \dot{\alpha}_d = H \dot{\alpha}_d \quad (4.27)$$

$$f_d = \sigma^{eq}(\mathbf{t}_A) - \alpha_d \leq 0 \quad \text{Schädigungsbedingung} \quad (4.28)$$

In dieser Arbeit wird die adhäsive Phase linear-elastisch beschrieben:

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{C}_A [[ \mathbf{u} ]] \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_A = \begin{bmatrix} p_{\bar{x},A} & 0 \\ 0 & p_{\bar{y},A} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Die Penalty-StEIFigkeiten sind mit  $p_{\bar{x},A}$  und  $p_{\bar{y},A}$  bezeichnet. Definiert man mit  $\mathbf{t}_F = \mathbf{C}_F^{tan} [[ \dot{\mathbf{u}} ]]$  einen tangentialen Operator für die Reib-Phase (siehe Abs. 4.3.3), lässt sich das konstitutive Gesetz (4.22) abhängig von  $[[ \dot{\mathbf{u}} ]]$  und  $\dot{d}$  formulieren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= ((1-d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan}) [[ \dot{\mathbf{u}} ]] + (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A)\dot{d} \\ \text{mit (4.27): } \dot{\mathbf{t}} &= ((1-d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan}) [[ \dot{\mathbf{u}} ]] + H(\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A)\dot{\alpha}_d \end{aligned} \quad (4.30)$$

Analog zum Schädigungsmodell von Abs. 4.2 wird der elastische und der inelastische Schritt mit einer Kuhn-Tucker-Bedingung unterschieden.

$$\dot{\alpha}_d \geq 0; \quad f_d \leq 0; \quad \dot{\alpha}_d f_d = 0 \quad \text{Kuhn-Tucker-Bedingung} \quad (4.31)$$

$$\dot{\alpha}_d \dot{f}_d = 0; \quad \text{Konsistenzbedingung} \quad (4.32)$$

Für den elastischen Schritt gilt  $f_d < 0$  und somit  $\dot{\alpha}_d = 0$ . Aus (4.30) folgt

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C}^{tan,el} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (4.33)$$

$$\text{mit: } \mathbf{C}^{tan,el} = (1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan}$$

Für den inelastischen Schritt wird die Evolution der internen Variable mit der Konsistenzbedingung (4.32) bestimmt. Für  $\dot{\alpha}_d > 0$  gilt  $\dot{f}_d = 0$  und somit

$$\dot{f}_d = \dot{\sigma}^{eq}(\mathbf{t}_A) - \dot{\alpha}_d = \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \mathbf{t}_A} \dot{\mathbf{t}}_A - \dot{\alpha}_d = 0$$

$$\text{Einsetzen von (4.29): } \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \mathbf{t}_A} \mathbf{C}_A [[\dot{\mathbf{u}}]] - \dot{\alpha}_d = 0 \quad (4.34)$$

Durch Auflösen von (4.34) nach  $\dot{\alpha}_d$  und Einsetzen in (4.30) erhält man

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C}^{tan,in} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (4.35)$$

$$\text{mit: } \mathbf{C}^{tan,in} = (1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan} + H(\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A) \otimes \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \mathbf{t}_A} \mathbf{C}_A$$

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Materialgesetz:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C}^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (4.36)$$

$$\mathbf{C}^{tan} = \begin{cases} \mathbf{C}^{tan,el} & \text{elastischer Schritt nach (4.33)} \\ \mathbf{C}^{tan,in} & \text{inelastischer Schritt nach (4.35)} \end{cases}$$

Wie beim Schädigungsmodell von Abs. 4.2 ergeben sich für den Operator  $\mathbf{C}^{tan,in}$  unsymmetrische Einträge aus der Evolution der Schädigung, was bei der Wahl der Gleichungslöser zu berücksichtigen ist.

### 4.3.3 Kontakt- und Reibmodell

Das konstitutive Gesetz der Reib-Phase wird in normaler Richtung mit einem Kontaktmodell und in tangentialer Richtung mit einem Plastizitätsmodell beschrieben.

Die Kontaktbedingung wird mit dem Penalty-Faktor  $p_{\bar{y},F}$  formuliert:

$$\sigma_F = C_{\bar{y}} [[u]]_{\bar{y}} \quad (4.37)$$

$$\text{mit } C_{\bar{y}} = \begin{cases} 0 & \text{für } [[u]]_{\bar{y}} > 0 \text{ Kontakt offen} \\ p_{\bar{y},F} & \text{für } [[u]]_{\bar{y}} \leq 0 \text{ Kontakt geschlossen} \end{cases}$$



In tangentialer Richtung wird das Reibverhalten der geschädigten Phase mit einem Plastizitätsmodell abgebildet:

$$\begin{aligned} [[u]]_{\bar{x}} &= [[u]]_{\bar{x}}^{el} + [[u]]_{\bar{x}}^{pl} \\ [[\dot{u}]]_{\bar{x}} &= [[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{el} + [[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{pl} \end{aligned} \quad \text{additive Zerlegung} \quad (4.38)$$

$$\dot{\tau}_F = p_{\bar{x},F} \left( [[\dot{u}]]_{\bar{x}} - [[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{pl} \right) \quad \text{konstitutives Gesetz} \quad (4.39)$$

$$f_y(\mathbf{t}_F) = |\tau_F| + \mu \sigma_F \leq 0 \quad \text{Fließbedingung} \quad (4.40)$$

$$[[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{pl} = \dot{\gamma}_y \frac{\partial f_y}{\partial \tau_F} = \pm \dot{\gamma}_y \quad \text{Fließregel} \quad (4.41)$$

Um das Plastizitätsmodell einfach zu halten, wird ein konstanter Reibkoeffizient  $\mu$  ohne plastische Verzerrung in Normalenrichtung ( $[[\dot{u}]]_{\bar{y}}^{pl} = 0$ ) verwendet. In Abs. 11.3 wird der geschädigte Zustand um ein Dilatanzmodell erweitert, das auf einem Kontaktmodell basiert und somit das Plastizitätsmodell nicht erweitert werden muss. Da die Fließregel  $\partial f_y / \partial \tau_F$  vom Gradienten der Fließfunktion  $\partial f_y / \partial \mathbf{t}_F$  abweicht, ist in (4.41) eine nicht-assoziierte Fließregel definiert. Der elastische und der plastische Schritt wird mit folgender Kuhn-Tucker-Bedingung unterschieden.

$$\dot{\gamma}_y \geq 0; \quad f_y \leq 0; \quad \dot{\gamma}_y f_y = 0 \quad \text{Kuhn-Tucker-Bedingung} \quad (4.42)$$

$$\dot{\gamma}_y \dot{f}_y = 0 \quad \text{Konsistenzbedingung} \quad (4.43)$$

#### Linearisierung des Plastizitätsmodells:

Durch Einsetzen der Fließregel (4.41) in (4.39) erhält man

$$\dot{\tau}_F = p_{\bar{x},F} \left( [[\dot{u}]]_{\bar{x}} \mp \dot{\gamma}_y \right) \quad (4.44)$$

Für den elastischen Schritt gilt  $\dot{\gamma}_y = 0$  und aus (4.44) folgt:

$$C_{\bar{x}} = \frac{\partial \dot{\tau}_F}{\partial [[\dot{u}]]_{\bar{x}}} = p_{\bar{x},F} \quad C_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial \dot{\tau}_F}{\partial [[\dot{u}]]_{\bar{y}}} = 0$$

Im plastischen Fall wird  $\dot{\gamma}_y$  aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f}_y = 0$  bestimmt:

$$\dot{f}_y = \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{t}_F} \mathbf{t}_F = \pm \dot{\tau}_F + \mu \dot{\sigma}_F = 0$$

$$\text{mit (4.44), (4.37):} \quad \pm p_{\bar{x},F} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} - p_{\bar{x},F} \dot{\gamma}_y + \mu C_{\bar{y}} [[\dot{u}]]_{\bar{y}} = 0 \quad (4.45)$$

Löst man (4.45) nach  $\dot{\gamma}_y$  auf, erhält man durch Einsetzen in (4.44):

$$\dot{\tau}_F = \underbrace{(p_{\bar{x},F} - p_{\bar{x},F})}_{\rightarrow C_{\bar{x}}=0} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} \mp \underbrace{\mu C_{\bar{y}}}_{=C_{\bar{x}\bar{y}}} [[\dot{u}]]_{\bar{y}}$$

Der tangentielle Operator für das Kontakt- und Reibmodell lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{C}_F^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad \text{mit } \mathbf{C}_F^{tan} = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}} & C_{\bar{x}\bar{y}} \\ 0 & C_{\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$C_{\bar{y}}$  nach Gleichung (4.37)

$$C_{\bar{x}} = \begin{cases} p_{\bar{x},F} & \text{für } f_y < 0 \\ 0 & \text{für } f_y = 0 \end{cases}$$

$$C_{\bar{x}\bar{y}} = \begin{cases} 0 & \text{für } f_y < 0 \\ \mp \mu C_{\bar{y}} & \text{für } f_y = 0 \end{cases}$$

#### 4.3.4 Eigenschaften des 2-Phasen-Materialmodells

Die prinzipiellen Eigenschaften des Materialmodells sind bei der Verwendung eines linearen Entfestigungsgesetzes aufgezeigt. Die Spannungs-Verschiebungsbeziehungen (*traction-separation-law*) sind in Abb. 4.5 getrennt für die adhäsive und die Reib-Phase dargestellt. Kombiniert man die 2 Phasen mit dem Schädigungsmodell, ergibt sich die Spannungs-Verschiebungsbeziehung von Abb. 4.6. Durch die Kombination von zwei einfachen Materialmodellen wird das Risswachstum mit dem Schädigungsmodell und das Nachbruchverhalten mit dem Kontakt- und Reibmodell zutreffend beschrieben. Daher kann mit diesem Modell das inelastische Verhalten von kohäsiven Zonen auch unter zyklischer Belastung abgebildet werden. Da dem Materialmodell einfache mechanische Modelle zugrunde liegen, können die Materialparameter aus experimentellen Versuchen einfach identifiziert werden.

Dieses kombinierte Schädigungs- und Plastizitätsmodell wird in angepasster Form für das Fugenversagen in Kapitel 7 und in erweiterter Form auch für das Steinversagen in Kapitel 8 angewendet.

Für eine mechanisch konsistente Formulierung muss bei Anwachsen der Schädigung die Materialantwort immer schwächer sein als bei einem elastischen Verhalten. Dies ist bei folgender Bedingung an die Penalty-Faktoren uneingeschränkt gegeben:

$$\begin{aligned} p_{\bar{x},A} &\geq p_{\bar{x},F} \\ p_{\bar{y},A} &\geq p_{\bar{y},F} \end{aligned} \quad \text{und somit } \mathbf{t}_A \geq \mathbf{t}_F$$

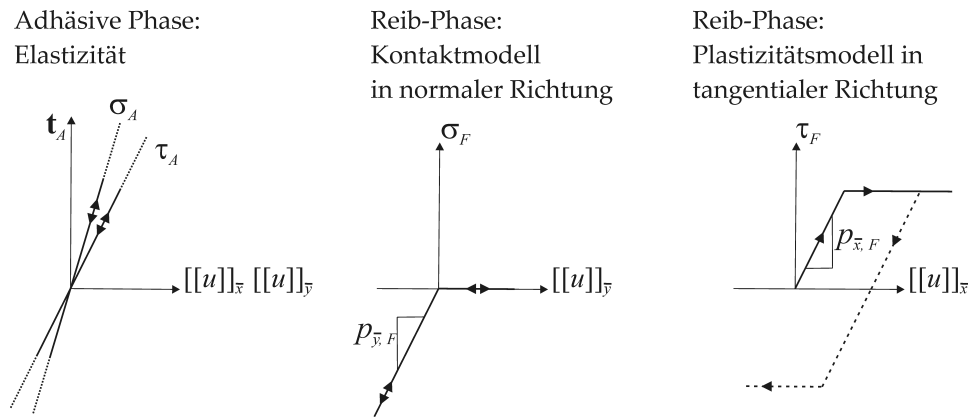


Abbildung 4.5: Spannungs-Verschiebungskurve der adhäsiven und der Reib-Phase

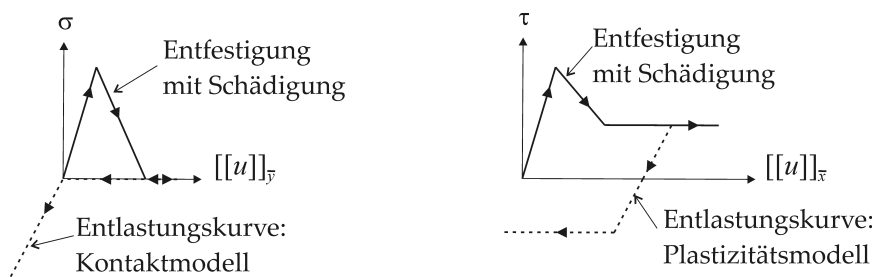


Abbildung 4.6: Spannungs-Verschiebungskurve des 2-Phasen-Materialmodells in normaler Richtung (links) und in tangentialer Richtung (rechts)

## 4.4 Lösungsverfahren und Zeitintegration

Die inelastischen Materialmodelle von Abs. 4.2 und 4.3 sind zunächst in Ratenform definiert:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \mathbf{C}^{tan} \dot{\epsilon} && \text{siehe (4.18)} \\ \text{bzw. } \dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] && \text{siehe (4.36)}\end{aligned}$$

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird die ratenabhängige Formulierung mit einer geeigneten Anzahl an Zeitschritten und entsprechenden Zeitinkrementen diskretisiert. Geht man von einem konvergierten Zeitschritt  $n$  zum Zeitpunkt  $t_n$  aus, bei dem die Spannung  $\mathbf{t}_n$  bzw.  $\sigma_n$  bekannt ist, ist das Inkrement  $\Delta \mathbf{t}$  bzw.  $\Delta \sigma$  bis zum Zeitschritt  $n + 1$  durch folgendes Integral definiert:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta \sigma && \Delta \sigma = \int_{t=t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}^{tan} \dot{\epsilon} \, dt \\ \text{bzw. } \mathbf{t}_{n+1} &= \mathbf{t}_n + \Delta \mathbf{t} && \Delta \mathbf{t} = \int_{t=t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{C}^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] \, dt\end{aligned} \quad (4.47)$$

Für die numerische Lösung von (4.47) wird das vollständig implizite Zeitintegrationsverfahren angewendet, bei dem die Schädigungsbedingung  $f_d|_{t_{n+1}} \leq 0$  bzw. Fließbedingung  $f_y|_{t_{n+1}} \leq 0$  im aktuellen Zeitschritt  $t_{n+1}$  eingehalten wird. Dadurch wird ein Abdriften von der Kuhn-Tucker-Bedingung vermieden, und das Zeitintegrationsverfahren ist auch bei großen Dehnungsinkrementen  $\Delta \epsilon$  bzw.  $\Delta [[\mathbf{u}]]$  stabil. Bei der FE-Methode ist das Problem auf Materialebene verschiebungsgesteuert. Mit einem vorgegebenen Inkrement  $\Delta \epsilon$  bzw.  $\Delta [[\mathbf{u}]]$  sind auch die kinematischen Größen im aktuellen Zeitschritt bekannt (z.B.  $[[\mathbf{u}]]_{n+1} = [[\mathbf{u}]]_n + \Delta [[\mathbf{u}]]$ ).

Das Zeitintegrationsverfahren wird exemplarisch für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung von Abs. 4.3 aufgezeigt. Für die Spannungs-Dehnungsbeziehung von Abs. 4.2 kann das Verfahren analog angewendet werden. Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung setzt sich aus einem Schädigungs- und einem Plastizitätsmodell zusammen. Das jeweilige Integrationsverfahren ist in Abs. 4.4.1 bzw. 4.4.2 beschrieben.

Ziel des Zeitintegrationsverfahrens ist die Berechnung des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  im aktuellen Zeitschritt  $n + 1$ . Für eine kompakte und übersichtliche Darstellung wird der Index beim Spannungsvektor nicht mehr aufgeführt:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{n+1}$$

#### 4.4.1 Zeitintegration des Schädigungsmodells

Zunächst werden die Spannungen im aktuellen Zeitschritt ausgewertet:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_A &= \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_{n+1} && \mathbf{C}_A \text{ siehe Gleichung (4.29)} \\ \mathbf{t}_F &= \mathbf{t}_F \left( [[\mathbf{u}]]_{n+1}, [[\mathbf{u}]]_n^{pl} \right) && \text{siehe Zeitintegration von Abs. 4.4.2} \end{aligned}$$

Das Zeitintegrationsverfahren beginnt mit einem elastischen **Prädiktorschritt**, bei dem die interne Variable  $\alpha_d$  aus dem letzten konvergierten Schritt  $n$  angenommen wird:

$$\begin{aligned} \alpha_{d,n+1}^{trial} &= \alpha_{d,n} \\ \sigma^{eq} &= \sigma^{eq}(\mathbf{t}_A) \\ f_d^{trial} &= \sigma^{eq} - \alpha_{d,n+1}^{trial} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Mit der Schädigungsbedingung (4.48) wird wieder in einen elastischen und inelastischen Schritt unterschieden und damit  $\alpha_d$  im aktuellen Zeitschritt bestimmt:

$$\alpha_{d,n+1} = \begin{cases} \alpha_{d,n+1}^{trial} & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \quad \text{elastischer Schritt} \\ \sigma^{eq} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \quad \text{inelastischer Schritt} \end{cases} \quad (4.49)$$

In (4.49) wird für den inelastischen Schritt ein **Korrektorschritt** eingeführt. In diesem Fall wird die Evolution von  $\alpha_d$  mit (4.48) bestimmt. Mit  $\alpha_{d,n+1}$  wird die Schädigung, der Spannungsvektor und der tangentielle Operator im aktuellen Zeitschritt bestimmt:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= g(\alpha_{d,n+1}) && \text{siehe (4.26)} \\ \mathbf{t} &= (1 - d_{n+1}) \mathbf{t}_A + d_{n+1} \mathbf{t}_F && \text{siehe (4.20)} \\ \frac{d\mathbf{t}}{d[[\mathbf{u}]]_{n+1}} &= \mathbf{C}^{tan} && \text{siehe (4.36)} \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Zeitintegration des Kontakt- und Reibmodells

Da bei der Definition des Reibmodells Dilatanzeffekte mit  $[[u]]_{\bar{y}}^{pl} = 0$  vernachlässigt werden, wird die Normalspannung  $\sigma_F$  unabhängig von internen Variablen ausgewertet.

$$\begin{aligned} \sigma_F &= C_{\bar{y}} [[u]]_{\bar{y},n+1} && \text{siehe (4.37)} \\ \text{mit } C_{\bar{y}} &= \begin{cases} 0 & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} > 0 \quad \text{Kontakt offen} \\ p_{\bar{y},F} & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} \leq 0 \quad \text{Kontakt geschlossen} \end{cases} \end{aligned}$$

Ist der Kontakt offen, wird die Reibspannung deaktiviert (siehe Algorithmus 4.1). Bei geschlossenem Kontakt wird die Zeitintegration des Plastizitätsmodells angewendet.

Beim elastischen **Prädiktorschritt** wird die plastische Verschiebung  $[[u]]_{\bar{x},n}^{pl}$  vom letzten konvergierten Zeitschritt angenommen:

$$\begin{aligned} [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl,trial} &= [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \\ \tau_F^{trial} &= p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl,trial} \right) \\ f_y^{trial} &= |\tau_F^{trial}| + \mu \sigma_F \end{aligned} \quad (4.50)$$

Mit der diskreten Fließbedingung  $f_y^{trial}$  wird zwischen dem elastischen und dem plastischen Schritt unterschieden:

$$[[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} = \begin{cases} [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} & \text{für } f_y^{trial} \leq 0 \quad \text{elastisch} \\ [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} + \Delta[[u]]_{\bar{x}}^{pl} & \text{für } f_y^{trial} > 0 \quad \text{plastisch} \end{cases} \quad (4.51)$$

Im plastischen Fall wird mit einem **Korrektorschritt** der Spannungszustand auf die Fließfläche zurückprojiziert (sog. *return-mapping-algorithm* oder kurz *RMA*). Für das Reibmodell mit perfekt plastischem Verhalten von Abs. 4.3.3 kann eine geschlossene Lösung angegeben werden. Mit der diskreten Kuhn-Tucker-Bedingung von (4.42) gilt:

$$f_{y,n+1} = |\tau_F| + \mu \sigma_F \equiv 0 \quad \text{für } \Delta\gamma_y > 0$$

Einsetzen von (4.39) und (4.41) ergibt:

$$p_{\bar{x},F} \left| [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \mp \Delta\gamma_y \right| + \mu \sigma_F = 0 \quad (4.52)$$

Durch Auflösen von (4.52) nach  $\Delta\gamma_y$  und Einsetzen in (4.41) erhält man:

$$\Delta[[u]]_{\bar{x}}^{pl} = \pm \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} + \mu \sigma_F / p_{\bar{x},F} \right) = \pm f_y^{trial} / p_{\bar{x},F} \quad (4.53)$$

Durch Einsetzen von (4.51) in das konstitutive Gesetz ist  $\tau_F$  definiert:

$$\tau_F = \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} \right) p_{\bar{x},F} \quad (4.54)$$

Das vollständige Zeitintegrationsverfahren ist in Algorithmus 4.1 zusammengefasst.

### Linearisierung des Plastizitätsmodells:

Bei Plastizitätsmodellen muss zwischen dem *kontinuierlich tangentialen* und

dem *algorithmisch tangentialen* Werkstofftensor unterschieden werden (siehe [SH00]):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \mathbf{C}^{tan} \dot{\epsilon} & \text{bzw.} & & \mathbf{t} &= \mathbf{C}^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] \\ \frac{d\sigma_{n+1}}{d\epsilon_{n+1}} &= \mathbf{C}^{alg, tan} & & & \frac{d\mathbf{t}_{n+1}}{d[[\mathbf{u}]]_{n+1}} &= \mathbf{C}^{alg, tan} \end{aligned}$$

Der Operator  $\mathbf{C}^{alg, tan}$  kann aufgrund des Zeitintegrationsverfahrens von  $\mathbf{C}^{tan}$  abweichen. Beim Reibmodell von Abs. 4.3.3 wird ein Plastizitätsmodell definiert, welches mit  $[[u]]_{\bar{x}}^{pl}$  nur eine plastische Komponente berücksichtigt. Dadurch bleibt die Richtung des plastischen Fließens während des Zeitschritts konstant. Für diesen Fall gilt:

$$\mathbf{C}^{alg, tan} = \mathbf{C}^{tan} \quad \text{mit } \mathbf{C}^{tan} \text{ siehe (4.46)}$$

---

**Algorithmus 4.1** implizite Zeitintegration des Kontakt- und Reibmodells
 

---

Eingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $[[u]]_{\bar{x},n}^{pl}$

**1. Schritt:** Normalspannung mit Kontaktmodell

$$\sigma_F = \begin{cases} p_{\bar{y},F} [[u]]_{\bar{y},n+1} & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} < 0 \quad \text{gehe zu Schritt 3} \\ 0 & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} \geq 0 \quad \text{gehe zu Schritt 2} \end{cases}$$

**2. Schritt:** Kontakt offen - deaktivieren von  $\tau_F$

$$\begin{aligned} \tau_F &= 0 \\ [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} &= [[u]]_{\bar{x},n+1} & \text{gehe zu Schritt 4} \end{aligned}$$

**3. Schritt:** Kontakt geschlossen -  $\tau_F$  mit Plastizitätsmodell

$$\begin{aligned} \tau_F^{trial} &= p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \right) \\ f_y^{trial} &= |\tau_F^{trial}| - \mu \sigma_F \\ [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} &= \begin{cases} [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} & \text{für } f_y^{trial} < 0 \quad \mathbf{C}_F^{tan} \text{ siehe (4.46)} \\ [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} + \Delta [[u]]_{\bar{x}}^{pl} & \text{für } f_y^{trial} \geq 0 \quad \Delta [[u]]_{\bar{x}}^{pl} \text{ siehe (4.53)} \end{cases} \\ \tau_F &= p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} \right) & \text{gehe zu Schritt 4} \end{aligned}$$

**4. Schritt:** Spannungsvektor

$$\mathbf{t}_F = \begin{bmatrix} \tau_F \\ \sigma_F \end{bmatrix}$$

Ergebnis:  $\mathbf{t}_F$   $[[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl}$   $\mathbf{C}_F^{tan}$

---





# Kapitel 5

## Finite Elemente und Lösungsverfahren

### 5.1 Starke und schwache Form der Elasto-Mechanik

In diesem Abschnitt wird das quasi-statische Randwertproblem beschrieben. Abb. 5.1 zeigt die Mechanik für ein Kontinuum, welches von einer Grenzfläche mit diskontinuierlichen Verschiebungen durchtrennt wird. Die Erweiterung auf mehrere Grenzflächen ist analog. Die Kontinua  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ , die Grenzfläche  $\Gamma$  und die Ränder  $\partial\Omega_u$ ,  $\partial\Omega_f$  werden wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \nabla \sigma + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ in } \Omega^- & \sigma^- \mathbf{n} - \mathbf{t} &= \mathbf{0} \text{ in } \Gamma^- \\ \nabla \sigma + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ in } \Omega^+ & \sigma^+ \mathbf{n} - \mathbf{t} &= \mathbf{0} \text{ in } \Gamma^+ \end{aligned} \quad \text{Gleichgewicht} \quad (5.1a)$$

$$\nabla^{sym} \mathbf{u} = \boldsymbol{\epsilon} \text{ in } \Omega \setminus \Gamma \quad \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = [[\mathbf{u}]] \text{ in } \Gamma \quad \text{Kinematik} \quad (5.1b)$$

$$\sigma = \sigma(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha_i) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}([[ \mathbf{u} ]], \alpha_i) \quad \text{konstit. Gesetze} \quad (5.1c)$$

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\Omega_u$$

$$\sigma \mathbf{n} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \text{ in } \partial\Omega_f \quad \text{Randbedingungen} \quad (5.1d)$$

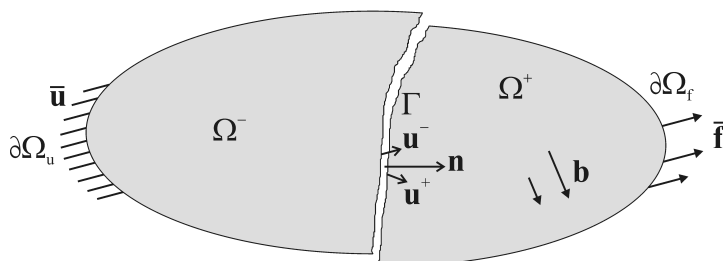


Abbildung 5.1: Mechanik im Gebiet  $\Omega$  mit einer Grenzfläche  $\Gamma$

In dieser Arbeit wird eine linearisierte Kinematik mit dem Differentialoperator  $\nabla^{sym}(\bullet) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_j} \right)$  verwendet. Mit  $[[\mathbf{u}]]$  wird die diskontinuierliche Verschiebung an der Grenzfläche  $\Gamma$  bezeichnet. Die konstitutiven Gesetze ( $\hat{\sigma}$  für  $\Omega$  bzw.  $\hat{\mathbf{t}}$  für  $\Gamma$ ) definieren beliebig nichtlineare Funktionen abhängig von den kinematischen Größen  $\epsilon$  bzw.  $[[\mathbf{u}]]$  und einer ausreichenden Anzahl an internen Variablen  $\alpha_i$  zur Beschreibung des Zustands des Materials. Die äußeren Lasten  $\mathbf{b}$  und  $\bar{\mathbf{f}}$  werden abhängig von der Belastungsgeschichte als bekannt angenommen.

Ausgangspunkt für die numerische Approximation mit der Finite-Elemente-Methode ist die schwache Form des Randwertproblems. Um die starke Form in die integrale, schwache Form überzuleiten, werden die Gleichgewichtsbedingungen (5.1a) und die Randbedingungen (5.1d) mit einer kinematisch zulässigen Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  getestet.

$$\begin{aligned} \int -\delta \mathbf{u} (\nabla \sigma + \mathbf{b}) d\Omega^+ + \int -\delta \mathbf{u} (\nabla \sigma + \mathbf{b}) d\Omega^- + \int \delta \mathbf{u} (\sigma \mathbf{n} - \bar{\mathbf{f}}) d\partial\Omega_f \\ + \int \delta \mathbf{u}^- (\sigma^- \mathbf{n} - \mathbf{t}) d\Gamma - \int \delta \mathbf{u}^+ (\sigma^+ \mathbf{n} - \mathbf{t}) d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Mittels partieller Integration und durch Einsetzen der konstitutiven Gesetze (5.1c) und der Kinematik (5.1b) bzw.  $\delta \mathbf{u}^+ - \delta \mathbf{u}^- = \delta [[\mathbf{u}]]$  erhält man das bekannte Funktional der *virtuellen Arbeit*:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W^{int} - \delta W^{ext} = 0 \tag{5.2} \\ \delta W^{int} &= \int \delta \epsilon \sigma(\epsilon, \alpha_i) d\Omega^- + \int \delta \epsilon \sigma(\epsilon, \alpha_i) d\Omega^+ + \int \delta [[\mathbf{u}]] \mathbf{t}([[ \mathbf{u} ]], \alpha_i) d\Gamma \\ \delta W^{ext} &= \int \delta \mathbf{u} \mathbf{b} d\Omega^+ + \int \delta \mathbf{u} \mathbf{b} d\Omega^- + \int \delta \mathbf{u} \bar{\mathbf{f}} d\partial\Omega_f \end{aligned}$$

Durch die Erweiterung um die diskontinuierlichen Verschiebungen  $[[\mathbf{u}]]$  ist auch eine unabhängige Variation und eine abschnittsweise Integration der Kontinua  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  erforderlich.

In Abs. 3.3 wurden bei der Elementtechnologie verschiedene Rissmodelle vorgestellt, denen unterschiedliche Funktionale zugrunde liegen. Beim *verschmierten Rissmodell* wird bereits in der schwachen Form die diskontinuierliche Verschiebung vernachlässigt. Dagegen basiert das *diskrete Rissmodell* auf dem Funktional (5.2). Die Anwendung des Funktionals (5.2) auf X-FEM ist u.a. von Belytschko [BB99, DMB01, MB02] beschrieben. Bei der Methode der eingebetteten Diskontinuitäten - eine Kombination aus beiden Rissmodellen - wird nach Feist [Fei04] ein Funktional verwendet, welches die diskontinuierlichen Verschiebungen berücksichtigt aber auf eine getrennte Variation der Kontinua  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  verzichtet.

## 5.2 Diskretisierung mit Finiten Elementen

Mit der Finite-Elemente-Methode wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  mit lokalen Ansatzfunktionen auf Elementebene angenähert:

$$\text{Verschiebung: } \mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}$$

$$\text{Kinematik: } \boldsymbol{\epsilon} \approx \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \text{bzw. } [[\mathbf{u}]] \approx \mathbf{B} \mathbf{d}$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{N}$  die Matrix der Ansatzfunktionen und  $\mathbf{d}$  den Vektor der Freiheitsgrade an den Knoten. Die diskretisierte Kinematik  $\boldsymbol{\epsilon}$  bzw.  $[[\mathbf{u}]]$  wird mit dem Operator  $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$  beschrieben. Der Differentialoperator  $\mathbf{L}$  bildet die linearisierte Kinematik von Gleichung (5.1b) ab. Für die 2-dimensionale Diskretisierung des Kontinuums  $\Omega$  werden in dieser Arbeit Dreiecks- bzw. Viereckselemente mit (bi-)linearen Ansatzfunktionen verwendet. Bezüglich der Formulierung der 3- und 4-knotigen Scheibenelemente wird z.B. auf [Zie05] verwiesen.

Die einfachste Methode die Grenzfläche  $\Gamma$  zu diskretisieren, ist die Verwendung von Kontaktelementen (*interface-elements*). Für ein 4-knotiges Element mit linearen Ansatzfunktionen ist die Knotennummerierung und die Neigung  $\alpha$  in Abb. 5.2 dargestellt. Im 2-dimensionalen Fall reduziert sich die Oberfläche  $\Gamma$  auf eine Linie, welche mit folgendem  $\mathbf{B}$ -Operator zur Diskretisierung der Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  beschrieben wird:

$$[[\mathbf{u}]] = \begin{bmatrix} u_{\bar{x}}^+ - u_{\bar{x}}^- \\ u_{\bar{y}}^+ - u_{\bar{y}}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[u]]_{\bar{x}} \\ [[u]]_{\bar{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (5.3)$$

$$\text{mit: } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -cn_1 & -sn_1 & -cn_2 & -sn_2 & cn_1 & sn_1 & cn_2 & sn_2 \\ sn_1 & -cn_1 & sn_2 & -cn_2 & -sn_1 & cn_1 & -sn_2 & cn_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x4} & u_{y4} \end{bmatrix}$$

$$\text{und } c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha \quad n_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad n_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

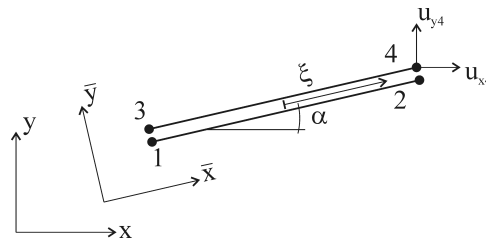


Abbildung 5.2: Knotennummerierung des 4-knotigen Kontaktelements

Die Diskretisierung mittels Kontaktelementen in Kombination mit einem kohäsiven Materialmodell gehen zurück auf die Arbeiten von [HMP76, Rot88, Sch92]. In jüngerer Zeit wurde diese Methode u.a. auf die mesoskopische Analyse von Beton, Mauerwerk und Holz in [CWC08, SGR09, AS06, SK09] angewendet.

### 5.3 Lösungsverfahren für das quasi-statische Problem

Mit der Diskretisierung von Abs. 5.2 kann das Funktional (5.2) in eine algebraische Form umgewandelt werden (siehe [JB02a]). Der Vektor der Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{R}$  berechnet sich mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} = \mathbb{A} [\mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext}] \quad (5.4)$$

$$\text{Kontinuum: } \mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}^T \sigma(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha_i) d\Omega \quad (5.5)$$

$$\text{Grenzschicht: } \mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{t}([\mathbf{u}], \alpha_i) d\Gamma \quad (5.6)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} d\partial\Omega_f \quad (5.7)$$

Die Assemblierungsvorschrift über alle Elemente ist mit  $\mathbb{A}$  bezeichnet. Die äußeren Kräfte in (5.4) sind als Funktion der Belastungsgeschichte definiert und können als bekannt angenommen werden. Lediglich  $\mathbf{f}^{int}$  ist von den globalen Freiheitsgraden  $\mathbf{d}$  über die Kinematik  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}$  bzw.  $[[\mathbf{u}]] = \mathbf{B} \mathbf{d}$  abhängig.

Für die Lösung des nichtlinearen Problems wird die Belastung in ausreichend kleine Pseudozeitschritte unterteilt und jeder Schritt iterativ gelöst. Als nichtlineares Lösungsverfahren wird die Newton-Raphson-Methode angewendet und (5.4) für den Zeitschritt  $n + 1$  konsistent linearisiert.

$$\text{lin } \mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{R}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^i}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} \Delta \mathbf{d}^i = \mathbf{R}_{n+1}^i + \mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^i)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} \Delta \mathbf{d}^i \quad (5.8)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{d}_{n+1}^i$  die globalen Verschiebungen und  $\Delta \mathbf{d}^i$  das Inkrement im Iterationsschritt  $i$ . Mit der Kettenregel ergibt sich die Linearisierung der internen Kräfte als:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^i)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} = \int \mathbf{B}^T \frac{\partial \sigma^i}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} d\Omega \quad \text{bzw.} \quad \int \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{t}^i}{\partial [[\mathbf{u}]]} \frac{\partial [[\mathbf{u}]]}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} d\Gamma \quad (5.9)$$

Durch die Definition des Tangentenmoduls  $\mathbf{C}_{n+1}^i = \partial\sigma^i/\partial\varepsilon$  bzw.  $\mathbf{C}_{n+1}^i = \partial t^i/\partial[[\mathbf{u}]]$  bei den konstitutiven Gesetzen und der diskretisierten Kinematik  $\mathbf{B} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{d}_{n+1}^i$  bzw.  $\mathbf{B} = \partial[[\mathbf{u}]]/\partial\mathbf{d}_{n+1}^i$  erhält man die globale Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_{n+1}^i = \mathbb{A} \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^i)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} = \mathbb{A} \left[ \int \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^i \mathbf{B} \, d\Omega + \int \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{n+1}^i \mathbf{B} \, d\Gamma \right] \quad (5.10)$$

Durch Einsetzen von (5.10) in (5.8) können die Knotenfreiheitsgrade  $\mathbf{d}_{n+1}$  iterativ bestimmt werden.

$$\text{lin } \mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{R}_{n+1}^i + \mathbf{K}_{n+1}^i \Delta \mathbf{d}^i = 0 \quad (5.11)$$

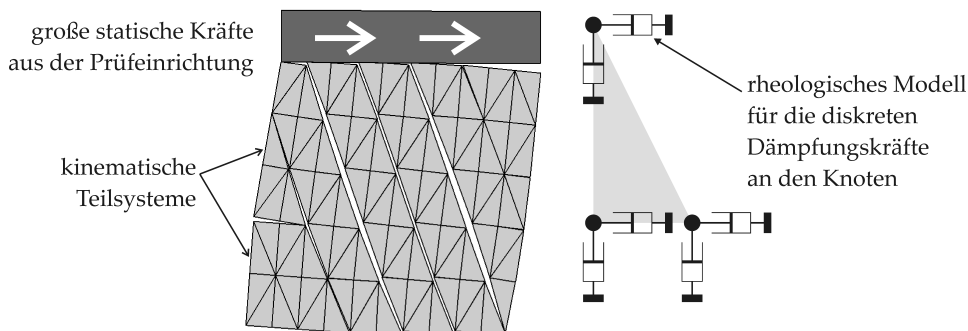
$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}^i = \mathbf{d}_{n+1}^i - \left( \mathbf{K}_{n+1}^i \right)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (5.12)$$

mit dem Startwert  $\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n$

und dem Konvergenzkriterium  $|\mathbf{R}_{n+1}^i| / |\mathbf{R}_{n+1}^0| < \text{tol}$

## 5.4 Pseudo-dynamische Analyse

Bei den experimentellen Schubversuchen wurden die Prüfkräfte mit einer sehr geringen Belastungsgeschwindigkeit verschiebungsgesteuert aufgebracht (siehe Abs. 2.2). Daher wurde das in Abs. 5.3 beschriebene quasi-statische Lösungsverfahren gewählt und dynamische Effekte vernachlässigt. Mit der Anwendung der statischen Analyse auf große Mauerwerkscheiben treten aber sehr früh Konvergenzprobleme auf, so dass keine Lösung für die unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}_{n+1}$  gefunden werden kann. Die mangelnde Robustheit des Algorithmus ist auch auf eine mechanische Ursache zurückzuführen (siehe Abb. 5.3, links). Auch in den Wand-



**Abbildung 5.3:** Kinematische Teilsysteme einer Schubwand (links) - Numerische Dämpfung (rechts)

versuchen wurden Instabilitäten beobachtet. Durch das entfestigende Materialverhalten kam es teilweise zu einem schlagartigen, also dynamischen Risswachstum. Durch die Vereinigung von Rissen können Teilsysteme der Wand kinematisch werden. Dennoch konnte im Experiment kein globales Versagen festgestellt werden. Durch das Schließen von makroskopischen Rissen wurde wieder eine statische Ruhelage gefunden und die Belastung konnte weiter gesteigert werden.

Um diese Instabilitäten im numerischen Modell zu überwinden, wird das mechanische Modell mit einer stabilisierenden Dämpfungskraft erweitert. Die differenzielle Dämpfungskraft  $d\mathbf{f}^{damp}$  wird mit dem Dämpfungskoeffizienten  $\eta$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}$  am Volumen  $dV$  beschrieben.

$$d\mathbf{f}^{damp} = \eta \dot{\mathbf{u}} dV \quad (5.13)$$

In Gleichung (5.2) erweitert sich die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung um den Term der Dämpfungskraft.

$$\delta W = \delta W^{int} + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \eta \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \delta W^{ext} = 0 \quad (5.14)$$

Mit den Diskretisierungsschritten von Abs. 5.2 erweitert sich die Gleichung (5.4) des diskreten Modells zu:

$$\mathbf{R} = \mathbb{A} \left[ \mathbf{f}^{int} + \mathbf{f}^{damp} - \mathbf{f}^{ext} \right] = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

mit:  $\mathbf{f}^{damp} = \int \mathbf{N}^T \eta \mathbf{N} d\Omega \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}$

Bei einem konstanten Dämpfungsmaß  $\eta$  ist die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  positiv-definit mit konstanten Einträgen. In (5.15) wird das Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  örtlich und zeitlich getrennt diskretisiert:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}} \quad (5.16)$$

mit:  $\mathbf{N}$  Ansatzfunktionen für die örtliche Diskretisierung

$\dot{\mathbf{d}}$  zeitliche Diskretisierung siehe Abs. 5.4.1

Für die örtliche Diskretisierung der Kontinuums-elemente wird eine sog. *lumped integration* mit Integrationspunkten an den Knoten verwendet (siehe Abb. 5.3, rechts). Dieses numerische Integrationsverfahren für das Verschiebungsfeld weicht daher von der sog. Gauss-Integration für das Dehnungsfeld ab (siehe [Hug87]).

### 5.4.1 Zeitintegrationsverfahren

Für das Zeitintegrationsverfahren wird ein linearer Verlauf für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  zwischen den Zeitschritten  $n$  und  $n + 1$  mit dem Zeitintervall  $\Delta t$  angenommen.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_n + (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad \text{mit } t \in [t_n \dots t_{n+1}] \quad (5.17)$$

Damit ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der diskreten Freiheitsgrade

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_n + (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad \text{mit } t \in [t_n \dots t_{n+1}] \quad (5.18)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}} \Big|_{t=t_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{d}(t)}{\partial t} \Big|_{t=t_{n+1}} = (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \frac{1}{\Delta t} \quad (5.19)$$

Die Dämpfungskräfte von (5.15) lassen sich ebenfalls mit  $\mathbf{d}_{n+1}$  ausdrücken:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{damp} = \mathbf{C} \frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n}{\Delta t} \quad (5.20)$$

Die Newton-Raphson-Iteration von Gleichung (5.11) erweitert sich für die pseudo-dynamische Formulierung zu:

$$\text{lin } \mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{R}_{n+1}^i + \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^i}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^i} \Delta \mathbf{d}^i = \mathbf{R}_{n+1}^i + \underbrace{\left( \mathbf{K}_{n+1}^i + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \right)}_{= \mathbf{K}^{eff,i}} \Delta \mathbf{d}^i = 0 \quad (5.21)$$

In (5.21) wird  $\mathbf{K}^{eff,i}$  als die effektive Steifigkeit bezeichnet. Bei kleinen Zeitschritten  $\Delta t$  erhöht sich der Anteil aus der Dämpfung, und mit der positiv-definiten Eigenschaft von  $\mathbf{C}$  verbessert sich die Konditionierung von  $\mathbf{K}^{eff,i}$ . Diese pseudo-dynamische Analyse berücksichtigt keine Massenträgheitskräfte. Dadurch ist eine numerische Approximation der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{d}}$  im Zeitintegrationsverfahren nicht erforderlich und ein vollständig implizites Zeitintegrationsverfahren kann angewendet werden. Ebenso wie bei der statischen Analyse müssen bei der Implementierung lediglich die unbekannteten Verschiebungen  $\mathbf{d}_n$  abgespeichert werden. Die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{d}}_n$  aus dem letzten Zeitschritt müssen nicht vorgehalten werden.

#### Vergleich mit alternativen Stabilisierungsmethoden:

Die pseudo-dynamische Analyse zur Stabilisierung von instabilen Zeitfenstern wendet Technev [TF06] erfolgreich auf die Simulation von spröden Materialien mit Kontaktelementen an. Alternativ können Konvergenzprobleme auch mit einem Bogenlängenverfahren überwunden werden, das von Riks [Rik79] zur Kontrolle von einzelnen Freiheitsgraden entwickelt

wurde. Dieses Verfahren wurde von Lourenço [Lou96] zur Kontrolle der Rissöffnung (*crack opening displacement control*) weiterentwickelt und auf die Simulation von Mauerwerk angewendet. Die pseudo-dynamische Analyse bietet den Vorteil, dass das gesamte Gebiet und damit alle Freiheitsgrade stabilisiert werden. Dagegen muss beim Bogenlängenverfahren der Anwender eine geeignete Kombination aus Freiheitsgraden für die Stabilisierung auswählen. Alternativ zur pseudo-dynamischen Dämpfung wäre auch eine vollständige dynamische Analyse mit Massenträgheit möglich.

### 5.4.2 Anpassung der Zeitschrittweite

Die numerischen Dämpfungskräfte sind für die Stabilität der numerischen Lösung erforderlich, können aber mit einem mechanischen Verhalten nicht begründet werden. Durch einen kleinen Wert des Dämpfungskoeffizienten  $\eta$  bleiben die Dämpfungskräfte im Vergleich zu den quasi-statischen Kräften klein. Mit einer automatischen Anpassung der Zeitschrittweite  $\Delta t$  können die numerischen Dämpfungskräfte weiter reduziert und die Robustheit des Algorithmus verbessert werden. Die Wahl von  $\Delta t$  im aktuellen Zeitschritt  $n + 1$  wird abhängig vom Konvergenzverhalten im Zeitschritt  $n$  formuliert:

$$\Delta t_{n+1} = \begin{cases} 0,8 \Delta t_n & \text{für } i_{max} > 6 \\ 1,0 \Delta t_n & \text{für } i_{max} = 6 \\ 2,0 \Delta t_n & \text{für } i_{max} < 6 \end{cases} \quad (5.22)$$

Dabei bezeichnet  $i_{max}$  die Anzahl der erforderlichen Iterationen im Newton-Raphson-Schema im Zeitschritt  $n$ . Bei Divergenz wird der Zeitschritt mit der halben Zeitschrittweite wiederholt. Die Zeitschrittweite kann somit als Indikator für die Robustheit im aktuellen Berechnungsschritt angesehen werden. Um die Dämpfungskräfte weiter zu reduzieren, wird der Dämpfungskoeffizient abhängig von  $\Delta t$  formuliert:

$$\eta(\Delta t) = \begin{cases} 0,0 & \text{für } \Delta t \geq \Delta t_0 \\ \eta_0(1 - \Delta t/\Delta t_0) & \text{für } \Delta t < \Delta t_0 \end{cases} \quad (5.23)$$

$\Delta t_0$  ist eine benutzerdefinierte Zeitschrittweite, unterhalb der die Dämpfung aktiviert wird. Mit (5.22) und (5.23) werden bei guter Konvergenz die unphysikalischen Dämpfungskräfte deaktiviert und bei schlechter Konvergenz aktiviert, um die Robustheit des Algorithmus zu gewährleisten.

Numerische Untersuchungen in Kapitel 9 zeigen, dass die pseudo-dynamische Dämpfung einen sehr robusten Algorithmus formuliert und gleichzeitig das mechanische Verhalten nicht signifikant verfälscht.



## Kapitel 6

# Modellierung des Kontinuums Mauerwerk

In diesem Kapitel wird das weitgehend elastische Verformungsverhalten des Kontinuums *Mauerwerk* für das Makromodell basierend auf Einheitszellen beschrieben. Die diskontinuierlichen Verformungsmoden aufgrund makroskopischer Risse sind in den nachfolgenden Kapiteln 7 und 8 erläutert. Der Mauerwerksverband mit den unvermörtelten, vertikalen Stoßfugen führt zu einem stark orthotropen Verhalten. Das orthotrope Materialgesetz wird durch Homogenisierung mit einem geeigneten Mikromodell in Abs. 6.2 bestimmt. Um die Homogenisierungsschritte einfach zu halten, wurde das nichtlineare Verhalten im Mikromodell zunächst vernachlässigt. In Abs. 6.3 wird das elastische Modell der Makroskala auf ein orthotropes Schädigungsmodell erweitert, um es auf Beispiele mit höheren Druckspannungen anwenden zu können.

### 6.1 Experimentelle Versuche auf der Mikroskala

Für die elastische Verformung des Verbundwerkstoffs *Mauerwerk* ist die Eigenschaft des Mauersteins maßgeblich, da bei Verwendung von Dünnbettmörtel aufgrund des geringen Volumenanteils die elastische Verformung des Klebers vernachlässigbar ist.

Zur Bestimmung der mechanischen Kenngrößen des Steins wurden am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München Materialtests durchgeführt [ZS11]. Dabei wurden bei einer Serie von 5 Prüfkörpern Mauerwerkssteine 1-achsig auf Druck geprüft. Die gemittelte Spannungs-Dehnungskurve ist in Abb. 6.1 dargestellt. Der E-Modul betrug ca.  $10.000 \text{ N/mm}^2$ . Die Proben versagten bei einer Pressung von  $\beta_c = 13,0 \text{ N/mm}^2$  mit einer Standardabweichung von  $1,2 \text{ N/mm}^2$ .

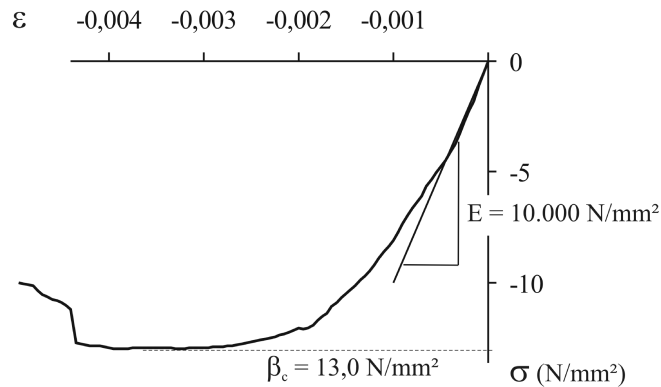


Abbildung 6.1: 1-achsiger Druckversuch beim Kalksandstein

## 6.2 Homogenisierung der elastischen Eigenschaften

### 6.2.1 Randbedingungen für ebene periodische Medien

In diesem Kapitel wird die numerische Analyse einer 2-dimensionalen periodischen Zelle mit der FE-Methode beschrieben. Wesentlicher Bestandteil ist die Modellierung der periodischen Randbedingungen. Im numerischen Modell werden zwei Kontrollknoten  $A$  und  $B$  modelliert, um jeweils ein Paar aus zwei gegenüberliegenden Kanten der periodischen Zelle zu koppeln. Im FE-Modell sind vier Gruppen von kinematischen Kopplungen erforderlich.

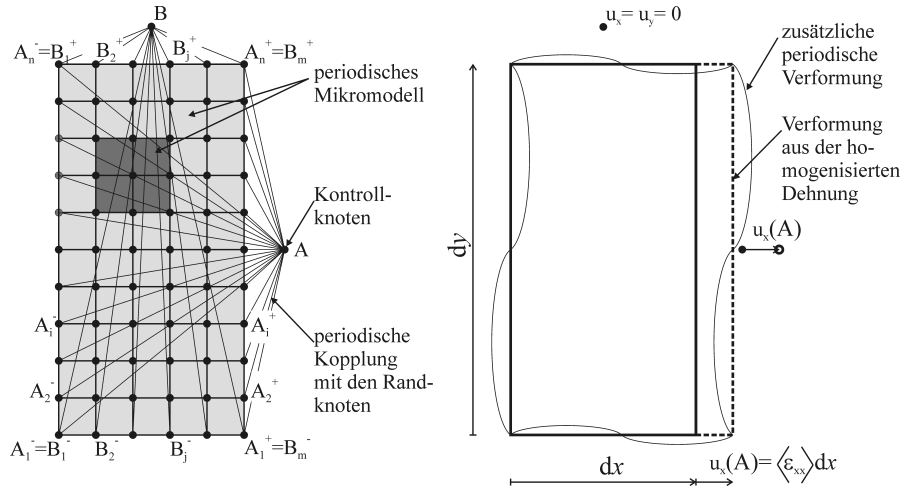
$$u_x(A) = u_x(A_i^+) - u_x(A_i^-), \quad i = 1 \dots n \quad (6.1a)$$

$$u_y(A) = u_y(A_i^+) - u_y(A_i^-), \quad i = 1 \dots n \quad (6.1b)$$

$$u_x(B) = u_x(B_j^+) - u_x(B_j^-), \quad j = 1 \dots m \quad (6.1c)$$

$$u_y(B) = u_y(B_j^+) - u_y(B_j^-), \quad j = 1 \dots m \quad (6.1d)$$

Die Nummerierung der Knoten ist in Abb. 6.2, links dargestellt. Die homogenisierten Dehnungen werden über Verschiebungen an den Kontrollknoten gesteuert. Mit den periodischen Randbedingungen kann sich neben der Verformung aus den homogenisierten Dehnungen zusätzlich eine beliebige periodische Verformung an den Rändern der Zelle einstellen (siehe Abb. 6.2, rechts bzw. [HH98a, Ant95]). Die kinematischen Kopplungen werden in der Analyse mit der Penalty-Methode erzwungen. Bei der Verwendung von Lagrangeschen Multiplikatoren wäre eine gesonderte Berücksichtigung der Eckknoten erforderlich, um doppelte Zwangsbedingungen (sog. *overconstraints*) zu vermeiden. Die homogenisierten Größen  $\langle \epsilon_{ij} \rangle$



**Abbildung 6.2:** Periodische Zelle mit Randbedingungen (links) und Verformung (rechts)

und  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  sind definiert als Mittelwert über das Volumen  $V_p$  der periodischen Zelle.

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V_p} \int \epsilon_{ij} dV_p \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V_p} \int \sigma_{ij} dV_p \quad (6.2)$$

Bei einem diskretisierten Modell der periodischen Zelle können die homogenisierten Größen eleganter über die Verschiebungen  $u_i(A)$  bzw.  $u_i(B)$  und über die Kräfte  $f_i(A)$  bzw.  $f_i(B)$  an den Kontrollknoten  $A$  und  $B$  ausgewertet werden. Pahr [Pah04] beschreibt detailliert diese Auswertung für eine beliebige schiefwinklige Zelle. Bei einer rechteckigen Abgrenzung der Zelle vereinfacht sich die Auswertung auf:

$$\langle \epsilon_{xx} \rangle = u_x(A)/dx \quad \langle \sigma_{xx} \rangle = f_x(A)/dy \quad (6.3a)$$

$$\langle \epsilon_{yy} \rangle = u_y(B)/dy \quad \langle \sigma_{yy} \rangle = f_y(B)/dx \quad (6.3b)$$

$$\langle \gamma_{xy} \rangle = u_y(A)/dx + u_x(B)/dy \quad \langle \tau_{xy} \rangle = f_y(A)/dy = f_x(B)/dx \quad (6.3c)$$

### 6.2.2 Mikromodell des Mauerwerks

Für die Homogenisierung des Kontinuums *Mauerwerk* wurde ein Mikromodell nach Abb. 6.3 erstellt. Die Zelle wurde mit 640 Scheibenelementen vernetzt. Die Materialparameter des Mikromodells sind in Tab. 6.1 aufgelistet. Entlang der unvermörtelten Stoßfugen wurde das FE-Netz entkoppelt

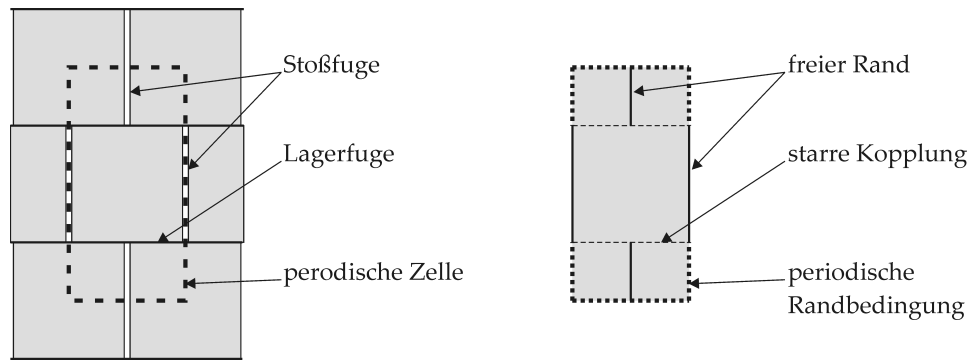


Abbildung 6.3: Mauerwerksverband (links) und Mikromodell (rechts)

Tabelle 6.1: Materialparameter für Stein und Mauerwerk

Stein (Mikroskala, isotrop)		Mauerwerk (Makroskala, orthotrop)	
$E = 10.000$	$\text{N/mm}^2$	$E_x = 2.130$	$\text{N/mm}^2$
$\nu = 0,0$		$E_y = 10.000$	$\text{N/mm}^2$
		$G_{xy} = 2.760$	$\text{N/mm}^2$
		$\nu_{xy} = 0,0$	

und als freier Rand modelliert. Für die Homogenisierung zur Makroskala wurden 3 Lastfälle auf das Mikromodell aufgebracht. Mit (6.3) wurden folgende homogenisierte Spannungen über Kräfte an den Kontrollknoten aufgebracht und die Dehnungen über die Verschiebung der Kontrollknoten ausgewertet.

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & \text{LF 1} & \text{LF 2} & \text{LF 3} & \\
 \hline
 \langle \sigma_{xx} \rangle & 1,0 & 0 & 0 & \\
 \langle \sigma_{yy} \rangle & 0 & 1,0 & 0 & \\
 \langle \tau_{xy} \rangle & 0 & 0 & 1,0 & \\
 \hline
 & & & & \text{N/mm}^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|ccc|c}
 & \text{LF 1} & \text{LF 2} & \text{LF 3} & \\
 \hline
 \langle \epsilon_{xx} \rangle & 4,695 & 0 & 0 & \\
 \langle \epsilon_{yy} \rangle & 0 & 1,0 & 0 & \\
 \langle \gamma_{xy} \rangle & 0 & 0 & 3,623 & \\
 \hline
 & & & & 10^{-4}
 \end{array}
 \quad (6.4)$$

#### Bestimmung der Materialeigenschaften für die Makroskala:

Das Materialgesetz für die Makroskala wird aus folgender Forderung bestimmt:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Makroskala} & & \text{Mikroskala} \\
 \sigma & \equiv & \langle \sigma \rangle \\
 \epsilon & \equiv & \langle \epsilon \rangle
 \end{array}
 \quad (6.5)$$

Durch Einsetzen der homogenisierten Größen aus den 3 Lastfällen von (6.4) in die Dehnungs-Spannungsbeziehung  $\epsilon = \mathbb{D}\sigma$ , können alle Einträge des Flexibilitätstensors  $\mathbb{D}$  der Makroskala bestimmt werden:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 4,695 & 0 & & \\ & 0 & 1,0 & \\ & & & 3,623 \end{bmatrix} 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N} \quad (6.6)$$

Da Mauerwerksverband orthogonal ausgerichtet ist, lässt sich das homogenisierte Kontinuum mit einem orthotropen Materialmodell beschreiben. Im ebenen Spannungszustand wird der orthotrope Flexibilitätstensor mit folgenden mechanischen Kenngrößen beschrieben (siehe [MH08]):

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & & \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & & \\ & & & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Vergleicht man die Einträge von (6.6) mit der Definition in Gleichung (6.7), so können alle E-Moduln und Querdehnzahlen bestimmt werden (siehe Tab. 6.1). Durch Invertieren von (6.7) erhält man den Elastizitätstensor für den ebenen Spannungszustand:

$$\mathbb{C} = \frac{1}{1 + \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy}E_y & & \\ \nu_{yx}E_x & E_y & & \\ & & & (1 + \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von  $\mathbb{C}$  ist die Querdehnzahl  $\nu_{yx}$  in Gleichung (6.8) eine abhängige Größe

$$\nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x}$$

Ein ähnliches Vorgehen für die Homogenisierung der elastischen Eigenschaften beschreibt Furtmüller [Fur10] für historisches Mauerwerk. Werden im Materialmodell der Mikroskala Querdehneffekte vernachlässigt, ist diese Vereinfachung auch auf der Makroskala gültig. Für  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,0$  vereinfacht sich (6.8) zu:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} E_x & & & \\ & E_y & & \\ & & & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

### 6.3 Schädigungsmodell

Um das nichtlineare Verhalten des Kalksandsteins bei Druckbeanspruchung (siehe Abb. 6.1) abzubilden, wird das orthotrope lineare Materialgesetz von Abs. 6.2 auf ein orthotropes Schädigungsmodell erweitert.

Bei den Druckversuchen wird das nichtlineare Verhalten durch eine Kombination von Schädigung und Plastizität verursacht [Leu05]. Um das Materialmodell einfach zu halten, wurde der Anteil aus der Plastizität vernachlässigt und ein skalares Schädigungsmodell nach Abs. 4.2 gewählt.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Experiments kann mit einem Potenzgesetz und einem anschließenden konstanten Verlauf beschrieben werden (siehe Abb. 6.1). Für die monotone, einachsige Druckbelastung gilt:

$$\sigma = \begin{cases} E_y \epsilon & \text{für } \epsilon_0 < \epsilon \\ \beta_{c,1} - (\beta_{c,1} - \beta_{c,0}) \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right)^n & \text{für } \epsilon_1 \leq \epsilon < \epsilon_0 \\ \beta_{c,1} & \text{für } \epsilon \leq \epsilon_1 \end{cases} \quad (6.10)$$

Wird der Exponent  $n$  mit dem Wert  $E_y \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\beta_{c,1} - \beta_{c,0}}$  gleichgesetzt, erhält man eine C1-kontinuierliche Funktion. Für das Schädigungsmodell wird die Mises-Vergleichsspannung verwendet, was ein einfaches Versagenskriterium im Druckbereich ist. Das lokale Versagen unter Zugbeanspruchung wird in Kapitel 8 aufgezeigt. Für den ebenen Spannungszustand berechnet sich die auf  $\beta_{c,0}$  genormte Vergleichsspannung mit:

$$\sigma^{eq}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{xx}^2 + \tilde{\sigma}_{yy}^2 - \tilde{\sigma}_{xx}\tilde{\sigma}_{yy} + 3\tilde{\tau}_{xy}^2} / \beta_{c,0} \quad (6.11)$$

Durch Gleichsetzen der 1-achsigen Spannung von (6.10) mit der entsprechenden Komponente des konstitutiven Gesetzes (4.7) erhält man folgendes Schädigungsmodell:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1 - d)\tilde{\sigma} = (1 - d)C\epsilon \quad C \text{ siehe (6.8)} \\ f_d &= \sigma^{eq}(\tilde{\sigma}) - \alpha_d \leq 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$d = g(\alpha_d) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_d < 1,0 \\ 1 - \frac{1}{\alpha_d} \left[ \frac{\beta_{c,1}}{\beta_{c,0}} + \frac{\beta_{c,1} - \beta_{c,0}}{\beta_{c,0}} \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_d}{\alpha_1 - 1} \right)^n \right] & \text{für } 1,0 \leq \alpha_d < \alpha_1 \\ 1 - \frac{1}{\alpha_d} \frac{\beta_{c,1}}{\beta_{c,0}} & \text{für } \alpha_d \geq \alpha_1 \end{cases}$$

mit den Materialparameter (siehe Abb. 6.4) und den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \beta_{c,0} & \text{ Anfangsdruckfestigkeit} & \epsilon_0 &= E_y / \beta_{c,0} \\ \beta_{c,1} & \text{ Enddruckfestigkeit} & \alpha_1 &= \epsilon_1 / \epsilon_0 \\ \epsilon_1 & \text{ Stauchung bei } \beta_{c,1} & n &= E_y \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\beta_{c,1} - \beta_{c,0}} \end{aligned}$$

**Validierung mit dem experimentellen Versuch:**

In Abb. 6.4 wird die Spannungs-Dehnungskurve des Schädigungsmodells mit dem experimentellen Ergebnis von Abs. 6.1 verglichen (Materialparameter siehe Tab. 6.2). Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Materialmodell bis zum Entfestigungsbereich. Die Entfestigung wird mit dem Materialgesetz der Kontinuumelemente nicht abgebildet, sondern mit separaten Kontaktelementen berücksichtigt (siehe Kapitel 8).

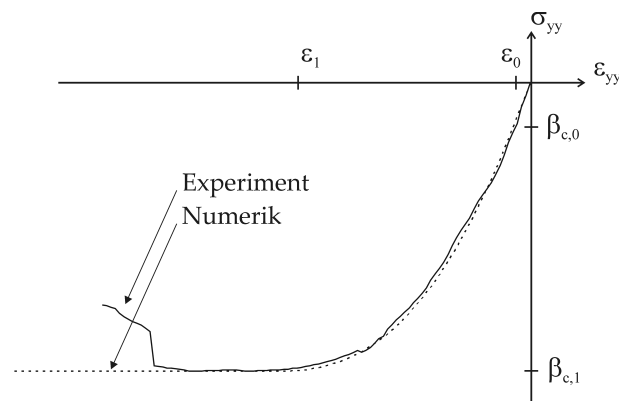


Abbildung 6.4: Spannungs-Dehnungskurve beim 1-achsigen Druckversuch

Tabelle 6.2: Materialparameter des Schädigungsmodells für Mauerwerk

elastische Parameter	inelastische Parameter
$E_x = 2.130 \text{ N/mm}^2$	$\beta_{c,0} = 2,0 \text{ N/mm}^2$
$E_y = 10.000 \text{ N/mm}^2$	$\beta_{c,1} = 13,0 \text{ N/mm}^2$
$G_{xy} = 2.760 \text{ N/mm}^2$	$\epsilon_1 = 0,003$
$\nu_{xy} = 0,0$	





## Kapitel 7

# Mörtel: Modellierung des Fugenversagens

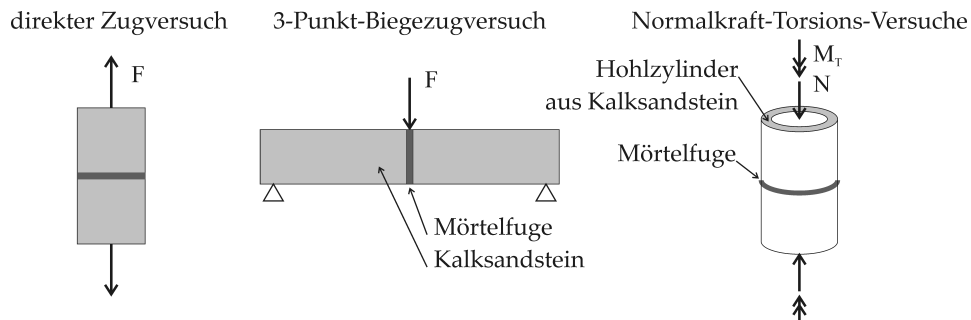
Ausgehend vom Materialmodell der Mikroskala (siehe Abs. 7.1) werden mit numerischen Versuchen das horizontale und treppenförmige Fugenversagen untersucht und die homogenisierten Größen bestimmt. Beim Makromodell der Einheitszelle wird das horizontale Fugenversagen mit einem entsprechenden Kontaktelement abgebildet (siehe Abs. 7.3). Die homogenisierten Größen des Mikromodells werden bei der Makroskala phänomenologisch durch ein Materialgesetz mit reduzierten Festigkeiten und Steifigkeiten berücksichtigt. Das treppenförmige Fugenversagen wird bei der Einheitszelle mit einem diagonalen Kontaktelement abgebildet (siehe Abs. 7.4). Die äquivalente Kontaktmechanik an der treppenförmigen und diagonalen Grenzschicht wird nach CAUCHY hergeleitet und ist identisch mit dem mechanischen Modell von Mann/Müller (siehe Abs. 7.2 und 7.4.1).

Dieses Makromodell wird an geschosshohen Wandversuchen und Vergleichsrechnungen auf der Mesoskala validiert (siehe Abs. 7.5). Dabei zeigt sich, dass an den Rändern der Wandscheibe Übergangselemente beim Makromodell erforderlich werden (siehe Abs. 7.6). Mit diesem modifizierten Makromodell konnten auch bei zyklischer Belastung sehr gute Berechnungsergebnisse erzielt werden.

### 7.1 Modellierung auf der Mikroskala

#### 7.1.1 Experimentelle Beschreibung der Mörtelfuge

Am Institut für Bauforschung Aachen (IBAC) wurden umfassende Kleinkörperversuche zum Kalksandstein und zum Verbund der Lagerfuge (Dünnbettmörtel) gemacht. Die Versuchsprogramme in [Bra05a, Bra05b]



**Abbildung 7.1:** Kleinkörperversuche an der Mörtelfuge aus Dünnbettmörtels

umfassen direkte Zugversuche, 3-Punkt-Biegezugversuche (indirekter Zugversuch) sowie kombinierte Normalkraft-Torsionsversuche (siehe Abb. 7.1). Bei den Normalkraft-Torsionsversuchen wurden Hohlzylinder gleichzeitig mit Druckkräften und Torsionsmomenten beansprucht. Mit dieser Versuchsanordnung kann auf die Mörtelfuge eine weitgehend konstante Schubspannung aufgebracht und mit unterschiedlichen Normalspannungen kombiniert werden.

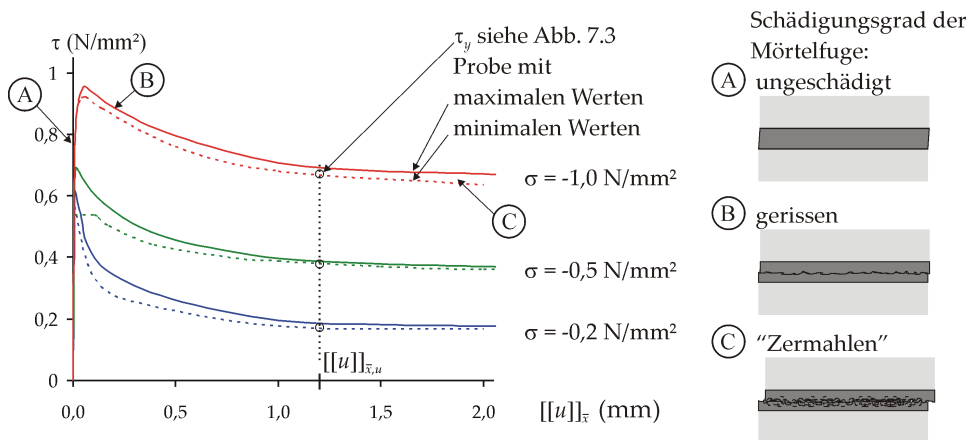
#### **Auswertung der Zugversuche:**

Aufgrund des spröden Versagens der Mörtelfugen in normaler Richtung konnte bei den direkten Zugversuchen lediglich eine Maximalspannung gemessen werden. Im Nachbruchbereich war der direkte Zugversuch nicht mehr stabil. Daher wurde die Bruchenergie in normaler Richtung indirekt aus den 3-Punkt-Biegezugversuchen ermittelt. Beim direkten Versuch versagten die Proben bei einer Zugspannung von  $\beta_t = 0,35 \text{ N/mm}^2$ . Aus den indirekten Zugversuchen wurde eine Bruchenergie mit  $G_{f,t} = 0,002 \text{ N/mm}$  abgeschätzt. Unter Annahme einer linearen Entfestigung ist die Fuge bei einer Rissöffnung von  $[[u]]_{\bar{y},u} \approx 0,01 \text{ mm}$  vollständig geschädigt.

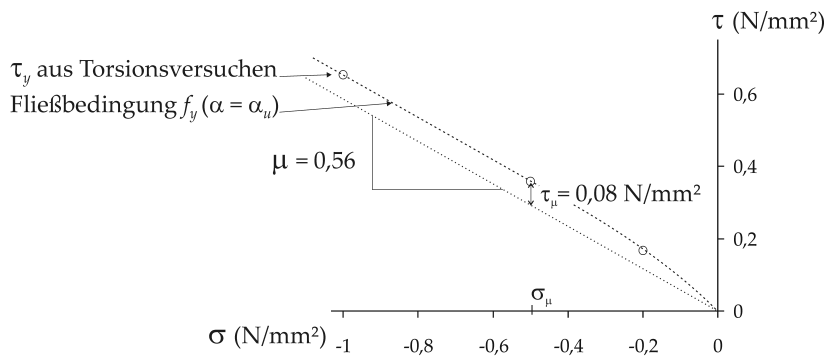
#### **Auswertung der Normalkraft-Torsionsversuche:**

Bei dieser Versuchsserie wurden die Druckkraft konstant gehalten und die Torsionsverdrehung gesteigert. Aufgrund des duktilen Reibverhaltens war der Versuch auch im Nachbruchbereich weitgehend stabil und ein Verlauf der Schubspannung  $\tau$  konnte aufgezeichnet werden.

Insgesamt wurden 15 Versuchskörper bei unterschiedlichen Normalspannungen getestet. Bei 6 Prüfkörpern verlief der Versuch stabil. Der Verlauf der mittleren Schubkraft ist in Abb. 7.2 dargestellt. 5 Prüfkörper wurden ohne Normalkraft getestet und versagten daher ähnlich spröde wie beim direkten Zugversuch. Bei weiteren 4 Prüfkörpern traten ebenfalls Instabilitäten während des Versuches auf.



**Abbildung 7.2:** Normalkraft-Torsionsversuch nach [Bra05a]: Spannungs-Verschiebungskurve mit dem qualitativen Schädigungsgrad der Mörtelfuge



**Abbildung 7.3:** Auswertung der Versuche von Abb. 7.2 und Identifizierung von Materialparametern für das Reibmodell von Abb. 7.6

Unabhängig von der Normalspannung ist die Entfestigung bei einer Relativverschiebung von  $[[u]]_{\bar{x},\mu} \approx 1,2 \text{ mm}$  abgeschlossen (siehe Abb. 7.2). Im Vergleich zur normalen Richtung ( $[[u]]_{\bar{y},\mu} \approx 0,01 \text{ mm}$ ) ist die Entfestigung in tangentialer Richtung wesentlich langsamer. Diese hohe Duktilität in tangentialer Richtung kann mit einer weiteren Abnahme der Oberflächenrauigkeit einer bereits vollständig gerissenen Mörtelfuge erklärt werden. Auch im Untersuchungsbericht wird von einem weiteren „Zermahlen“ des Dünnbettmörtels berichtet [Bra05a]. In Abb. 7.3 sind die Fließkriterien aus den Torsionsversuchen ausgewertet und die wesentlichen Materialparameter für das Reibmodell von Abs. 7.1.2 ausgewertet. Die Fließspannung  $\tau_y$  ist nicht proportional zu  $\sigma$  sondern im Spannungsursprung ausgerundet.

### 7.1.2 Materialmodell

Für die numerische Beschreibung der Mörtelfuge wird das 2-Phasen-Materialmodell von Abs. 4.3 aufgegriffen und weiterentwickelt, da mit diesem Modell die Schädigung und Plastizität mechanisch sinnvoll kombiniert werden. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  für die Grenzschicht berechnet sich wiederum aus einem adhäsiven Anteil und einem Reibanteil.

$$\mathbf{t} = (1 - d)\mathbf{t}_A + d \mathbf{t}_F \quad \text{mit } d \in [0; 1] \quad \text{siehe (4.20)}$$

Wie in Abs. 4.3 wird  $\mathbf{t}_A$  wieder linear-elastisch berechnet.

#### Versagenskriterien:

Für die Evolution der Schädigungsvariable  $d$  wird wieder die Belastungsintensität der adhäsiven Phase skalarwertig mit einer Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  gewichtet.

Für die Definition von  $\sigma^{eq}$  wird in einem ersten Zwischenschritt der Spannungsvektor  $\mathbf{t}_A$  in  $\tilde{\mathbf{t}}_A$  transferiert:

$$\tilde{\mathbf{t}}_A = \mathbf{T} \mathbf{t}_A \quad (7.1)$$

Mit den Einträgen von  $\mathbf{T}$  wird das Schädigungsmodell flexibler formuliert, so dass es auch auf die Makroskala angewendet werden kann. Dabei bildet der Spannungsvektor  $\tilde{\mathbf{t}}_A$  die Struktureigenschaft des Mauerwerksverbands für das Makromodell ab. Auf der Mikroskala wird für  $\mathbf{T}$  immer die Einheitsmatrix verwendet ( $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ ), so dass gilt  $\tilde{\mathbf{t}}_A = \mathbf{t}_A$ .

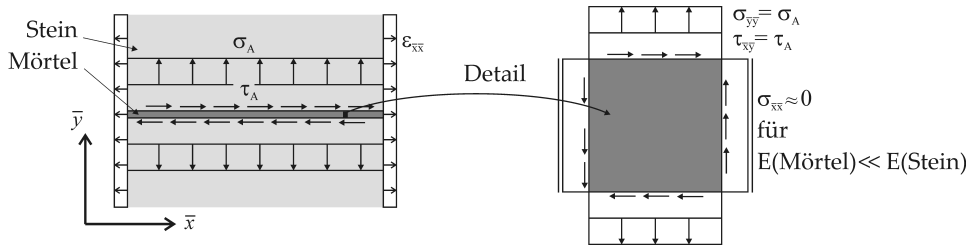
Im nächsten Schritt wird der Spannungsvektor  $\tilde{\mathbf{t}}_A$  an der Grenzschicht zunächst in den 2-stufigen Spannungstensor  $\sigma$  eines Kontinuums transferiert. Entsprechend Abb. 7.4 stellt  $\sigma$  die Spannung des Kontinuums *Mörtel* auf einer kleineren Skala dar. Diese Transformation bringt den Vorteil, dass bekannte und validierte Versagensmodelle aus der Kontinuumsmechanik angewendet werden können (siehe Schädigungsmodell von Abs. 4.2). Auch im Abs. 8 ist das Steinversagen abhängig von  $\sigma$  formuliert.

Der Spannungsvektor berechnet sich nach der CAUCHY-Theorie abhängig vom Normalen-Vektor  $\mathbf{n}$  an der Grenzfläche mit:

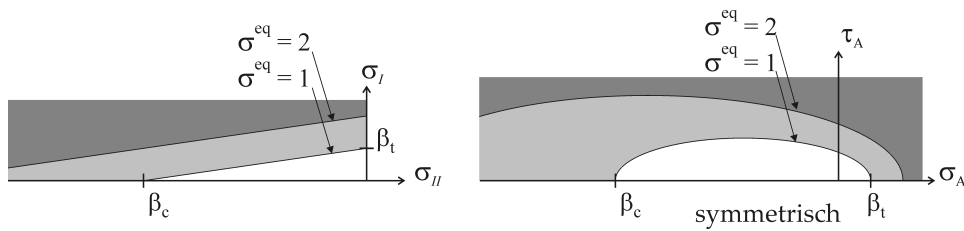
$$\mathbf{t}_A = \sigma \mathbf{n} \quad (7.2)$$

Im lokalen Koordinatensystem gilt für die Einträge von  $\tilde{\mathbf{t}}_A$  und  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \tilde{t}_A &= \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \tilde{\sigma}_A &= \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \end{aligned}$$



**Abbildung 7.4:** Spannungsvektor an der Grenzschicht „Mörtel“ (links) - Spannungstensor am Kontinuum der kleineren Skala (rechts)



**Abbildung 7.5:** Vergleichsspannung abhängig von den Hauptspannungen (links) und dem Spannungsvektor (rechts)

Für die Bestimmung von  $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$  wird Stein und Mörtel als geschichteter Verbundwerkstoff nach der Homogenisierungstheorie von Abs. 3.1 angesehen. Für eine dünne Mörtelschicht gilt  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}(\text{Mörtel}) = \epsilon_{\bar{x}\bar{x}}(\text{Stein})$ . Mit dieser Kinematik kann  $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$  aus den E-Moduln von Stein und Mörtel abgeschätzt werden:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}}(\text{Mörtel}) = \sigma_{\bar{x}\bar{x}}(\text{Stein}) \frac{E(\text{Mörtel})}{E(\text{Stein})} \approx 0 \quad (7.3)$$

$$\text{für } E(\text{Mörtel}) \ll E(\text{Stein}) \text{ und } \nu(\text{Mörtel}) = 0$$

Mit dieser Vereinfachung berechnen sich die Hauptspannungen  $\sigma_I, \sigma_{II}$  mit:

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_{\bar{x}\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}}{2}\right)^2 + \tau_{\bar{x}\bar{y}}^2} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_A \pm \sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2} \quad (7.4)$$

Nach (7.4) gilt für alle Werte von  $\mathbf{t}_A$   $\sigma_I \geq 0$  und  $\sigma_{II} \leq 0$ . Somit ist die Definition der Vergleichsspannung im Zug/Druckbereich ausreichend:

$$\sigma^{eq} = \sigma_I / \beta_t - \sigma_{II} / \beta_c \quad (7.5)$$

Die Zugfestigkeit  $\beta_t$  wurde aus den direkten Zugversuchen von Abs. 7.1.1 bestimmt. Für die Druckfestigkeit  $\beta_c$  stehen für die Mörtelfuge keine experimentellen Daten zur Verfügung und wurden daher mit dem 10-fachen

Wert von  $\beta_t$  abgeschätzt. In Abb. 7.5 ist die Vergleichsspannung sowohl für die Hauptspannungen als auch für den Spannungsvektor  $\mathbf{t}_A$  visualisiert. Für die Evolution der Schädigung wird eine exponentielle Entfestigung angenommen:

$$d = g(\alpha_d) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_d \leq 1,0 \\ 1 - \frac{1}{\alpha_d} \exp(h_d(1 - \alpha_d)) & \text{für } \alpha_d > 1,0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Dabei definiert sich der Parameter  $h_d$  über die Bruchenergie  $G_{f,t}$ :

$$h_d = \beta_t^2 / (p_{y,A} G_{f,t})$$

Der komplette Ablauf des Algorithmus für das Schädigungsmodell ist in Algorithmus 7.1 zusammengefasst.

---

### Algorithmus 7.1 Schädigungsmodell für das Fugenversagen

---

Eingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $\alpha_{d,n}$

weitere interne Variablen für  $\mathbf{t}_F$  siehe Algorithmus 7.2

#### 1. Schritt:

Spannung  $\mathbf{t}_A$  mit elastischer Kopplung

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_{n+1} \quad \mathbf{C}_A \text{ siehe (4.29)}$$

Spannung  $\mathbf{t}_F$  mit Kontakt-/Reibmodell im gerissenen Zustand

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{t}_F ([[ \mathbf{u} ]]_{n+1}, \dots) \quad \text{siehe Algorithmus 7.2}$$

#### 2. Schritt: Vergleichsspannung $\sigma^{eq}$

$$\tilde{\mathbf{t}}_A = \mathbf{T} \mathbf{t}_A \quad \text{Mikroskala: } \mathbf{T} = \mathbf{1}$$

Makroskala: siehe (7.27)

$$\sigma_{I, II} = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_A \pm \sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2} \quad \text{Hauptspannungen}$$

$$\sigma^{eq} = \sigma_I / \beta_t - \sigma_{II} / \beta_c \quad \text{Vergleichsspannung}$$

#### 3. Schritt: Schädigungsbedingung

$$f_d^{trial} = \sigma^{eq} - \alpha_{d,n} \quad \text{elastischer Prädiktor}$$

$$\alpha_{d,n+1} = \begin{cases} \alpha_{d,n} & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \\ \sigma^{eq} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}^{tan} \text{ siehe (4.36)}$$

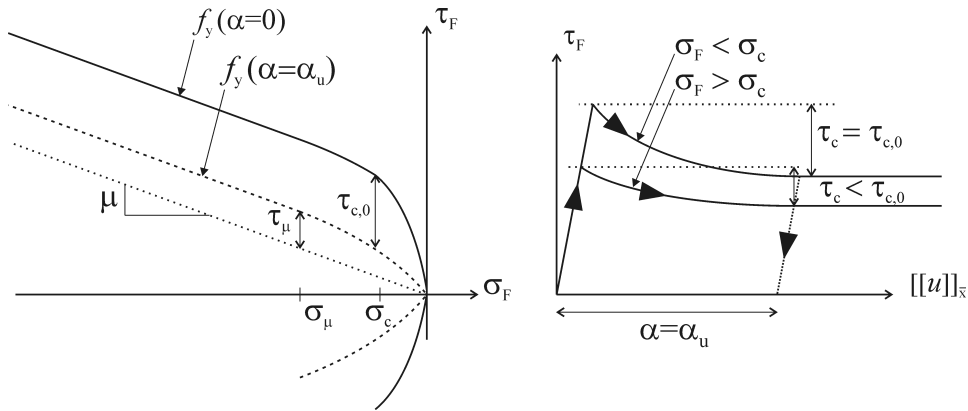
$$d = g(\alpha_{d,n+1}) \quad \text{Entfestigung siehe (7.6)}$$

#### 4. Schritt: Spannungsvektor $\mathbf{t}$ an der Grenzschicht

$$\mathbf{t} = (1 - d)\mathbf{t}_A + d\mathbf{t}_F$$

Ergebnis:  $\mathbf{t}$   $\alpha_{d,n+1}$   $\mathbf{C}^{tan}$

---



**Abbildung 7.6:** Fließbedingung des Reibmodells (links) - Spannungs-Verschiebungskurve (rechts)

### Reibmodell:

Um die experimentell beobachtete Abnahme der Oberflächenrauigkeit numerisch zu beschreiben, wird das perfekt-plastische Reibmodell von Abs. 4.3 auf ein Reibmodell mit entfestigendem Verhalten erweitert. Die Entfestigung der Fließspannung  $\tau_y$  wird mit einer quadratischen Funktion abhängig von  $\alpha_y$  beschrieben. Um das Materialmodell besser auf die Versuchsergebnisse abzustimmen, wird eine ausgerundete Fließbedingung gewählt (siehe Abb. 7.6). Das dazugehörige Plastizitätsmodell definiert sich:

$$\dot{\tau}_F = p_{\bar{x},F} \left( [[\dot{u}]]_{\bar{x}} - [[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{pl} \right) \quad (7.7)$$

$$f_y(\mathbf{t}_F, \alpha_y) = |\tau_F| - \tau_y(\alpha_y, \sigma_F) \leq 0$$

mit  $\tau_y = -\mu \sigma_F + \tau_{y,1} + \tau_{y,2}$  (7.8)

$$[[\dot{u}]]_{\bar{x}}^{pl} = \dot{\gamma} \frac{\partial f_y}{\partial \tau_F} = \pm \dot{\gamma} \quad (7.9)$$

$$\tau_{y,2} = \begin{cases} \tau_c \left( \frac{\alpha_u - \alpha_y}{\alpha_u} \right)^2 & \text{für } \alpha_y < \alpha_u \\ 0 & \text{für } \alpha_y \geq \alpha_u \end{cases} \quad (7.10)$$

$$\dot{\alpha}_y = \dot{\gamma} \text{ und } \alpha_y|_{t=0} = 0 \quad (7.11)$$

Wie bei den Torsionsversuchen beobachtet, ist die Entfestigung der Oberflächenrauigkeit weitgehend von der plastischen Verschiebung und weniger von einer auflastabhängigen Bruchenergie abhängig. Auch im numerischen Modell wird dies mit der akkumulierten plastischen Verschiebung

$\alpha_y$  in (7.11) und (7.10) umgesetzt. Zusätzlich sind  $\tau_c$  und  $\tau_{y,1}$  im Bereich des Spannungsursprungs quadratisch ausgerundet:

$$\tau_c = \begin{cases} \tau_{c,0} & \text{für } \sigma_F < \sigma_c \\ \tau_{c,0} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_c - \sigma_F}{\sigma_c} \right)^2 \right) & \text{für } \sigma_F \geq \sigma_c \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\tau_{y,1} = \begin{cases} \tau_\mu & \text{für } \sigma_F < \sigma_\mu \\ \tau_\mu \left( 1 - \left( \frac{\sigma_\mu - \sigma_F}{\sigma_\mu} \right)^2 \right) & \text{für } \sigma_F \geq \sigma_\mu \end{cases} \quad (7.13)$$

Dabei bezeichnen  $\sigma_c$  und  $\sigma_\mu$  Materialparameter für den Beginn der quadratischen Ausrundung der Fließbedingung. Mit dieser Ausrundung gilt  $\tau_y = 0$  für  $\sigma_F = 0$ , was eine Voraussetzung für die Definition eines adhäsionslosen Kontakt-/Reibmodells ist. Adhäsive Eigenschaften werden mit der adhäsiven Phase in Kombination mit dem Schädigungsmodell berücksichtigt.

#### Linearisierung des Kontakt-/Reibmodells:

Durch Einsetzen der Fließregel (7.9) in (7.7) erhält man

$$\dot{\tau}_F = p_{\bar{x},F} ([[\dot{u}]]_{\bar{x}} \mp \dot{\gamma}_y) \quad (7.14)$$

Für den elastischen Schritt gilt  $\dot{\gamma}_y = 0$  und aus (7.14) folgt:

$$C_{\bar{x}} = \frac{\partial \dot{\tau}_F}{\partial [[\dot{u}]]_{\bar{x}}} = p_{\bar{x},F} \quad C_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial \dot{\tau}_F}{\partial [[\dot{u}]]_{\bar{y}}} = 0$$

Im plastischen Fall wird  $\dot{\gamma}_y$  aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f}_y = 0$  bestimmt. Da der Widerstand  $\tau_{y,2}$  von  $\sigma$  und  $\alpha_y$  abhängig ist, muß bei der Linearisierung von  $\tau_{y,2}$  die Kettenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} \dot{f}_y &= \frac{\partial f_y}{\partial \tau_F} \dot{\tau}_F + \frac{\partial f_y}{\partial \sigma_F} \dot{\sigma}_F + \frac{\partial f_y}{\partial \alpha_y} \dot{\alpha}_y \\ &= \pm \dot{\tau}_F + \mu \dot{\sigma}_F - \frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F} \dot{\sigma}_F - \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \sigma_F} \dot{\sigma}_F - \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \alpha_y} \dot{\alpha}_y = 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Mit der Definition des plastischen Moduls  $H_1 = \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \alpha_y}$  und des Parameters  $H_2 = -\mu + \frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F} + \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \sigma_F}$  erhält man:

$$\dot{f}_y = \pm \dot{\tau}_F - H_2 \dot{\sigma}_F - H_1 \dot{\alpha}_y = 0$$

Einsetzen von (7.14), (7.11):

$$\pm p_{\bar{x},F} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} - p_{\bar{x},F} \dot{\gamma} - H_2 C_{\bar{y}} [[\dot{u}]]_{\bar{y}} - H_1 \dot{\gamma} = 0 \quad (7.16)$$



Mit (7.16) lässt sich  $\dot{\gamma}$  bestimmen

$$\dot{\gamma} = \frac{\pm p_{\bar{x},F} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} - H_2 C_{\bar{y}} [[\dot{u}]]_{\bar{y}}}{p_{\bar{x},F} + H_1} \quad (7.17)$$

und durch Einsetzen in das konstitutive Gesetz (7.14) erhält man:

$$\dot{\tau}_F = \underbrace{\left( p_{\bar{x},F} - \frac{p_{\bar{x},F}^2}{p_{\bar{x},F} + H_1} \right)}_{=C_{\bar{x}}} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} \pm p_{\bar{x},F} \underbrace{\frac{H_2 C_{\bar{y}}}{p_{\bar{x},F} + H_1}}_{=C_{\bar{x}\bar{y}}} [[\dot{u}]]_{\bar{y}}$$

Der tangentielle Operator lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\dot{\mathbf{t}}_F = \mathbf{C}_F^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_F^{tan} = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}} & C_{\bar{x}\bar{y}} \\ 0 & C_{\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$C_{\bar{y}}$  nach dem Kontaktmodell siehe (4.37)

$$C_{\bar{x}} = \begin{cases} 0 & \text{für } C_{\bar{y}} = 0 \\ p_{\bar{x},F} & \text{für } C_{\bar{y}} \neq 0 \wedge f_y < 0 \\ p_{\bar{x},F} - \frac{p_{\bar{x},F}^2}{p_{\bar{x},F} + H_1} & \text{für } C_{\bar{y}} \neq 0 \wedge f_y = 0 \end{cases}$$

$$C_{\bar{x}\bar{y}} = \begin{cases} 0 & \text{für } f_y < 0 \vee C_{\bar{y}} = 0 \\ \pm p_{\bar{x},F} \frac{H_2 C_{\bar{y}}}{p_{\bar{x},F} + H_1} & \text{für } f_y = 0 \wedge C_{\bar{y}} \neq 0 \end{cases}$$

Das vollständige Kontakt- und Reibmodell ist in Algorithmus 7.2 anhand des Zeitintegrationsverfahrens zusammengefasst. Im plastischen Schritt wird die Schubspannung auf die Fließbedingung zurückprojiziert (sogenannten *Return-Mapping-Algorithm* oder kurz RMA, siehe [SH00]). Für die Linearisierung des Materialmodells sind die entsprechenden Ableitungen im Anhang B aufgeführt.

**Algorithmus 7.2** Kontakt- und Reibmodell für das FugenversagenEingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $[[u]]_{\bar{x},n}^{pl}$   $\alpha_{y,n}$ **1. Schritt:** Normalspannung mit Kontaktmodell

$$\sigma_F = \begin{cases} p_{\bar{y},F} [[u]]_{\bar{y},n+1} & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} < 0 \quad \text{gehe zu Schritt 3} \\ 0 & \text{für } [[u]]_{\bar{y},n+1} \geq 0 \quad \text{gehe zu Schritt 2} \end{cases}$$

**2. Schritt:** Kontakt offen - deaktivieren von  $\tau_F$ 

$$\begin{aligned} \tau_F &= 0 \\ \alpha_{y,n+1} &= \alpha_{y,n} \\ [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} &= [[u]]_{\bar{x},n+1} \\ \mathbf{C}_F^{tan} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{gehe zu Schritt 4}$$

**3. Schritt:** Kontakt geschlossen -  $\tau_F$  mit Plastizitätsmodell

Elastischer Prädiktor

$$\begin{aligned} \alpha_{y,n+1}^{trial} &= \alpha_{y,n} \\ \tau_F^{trial} &= p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \right) \end{aligned}$$

Fließbedingung

$$f_y^{trial} = |\tau_F^{trial}| - \tau_y(\alpha_{y,n+1}^{trial}, \sigma_F) \quad \text{siehe Gl. (7.8)}$$

Interne Variablen

$$\alpha_{y,n+1}, [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} = \begin{cases} \alpha_{y,n}, [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} & \text{für } f_y^{trial} < 0 \\ \text{aus RMA} & \text{für } f_y^{trial} \geq 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}_F^{tan} \text{ siehe (7.18)}$$

Schubspannung

$$\tau_F = p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} \right) \quad \text{gehe zu Schritt 4}$$

**RMA:** return-mapping-algorithm mit der Newton-Raphson-Methode

$$f_y(\Delta\gamma) = |\tau_F| - \tau_y(\alpha_{y,n+1}, \sigma_F) \equiv 0 \quad \text{Konvergenz-} \\ \text{kriterium}$$

$$\tau_F = p_{\bar{x},F} \left( [[u]]_{\bar{x},n+1} - [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \mp \Delta\gamma \right)$$

$$\alpha_{y,n+1} = \alpha_{y,n} + \Delta\gamma$$

$$[[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl} = [[u]]_{\bar{x},n}^{pl} \pm \Delta\gamma$$

$$\Delta\gamma^{(i)} = \Delta\gamma^{(i-1)} + \Delta\Delta\gamma$$

$$\Delta\Delta\gamma = -f_y^{(i-1)} \left( \frac{\partial f_y}{\partial \Delta\gamma} \right)^{-1} = f_y^{(i-1)} (p_{\bar{x},F} + H_1)^{-1}$$

**4. Schritt:** Spannungsvektor

$$\mathbf{t}_F = \begin{bmatrix} \tau_F \\ \sigma_F \end{bmatrix}$$

Ergebnis:  $\mathbf{t}_F$   $[[u]]_{\bar{x},n+1}^{pl}$   $\alpha_{y,n+1}$   $\mathbf{C}_F^{tan}$

### 7.1.3 Validierung des Materialmodells

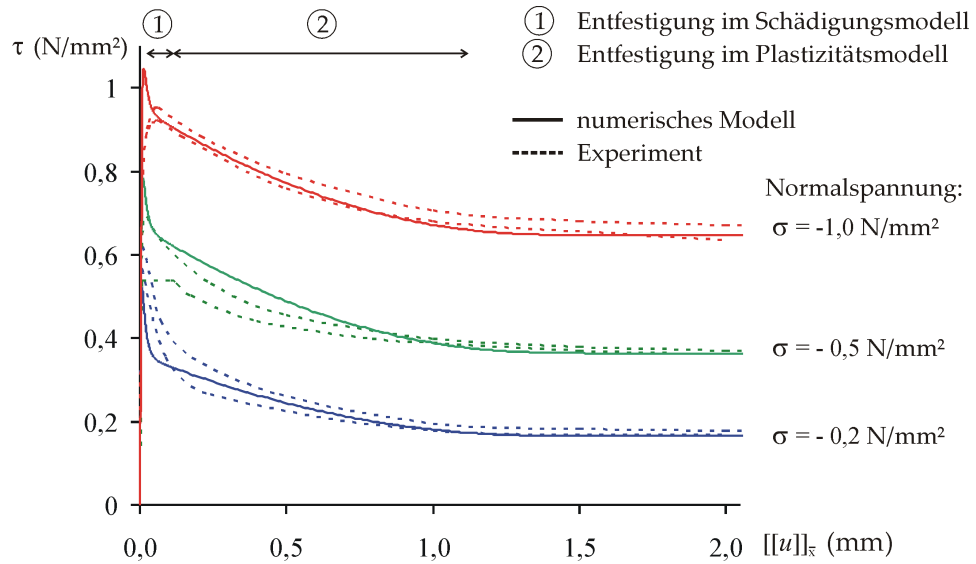
Mit dem dargestellten 2-Phasen-Materialmodell wurden sowohl die Normalkraft-Torsionsversuche als auch der 3-Punkt-Biegeversuch nachgerechnet. Für die Simulation der beiden Versuchserien wurden in beiden Fällen die Materialparameter von Tab. 7.1 verwendet. Die experimentellen und numerischen Ergebnisse sind vergleichend in Abb. 7.7 und Abb. 7.8 abgebildet.

Bei den Normalkraft-Torsionsversuchen wird die Abnahme der Oberflächenrauigkeit sehr gut durch die Entfestigung der kohäsiven Schubspannung im Reibmodell abgebildet. Auch das Schädigungsmodell basierend auf den Hauptspannungen im Mörtel beschreibt die maximale Scherfestigkeit zutreffend: mit höheren Pressungen nimmt die Scherfestigkeit zu. Der 3-Punkt-Biegeversuch wird ebenfalls sehr gut abgebildet. Hier zeigt sich der Vorteil des 2-Phasen-Materialmodells: mit dem Schädigungsmodell kann mit einer geringen Bruchenergie das spröde Versagen in normaler Richtung und mit dem entfestigenden Reibmodell eine duktile Abnahme der Oberflächenrauigkeit in tangentialer Richtung abgebildet werden (vgl. die maximale Verschiebung bei Abb. 7.7 und 7.8).

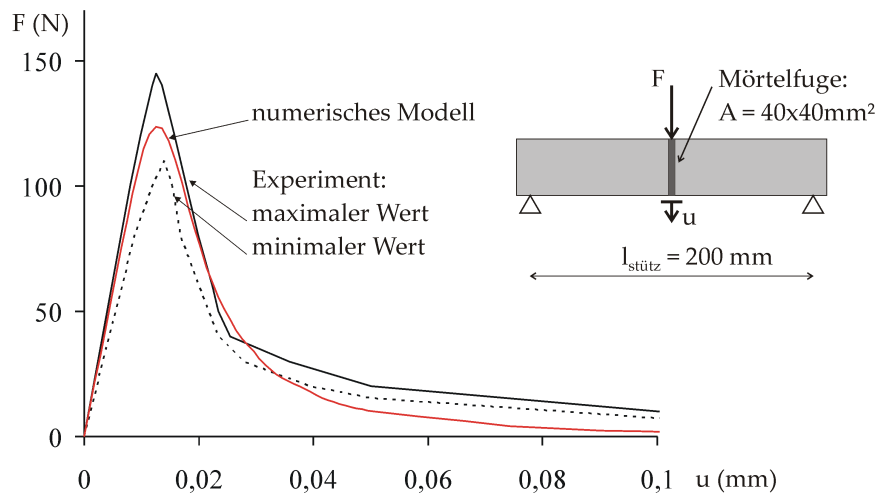
Insgesamt bildet das Materialmodell die mechanischen Effekte auf der kleinen Skala sehr gut ab. Mit diesem Materialmodell werden daher die numerischen Versuche auf der Mikroskala durchgeführt und wichtige Homogenisierungsschritte für Meso- und Makroskala durchgeführt.

**Tabelle 7.1:** Materialparameter für die Beschreibung der Fuge auf der Mikroskala

Schädigungsmodell	Reibmodell
elastische Materialparameter	
$p_{\bar{x},A} = 200 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 200 \text{ N/mm}^3$
$p_{\bar{y},A} = 500 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 500 \text{ N/mm}^3$
inelastische Materialparameter	
$\beta_t = 0,38 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,56$
$\beta_c = 2,00 \text{ N/mm}^2$	$\tau_\mu = 0,08 \text{ N/mm}^2$
$G_{f,t} = 0,002 \text{ N/mm}$	$\sigma_\mu = -0,50 \text{ N/mm}^2$
	$\tau_{c,0} = 0,30 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_c = -0,50 \text{ N/mm}^2$
	$\alpha_u = 1,20 \text{ mm}$



**Abbildung 7.7:** Normalkraft-Torsionsversuche - Abgleich mit dem Materialmodell



**Abbildung 7.8:** 3-Punkt-Biegeversuche - Abgleich mit dem numerischen Modell

## 7.2 Traglast-Modell von Mann/Müller

Mann und Müller beschreiben mit einem einfachen mechanischen Modell die Lastabtragung im Mauerwerksverband [MM73, MM78, MM85]. Ziel dieser Forschungsarbeiten war die Beschreibung der Kontaktspannung in den Mörtelfugen, um einfache Versagenskriterien für das Fugenversagen abzuleiten. Dabei gingen sie von einer spannungsfreien vertikalen Stoßfuge aus, so dass die horizontale Mörtelfuge die Lastabtragung vollständig übernimmt. Mit der Annahme eines blockförmigen Spannungsverlaufs in der Lagerfuge wird der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  abhängig vom Spannungstensor  $\sigma$  im Mauerwerk formuliert. Dabei lassen sich die Komponenten  $\tau$ ,  $\sigma$  des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  in der Fuge abhängig von  $\sigma$  mit Gleichgewichtsbedingungen am einzelnen Stein bestimmen (siehe Abb. 7.9):

Fuge an der linken oberen Steinhälfte / rechten oberen Steinhälfte

$$\text{aus } \sum M = 0 : \quad \sigma_L = \sigma_{yy} - \frac{2h}{l} \tau_{xy} \quad \sigma_R = \sigma_{yy} + \frac{2h}{l} \tau_{xy} \quad (7.19)$$

$$\text{aus } \sum F_x = 0 : \quad \tau_L = \tau_{xy} - \frac{2h}{l} \sigma_{xx} \quad \tau_R = \tau_{xy} + \frac{2h}{l} \sigma_{xx} \quad (7.20)$$

In (7.20) und (7.19) ist  $\mathbf{t}$  vom Steinformat  $l$ ,  $h$  abhängig. In der linken Bildhälfte von Abb. 7.10 ist der blockförmige Spannungsverlauf im Mauerwerksverband unter Normalkraft und Schub dargestellt. Aufgrund der reduzierten Normalspannung begründet Mann/Müller das treppenförmige Fugenversagen und eine abgeminderte Schubtragfähigkeit von Mauerwerk. Dieses einfache mechanische Modell wurde auch in das Bemessungskonzept der Mauerwerksnorm DIN1053 [DIN96] aufgenommen.

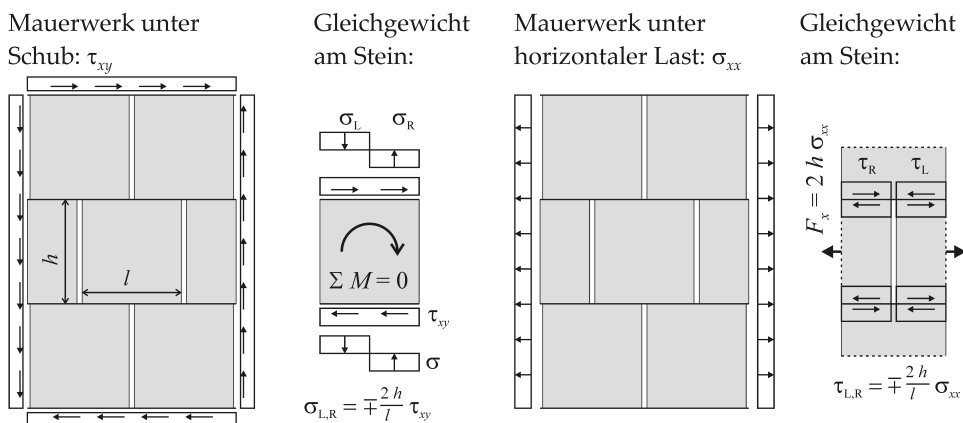
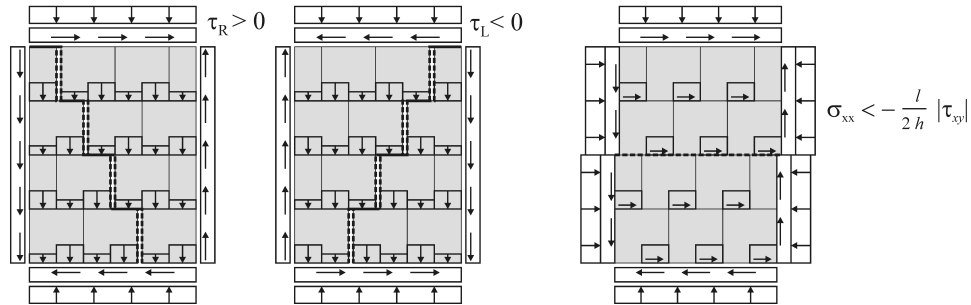


Abbildung 7.9: Mechanisches Modell nach Mann/Müller für die Lagerfuge

Mauerwerk unter Normalkraft und Schub:  
blockförmige Kontaktspannung  $\sigma$   
treppenförmiges Versagen

2-achsiger Druck und Schub:  
blockförmige Kontaktspannung  $\tau$   
horizontales Versagen



**Abbildung 7.10:** Versagensmodell von Mann/Müller - Versagensmoden abhängig von der Belastung

Das mechanische Modell von Mann/Müller wird von den numerischen Untersuchungen in Abs. 7.5 grundsätzlich bestätigt. In dieser Arbeit werden mit diesem einfachen Traglastmodell die Versagensmoden beim Fugenversagen abgeschätzt. Damit sich die horizontalen Fugenabschnitte nicht separieren, muss  $\sigma_L < 0$  und  $\sigma_R < 0$  gelten. Mit Gleichung (7.19) erhält man:

$$\sigma_{yy} < -\frac{2h}{l} |\tau_{xy}| \quad (7.21)$$

Beim treppenförmigen Fugenversagen muss ein Reibkriterium in den horizontalen Fugenabschnitten erfüllt sein und gleichzeitig müssen sich die vertikalen Stoßfugen separieren (siehe Abb. 7.10, links). Das Öffnen der Stoßfugen ist gleichbedeutend mit  $\tau_R > 0$  bzw.  $\tau_L < 0$ . Einsetzen von (7.20) in diese Ungleichungen führt zu:

$$\sigma_{xx} > -\frac{l}{2h} |\tau_{xy}| \quad (7.22)$$

Für kleinere Werte von  $\sigma_{xx}$  ist nicht treppenförmiges sondern horizontales Fugenversagen maßgebend (siehe Abb. 7.10, rechts). Definiert man mit einem Reibkoeffizient  $\mu$  ein einfaches Reibkriterium  $|\tau| + \mu\sigma \leq 0$ , können mit (7.22) folgende Versagensmoden unterschieden werden:

Orientierung	Reibkriterium	Nebenbedingung	
treppenförmig	$ \tau_L  + \mu \sigma_L \leq 0$	$\sigma_{xx} > -\frac{l}{2h}  \tau_{xy} $	(7.23)
treppenförmig	$ \tau_R  + \mu \sigma_R \leq 0$	$\sigma_{xx} > -\frac{l}{2h}  \tau_{xy} $	
horizontal	$ \tau_L + \tau_R  + \mu (\sigma_L + \sigma_R) \leq 0$	$\sigma_{xx} \leq -\frac{l}{2h}  \tau_{xy} $	

Mit dieser Fallunterscheidung werden bei den Homogenisierungsschritten in Abs. 7.3.1 und 7.4.2 geeignete Belastungskombinationen auf die periodi-

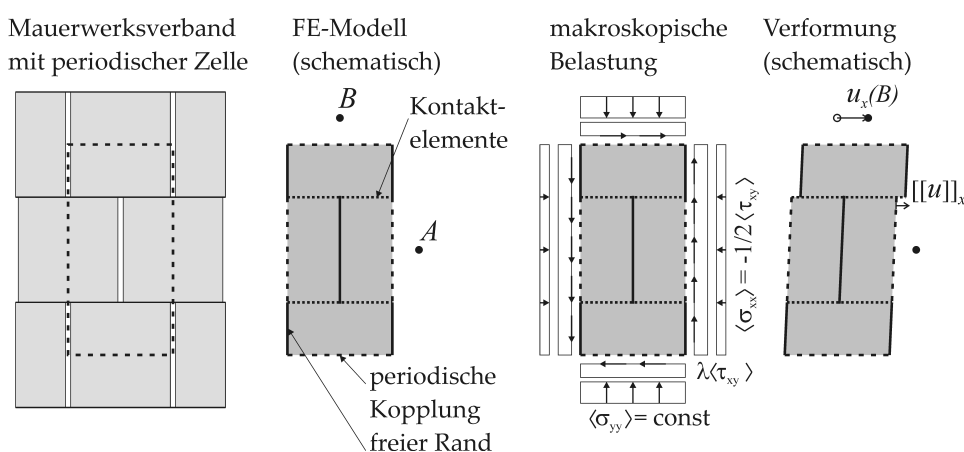
sche Zelle aufgebracht, um gezielt ein horizontales bzw. treppenförmiges Fugenversagen zu untersuchen.

## 7.3 Horizontales Fugenversagen

### 7.3.1 Numerische Untersuchung auf der Mikroskala

Das horizontale Fugenversagen wird mit der periodischen Zelle auf der Mikroskala numerisch untersucht. Zu diesem Zweck wird das Modell von Abs. 6.2.2 mit Kontaktelementen für die Lagerfuge erweitert. Diesen Kontaktelementen wird das Materialmodell von Abs. 7.1.2 zugewiesen. Die vertikale Stoßfuge ist entkoppelt und jede Lagerfuge wird mit 40 Kontaktelementen diskretisiert. Das FE-Modell ist schematisch in Abb. 7.11 dargestellt.

Dieser periodischen Zelle werden Schubkräfte bei unterschiedlich hohen Normalspannungen aufgebracht. Bei jedem Belastungstest wird die Pressung  $\sigma_{yy}$  konstant gehalten und die Schubspannung  $\tau_{xy}$  monoton gesteigert. Abhängig von  $\tau_{xy}$  wird gleichzeitig die horizontale Pressung gesteigert ( $\sigma_{xx} = -1/2\tau_{xy}$ ). Ohne  $\sigma_{xx}$  würde nach Gleichung (7.23) ein treppenförmiges Fugenversagen eintreten. Um ein eindeutiges Versagen in der oberen Lagerfuge der periodischen Zelle zu modellieren, wurde den Kontaktelementen der unteren Lagerfuge eine höhere Festigkeit zugewiesen.



**Abbildung 7.11:** Modellierung des horizontalen Fugenversagens mit der periodischen Zelle

Die periodischen Randbedingungen sind identisch zu Abs. 6.2.1 und die Verformung und Belastung der Zelle werden wieder mit den Kontrollknoten  $A$  und  $B$  gesteuert (siehe Abb. 7.11, Mitte). Für den Homogenisierungsschritt auf die Makroskala wird die gesamte Verformung der periodischen Zelle in einen kontinuierlichen Anteil  $\langle \epsilon \rangle$  für das Kontinuum und einen diskontinuierlichen Anteil  $\langle [[\mathbf{u}]] \rangle$  für das Fugenversagen additiv zerlegt. Die Methode der additiven Zerlegung der Verformung wurde von Belytschko in [BLS08] für eine periodische Zelle mit beliebig orientierten Makrorissen beschrieben und wird in diesem Abschnitt auf die horizontale Grenzschicht angewendet.

Für eine horizontale Grenzschicht gilt für die Komponenten von  $\mathbf{t}$  nach CAUCHY  $\tau = \tau_{xy}$  und  $\sigma = \sigma_{yy}$ . Durch Einsetzen der Spannungskontinuität in Gleichung (6.3) erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \langle \tau_{xy} \rangle = f_y(A)/dy = f_x(B)/dx \\ \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{yy} \rangle = f_y(B)/dx \end{aligned} \quad (7.24)$$

Die Verformung der periodischen Zelle kann entsprechend Abb. 7.11 additiv zerlegt und mit der kinematischen Kopplung (6.3) abhängig von den Verschiebungen der Kontrollknoten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} u_x(A)/dx &= \langle \epsilon_{xx} \rangle \\ u_y(B)/dy &= \langle \epsilon_{yy} \rangle + \langle [[u]]_{\bar{y}} \rangle / dy \\ u_y(A)/dx + u_x(B)/dy &= \langle \gamma_{xy} \rangle + \langle [[u]]_{\bar{x}} \rangle / dy \end{aligned}$$

Durch Umstellen der letzten beiden Gleichungen erhält man

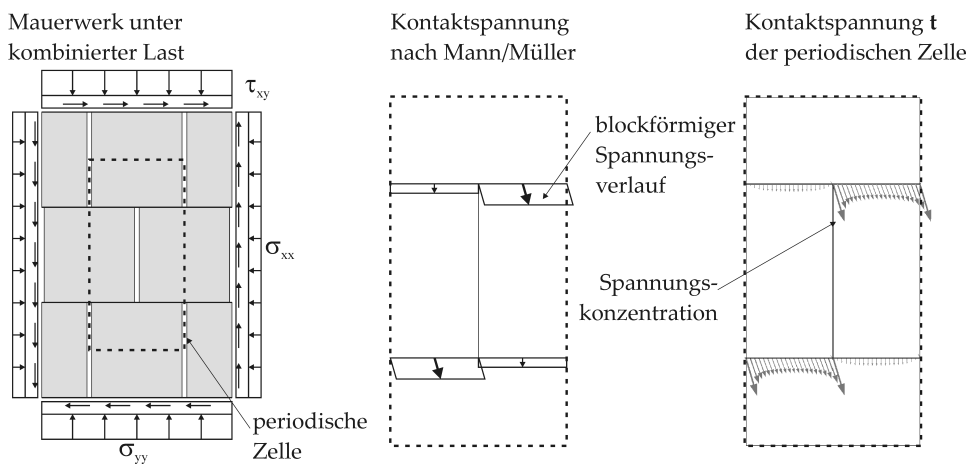
$$\begin{aligned} \langle [[u]]_{\bar{x}} \rangle &= u_y(A) dy/dx + u_x(B) - dy \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle [[u]]_{\bar{y}} \rangle &= u_y(B) - dy \langle \epsilon_{yy} \rangle \end{aligned} \quad (7.25)$$

Unter Berücksichtigung des homogenisierten Materialgesetzes für das Kontinuum (siehe (6.9) von Abs. 6.2.2) und durch Einsetzen von (7.24) in (7.25) lassen sich die homogenisierten diskontinuierlichen Verschiebungen der Fuge wieder aus Werten an den Kontrollknoten angeben:

$$\begin{aligned} \langle [[u]]_{\bar{x}} \rangle &= u_y(A) dy/dx + u_x(B) - dy/dx f_x(B) / \langle G_{xy} \rangle \\ \langle [[u]]_{\bar{y}} \rangle &= u_y(B) - dy/dx f_y(B) / \langle E_y \rangle \end{aligned} \quad (7.26)$$

Mit (7.26) und (7.24) wurden die makroskopischen Größen  $\langle [[\mathbf{u}]] \rangle$  und  $\langle \mathbf{t} \rangle$  von Abb. 7.13 ausgewertet.





**Abbildung 7.12:** Vergleich der Spannungsverteilung nach Mann/Müller mit den numerischen Berechnungen der periodischen Zelle

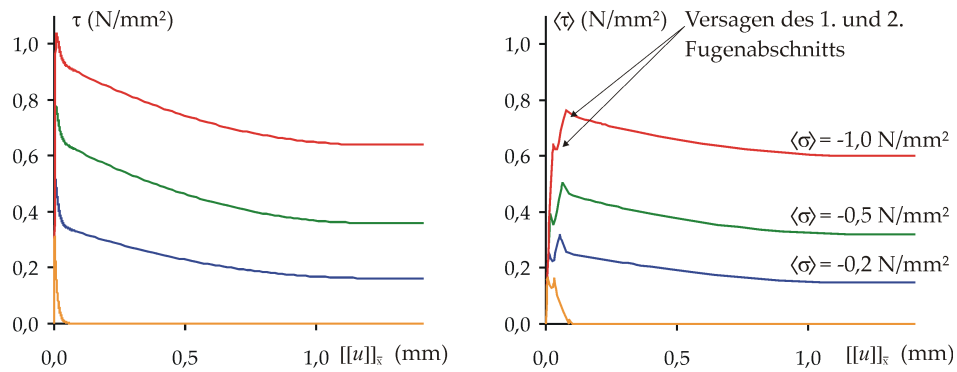
#### Spannungsverteilung beim Mikromodell der periodischen Zelle:

In Abb. 7.12 wird die blockförmige Spannungsverteilung nach Mann/Müller mit dem Mikromodell der periodischen Zelle verglichen. Das Mikromodell stimmt bei der Spannungsverteilung weitgehend mit dem vereinfachten Modell überein, wobei beim numerischen Modell zusätzliche Spannungskonzentrationen in der Nähe der vertikalen Stoßfuge abgebildet werden.

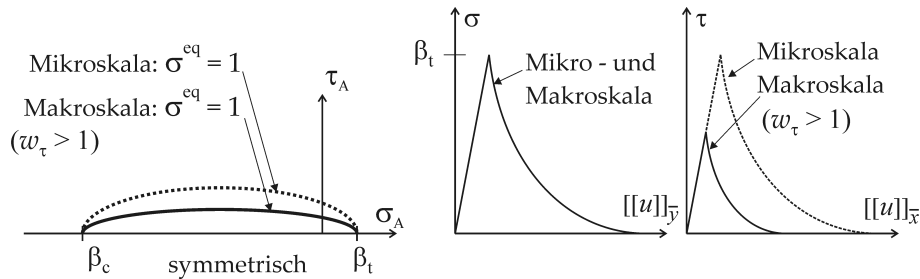
#### Auswertung der homogenisierten Größen:

In der rechten Bildhälfte von Abb. 7.13 ist die homogenisierte Spannung  $\langle \tau \rangle$  ausgewertet, die unter Berücksichtigung der Mauerwerksstruktur vom Mikromodell der periodischen Zelle berechnet wurde. Vergleichend ist in der linken Bildhälfte das Materialmodell der Mikroskala - gültig für einen kleinen Fugenabschnitt - gezeigt, das diese Mauerwerksstruktur nicht berücksichtigt. Aufgrund der Spannungskonzentrationen bei der Stoßfuge ist die Festigkeit von  $\langle \tau \rangle$  bei der periodischen Zelle im Vergleich zum Materialmodell der Mikroskala um ca. 30% reduziert.

Da im Mauerwerksverband aufgrund der treppenförmigen Spannungsverteilung die Fugenabschnitte mit der linken und rechten Überbindelänge nacheinander versagen, weist die Spannungs-Verschiebungskurve von  $\langle \tau \rangle$  zwei Maxima auf (siehe Abb. 7.13, rechts).



**Abbildung 7.13:** Materialmodell der Mikroskala (links), homogenisierte Schubspannung  $\langle \tau \rangle$  der periodischen Zelle beim horizontalen Fugenversagen (rechts)



**Abbildung 7.14:** Materialmodelle für Mikro- und Makroskala; Vergleichsspannung (links); Spannungs-Verschiebungskurve (rechts)

### 7.3.2 Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala)

In der Einheitszelle ist für das Fugenversagen ein entsprechendes horizontales Kontaktelement vorgesehen. Zugunsten der numerischen Effizienz wird bei der groben Vernetzung der Makroskala die inhomogene Spannungsverteilung nicht mehr abgebildet (siehe Abb. 7.15). Analog zum Homogenisierungsschritt des Kontinuums werden beim Fugenversagen die makroskopischen Größen phänomenologisch durch ein konstitutives Gesetz mit reduzierten Steifigkeiten und reduzierten Festigkeiten beschrieben. Das Schädigungsmodell von Abs. 7.1.2 ist ausreichend flexibel formuliert, so dass es mit geänderten Material- und Strukturparametern auch auf die Makroskala angewendet werden kann.

Da die Mikrostruktur der periodischen Zelle vorrangig bei Schubbelastung und weniger bei Normalspannungen zu lokalen Spannungskonzentrationen führt, ist eine anisotrope Reduzierung der Festigkeit erforderlich. Beim

konstitutiven Gesetz der Makroskala wird diese Anisotropie mit der Transformationsvorschrift  $\mathbf{T}$  bei der Definition der Vergleichsspannung berücksichtigt:

$$\tilde{\mathbf{t}}_A = \mathbf{T} \mathbf{t}_A \quad \text{mit } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} w_\tau & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \tau_A \\ \sigma_A \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

$$\sigma^{eq} = \sigma^{eq}(\tilde{\mathbf{t}}_A)$$

Abhängig vom Parameter  $w_\tau$  wird ein Spannungsvektor  $\tilde{\mathbf{t}}_A$  definiert, der die wesentlichen Struktureigenschaften des Mauerwerksverbands phänomenologisch auf der Makroskala berücksichtigt. Mit  $w_\tau > 1$  wird  $\tau_A$  stärker bei der Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  gewichtet. Dies führt zu einer reduzierten Schubfestigkeit im Schädigungsmodell (siehe Abb. 7.14). In Tab. 7.2 sind die Materialparameter der Makroskala denen der Mikroskala gegenübergestellt. Mit einem geeigneten Strukturparameter  $w_\tau$  und reduzierten Penalty-Steifigkeiten kann die Makroskala die wesentlichen mechanischen Eigenschaften wie Steifigkeit und Festigkeit zutreffend abbilden. Die Spannungs-Verschiebungskurven von Abb. 7.15 bestätigen, dass die Spannung  $\langle \tau \rangle$  aus den numerischen Versuchen mit der Spannung  $\tau$  des Makromodells weitgehend übereinstimmt.

Die numerischen Versuche des Mikromodells führen zu nichtglatten Spannungen vor dem Erreichen der maximalen Festigkeiten. Im konstitutiven Gesetz der Makroskala wird zugunsten einer einfachen mathematischen Formulierung ein glatter Verlauf beschrieben, der auch auf Strukturebene ein besseres Konvergenzverhalten bewirkt.

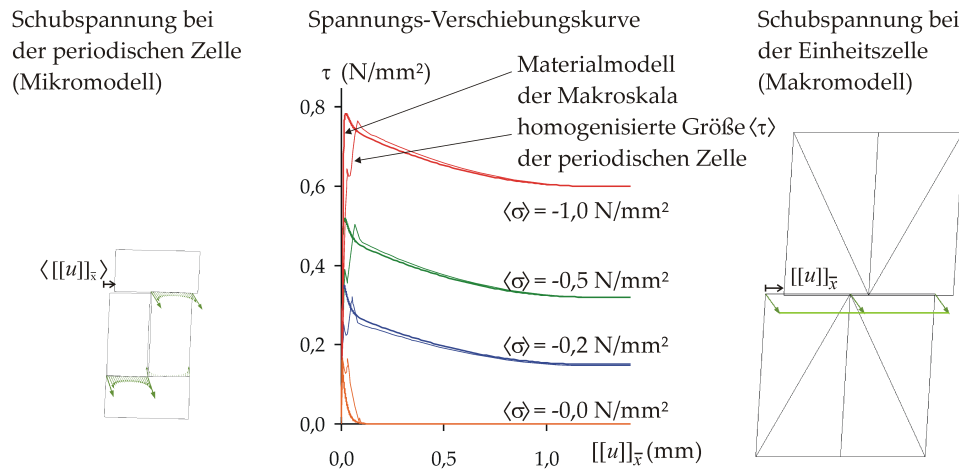


Abbildung 7.15: Horizontales Fugenversagen mit Mikro- und Makromodell

Tabelle 7.2: Materialparameter für horizontales Fugenversagen

Schädigungsmodell		Reibmodell	
elastische Materialparameter			
Mikroskala	Makroskala	Mikroskala	Makroskala
$p_{\bar{x},A} = 200$	$60 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 200$	$60 \text{ N/mm}^3$
$p_{\bar{y},A} = 500$	$200 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 500$	$200 \text{ N/mm}^3$
inelastische Materialparameter			
$\beta_t = 0,38$	$0,35 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,56$	$0,56$
$\beta_c = 2,00$	$1,75 \text{ N/mm}^2$	$\tau_\mu = 0,08$	$0,04 \text{ N/mm}^2$
$G_{f,t} = 0,002$	$0,005 \text{ N/mm}$	$\sigma_\mu = -0,50$	$-0,25 \text{ N/mm}^2$
$w_\tau = 1,0$	$1,8$	$\tau_{c,0} = 0,30$	$0,15 \text{ N/mm}^2$
		$\sigma_c = -0,50$	$-0,30 \text{ N/mm}^2$
		$\alpha_u = 1,20$	$1,20 \text{ mm}$

## 7.4 Treppenförmiges Fugenversagen

### 7.4.1 Mechanik einer treppenförmigen Grenzschicht

Im Mauerwerksverband sind die Stoß- und Lagerfugen treppenförmig angeordnet. Diese regelmäßige Anordnung kann makroskopisch als diagonale Grenzschicht angesehen werden (siehe Abb. 7.16). Auch beim Makromodell der Einheitszelle wird diese makroskopische Beschreibung der Grenzschicht verfolgt. Aus Gleichgewichtsgründen muss bei einer äquivalenten diagonalen Grenzschicht der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  der horizontalen und vertikalen Fugenabschnitte addiert werden:

$$\mathbf{t} = \frac{dx}{dl} \mathbf{t}_h + \frac{dy}{dl} \mathbf{t}_v \quad (7.28)$$

Die Faktoren  $dx/dl$  und  $dy/dl$  berücksichtigen die unterschiedlichen Bezugsflächen der horizontalen, vertikalen und äquivalenten diagonalen Grenzschicht. Gleichzeitig ist mit  $dx$  und  $dy$  die Neigung  $\alpha$  der diagonalen Grenzschicht und der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  definiert:

$$\tan \alpha = -\frac{dy}{dx} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{dl} \begin{bmatrix} dy \\ dx \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Mit (7.29) lässt sich (7.28) mit trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

$$\mathbf{t} = |\cos \alpha| \mathbf{t}_h + |\sin \alpha| \mathbf{t}_v \quad (7.30)$$

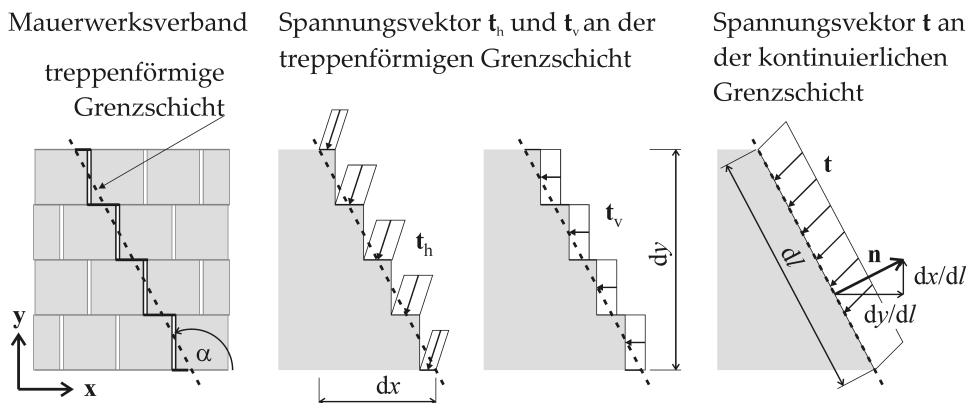


Abbildung 7.16: Mechanik an einer treppenförmigen Grenzschicht

**Reduzierung auf den horizontalen Fugenabschnitt:**

Unvermörtelte vertikale Stoßfugen können näherungsweise als spannungsfrei angenommen werden. (7.30) reduziert sich zu:

$$\mathbf{t} = |\cos \alpha| \mathbf{t}_h = \frac{dx}{dl} \mathbf{t}_h \quad (7.31)$$

Durch Einsetzen von (7.31) in die Spannungskontinuität  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  erhält man:

$$\mathbf{t}_h = \frac{dl}{dx} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (7.32)$$

Werden die Komponenten von  $\mathbf{t}_h$  mit Hilfe der Vektoren  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  und  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  tangential und normal zum horizontalen Fugenabschnitt aufgespalten, erhält man:

$$\begin{aligned} \tau_h &= \mathbf{t}_h \mathbf{x} = \frac{dl}{dx} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \mathbf{x} \\ \sigma_h &= \mathbf{t}_h \mathbf{y} = \frac{dl}{dx} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (7.33)$$

**Vergleich mit dem mechanischen Modell von Mann/Müller:**

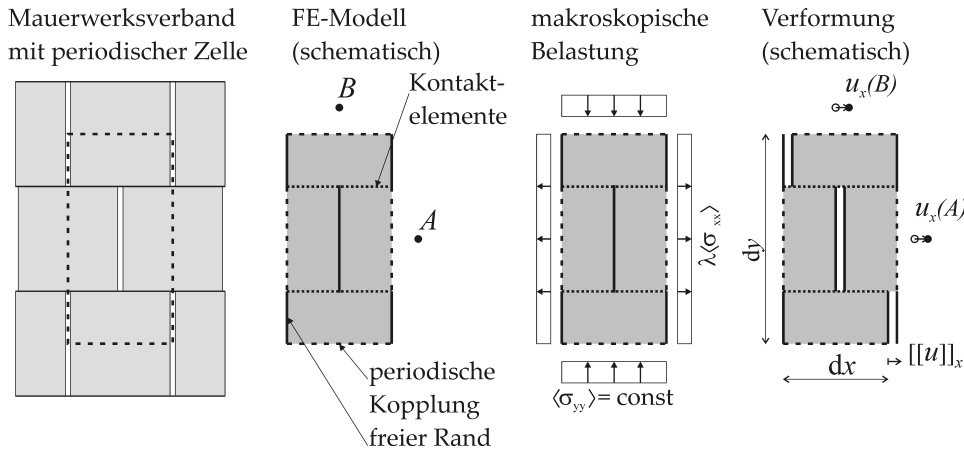
Wie in Gleichung (7.31) gingen auch Mann/Müller von einer spannungsfreien vertikalen Stoßfuge aus (siehe Abs. 7.2). Durch Spezifikation des Normalenvektors von (7.29) in Gleichung (7.33) lässt sich  $\mathbf{t}_h$  abhängig von den Komponenten des Spannungstensors ausdrücken:

$$\begin{aligned} \tau_h &= \tau_{xy} + \frac{dy}{dx} \sigma_{xx} \\ \sigma_h &= \sigma_{yy} + \frac{dy}{dx} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Die Neigung der treppenförmigen Grenzschicht lässt sich auch mit der Steinhöhe  $h$  und dem Überbindemaß  $\frac{l}{2}$  ausdrücken:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{\frac{l}{2}} \quad (7.35)$$

Durch Einsetzen von (7.35) in (7.34) lässt sich zeigen, dass das mechanische Modell von Mann/Müller identisch mit der Spannungskontinuität an der treppenförmigen Grenzschicht ist (Vergleiche (7.34) mit (7.19) und (7.20)).



**Abbildung 7.17:** Numerische Modellierung des diagonalen Fugenversagens mit der periodischen Zelle

#### 7.4.2 Numerische Untersuchung auf der Mikroskala

Beim Mikromodell für das treppenförmige Fugenversagen wird eine spannungsfreie vertikale Stoßfuge angenommen. Die Homogenisierung mit der periodischen Zelle beschränkt sich auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}_h$  in den horizontalen Fugenabschnitten. Die homogenisierten Größen  $\langle \mathbf{t}_h \rangle$  und  $\langle [[\mathbf{u}]]_h \rangle$  sind mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  vom Steinformat und Überbindemaß abhängig. Bei einem quadratischen Steinformat mit halbsteinigem Überbindemaß gilt  $dy/dx = 2$  und durch Einsetzen in (7.34) erhält man:

$$\begin{aligned}\langle \tau_h \rangle &= 2 \langle \sigma_{xx} \rangle + \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \sigma_h \rangle &= 2 \langle \tau_{xy} \rangle + \langle \sigma_{yy} \rangle\end{aligned}$$

Mit (6.3) kann  $\langle \mathbf{t}_h \rangle$  abhängig von Kräften an den Kontrollknoten der periodischen Zelle formuliert werden:

$$\begin{aligned}\langle \tau_h \rangle &= 2 f_x(A)/dx + f_x(B)/dx \\ \langle \sigma_h \rangle &= 2 f_x(B)/dx + f_y(B)/dx\end{aligned}\quad (7.36)$$

Die Verschiebung der Kontrollknoten setzt sich additiv aus der kontinuierlichen Verformung  $\langle \epsilon \rangle$  des Kontinuums und der diskontinuierlichen Verschiebung  $\langle [[\mathbf{u}]]_h \rangle$  der stufenförmigen Grenzschicht zusammen (siehe Abb. 7.17, rechts):

$$\begin{aligned}u_x(A)/dx &= \langle \epsilon_{xx} \rangle + \langle [[u]]_x \rangle / dx \\ u_y(B)/dy &= \langle \epsilon_{yy} \rangle + \langle [[u]]_y \rangle / dy \\ u_y(A)/dx + u_x(B)/dy &= \langle \gamma_{xy} \rangle + \langle [[u]]_x \rangle / dy + \langle [[u]]_y \rangle / dx\end{aligned}$$

Durch Umstellen der ersten beiden Zeilen in der letzten Gleichungsfolge und durch Einsetzen des homogenisierten Materialgesetzes (6.9) des Kontinuums erhält man:

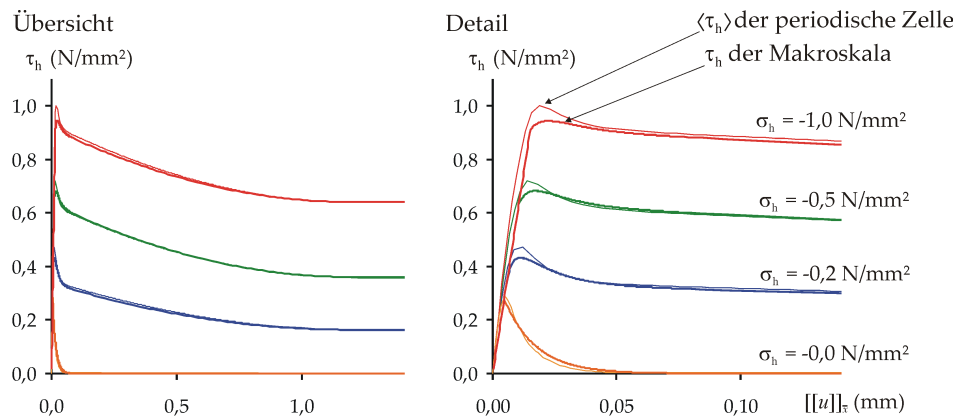
$$\begin{aligned}\langle [[u]]_x \rangle &= u_x(A) - dx \langle \epsilon_{xx} \rangle = u_x(A) - dx \langle \sigma_{xx} \rangle / \langle E_x \rangle \\ \langle [[u]]_y \rangle &= u_y(B) - dy \langle \epsilon_{yy} \rangle = u_y(B) - dy \langle \sigma_{yy} \rangle / \langle E_y \rangle\end{aligned}\quad (7.37)$$

Mit (6.3) lassen sich die homogenisierten diskontinuierlichen Verschiebungen der Fuge wieder mit Werten an den Kontrollknoten ausdrücken:

$$\begin{aligned}\langle [[u]]_x \rangle &= u_x(A) - dx/dy f_x(A) / \langle E_x \rangle \\ \langle [[u]]_y \rangle &= u_y(B) - dy/dx f_y(B) / \langle E_y \rangle\end{aligned}\quad (7.38)$$

### Auswertung der homogenisierten Größen:

Es werden vier Belastungstests mit unterschiedlich hohen Normalspannungen durchgeführt und dabei  $\langle \sigma_{xx} \rangle$  monoton gesteigert (siehe Abb. 7.17). In Abb. 7.18 wird die homogenisierte Spannung  $\langle \tau_h \rangle$  aus den numerischen Versuchen der periodischen Zelle ausgewertet und mit  $\tau_h$  der Makroskala von Abs. 7.4.3 verglichen. Da der Verlauf von  $\langle \tau_h \rangle$  und  $\tau_h$  weitgehend übereinstimmt, werden die numerisch ermittelten Spannungen vom Materialmodell der Makroskala phänomenologisch sehr gut beschrieben.



**Abbildung 7.18:** Spannungs-Verschiebungskurve beim treppenförmigen Fugenversagen; Vergleich von  $\langle \tau_h \rangle$  der periodischen Zelle und  $\tau_h$  des Makromodells



### 7.4.3 Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala)

Für das treppenförmige Fugenversagen ist bei der Einheitszelle ein diagonales Kontaktelement vorgesehen, welches die Rissöffnung  $[[\bar{\mathbf{u}}]]$  im lokalen Koordinatensystem diskretisiert:

$$[[\bar{\mathbf{u}}]] = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad \text{Definition von } \mathbf{B} \text{ siehe (5.3)}$$

Um die konstitutiven Gesetze einfach zu halten, werden für die horizontalen und vertikalen Fugenabschnitte eigene Materialmodelle formuliert. Bei diesem Strukturmodell wird angenommen, dass in den horizontalen und vertikalen Fugenabschnitten die Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  identisch ist. Für eine einfache konstitutive Beschreibung wird der diskretisierte Wert  $[[\bar{\mathbf{u}}]]$  im lokalen Koordinatensystem in die Koordinatensysteme der horizontalen und vertikalen Fugenabschnitte transformiert:

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]_h &= \mathbf{T}_\alpha [[\bar{\mathbf{u}}]] \\ [[\mathbf{u}]]_v &= \mathbf{T}_{\alpha-90^\circ} [[\bar{\mathbf{u}}]] \end{aligned} \quad (7.39)$$

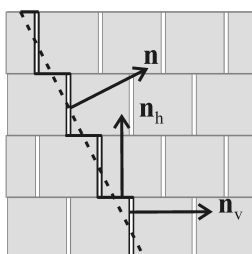
$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad \text{mit } c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha$$

Def. von  $\alpha$  und  $\alpha - 90^\circ$  siehe Abb. 7.19

Dabei wird die Rotationsvorschrift für die vektorielle Größe  $[[\bar{\mathbf{u}}]]$  mit den Drehwinkeln  $\alpha$  und  $\alpha - 90^\circ$  als  $\mathbf{T}_\alpha$  und  $\mathbf{T}_{\alpha-90^\circ}$  bezeichnet.

Im ungeschädigten Zustand wird die horizontale Lagerfuge elastisch gekoppelt, im geschädigten Zustand der Lagerfuge wird der horizontale Abschnitt mit einem Reibmodell und die vertikale Fuge mit einem Kontakt-

Definition der Normalenvektoren



$\mathbf{n}$  diagonale Grenzschicht  
 $\mathbf{n}_h$  horizontale Fuge  
 $\mathbf{n}_v$  vertikale Fuge

Drehwinkel am Element

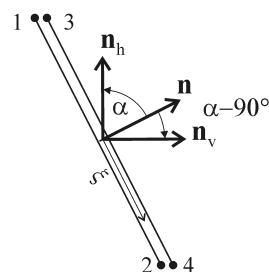


Abbildung 7.19: Koordinatensysteme an der treppenförmigen Grenzschicht

modell beschrieben. Die vertikale Stoßfuge wird sehr glatt hergestellt, so dass die Vernachlässigung von Reibeffekten gerechtfertigt ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{h,A} &= \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_h && \text{elastische Kopplung siehe (4.29)} \\ \mathbf{t}_{h,F} &= \mathbf{t}_{h,F} \left( [[\mathbf{u}]]_h, \alpha_y, [[\mathbf{u}]]_h^{pl} \right) && \text{Reibmodell siehe Algorithmus 7.2} \\ \mathbf{t}_v &= \mathbf{t}_v ([[ \mathbf{u} ]])_v && \text{Kontaktmodell siehe (4.37)} \end{aligned}$$

Der Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  im lokalen Koordinatensystem der diagonalen Grenzschicht setzt sich aus den Spannungskomponenten abhängig von der Schädigungsvariable  $d$  zusammen. Mit der Koordinatentransformation (7.39) und durch Einsetzen der einzelnen Spannungskomponenten in (7.30) erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}} &= |\cos \alpha| \mathbf{T}_\alpha^{-1} (d \mathbf{t}_{h,A} + (1-d) \mathbf{t}_{h,F}) + |\sin \alpha| \mathbf{T}_{\alpha-90^\circ}^{-1} (1-d) \mathbf{t}_v \\ &= |\cos \alpha| \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{t}_h + |\sin \alpha| \mathbf{T}_{\alpha-90^\circ}^{-1} (1-d) \mathbf{t}_v \end{aligned} \quad (7.40)$$

Die Evolution von  $d$  wird mit dem gleichen Schädigungsmodell wie beim horizontalen Fugenversagen abhängig von der adhäsiven Spannung  $\mathbf{t}_{h,A}$  formuliert (siehe Algorithmus 7.1). Entsprechend (7.40) wird der Kontakt in der vertikalen Stoßfuge nur im geschädigten Zustand ( $d > 0$ ) berücksichtigt. Den Kontakt in der vertikalen Stoßfuge auch im ungeschädigten Zustand zu berücksichtigen, würde zu zusätzlichen nichtlinearen Effekten und Konvergenzproblemen führen.

Mit (7.40) kann der Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  an der kontinuierlichen Grenzschicht zu äquivalenten Knotenkräften aufintegriert werden:

$$\mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \text{siehe (5.6)}$$

Das vollständige Strukturmodell ist in Algorithmus 7.3 zusammengefasst. Mit diesem numerischen Modell können drei verschiedene Versagensmoden mit unterschiedlicher Kinematik an der treppenförmigen Grenzschicht abgebildet werden (siehe Abb. 7.20). Durch die Kombination von verschiedenen Materialmodellen für die vertikale und horizontale Fuge, bleibt jedes einzelne konstitutive Gesetz einfach und die dazugehörige Kinematik wird korrekt modelliert.

Die Material- und Strukturparameter von Tab. 7.3 für das konstitutive Gesetz der Makroskala wurden so gewählt, dass die Spannungsverläufe  $\tau_h$  des Makromodells mit  $\langle \tau_h \rangle$  des Mikromodells weitgehend übereinstimmen (siehe Abb. 7.18). Wie beim horizontalen Versagen ist auch beim treppenförmigen Fugenversagen eine ähnliche Kurvenanpassung notwendig. Im

Vergleich zur Mikroskala werden reduzierte Steifigkeiten und Festigkeiten beim konstitutiven Gesetz der Makroskala notwendig, damit beim Makromodell der Einheitszelle mit der vereinfachten Kinematik die Spannungskonzentrationen der Mikroskala phänomenologisch kompensiert werden (siehe Tab. 7.3).

---

**Algorithmus 7.3** Materialmodell für das treppenförmige Fugenversagen
 

---

Eingangsgrößen:  $[[\bar{\mathbf{u}}]]_{n+1}$   $\alpha_{d,n}$

weitere interne Variablen für  $\mathbf{t}_{h,F}$  siehe Algorithmus 7.2

**1. Schritt:** Horizontaler Fugenabschnitt

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]_h &= \mathbf{T}_\alpha [[\bar{\mathbf{u}}]]_{n+1} && \mathbf{T}_\alpha \text{ siehe (7.39)} \\ \mathbf{t}_{h,A} &= \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_h && \mathbf{C}_A \text{ siehe (4.29)} \\ \mathbf{t}_{h,F} &= \mathbf{t}_{h,F} ([[ \mathbf{u} ]]_h, \dots) && \text{siehe Algorithmus 7.2} \end{aligned}$$

**2. Schritt:** Vertikaler Fugenabschnitt

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]_v &= \mathbf{T}_{\alpha-90^\circ} [[\bar{\mathbf{u}}]]_{n+1} \\ \mathbf{t}_v &= \mathbf{t}_v ([[ \mathbf{u} ]]_{\bar{y},v}) && \text{Kontaktmodell siehe (4.37)} \end{aligned}$$

**3. Schritt:** Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$ 

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}_{h,A} &= \mathbf{T} \mathbf{t}_{h,A} && \mathbf{T} \text{ siehe (7.27)} \\ \sigma_{I, II} &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_A \pm \sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2} && \text{Hauptspannungen} \\ \sigma^{eq} &= \sigma_I / \beta_t - \sigma_{II} / \beta_c && \text{Vergleichsspannung} \end{aligned}$$

**4. Schritt:** Schädigungsbedingung

$$\begin{aligned} f_d^{trial} &= \sigma^{eq} - \alpha_{d,n} && \text{elastischer Prädiktor} \\ \alpha_{d,n+1} &= \begin{cases} \alpha_{d,n} & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \\ \sigma^{eq} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \end{cases} && \mathbf{C}^{tan} \text{ siehe (4.36)} \\ d &= g(\alpha_{d,n+1}) && \text{Entfestigung siehe (7.6)} \end{aligned}$$

**5. Schritt:** Diagonale Grenzsicht, siehe (7.40)

$$\bar{\mathbf{t}} = |\cos \alpha| \mathbf{T}_\alpha^{-1} (d \mathbf{t}_{h,A} + (1-d) \mathbf{t}_{h,F}) + |\sin \alpha| \mathbf{T}_{\alpha-90^\circ}^{-1} (1-d) \mathbf{t}_v$$

Ergebnis:  $\bar{\mathbf{t}}$   $\alpha_{d,n+1}$   $\mathbf{C}^{tan}$

---

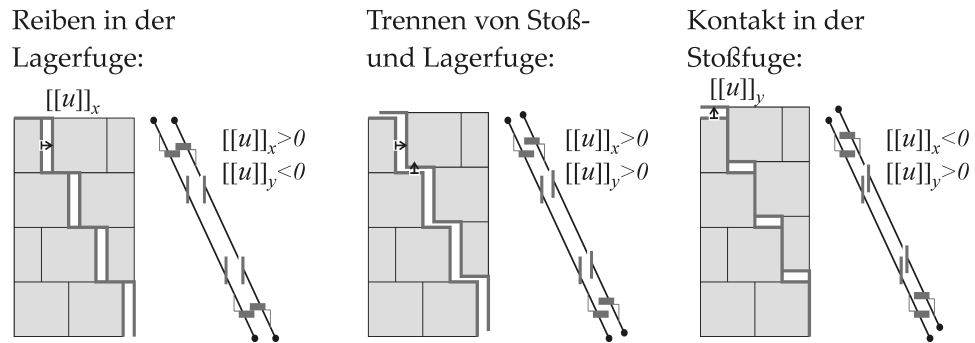


Abbildung 7.20: Versagensmoden an der treppenförmigen Grenzschicht

Tabelle 7.3: Materialparameter für treppenförmiges Fugenversagen

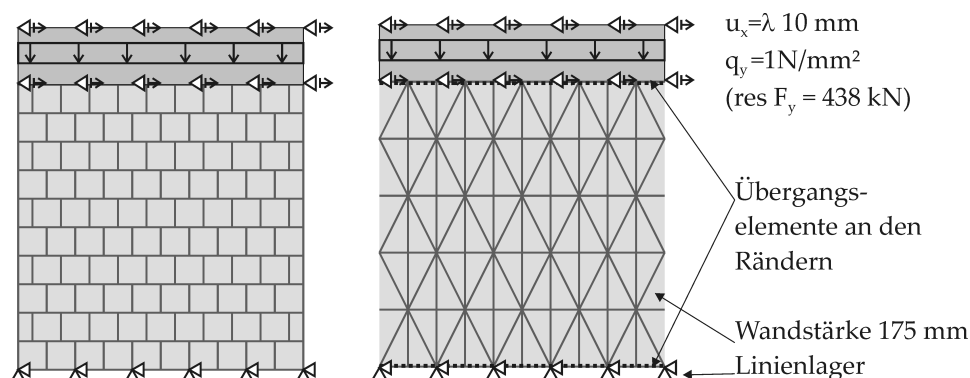
Schädigungsmodell		Reibmodell	
elastische Materialparameter für den horizontalen Anteil ( $t_h$ )			
Mikroskala	Makroskala	Mikroskala	Makroskala
$p_{\bar{x},A} = 200$	$60 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 200$	$60 \text{ N/mm}^3$
$p_{\bar{y},A} = 500$	$200 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 500$	$200 \text{ N/mm}^3$
inelastische Materialparameter für den horizontalen Anteil ( $t_h$ )			
$\beta_t = 0,38$	$0,35 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,56$	$0,56$
$\beta_c = 2,00$	$1,75 \text{ N/mm}^2$	$\tau_\mu = 0,08$	$0,08 \text{ N/mm}^2$
$G_{f,t} = 0,002$	$0,002 \text{ N/mm}$	$\sigma_\mu = -0,50$	$-0,50 \text{ N/mm}^2$
$w_\tau = 1,0$	$1,05$	$\tau_{c,0} = 0,30$	$0,27 \text{ N/mm}^2$
		$\sigma_c = -0,50$	$-0,50 \text{ N/mm}^2$
		$\alpha_u = 1,20$	$1,20 \text{ mm}$
Materialparameter für den vertikalen Anteil ( $t_v$ )			
		$p_{\bar{y},F} =$	$30 \text{ N/mm}^3$

## 7.5 Validierung des Fugenversagens

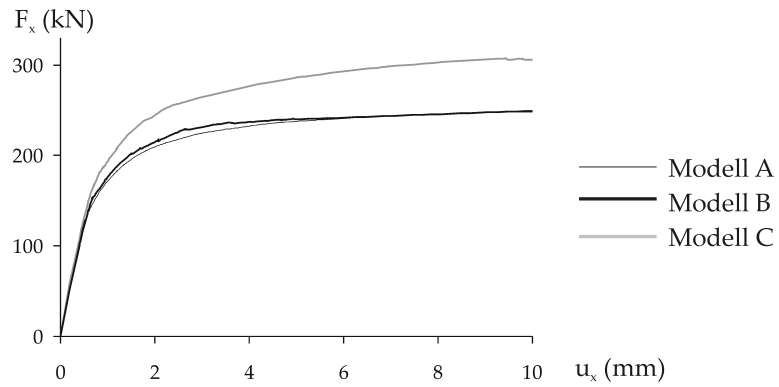
In einem ersten Schritt soll untersucht werden, ob die horizontalen und diagonalen Kontaktelemente der Einheitszelle das Fugenversagen im Mauerwerksverband zutreffend abbilden können. Zur Validierung wird die Schubwand von Abb. 2.2 sowohl auf der Makroskala als auch auf der Mesoskala (siehe Abs. 3.2.2) simuliert. Die Mesoskala dient als Referenzlösung für das Fugenversagen. Die Diskretisierung und die Lagerbedingung von beiden Modellen ist in Abb. 7.21 dargestellt. Die vertikale Last bleibt über die Belastungsgeschichte konstant und die horizontale Auflagerverschiebung wird monoton gesteigert. Bei der Mesoskala werden keine Steinrisse modelliert, bei der Makroskala wird das vertikale Steinversagen durch eine linear-elastische Kopplung deaktiviert. Es wurden 3 verschiedene Berechnungsmodelle untersucht:

- Modell A: Mesoskala
- Modell B: Makroskala - mit Übergangselementen
- Modell C: Makroskala - ohne Übergangselemente

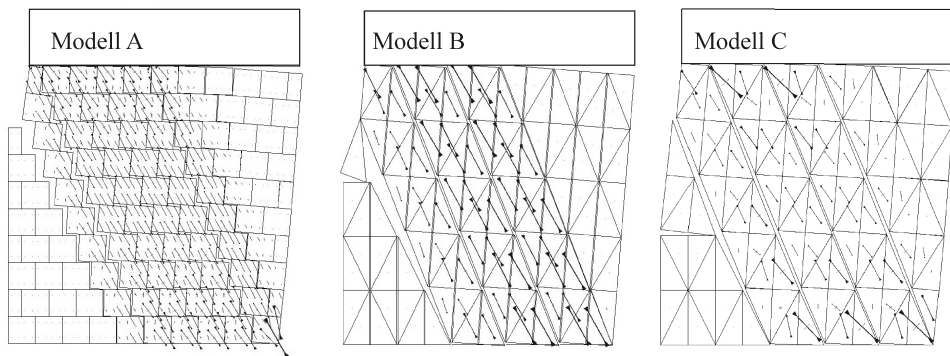
Modell B und C unterscheiden sich lediglich bei der Kontaktformulierung an den Rändern der Wandscheibe. Während bei Modell C das Kontaktelement der Einheitszelle für das horizontale Fugenversagen verwendet wird, ist bei Modell B zusätzlich ein Übergangselement mit einer reduzierten Integration nach Abs. 7.6 eingebaut. Die Materialparameter für die Makroskala der Einheitszelle sind in Tab. 7.2 und 7.3 aufgeführt. Für die Kontinuums-elemente von Meso- und Makroskala wird das elastisch orthotrope Materialgesetz von (6.8) verwendet.



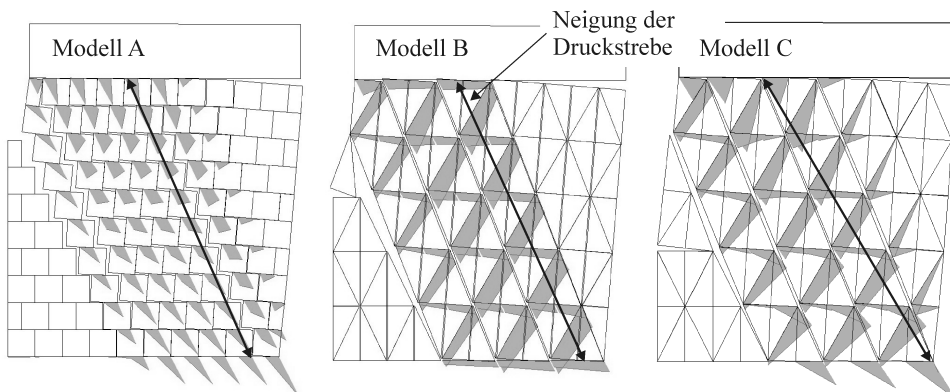
**Abbildung 7.21:** Modellierung der Wand - Mesoskala (links), Makroskala (rechts)



**Abbildung 7.22:** Last-Verschiebungskurve der horizontalen Auflagerreaktion - Wand von Abb. 7.21



**Abbildung 7.23:** Hauptspannungen - Verformung 20-fach überhöht



**Abbildung 7.24:** Spannungsvektor  $t$  - Verformung 20-fach überhöht

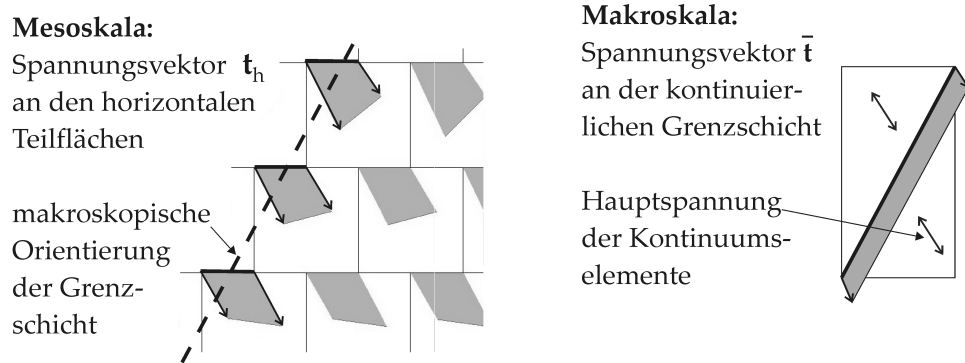
Für die horizontalen Kontaktelemente der Mesoskala sind ebenfalls geeignete Materialmodelle aus Homogenisierungsschritten erforderlich. Es zeigte sich, dass mit den Materialparametern von Tab. 7.3 die makroskopischen Größen zutreffend beschrieben werden können. Die Homogenisierungsschritte für die Mesoskala sind analog zur Makroskala durchgeführt worden (siehe Abs. 7.3.1).

Wie aus der Last-Verschiebungskurve von Abb. 7.22 hervorgeht, werden die horizontalen Kräfte bei Modell C pathologisch überschätzt, wohingegen Modell B eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung von Modell A liefert. Daher wird bei den weiteren Berechnungen das Modell B mit den Übergangselementen verwendet und die entsprechenden Ergebnisse ausgewertet. Die Spannungsplots von Abb. 7.23 und 7.24 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Meso- und Makroskala. Die Orientierung der Hauptspannungen bleibt auch bei der Makroskala erhalten und durch die Verwendung eines diskreten Rissmodells kann die Lokalisierung bei der Rissbildung auch mit der groben Vernetzung sehr gut abgebildet werden.

Bei diesem Beispiel mit einer Wand von 10x10 Steinen hat sich die Anzahl der Freiheitsgrade von 1600 (Mesoskala) auf 600 (Makroskala) reduziert. Um bei der Mesoskala auch Steinversagen abbilden zu können, wäre eine weitere Netzverfeinerung erforderlich. Dagegen sind bei der Einheitszelle die Freiheitsgrade und Elemente für das Steinversagen bereits vorgesehen. Auch die Anzahl der Zeitschritte hat von 397 auf 201 Schritte abgenommen. Damit erscheint die Simulation mit der Makroskala basierend auf Einheitszellen ausreichend robust und effizient, um ganze Gebäudemodelle zu berechnen. Auch für die Erweiterung auf eine 3-dimensionale Berechnung ist ausreichend Berechnungskapazität vorhanden.

#### **Kontaktspannung an der treppenförmigen Mörtelfuge:**

Die Kontaktspannung von Meso- und Makroskala in den Mörtelfugen werden in Abb. 7.25 miteinander verglichen. Bei der Mesoskala zeigt sich der blockförmige Spannungsverlauf nach MANN/MÜLLER (siehe Abs. 7.2). Bei der Makroskala wird zugunsten der numerischen Effizienz an einer kontinuierlichen diagonalen Grenzschicht ein äquivalenter Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  abgebildet. Dennoch ist auch beim Makromodell die Spannung  $\bar{\mathbf{t}}$  konsistent formuliert und im Gleichgewicht mit den Hauptspannungen der angrenzenden Kontinuums-elemente. Damit das Schädigungsmodell für das Fugenversagen objektiv bleibt, wird im konstitutiven Gesetz der kontinuierliche Spannungsvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  in  $\mathbf{t}_h$  und  $\mathbf{t}_v$  für die horizontalen und vertikalen Fugenabschnitte aufgespalten (siehe Abs. 7.4.3).



**Abbildung 7.25:** Visualisierung des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$ ; Detail von Abb. 7.24

### Validierung mit experimentellem Versuch:

Im Rahmen des Forschungsprojektes *Enhanced Safety and Efficient Construction of Masonry Structures in Europe* (kurz: ESECMaSE) wurden zahlreiche Versuche zur Tragfähigkeit von Schubwänden durchgeführt. In Pavia wurde eine zu Abb. 7.21 konstruktionsgleiche Schubwand statisch-zyklisch geprüft. Durch die Verwendung eines hochfesten Kalksandsteines in Kombination mit einer niedrigen Auflast von  $q_y = 1,0 \text{ N/mm}^2$  bildeten sich im Versuch keine Steinrisse. Das nichtlineare Verhalten ist weitgehend auf Fugenversagen zurückzuführen. Die Versuchsergebnisse sind im Bericht [MMP03] unter der Wandnummer CS07 veröffentlicht.

Die gute Übereinstimmung von Versuch und Numerik über viele Lastzyklen mit nichtlinearem Verhalten zeigt, dass das Makromodell auch eine zyklische Belastung hervorragend abbilden kann (siehe Abb. 7.26). Dies ist ein wesentlicher Fortschritt im Vergleich zu vielen bekannten Makromodellen, die mit einem *verschmierten Rissmodell* lediglich eine monotone Belastung simulieren können (siehe Abs. 3.5). Die Umsetzung von *diskreten Rissmodellen* mittels Kontaktelementen und die konsistente Kombination von Schädigungsmodellen für Risswachstum mit Kontakt- und Reibmodellen für die Resttragfähigkeit im geschädigten Zustand hat wesentlich zur Qualität des Makromodells beigetragen.



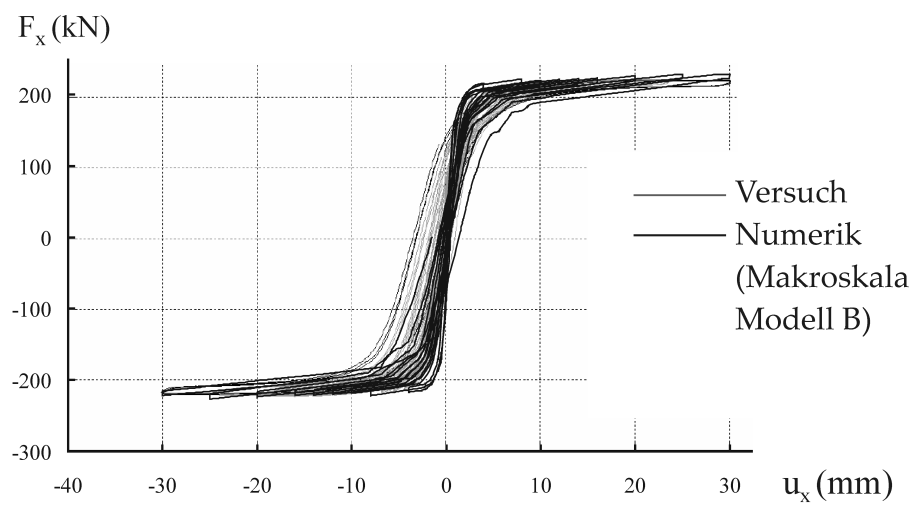
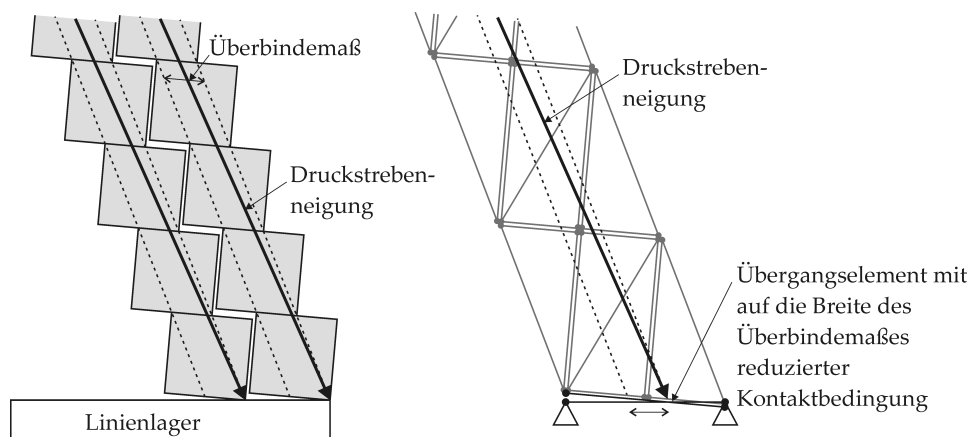


Abbildung 7.26: Last-Verschiebungskurve von Wand CS07 aus [MMP03]

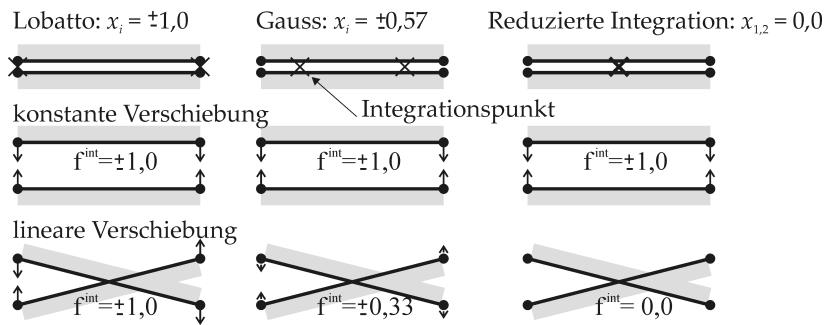
## 7.6 Kontaktformulierung am Rand der Wandscheibe

Die Simulation des Fugenversagens auf der Mesoskala in Abs. 7.5 zeigte, dass sich bei großen Schubverformungen eine typische Druckstrebenneigung einstellt, die auf den Mauerwerksverband zurückzuführen ist. Schräge Druckspannungen, die auch bei einer geschädigten Mörtelfuge mit den Kontakt- und Reibgesetzen übertragen werden, haben eine maximale Neigung, die sich aus dem Überbindemaß und der Steinhöhe ergibt (siehe Abb. 7.24, links). In Abb. 7.27 sind die Kontaktflächen beim Mauerwerksverband und die daraus resultierende Druckstrebenneigung nochmals detaillierter dargestellt. Wie in der linken Bildhälfte gezeigt, ist die Kontaktbreite im Mauerwerksverband auf das Überbindemaß begrenzt. Insbesondere am Rand der Wandscheibe mit der linienförmigen Lagerung muss die Kontaktbedingung auf dieses Maß begrenzt werden. Beim Makromodell basierend auf Einheitszellen wird zugunsten der numerischen Effizienz und Robustheit ein grobe Vernetzung gewählt. Entsprechend der rechten Bildhälfte von Abb. 7.27 wird im numerischen Modell ein Übergangselement am Rand der Wandscheibe verwendet, das die Kontaktbedingung auf die Breite des Überbindemaßes reduziert.

Die Beschränkung der Kontaktbedingung auf das Überbindemaß kann im numerischen Modell relativ einfach mittels reduzierter numerischer Integration formuliert werden. Auf die algorithmische Umsetzung und auf die numerischen Integrationsverfahren bei den Kontaktelementen wird in Abs. 7.6.1 genauer eingegangen.



**Abbildung 7.27:** Druckstrebenneigung beim Mauerwerksverband (links) und Berücksichtigung auf der Makroskala (rechts)



**Abbildung 7.28:** Einfluss des Integrationsverfahrens bei einem linear elastischen Materialgesetz, Lage der Integrationspunkte (oben), Knotenkräfte (Mitte, unten)

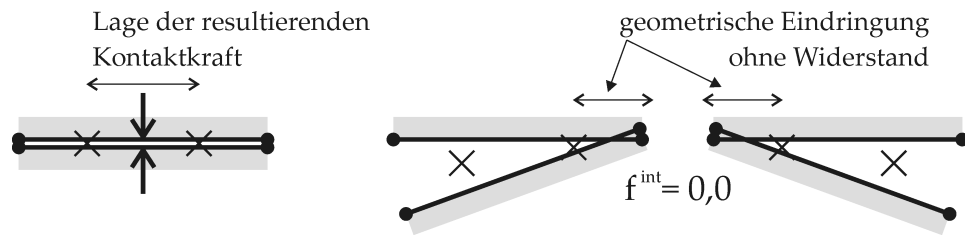
### 7.6.1 Integrationsverfahren beim Kontakt- und Übergangselement

Bei der FE-Analyse werden Spannungen aus dem Materialmodell zu äquivalenten Knotenkräften für das Finite Element aufintegriert. Bei einem inelastischen Materialmodell ist eine numerische Integration mit diskreten Integrationspunkten unumgänglich. An diesen Punkten werden die internen Variablen wie z.B. die Schädigung  $d$  abgespeichert. Für die Kontaktelemente von Abs. 7.3 und 7.4 wird das Integral von Gl. (5.6) durch eine Summe mit Wichtungsfaktoren  $w_i$  an den Integrationspunkten angenähert:

$$\mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{t}([\mathbf{u}], d) d\Gamma \approx \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{B}^T|_{x_i} \mathbf{t}([\mathbf{u}], d)|_{x_i} \quad (7.41)$$

mit  $n$ ,  $x_i$  Anzahl und Position der Integrationspunkte

Für Kontaktelemente mit linearen Ansatzfunktionen sind 2 Integrationspunkte erforderlich. Abhängig von der Position der Auswertungspunkte kann das mechanische Verhalten des Elementes gesteuert werden. In Abb. 7.28 werden unterschiedliche Integrationsverfahren bei einem Kontaktelement mit linear-elastischem Materialgesetz verglichen. Bei einem konstanten Verschiebungsmodus liefern alle Integrationsverfahren die gleichen Knotenkräfte, dagegen wird die Steifigkeit des Elementes bei einem linearen Verschiebungsmodus über den Abstand der Integrationspunkte gesteuert. Eine reduzierte Integration darf aufgrund des Null-Energie-Modus (*zero energy mode*) nicht angewendet werden. Untersuchungen in [Rot88, Sch92] zeigten, dass bei einer feinen Diskretisierung in Kombination mit hohen Penalty-Steifigkeiten auch die Gauss-Integration zu numerischen Oszillationen führt. Daher wird bei den Kontaktelementen der Einheitszelle die sogenannte Lobatto-Integration angewendet.



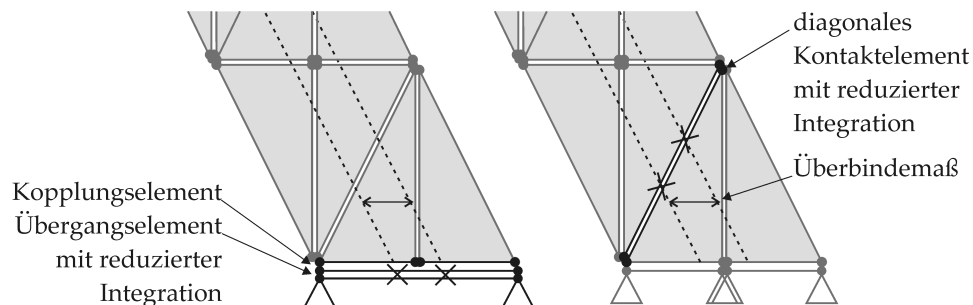
**Abbildung 7.29:** Kontaktbedingung abhängig von der Lage der Integrationspunkte

### Integrationsverfahren in Kombination mit einem Kontaktmodell:

Wird einem Kontaktelement (z.B. Übergangselement) auf konstitutiver Ebene ein Kontaktmodell zugewiesen, so wird die Kontaktbedingung nur in dem Abschnitt zwischen den Integrationspunkten eingehalten (siehe Abb. 7.29). Die Lage der resultierenden Druckkraft bleibt zwischen den Integrationspunkten. Außerhalb dieser Evaluierungspunkte kann sich das Kontaktelement ohne Widerstand überlappen, da mit (7.41) die Eindringung  $[[\mathbf{u}]]$  nur an den Integrationspunkten ausgewertet wird.

### Reduzierte Integration beim Übergangselement:

In Abb. 7.30, links ist dargestellt, wie die reduzierte Integration beim Makromodell umgesetzt wird. Zunächst werden die angrenzenden FE-Knoten der Einheitszelle mit denen des Übergangselementes über ein Kopplungselement linear-elastisch mit hoher Penalty-Steifigkeit verbunden. Bei diesem Übergangselement wird der Abstand der Integrationspunkte auf das Maß der Überbindelänge verringert (reduzierte Integration) und das konstitutive Gesetz für das horizontale Fugenversagen angewendet. Die numerische Integration des Übergangselementes weicht von der in [Rot88] empfohlenen Lobatto-Integration deutlich ab. Dennoch wurde keine neme-



**Abbildung 7.30:** Reduzierte Integration beim Makromodell; Formulierung beim Übergangselement (links) und beim diagonalen Kontaktelement (rechts)

rische Oszillation festgestellt, da dieses Integrationsverfahren mit einer moderaten Penalty-Steifigkeit und einer groben Vernetzung kombiniert wird. Anstatt spezielle Übergangselemente an den Rändern der Wandscheibe zu modellieren, wurde eine reduzierte Integration beim diagonalen Kontaktelement innerhalb der Einheitszelle untersucht (siehe Abb. 7.30, rechts). Diese Methode wurde allerdings wieder verworfen, da die Reduzierung der Kontaktbedingung auf das Überbindemaß im numerischen Modell nur noch innerhalb der Wandscheibe und nicht mehr an den Rändern gewährleistet war.

### 7.6.2 Kontaktelemente mit nicht koinzidenten Knoten

Um die Einheitszelle mit dem Übergangselement zu koppeln, werden Kontaktelemente mit nicht koinzidenten Knoten erforderlich. Die gleichen Kopplungselemente werden in Abs. 10.3 verwendet, um Meso- und Makromodell zu kombinieren. Bei diesem Kontaktelement mit nicht koinzidenten Knoten wird das Integral von (5.6) über die Länge  $dx$  ausgewertet:

$$\mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{t} dx \quad (7.42)$$

Mit der Knotennummerierung von Abb. 7.31 definiert sich der B-Operator:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -n_1 & 0 & -n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 \\ 0 & -n_1 & 0 & -n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x4} & u_{y4} \end{bmatrix}$$

$$n_1 = 1/2(1 - \zeta_1) \quad n_2 = 1/2(1 + \zeta_1)$$

$$n_3 = 1/2(1 - \zeta) \quad n_4 = 1/2(1 + \zeta)$$

$$\zeta_1 = -1 + (\zeta + 1) \frac{dx}{dx_1}$$

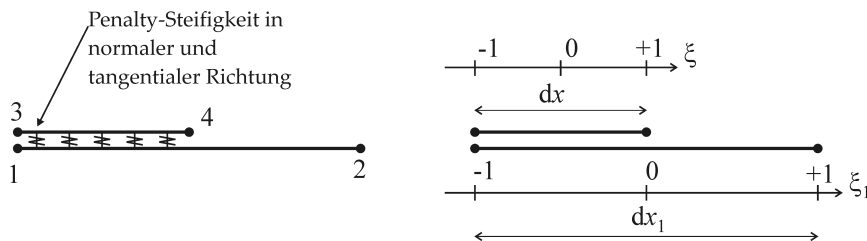


Abbildung 7.31: Kontaktelement mit nicht koinzidenten Knoten



## Kapitel 8

# Mauerstein: Modellierung des Steinversagens

Der Übergang vom ungeschädigten Stein bis zur Kontaktmechanik des vollständig lokalisierten Risses muss auch im numerischen Modell besonders berücksichtigt werden. In Abs. 8.1 wird ein *erweitertes diskretes Rissmodell* für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung aufgezeigt, welches zusätzlich den Spannungstensor  $\sigma$  des angrenzenden Kontinuums abbildet.

Das erweiterte Rissmodell wird sowohl auf der Mikroskala in Abs. 8.2 als auch bei der Makroskala der Einheitszelle in Abs. 8.3 und 8.4 angewendet. Die Versagenskriterien für die Einheitszelle werden aus numerischen Versuchen und experimentellen Kleinkörperversuchen bestimmt. In Abs. 8.5 wird das numerische Modell mit einem maßstabsgetreuen Wandversuch validiert.

### 8.1 Das erweiterte diskrete Rissmodell

Das *erweiterte diskrete Rissmodell* stellt eine Kombination vom diskreten und verschmierten Ansatz dar:

Die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung beim *diskreten Rissmodell* kann die Kontaktmechanik am vollständig entwickelten Riss sehr gut abbilden. Allerdings kann der diskrete Ansatz das Kontinuum im ungeschädigten Zustand mit dem Spannungsvektor nicht vollständig beschreiben. In Abb. 8.1 wird die Beanspruchung des Materials unter 1- und 2-achsiger Belastung verglichen. Bei beiden Belastungszuständen ist der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der Grenzschicht identisch, nicht jedoch der Spannungstensor  $\sigma$  und die Schädigung des Materials.

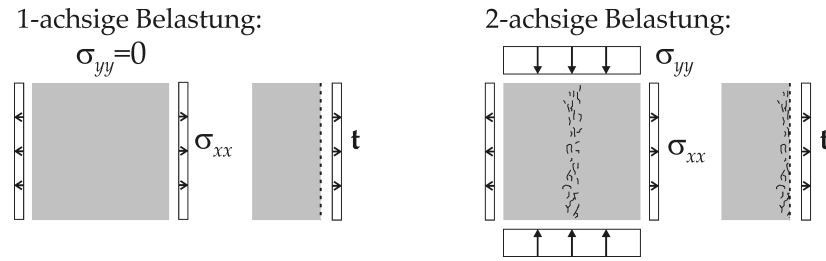


Abbildung 8.1: Schädigung bei 1- und 2-achsiger Belastung

Aus diesem Grund empfiehlt Bažant [Baz83] ein *verschmiertes Rissmodell*, welches mit dem Spannungstensor  $\sigma$  formuliert ist. Da dieses Rissmodell die diskontinuierlichen Verschiebungen am Riss nicht mehr erfasst, ist man auf eine feine Diskretisierung und zusätzliche Regularisierungsmethoden angewiesen (siehe Abs. 3.3.2 und 8.1.3).

In dieser Arbeit wird für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung ein *erweitertes diskretes Rissmodell* entwickelt, bei dem das Materialgesetz zusätzlich den Spannungstensor des angrenzenden Kontinuums abbildet (siehe Abs. 8.1.1). Für dieses Materialgesetz wird auch das Kontaktelement erweitert, welches die kinematischen Größen  $[[\mathbf{u}]]$  und  $\epsilon_{xx}$  diskretisiert (siehe Abs. 8.1.2). Die Kontrolle der Rissorientierung ist in Abs. 8.1.3 beschrieben.

### 8.1.1 Erweitertes Schädigungsmodell

In diesem Absatz wird ein Schädigungsmodell für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung definiert, bei der die Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  abhängig vom Spannungstensor  $\sigma$  formuliert ist. Wie in Abs. 4.3.2 setzt sich das konstitutive Gesetz aus der adhäsiven Phase (Index  $A$ ) für den ungeschädigten Zustand und einem Kontakt- und Reibmodell (Index  $F$  für *friction*) für die Oberfläche am vollständig entwickelten Riss zusammen.

$$\mathbf{t} = (1 - d)\mathbf{t}_A + d \mathbf{t}_F \quad \text{konstitutives Gesetz} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{C}_A[[\mathbf{u}]] \quad \text{adhäsive Phase, } \mathbf{C}_A \text{ siehe (4.29)} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{t}_F\left([[ \mathbf{u} ]], [[ \mathbf{u} ]]^p\right) \quad \text{Reib-Phase siehe Abs. 4.3.3} \quad (8.3)$$

$$\sigma^{eq} = w_\alpha \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma) \quad \text{Vergleichsspannung} \quad (8.4)$$

$$d = g(\alpha_d) \quad \text{Evolutionsgesetz} \quad (8.5)$$

$$\dot{d} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_d} \dot{\alpha}_d = H \dot{\alpha}_d \quad (8.6)$$

$$f_d = \sigma^{eq} - \alpha_d \leq 0 \quad \text{Schädigungsbedingung} \quad (8.7)$$



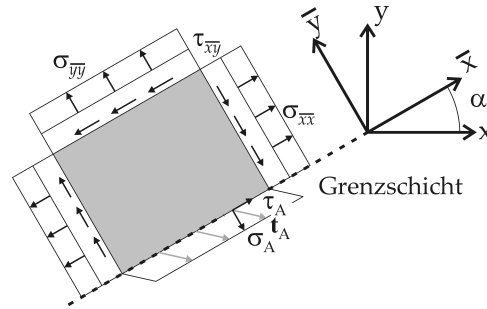


Abbildung 8.2: Spannungskontinuität an einer geneigten Grenzschicht

Abgesehen von Gleichung (8.6) und (8.4) ist das Schädigungsmodell vollständig beschrieben. In Abs. 8.2 wird für (8.6) eine exponentielle Entfestigungsfunktion gewählt. In Gleichung (8.4) setzt sich die Vergleichsspannung aus den Funktionen  $w_\alpha$  und  $\tilde{\sigma}^{eq}$  zusammen. Die Rissorientierung wird mit  $w_\alpha$  kontrolliert (siehe Abs. 8.1.3). Mit der Funktion  $\tilde{\sigma}^{eq}$  werden in Abs. 8.2 bis 8.4 verschiedene anwendungsspezifische Versagenskriterien für die Mikro- und Makroskala formuliert. In diesem Absatz wird der Spannungstensor  $\sigma$  mit einem Elastizitätsgesetz für das angrenzende Kontinuum bestimmt.

Bei diesem Materialmodell wird der Spannungstensor aus den Größen  $\mathbf{t}_A$  und  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  bestimmt. Das lokale Koordinatensystem parallel und normal zur Grenzschicht wird mit  $\bar{\bullet}$  gekennzeichnet (siehe Abb. 8.2). Im lokalen Koordinatensystem gilt für die Komponenten des Spannungstensors nach CAUCHY:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \sigma_A \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} &= \tau_A\end{aligned}\quad (8.8)$$

In der Matrix-Vektor-Schreibweise setzt sich  $\bar{\sigma}$  aus  $\mathbf{t}_A$  und  $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$  zusammen:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{T}_t \mathbf{t}_A + \mathbf{T}_\sigma \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \quad (8.9)$$

$$\text{mit } \mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \tau_A \\ \sigma_A \end{bmatrix}$$

In (8.2) wird eine Spannungs-Rissöffnungsbeziehung für  $\mathbf{t}_A$  definiert. Die Spannung  $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$  wird mit dem Elastizitätsmodell für das angrenzende Konti-

num beschrieben. Zu diesem Zweck wird die lineare Beziehung  $\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\epsilon}$  in Untervektoren und -matrizen aufgespalten.

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\mathbf{C}}_{11} \bar{\epsilon}_1 + \bar{\mathbf{C}}_{12} \bar{\epsilon}_2 \quad (8.10)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\mathbf{C}}_{21} \bar{\epsilon}_1 + \bar{\mathbf{C}}_{22} \bar{\epsilon}_2 \quad (8.11)$$

$$\text{mit: } \bar{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \epsilon_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} \quad \bar{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{C}}_{11} = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{22} = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}} & C_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} \\ C_{\bar{x}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} & C_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{12} = \bar{\mathbf{C}}_{21}^T = \begin{bmatrix} C_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{y}} & C_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix}$$

Durch Auflösen von (8.11) nach  $\bar{\epsilon}_2$  und Einsetzen in (8.10) erhält man

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{\sigma}_1 = \left( \bar{\mathbf{C}}_{11} - \bar{\mathbf{C}}_{12} \bar{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{21} \right) \bar{\epsilon}_1 + \bar{\mathbf{C}}_{12} \bar{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \bar{\sigma}_2 \quad (8.12)$$

Mit Gleichung (8.9) gilt  $\mathbf{t}_A = \bar{\sigma}_2$ . Durch Einsetzen in (8.12) lässt sich  $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}$  abhängig von  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  und  $\mathbf{t}_A$  berechnen:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{\mathbf{C}}_e \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{t}_A \quad (8.13)$$

$$\text{mit: } \bar{\mathbf{C}}_e = \bar{\mathbf{C}}_{11} - \bar{\mathbf{C}}_{12} \bar{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{21}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_t = \bar{\mathbf{C}}_{12} \bar{\mathbf{C}}_{22}^{-1}$$

Durch Einsetzen von (8.13) in (8.9) lässt sich  $\bar{\sigma}$  mit den Werten  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  und  $\mathbf{t}_A$  angeben:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma \bar{\mathbf{C}}_e \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} + (\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_\sigma \bar{\mathbf{C}}_t) \mathbf{t}_A \quad (8.14)$$

Auf der Makroskala wird das Mauerwerk mit einem orthotropen Elastizitätsmodell beschrieben, welches im globalen Koordinatensystem definiert ist. Für dieses orthotrope Materialgesetz ist eine Drehung des Koordinatensystems erforderlich. Der Winkel  $\alpha$  ist in Abb. 8.2 dargestellt.

$$\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}_\sigma \sigma \quad \sigma = \bar{\mathbf{T}}_\sigma^{-1} \bar{\sigma} \quad (8.15)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{T}}_\sigma \mathbf{C} \bar{\mathbf{T}}_\sigma^{-1} \quad (8.16)$$

mit den Transformationsvorschriften:

$$\bar{\mathbf{T}}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{T}}_\epsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

und den Hilfwerten:  $c = \cos \alpha$   $s = \sin \alpha$

In (8.16) bezeichnen  $\bar{\mathbf{T}}_\sigma$  und  $\bar{\mathbf{T}}_\epsilon$  die Transformationsvorschriften von  $\sigma$  und  $\epsilon$  für den ebenen Spannungszustand in Voigt-Notation. Durch Einsetzen von (8.14) in (8.15) lässt sich der Spannungstensor im globalen Koordinatensystem angeben:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{C}_\epsilon \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \mathbf{C}_t \mathbf{t}_A & (8.17) \\ \text{mit: } \mathbf{C}_\epsilon &= \bar{\mathbf{T}}_\sigma^{-1} \mathbf{T}_\sigma \bar{\mathbf{C}}_\epsilon \\ \mathbf{C}_t &= \bar{\mathbf{T}}_\sigma^{-1} (\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_\sigma \bar{\mathbf{C}}_t) \end{aligned}$$

Das vollständige Materialmodell ist im Algorithmus 8.1 zusammengefasst.

---

**Algorithmus 8.1** Erweitertes Schädigungsmodell für das Steinversagen
 

---

Eingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $\epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1}$   $\alpha_{d,n}$   $[[\mathbf{u}]]_n^{pl}$

**1. Schritt:**

Spannungsvektor  $\mathbf{t}_A$  mit elastischer Kopplung

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_{n+1} \quad \mathbf{C}_A \text{ siehe (4.29)}$$

Spannungsvektor  $\mathbf{t}_F$  mit Kontakt-/Reibmodell im gerissenen Zustand

$$\left\{ \mathbf{t}_F, [[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl} \right\} = \mathbf{t}_F ([[ \mathbf{u} ]]_{n+1}, [[ \mathbf{u} ]]_n^{pl}) \quad \mathbf{t}_F \text{ siehe Abs. 4.3.3}$$

**2. Schritt:** Spannungstensor  $\sigma$ 

$$\sigma = \mathbf{C}_\epsilon \epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1} + \mathbf{C}_t \mathbf{t}_A \quad \mathbf{C}_\epsilon, \mathbf{C}_t \text{ siehe (8.17)}$$

**3. Schritt:** Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$ 

$$\begin{aligned} \sigma^{eq} &= w_\alpha(\sigma) \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma) & \tilde{\sigma}^{eq} \text{ siehe (8.36)} \\ & & w_\alpha \text{ siehe Abs. 8.1.3} \end{aligned}$$

**4. Schritt:** Kuhn-Tucker-Bedingung

$$\begin{aligned} f_d^{trial} &= \sigma^{eq} - \alpha_{d,n} & \text{elastischer Prädiktor} \\ \alpha_{d,n+1} &= \begin{cases} \alpha_{d,n} & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \\ \sigma^{eq} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \end{cases} & \mathbf{C}^{tan} \text{ siehe (8.24)} \\ d_{n+1} &= g(\alpha_{d,n+1}) & \text{siehe (8.5) bzw. (8.37)} \end{aligned}$$

**5. Schritt:** Spannungsvektor an der Grenzschicht

$$\mathbf{t} = (1 - d_{n+1}) \mathbf{t}_A + d_{n+1} \mathbf{t}_F$$

Ergebnis:  $\mathbf{t}$   $\alpha_{d,n+1}$   $[[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl}$   $\mathbf{C}^{tan}$

---

**Linearisierung des Schädigungsmodells:**

Für die Herleitung des tangentialen Operators wird das konstitutive Gesetz von (8.1) konsistent linearisiert:

$$\dot{\mathbf{t}} = (1 - d)\dot{\mathbf{t}}_A + d\dot{\mathbf{t}}_F + (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A)\dot{d} \quad (8.18)$$

Durch Einsetzen von (8.6) und (8.2) und der Definition eines tangentialen Operators für die Reibphase  $\dot{\mathbf{t}}_F = \mathbf{C}_F^{tan} [[\dot{\mathbf{u}}]]$  (siehe Abs. 4.3) erhält man:

$$\dot{\mathbf{t}} = ((1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan}) [[\dot{\mathbf{u}}]] + H(\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A)\dot{\alpha}_d \quad (8.19)$$

Mit der Kuhn-Tucker-Bedingung von (4.31) wird in einen elastischen und einen inelastischen Schritt unterschieden. Im elastischen Fall gilt  $f_d < 0$  und somit  $\dot{\alpha}_d = 0$ . Aus (8.19) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}_{[[\mathbf{u}]]}^{el} [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (8.20) \\ \text{mit: } \mathbf{C}_{[[\mathbf{u}]]}^{el} &= (1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan} \end{aligned}$$

Der elastische Operator  $\mathbf{C}_{[[\mathbf{u}]]}^{el}$  ist unabhängig von der Dehnungsrate  $\dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}}$ .

Für den inelastischen Schritt wird die interne Variable mit der Konsistenzbedingung (4.32) bestimmt. Für  $\dot{\alpha}_d > 0$  gilt  $\dot{f}_d = 0$  und somit

$$\begin{aligned} \dot{f}_d &= \dot{\sigma}^{eq}(\sigma) - \dot{\alpha}_d = \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \dot{\alpha}_d = 0 \\ \text{Einsetzen von (8.17), (8.2): } \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} (\mathbf{C}_\epsilon \dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} + \mathbf{C}_t \mathbf{C}_A [[\dot{\mathbf{u}}]]) - \dot{\alpha}_d &= 0 \quad (8.21) \end{aligned}$$

Durch Auflösen von (8.21) nach  $\dot{\alpha}_d$  und durch Einsetzen in (8.19) erhält man eine Spannungsrate  $\dot{\mathbf{t}}$  abhängig von  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  und  $\dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= ((1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan}) [[\dot{\mathbf{u}}]] + \\ &+ (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A) \otimes H \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} (\mathbf{C}_\epsilon \dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} + \mathbf{C}_t \mathbf{C}_A [[\dot{\mathbf{u}}]]) \quad (8.22) \end{aligned}$$

Gleichung (8.22) lässt sich in zwei Operatoren aufspalten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{C}_{[[\mathbf{u}]]}^{in} [[\dot{\mathbf{u}}]] + \mathbf{C}_\epsilon^{in} \dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} \quad (8.23) \\ \text{mit: } \mathbf{C}_{[[\mathbf{u}]]}^{in} &= (1 - d)\mathbf{C}_A + d\mathbf{C}_F^{tan} + (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A) \otimes H \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} \mathbf{C}_t \mathbf{C}_A \\ \mathbf{C}_\epsilon^{in} &= (\mathbf{t}_F - \mathbf{t}_A) \otimes H \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} \mathbf{C}_\epsilon \end{aligned}$$

Für die kombinierte Elementformulierung von Abs. 8.1.2 ist die Definition eines tangentialen Operators  $\mathbf{C}^{tan}$  erforderlich, welcher die Spannungsrate

$\dot{\mathbf{t}}$  abhängig von  $\dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}}$  und  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  ausdrückt. In der Matrix-Vektor-Notation werden die kinematischen Größen  $\dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}}$  und  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  im Vektor  $\dot{\epsilon}$  gesammelt und dabei folgende Konvention eingeführt:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C}^{tan} \dot{\epsilon} \quad (8.24)$$

$$\text{mit: } \dot{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \dot{\tau} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} [[\dot{u}]]_{\bar{x}} \\ [[\dot{u}]]_{\bar{y}} \\ \dot{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{tan} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial [[u]]_{\bar{x}}} & \frac{\partial \tau}{\partial [[u]]_{\bar{y}}} & \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon_{\bar{x}\bar{x}}} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial [[u]]_{\bar{x}}} & \frac{\partial \sigma}{\partial [[u]]_{\bar{y}}} & \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon_{\bar{x}\bar{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{[[u]]}^{tan} \\ \mathbf{C}_{\epsilon}^{tan} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{[[u]]}^{tan} = \begin{cases} \mathbf{C}_{[[u]]}^{el} & \text{elastischer Schritt siehe (8.20)} \\ \mathbf{C}_{[[u]]}^{in} & \text{Schädigung siehe (8.23)} \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_{\epsilon}^{tan} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{elastischer Schritt} \\ \mathbf{C}_{\epsilon}^{in} & \text{Schädigung siehe (8.23)} \end{cases}$$

Die implizite Zeitintegration des Schädigungsmodells ist in Abs. 4.4 hergeleitet und in Algorithmus 8.1 zusammengefasst.

### 8.1.2 Erweitertes Kontaktelement

Für das erweiterte Schädigungsmodell von Abs. 8.1.1 ist eine neue Elementformulierung für die Diskretisierung einer Grenzschicht im Kontinuum erforderlich. Ausgangspunkt für das Kontaktelement ist die virtuelle Arbeit von Gleichung (5.2):

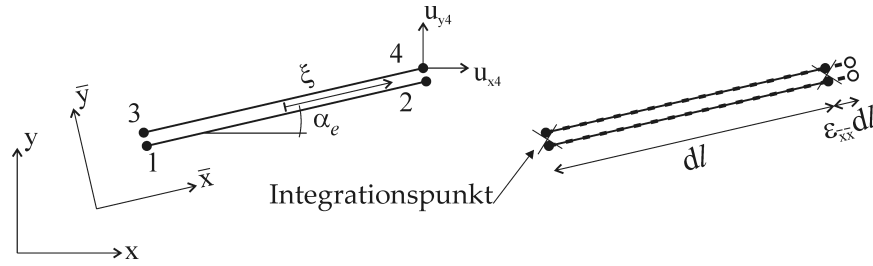
$$\delta W^{int} = \int \delta [[\mathbf{u}]]^T \mathbf{t}(\epsilon, \alpha_i) d\Gamma \quad (8.25)$$

In (8.25) wird deutlich, dass die virtuelle Rissöffnung  $\delta [[\mathbf{u}]]$  und die Verzerrung  $\epsilon$  mit verschiedenen Operatoren  $\mathbf{B}_{[[u]]}$  und  $\mathbf{B}_{\epsilon}$  diskretisiert werden müssen:

$$[[\mathbf{u}]] \approx \mathbf{B}_{[[u]]} \mathbf{d} \quad (8.26)$$

$$\epsilon \approx \mathbf{B}_{\epsilon} \mathbf{d} \quad (8.27)$$

$$\text{mit: } [[\mathbf{u}]] = \begin{bmatrix} [[u]]_{\bar{x}} \\ [[u]]_{\bar{y}} \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} [[u]]_{\bar{x}} \\ [[u]]_{\bar{y}} \\ \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} \end{bmatrix}$$



**Abbildung 8.3:** Erweitertes Kontaktelement - Nummerierung der Knoten (links), Verformungsmodus für  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  (rechts)

Bei einem Kontaktelement mit linearen Ansatzfunktionen ergeben sich folgende Einträge für  $\mathbf{B}_\epsilon$ :

$$\mathbf{B}_\epsilon = \begin{bmatrix} -cn_1 & -sn_1 & -cn_2 & -sn_2 & cn_1 & sn_1 & cn_2 & sn_2 \\ sn_1 & -cn_1 & sn_2 & -cn_2 & -sn_1 & cn_1 & -sn_2 & cn_2 \\ \hline \frac{-c}{2dl} & \frac{-s}{2dl} & \frac{c}{2dl} & \frac{s}{2dl} & \frac{-c}{2dl} & \frac{-s}{2dl} & \frac{c}{2dl} & \frac{s}{2dl} \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x4} & u_{y4} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit: } n_1 = 1/2(1 - \xi), \quad n_2 = 1/2(1 + \xi)$$

$$\text{den Hilfswerten: } c = \cos \alpha_e, \quad s = \sin \alpha_e$$

$$\text{der Kantenlänge: } dl$$

In Abb. 8.3 ist die Knotennummerierung, die Neigung  $\alpha_e$  des Kontaktelementes und der Verformungsmodus bei  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  dargestellt. Der Operator  $\mathbf{B}_{[[\mathbf{u}]]}$  ist identisch zur Definition von (5.3).

Mit dieser Kinematik kann das Kontaktelement mit dem konstitutiven Gesetz von Abs. 8.1.1 kombiniert werden und die internen Knotenkräfte und die Steifigkeitsmatrix berechnet werden:

$$\mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}_{[[\mathbf{u}]]}^T \mathbf{t}(\epsilon, \alpha_i) d\Gamma \quad (8.29)$$

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}_{[[\mathbf{u}]]}^T \mathbf{C}^{tan} \mathbf{B}_\epsilon d\Gamma \quad (8.30)$$

Wie beim diskreten Rissmodell wird auch das erweiterte Kontaktelement numerisch mit einem Lobatto-Schema integriert (siehe Abs. 7.6.1). Die Lage der Integrationspunkte ist in Abb. 8.3 dargestellt.

### 8.1.3 Kontrolle der Rissorientierung

#### Rissorientierung beim verschmierten Rissmodell:

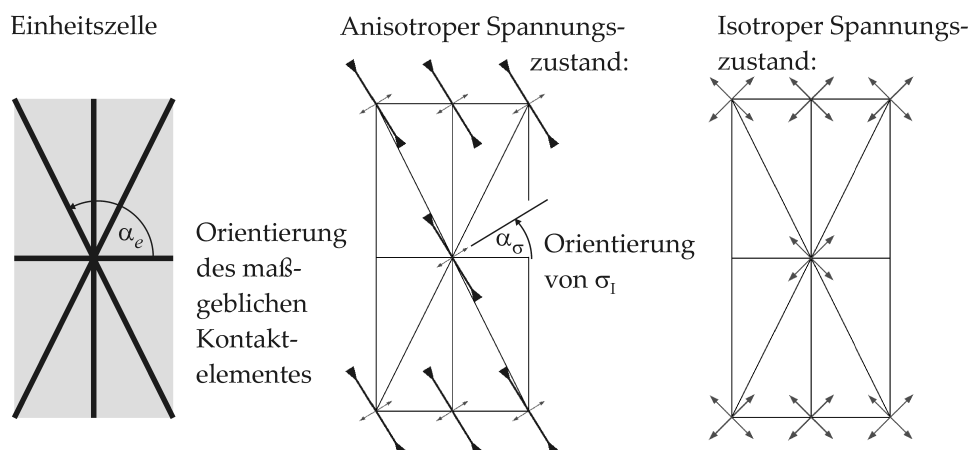
Aufgrund der fehlenden diskontinuierlichen Ansatzfunktionen beim verschmierten Rissmodell ist das Problem schlecht gestellt und Regularisierungsmethoden werden erforderlich, um im numerischen Modell die Lokalisierung von Rissen abbilden zu können. Verschiedene Regularisierungsmethoden (*local tracking strategy, nonlocal continuum approach*) werden u.a. in [Eri83, Jir98, Jir05, Kuh00, OHSC02] verfolgt.

#### Rissorientierung beim diskreten Rissmodell:

Durch die Verwendung von Kontaktelementen (*interface-elements*) werden Diskontinuitäten im numerischen Modell konsistent abgebildet. Untersuchungen in [CIL07, CWC08] an 2- und 3-dimensionalen Beispielen zeigten, dass bei einer geeigneten Vernetzung mit Kontaktelementen keinerlei Regularisierungsmethoden erforderlich sind. Zusätzlich werden bei der Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vom diskreten Rissmodell nach CAUCHY  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  bereits richtungsabhängige Effekte berücksichtigt.

#### Rissorientierung beim erweiterten diskreten Rissmodell:

Beim erweiterten diskreten Rissmodell wird ein einfaches lokales Kriterium eingeführt, um die Orientierung des Risses im numerischen Modell zu kontrollieren. Das spröde Steinversagen wird mit einem RANKINE-Kriterium beschrieben. Zu diesem Versagensmodell korrespondiert die Annahme, dass sich der Riss senkrecht zur 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  bildet (siehe [Fei04]).



**Abbildung 8.4:** Orientierung der Kontaktelemente und der Hauptspannungen beim erweiterten diskreten Rissmodell

In Abb. 8.4 ist die Einheitszelle bestehend aus vier Kontaktelementen mit unterschiedlicher Orientierung gezeigt. Wird ein Versagenskriterium erfüllt, soll die Schädigung in demjenigen Kontaktelement anwachsen, welches weitgehend senkrecht zu  $\sigma_I$  orientiert ist (siehe Abb. 8.4, Mitte).

Erfährt die Einheitszelle eine isotrope Zug-Zug-Belastung, ist die Orientierung der Hauptspannung nicht relevant (siehe Abb. 8.4, rechts). Im numerischen Modell soll allen Kontaktelementen die gleiche Vergleichsspannung zugewiesen werden. Die Zugspannung wird vom Kontaktelement mit dem kleinsten Widerstand aufgrund einer Vorschädigung abgebaut.

Aus diesem mechanischen Verhalten lassen sich zwei Forderungen an die Kontrolle der Rissorientierung im numerischen Modell formulieren:

1. Bevorzugen des Kontaktelementes, das „weitgehend“ senkrecht zur Hauptzugspannung orientiert ist; Deaktivierung der übrigen Kontaktelemente (Risskontrolle aktiv).
2. Deaktivierung der Risskontrolle bei weitgehend isotropem Spannungszustand ( $\sigma_I \approx \sigma_{II}$ ).

Zu diesem Zweck wird mit  $w_\alpha$  eine geeignete Regualisierungsfunktion bei der Definition von  $\sigma^{eq}$  gewählt, die beiden Anforderungen nachgeht:

$$\sigma^{eq} = w_\alpha \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma) \quad \text{siehe Gl. (8.4)}$$

$$w_\alpha = 1 - w_{iso} \cos^2 \Delta\alpha \quad \text{vgl. 1. Forderung} \quad (8.31)$$

$$w_{iso} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\sigma_I - \sigma_{II}}\right)^2} \quad \text{vgl. 2. Forderung} \quad (8.32)$$

$$\Delta\alpha = \alpha_\sigma - \alpha_e \quad \text{Winkel zwischen } \sigma_I \text{ und Element} \quad (8.33)$$

Mit  $\alpha_\sigma$  wird die Orientierung von  $\sigma_I$  und mit  $\alpha_e$  die Neigung des Kontaktelementes bezeichnet (siehe Abb. 8.4). Die Regualisierungsterme  $w_\alpha$  und  $w_{iso}$  sind dimensionslose Funktionen aus dem Wertebereich  $[0; +1]$ .

Die 1. Forderung wird  $\cos^2 \Delta\alpha$  umgesetzt, so dass Kontaktelemente, die nicht senkrecht zu  $\sigma_I$  stehen, mit einem niedrigeren Wert von  $\sigma^{eq}$  für die Schädigung deaktiviert werden.

Der 2. Forderung wird mit dem Term  $w_{iso}$  nachgegangen, da mit

$$\lim_{(\sigma_I - \sigma_{II}) \rightarrow 0} (w_{iso}) = 0$$

die Kontrolle der Rissorientierung deaktiviert wird.



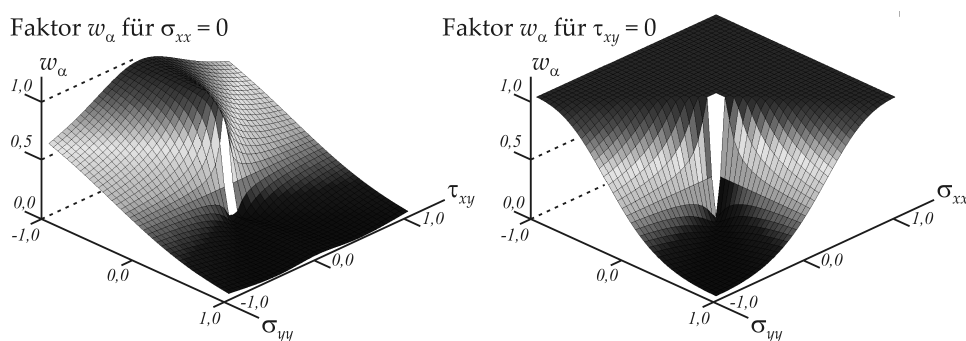


Abbildung 8.5: Faktor  $w_\alpha$  abhängig von  $\sigma$  beim vertikalen Kontaktelement

Für die Terme  $\cos^2 \Delta\alpha$  und  $w_{iso}$  werden quadratische Funktionen verwendet, damit eine  $C^1$ -kontinuierliche Funktion formuliert wird und das Materialmodell konsistent linearisiert werden kann. Die Glattheit von  $w_\alpha$  ist in Abb. 8.5 dargestellt. Der hohe Gradient von  $w_\alpha$  im Spannungsursprung hat keinen Einfluss auf die Robustheit des Schädigungsmodells, da bei diesem Wertebereich  $\tilde{\sigma}^{eq} \approx 0$  gilt.

Die Neigung  $\alpha_\sigma$  von  $\sigma_I$  berechnet sich folgendermaßen:

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) & \text{für } \sigma_{xx} > \sigma_{yy} \\ \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \sigma_{xx} \leq \sigma_{yy} \end{cases} \quad (8.34)$$

Die Ableitungen von  $\sigma^{eq}$  und  $w_\alpha$  sind für die Linearisierung des Materialmodells im Anhang B aufgeführt.

## 8.2 Modellierung auf der Mikroskala

Grundlage für die numerische Modellierung des Mauerwerksteines ist das erweiterte diskrete Rissmodell von Abs. 8.1. Damit das Schädigungsmodell von Algorithmus 8.1 vollständig definiert ist, wird in diesem Abschnitt eine geeignete Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$  abhängig vom Spannungstensor  $\sigma$  formuliert.

Künstlich hergestellter Kalksandstein hat ähnliche Werkstoffeigenschaften wie unbewehrter Beton. Für unbewehrten Beton wurden bereits gut validierte Versagensmodelle entwickelt. Lackner verwendet in [Lac99] ein Plastizitätsmodell, welches im Zugbereich ein RANKINE- und im Druckbereich ein DRUCKER/PRAGER-Kriterium verwendet. Diese Versagenskriterien aus dem Plastizitätsmodell werden auf das Schädigungsmodell übertragen.

Für den ebenen Spannungszustand wird die Vergleichsspannung abhängig von den Hauptspannungen formuliert. Für die Definition der Hauptspannungen gelte  $\sigma_I > \sigma_{II}$ . Aus numerischen Gründen wird das RANKINE-Kriterium elliptisch ausgerundet, so dass ein glatter Übergang vom Zug-Druckbereich in den Druck-Druckbereich vorhanden ist:

$$\sigma^{eq} = w_\alpha \tilde{\sigma}^{eq} \quad (8.35)$$

$w_\alpha$  siehe (8.31)

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \begin{cases} \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\beta_1} + \sqrt{\frac{\sigma_I^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}}{\beta_2^2}} & \text{für } \sigma_I > 0 \\ \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\beta_1} + \sqrt{\frac{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}{\beta_2^2}} & \text{für } \sigma_I \leq 0 \end{cases} \quad (8.36)$$

mit den Konstanten:

$$\beta_1 = \frac{\beta_b \beta_c}{\beta_b - \beta_c}$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_b \beta_c}{2\beta_b - \beta_c}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 \beta_t}{\beta_1 - \beta_t}$$

und den Materialparametern:

$\beta_t$  einachsige Zugfestigkeit

$\beta_c$  einachsige Druckfestigkeit

$\beta_b$  biachsiale Druckfestigkeit

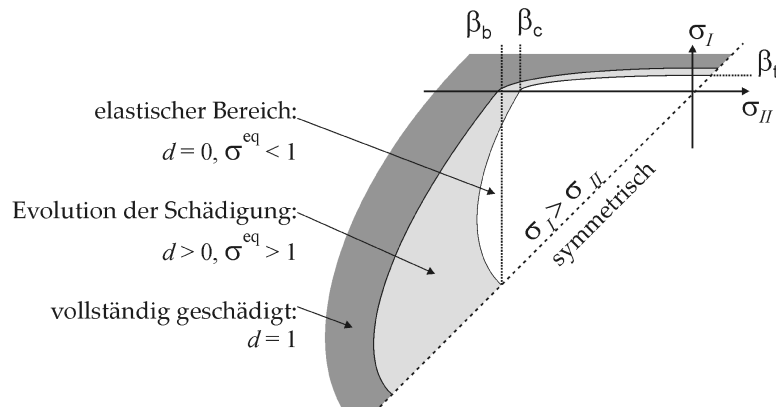


Abbildung 8.6: Vergleichsspannung des Schädigungsmodells

Für das Entfestigungsgesetz (8.5) wird eine exponentielle Funktion gewählt:

$$d = g(\alpha_d) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_d \leq 1,0 \\ 1 - \frac{1}{\alpha_d} \exp(h_d(1 - \alpha_d)) & \text{für } \alpha_d > 1,0 \end{cases} \quad (8.37)$$

$$\text{mit: } h_d = \beta_t^2 / (p_{\bar{y},A} G_{f,t})$$

$G_{f,t}$  Bruchenergie

Bei einer monotonen Belastung gilt  $\alpha_d = \sigma^{eq}$ . In Abb. 8.6 ist die Vergleichsspannung und die Evolution der Schädigung im Hauptspannungsraum dargestellt.

#### Bestimmung der Materialparameter:

Für den Kalksandstein wurden an der RWTH Aachen Materialprüfungen durchgeführt. Die Zugfestigkeit wurde aus den direkten Zugversuchen von [Bra05b] entnommen, die Druckfestigkeit aus Abs. 6.3 übernommen. In Tab. 8.1 sind alle Materialparameter für die Modellierung des Steinversagens aufgelistet. Für die Penalty-Stifigkeiten  $p_{\bar{x},A}$  und  $p_{\bar{y},A}$  wurden numerisch verträgliche Werte gewählt, welche die Stifigkeit des gesamten Modells nicht wesentlich beeinflussen.

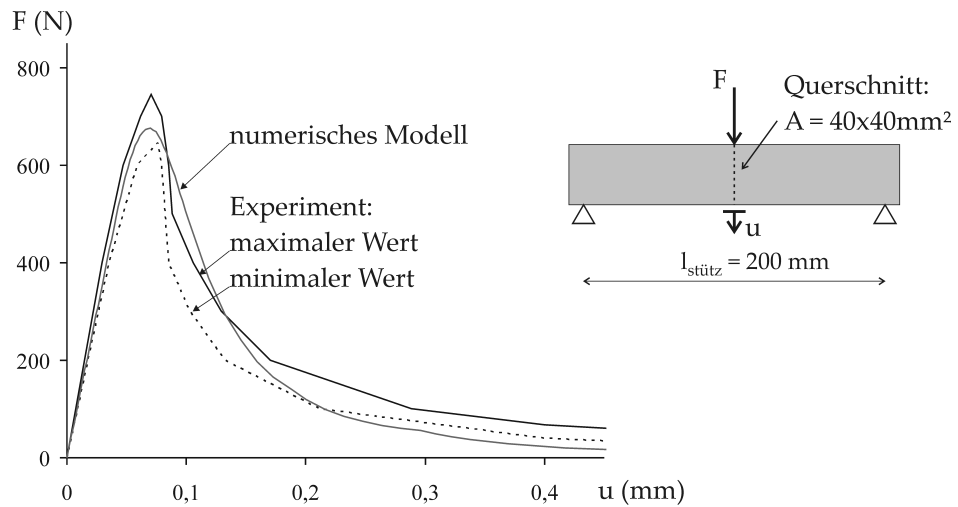
#### Validierung mit experimentellen Versuchen:

Zur Validierung des erweiterten diskreten Rissmodells von Abs. 8.1 wurde der 3-Punkt-Biegeversuch nachgerechnet. Der Balken wurde mit 4-knotigen Scheibenelementen diskretisiert und die Oberfläche des Risses mit 20 Kontaktelementen abgebildet. In Abb. 8.7 wird die Last-Verschiebungskurve von Experiment und Modell verglichen. Die wesentlichen mechanischen Effekte wie die Anfangssteifigkeit, die Maximalkraft und die Evolution der Entfestigung kann sehr gut abgebildet werden.

Eine weitere Validierung des numerischen Modells erfolgt in den nachfolgenden Kapiteln für das vertikale und diagonale Steinversagen, bei denen mit weiteren experimentellen Versuchen auch unter kombinierter Belastung die numerischen Mikromodelle bestätigt werden.

**Tabelle 8.1:** Materialparameter für das Steinversagen auf der Mikroskala

Kontinuum (linear, isotrop)	Schädigung siehe Abs. 8.1	Reibmodell siehe Abs. 4.3.3
elastische Parameter		
$E = 1,0e4 \text{ N/mm}^2$	$p_{\bar{x},A} = 1,0e3 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 0,5e3 \text{ N/mm}^3$
$\nu = 0,0$	$p_{\bar{y},A} = 2,0e3 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 1,0e3 \text{ N/mm}^3$
inelastische Parameter		
	$\beta_t = 2,1 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,6$
	$\beta_c = 13,0 \text{ N/mm}^2$	
	$\beta_b = 14,0 \text{ N/mm}^2$	
	$G_{f,t} = 0,055 \text{ N/mm}$	



**Abbildung 8.7:** 3-Punkt-Biegeversuch - Abgleich mit dem numerischen Modell

## 8.3 Vertikales Steinversagen

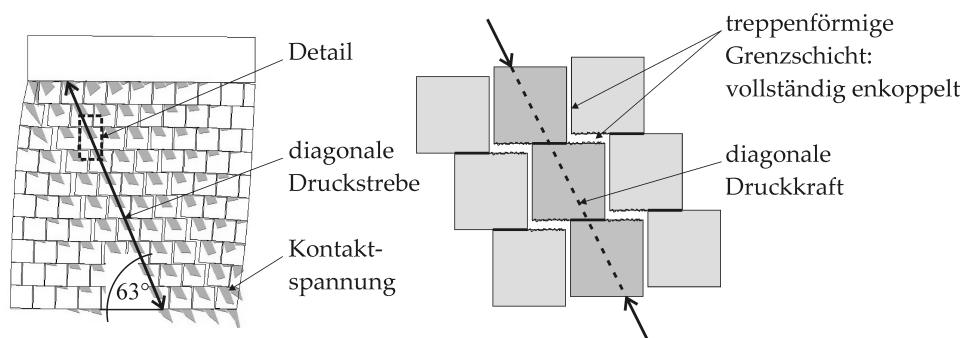
### 8.3.1 Belastung des Steins in der Schubwand

Bei den geschosshohen Wandversuchen zeigt sich beim quadratischen Steinformat ein 2-stufiges Versagen. Zunächst stellten sich Risse in den schwachen Mörtelfugen ein und erst bei einer weiteren Laststeigerung kam es zu Steinrissen (siehe Abs. 2.3).

Die Simulation einer Wandscheibe auf der Mesoskala zeigt, dass sich nach dem Fugenversagen eine typische Druckstrebenneigung von  $63^\circ$  im Mauerwerksverband einstellt (siehe Abs. 7.5). Gleichzeitig sind in diesem Zustand die Mörtelfugen treppenförmig entkoppelt (siehe Abb. 8.8).

Durch die treppenförmige Entkopplung des Mauerwerksverbands an den Mörtelfugen, können die Kleinkörperversuche für das Steinversagen auf die Breite einer treppenförmigen Steinreihe reduziert werden. Mit der Druckstrebenneigung von  $63^\circ$  kann die Anzahl der Versuche auf der Mikroskala zur Bestimmung der Versagenskriterien reduziert und der Homogenisierungsschritt zur Makroskala vereinfacht werden.

Die typische Druckstrebenneigung ist nicht nur für die dargestellte Wandscheibe zutreffend, sondern generell für den Mauerwerksverband mit quadratischem Steinformat. Dies wird mit dem Traglastmodell für das Fugenversagen von MANN/MÜLLER begründet (siehe Abs. 7.2) und bei weiteren Anwendungsbeispielen in Kapitel 9 bestätigt.



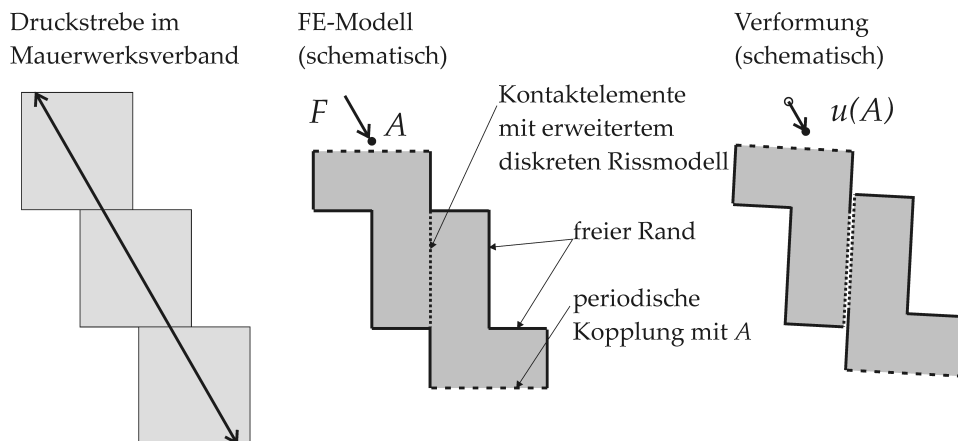
**Abbildung 8.8:** Lastabtragung der Schubwand (links) - Detail der treppenförmigen Entkopplung (rechts)

### 8.3.2 Numerische Untersuchung auf der Mikroskala

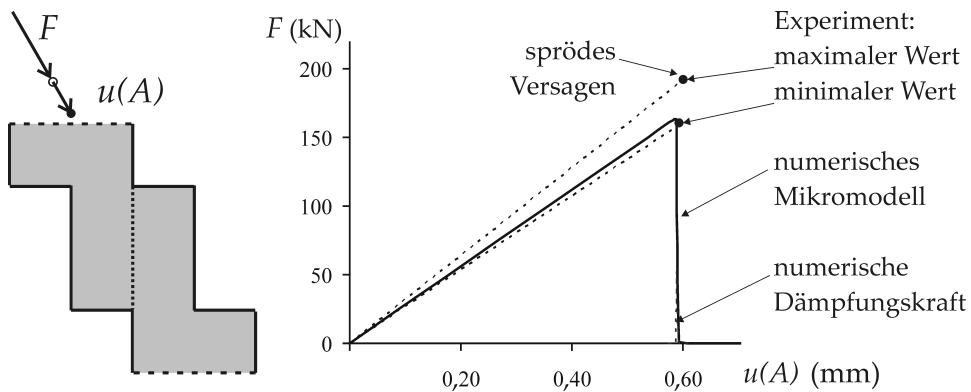
Das numerische Modell und die Belastung sind schematisch in Abb. 8.9 dargestellt. Die Größe des Modells ist entsprechend Abb. 8.8 auf eine diagonale Steinreihe reduziert. Von dieser diagonalen Steinreihe wurde ein periodischer Ausschnitt modelliert. Die obere und untere Kante ist mit dem Kontrollknoten  $A$  periodisch gekoppelt. Der vertikale Steinriss wurde mit 20 Elementen diskretisiert. Auf diese Kontaktelemente wurde das erweiterte diskrete Rissmodell von Abs. 8.1 mit den Materialparametern von Tab. 8.1 angewendet. Das übrige Kontinuum des Steins wurde mit 4-knotigen Scheibenelementen in Kombination mit einem linear elastischen Materialgesetz diskretisiert.

Im FE-Modell wird die diagonale Druckkraft am Kontrollknoten  $A$  aufgebracht. Die Last-Verschiebungskurve zeigt eine gute Übereinstimmung von Kleinkörperversuch und Mikromodell (siehe Abb. 8.10). Bis zum Erreichen der maximalen Kraft zeigt sich ein lineares Verhalten. Die spröde Entfestigung im Nachbruchbereich konnte im numerischen Modell nur durch eine numerische Dämpfung nachverfolgt werden (siehe Abs. 5.4).

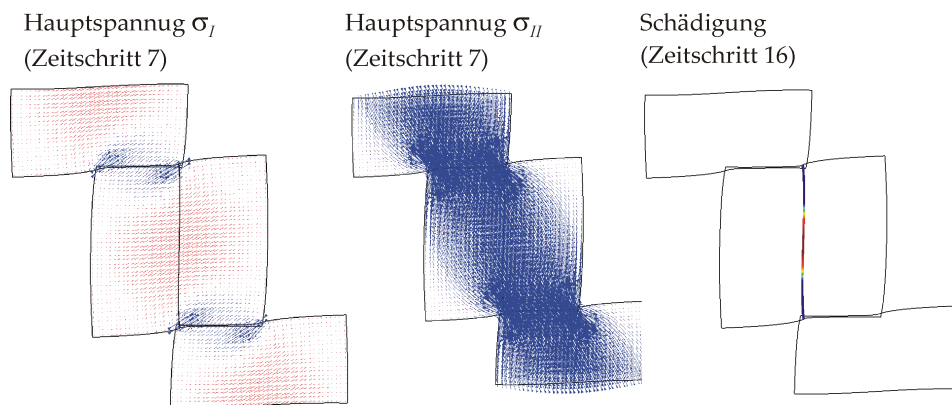
Die abrupte Entfestigung in Kombination mit den hohen numerischen Dämpfungskräften zeigt, dass im numerischen Modell eine kritische Länge bereits überschritten ist. Mechanische Ursache für diese Instabilität ist ein Missverhältnis zwischen der gespeicherten elastischen Energie und der zu geringen Bruchenergie im Querschnitt der Rissfläche. Diese Instabilität ist in Abs. 3.3.2 für eine 1-achsige Zugbelastung beschrieben. Beim vertikalen



**Abbildung 8.9:** Modellierung des vertikalen Steinversagens auf der Mikroskala



**Abbildung 8.10:** Last-Verschiebungskurve beim Kleinkörperversuch mit vertikalem Steinversagen



**Abbildung 8.11:** Ergebnisse des Mikromodells - Verformung 100-fach überhöht

Abscheren des Steins tritt diese Instabilität bei einem komplexen mehrachsigen Spannungszustand auf.

In Abb. 8.11 sind die Hauptspannungen und die Verteilung der Schädigung an der vertikalen Grenzschicht dargestellt. Im Zeitschritt 7 ist das Modell noch vollständig ungeschädigt, im Schritt 16 ist ca. die Hälfte des Querschnitts geschädigt. Da die maximalen Zugspannungen in der Mitte des Steins auftreten, beginnt die Schädigung auch an dieser Stelle.

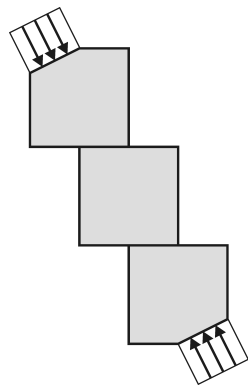
Aufgrund der Komplexität dieses Mikromodells und der instabilen Entfestigung bei diesem numerischen Versuch wurde das vertikale Steinversagen durch experimentelle Versuche validiert.

### 8.3.3 Experimentelles Bestimmen der Versagenskräfte

Am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München wurden schräge Druckversuche durchgeführt, um den Stein unter der Druckstrebenneigung von  $63^\circ$  zu prüfen [ZS11]. Die Versuchskörper bestehend aus drei versetzt angeordneten Steinen wurden 1-achsig auf Druck geprüft. Der prinzipielle Versuchsaufbau und die Versagenskräfte sind in Abb. 8.12 dokumentiert. Die Versagenskräfte konnten zuverlässig mit einer geringen Streuung bestimmt werden. Die Versuchskörper versagten sehr spröde, so dass die instabile Entfestigung nicht mehr mitgemessen werden konnte. Bis zum Erreichen der maximalen Prüfkraft verhielten sich die Körper weitgehend linear-elastisch (siehe Abb. 8.10).

Vergleicht man das Mikromodell mit dem Kleinkörperversuch (siehe Abb. 8.13), so bildeten sich beim Versuch die Risse weitgehend senkrecht zu den geneigten Hauptzugspannungen bei der Simulation. Da die ersten Risse beim diagonalen Druckversuch geneigt sind, stellen sich bis zum vollständigen vertikalen Abscheren des Steines weitere gekrümmte Risse ein. Im vereinfachten numerischen Modell wird nur ein vertikaler Riss vorgegeben, dennoch kann die Versagenskraft zutreffend bestimmt werden (siehe Abb. 8.10).

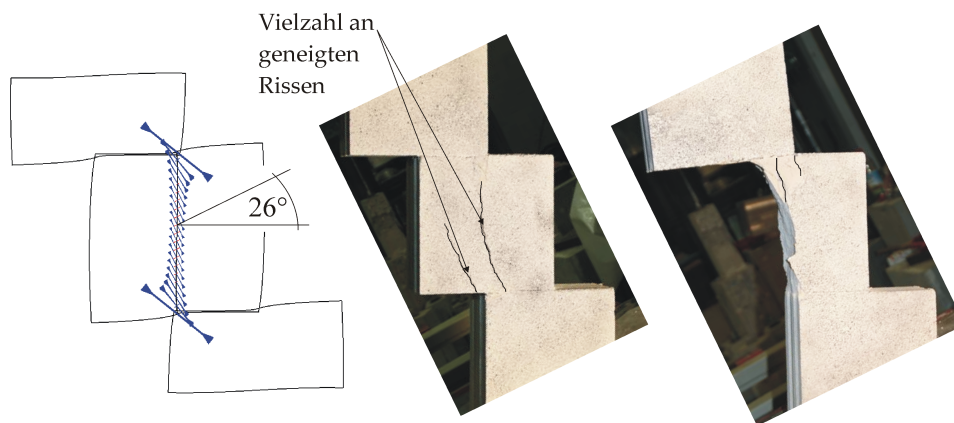
Die Lastabtragung und die Evolution der Schädigung sind in dem vereinfachten Fachwerkmodell von Abb. 8.14 zusammengefasst: Beim vertikalen Abscheren beginnt die Schädigung in der Mitte des Steins, bis zum vollständigen Versagen bilden sich eine Vielzahl von fächerartigen Rissen.



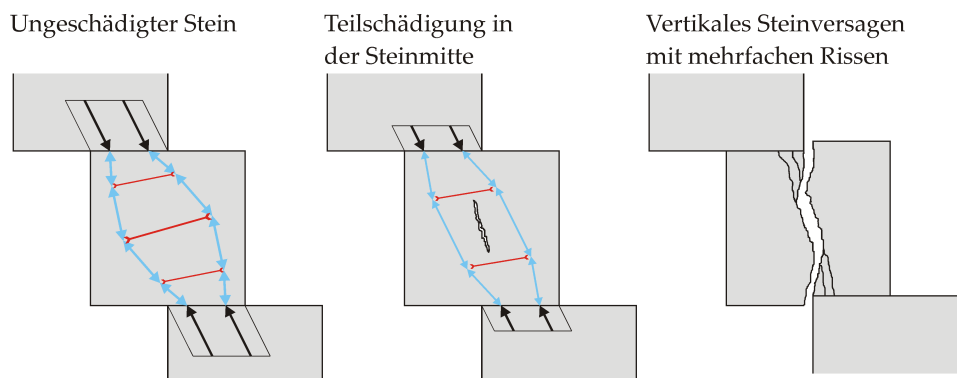
Versagenskräfte der Prüfkörper	
Prüfkörper	$F_{\max}$ kN
1	172,1
2	192,1
3	160,7
4	198,8
5	191,5
6	183,0
Mittelwert	183,0

**Abbildung 8.12:** Diagonaler Druckversuch - Versuchsaufbau (links), Versagenskräfte (rechts)





**Abbildung 8.13:** Hauptspannung der Kontaktelemente vor dem Versagen (links) - Rissbilder (mitte und rechts)



**Abbildung 8.14:** Entwicklung der Steinrisse anhand eines vereinfachten Fachwerkmodells

### 8.3.4 Abbildung mit der Einheitszelle (Makroskala)

Für das vertikale Abscheren des Steins ist bei der Einheitszelle ein entsprechend orientiertes vertikales Kontaktelement vorgesehen. Wie beim Fugenversagen wird zugunsten der numerischen Effizienz eine grobe Diskretisierung gewählt, welche die lokalen Spannungskonzentrationen der Mikroskala nicht mehr abbildet. Diese vereinfachte Kinematik bei der Makroskala wird phänomenologisch im Materialmodell mit reduzierten Festigkeiten kompensiert. Gleichzeitig wird mit einer reduzierten Penalty-StEIFigkeit und einer höheren Bruchenergie das Materialmodell regularisiert, um ein günstiges Konvergenzverhalten auf globaler Ebene zu erzielen. Dabei wird wieder das kombinierte diskrete Rissmodell von Abs. 8.1 verwendet.

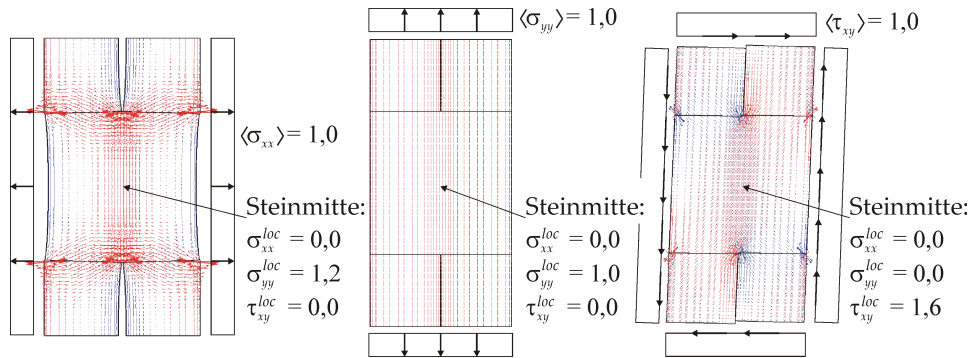


Abbildung 8.15: Lokale Spannung  $\sigma^{loc}$  als Linearkombination von  $\langle \sigma \rangle$

### Reduzierte Festigkeit für die Makroskala:

Auch mit dem erweiterten Kontaktelement werden bei der Einheitszelle nur die effektiven Spannungen  $\langle \sigma \rangle$  der Mikroskala abgebildet. Um das Versagenskriterium einfach, aber gleichzeitig allgemeingültig zu halten, werden zunächst mit einer Transformationsvorschrift die lokalen Spannungen in der Mitte des Steins berechnet:

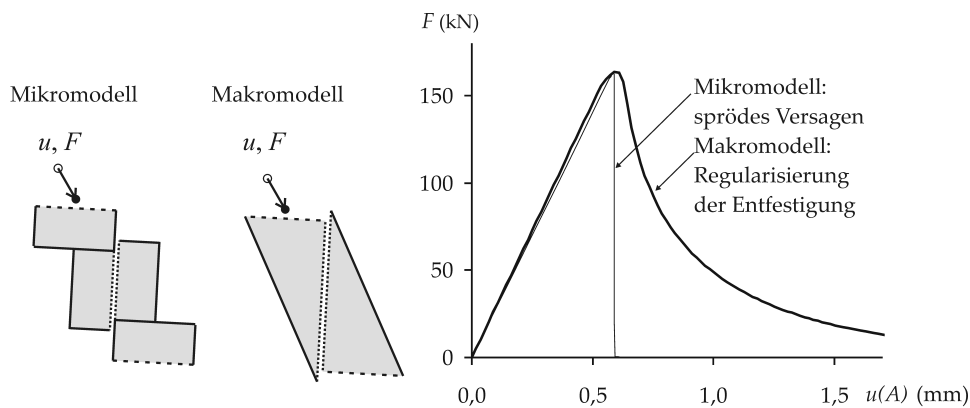
$$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \langle \sigma \rangle \quad (8.38)$$

$$\text{mit: } \mathbf{T}^{loc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6 \end{bmatrix}$$

$\sigma^{loc}$  stellt den Spannungstensor im Zentrum des Steins dar, wo nach Abs. 8.3.2 das Risswachstum beginnt. Die Einträge von  $\mathbf{T}^{loc}$  wurden durch drei Einheitszustände an der periodischen Zelle mit einem linearen Materialgesetz bestimmt (siehe Abb. 8.15). Mit  $\sigma^{loc}$  wird die Evolution der Schädigung kontrolliert und das Versagenskriterium der Mikroskala angewendet:

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma^{loc}) \quad \text{Definition von } \tilde{\sigma}^{eq} \text{ siehe (8.36)}$$

Beim Schädigungsmodell für die Makroskala wird die phänomenologische Reduzierung der Festigkeit durch die Vorschrift  $\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$  umgesetzt. Insbesondere durch die Transformation  $\tau^{loc} = 1,6 \langle \tau \rangle$  wird im Schädigungsmodell eine höhere Vergleichsspannung und eine entsprechend niedrigere Festigkeit erzielt. Das vollständige Materialmodell ist in Algorithmus 8.2 zusammengefasst. In Tab. 8.2 sind die Materialparameter von Mikro- und Makroskala gegenübergestellt.



**Abbildung 8.16:** Last-Verschiebungskurve beim Kleinkörperversuch mit vertikalem Steinversagen; Vergleich Mikro- und Makromodell

#### Überprüfung des Materialmodells:

Zur Kontrolle der Makroskala wurde der Kleinkörperversuch mit dem Makromodell der Einheitszelle nachgerechnet. In Abb. 8.16 ist die Last-Verschiebungskurve von Mikro- und Makromodell vergleichend gegenübergestellt. Die Anfangssteifigkeit und die Versagenskräfte werden von der Makroskala sehr gut abgebildet. Auf die langsame Entfestigung beim Makromodell zugunsten eines besseren Konvergenzverhaltens wird im nachfolgenden Abschnitt eingegangen.

#### Regularisierungen beim Materialmodell:

Vergleicht man in Tab. 8.2 die Materialparameter für beide Skalen, so werden bei der Makroskala niedrigere Penalty-StEIFigkeiten und höhere Bruchenergien im Vergleich zur Mikroskala verwendet. Beide Regularisierungen bewirken, dass die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung glatter formuliert und global ein besseres Konvergenzverhalten erzielt wird. Die Festigkeit und Versagenskräfte werden dadurch nicht verändert. Numerische Untersuchungen bei großen Wandscheiben zeigten, dass diese Modifikationen des Materialgesetzes die Robustheit des Algorithmus wesentlich verbessern ohne die Ergebnisse signifikant zu beeinflussen (siehe Abs. 9.1.2). Die Penalty-StEIFigkeiten wurden so gewählt, dass bei einer elastischen Belastung der Einheitszelle ca. 2% der Verformung von den Kontaktelementen und die restliche Verformung von den Kontinuumselementen abgebildet wird. Die Bruchenergie wurde derart erhöht, dass beim Kleinkörperversuch von Abb. 8.16 eine moderate Entfestigung eintritt.

---

**Algorithmus 8.2** Materialmodell für das vertikale Steinversagen der Einheitszelle
 

---

 Eingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $\epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1}$   $\alpha_{d,n}$   $[[\mathbf{u}]]_n^{pl}$ 
**1. Schritt:**Spannungsvektor  $\mathbf{t}_A$  mit elastischer Kopplung

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{C}_A [[\mathbf{u}]]_{n+1} \quad \mathbf{C}_A \text{ siehe (4.29)}$$

Spannungsvektor  $\mathbf{t}_F$  mit Kontakt-/Reibmodell im gerissenen Zustand

$$\left\{ \mathbf{t}_F, [[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl} \right\} = \mathbf{t}_F ([[ \mathbf{u} ]]_{n+1}, [[ \mathbf{u} ]]_n^{pl}) \quad \mathbf{t}_F \text{ siehe Algorithmus 4.1}$$

**2. Schritt:** Spannungstensor  $\sigma$ 

$$\sigma = \mathbf{C}_\epsilon \epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1} + \mathbf{C}_t \mathbf{t}_A \quad \mathbf{C}_\epsilon, \mathbf{C}_t \text{ siehe (8.17)}$$

**3. Schritt:** Vergleichsspannung  $\sigma^{eq}$ 

Lokale Spannung in Steinmitte:

$$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma \quad \mathbf{T}^{loc} \text{ siehe (8.38)}$$

Vergleichsspannung abhängig von Orientierung und Belastung

$$\sigma^{eq} = w_\alpha(\sigma) \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma^{loc}) \quad \tilde{\sigma}^{eq} \text{ siehe (8.36)}$$

 $w_\alpha$  siehe Abs. 8.1.3**4. Schritt:** Kuhn-Tucker-Bedingung

$$f_d^{trial} = \sigma^{eq} - \alpha_{d,n} \quad \text{elastischer Prädiktor}$$

$$\alpha_{d,n+1} = \begin{cases} \alpha_{d,n} & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \\ \sigma^{eq} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}^{tan} \text{ siehe (8.24)}$$

$$d_{n+1} = g(\alpha_{d,n+1}) \quad g(\alpha_{d,n+1}) \text{ siehe (8.37)}$$

**5. Schritt:** Spannungsvektor an der Grenzschicht

$$\mathbf{t} = (1 - d_{n+1})\mathbf{t}_A + d_{n+1} \mathbf{t}_F$$

 Ergebnis:  $\mathbf{t}$   $\alpha_{d,n+1}$   $[[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl}$   $\mathbf{C}^{tan}$ 


---

Tabelle 8.2: Materialparameter für vertikales und diagonales Steinversagen

<b>Beschreibung des Kontinuums:</b>			
Mikroskala: isotrop		Makroskala: orthotrop	
$E = 10.000 \text{ N/mm}^2$ $\nu = 0$		siehe Tab. 6.1	
<b>Beschreibung der Grenzschicht:</b>			
<b>Schädigungsmodell</b>		<b>Reibmodell</b>	
elastische Parameter			
Mikroskala	Makroskala	Mikroskala	Makroskala
$p_{\bar{x},A} = 1,0e3$	$0,1e3 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 0,5e3$	$0,05e3 \text{ N/mm}^3$
$p_{\bar{y},A} = 2,0e3$	$0,2e3 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 1,0e3$	$0,1e3 \text{ N/mm}^3$
inelastische Parameter			
$\beta_t = 2,1$	$1,92 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,6$	$0,6$
$\beta_c = 13,0$	$12,0 \text{ N/mm}^2$		
$\beta_b = 14,0$	$13,0 \text{ N/mm}^2$		
$G_{f,t} = 0,055$	$0,55 \text{ N/mm}$		
$\mathbf{T}^{loc}$ entfällt	$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$ siehe (8.38)		

## 8.4 Diagonales Steinversagen

### 8.4.1 Mechanische Ursache des diagonalen Steinversagens

Bei den geschosshohen Wandversuchen wurde neben dem vertikalen auch ein diagonales Steinversagen als wesentlicher Versagensmodus festgestellt. Da sich beim schrägen Druckversuch Risse mit vertikaler und diagonaler Ausrichtung zeigten (siehe Abb. 8.13), werden beide Versagensmoden vorrangig durch schräge Druckkräfte hervorgerufen.

Das instabile Verzweigen in ein vertikales oder diagonales Steinversagen ist schematisch in dem Fachwerkmodell von Abb. 8.17 dargestellt. Da in beiden Fällen die Schädigung aufgrund von Querkzugspannungen in der Mitte des Steins beginnt, wird für beide Versagensmoden die gleiche Festigkeit bei der Makroskala angenommen.

Aufgrund der vielen fächerartigen Risse, die sich beim schrägen Druckversuch zeigten, wäre ein zutreffendes Mikromodell sehr aufwändig. Daher wird auf eine detaillierte Modellierung auf der Mikroskala verzichtet und der Schwerpunkt auf die phänomenologische Beschreibung mit der Einheitszelle gelegt.

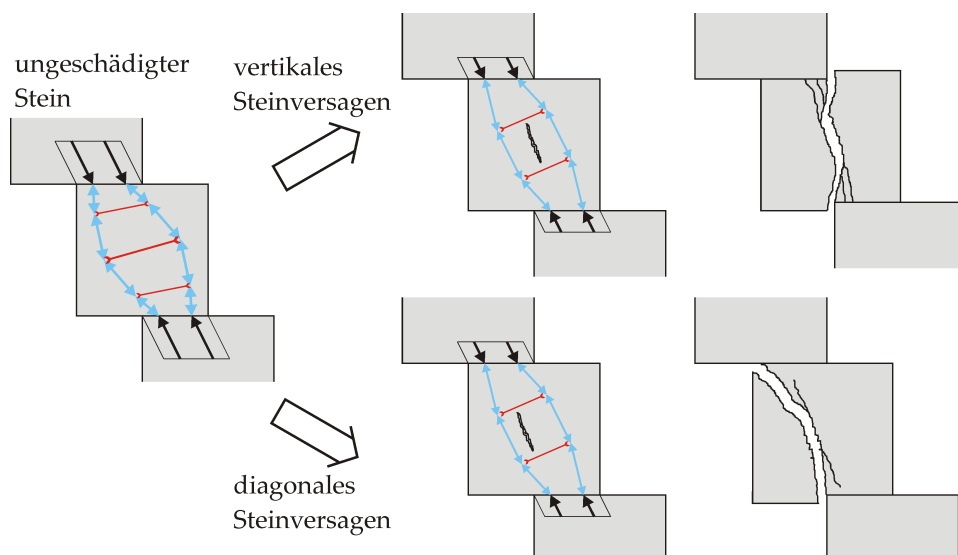


Abbildung 8.17: Verzweigung in ein vertikales und diagonales Steinversagen

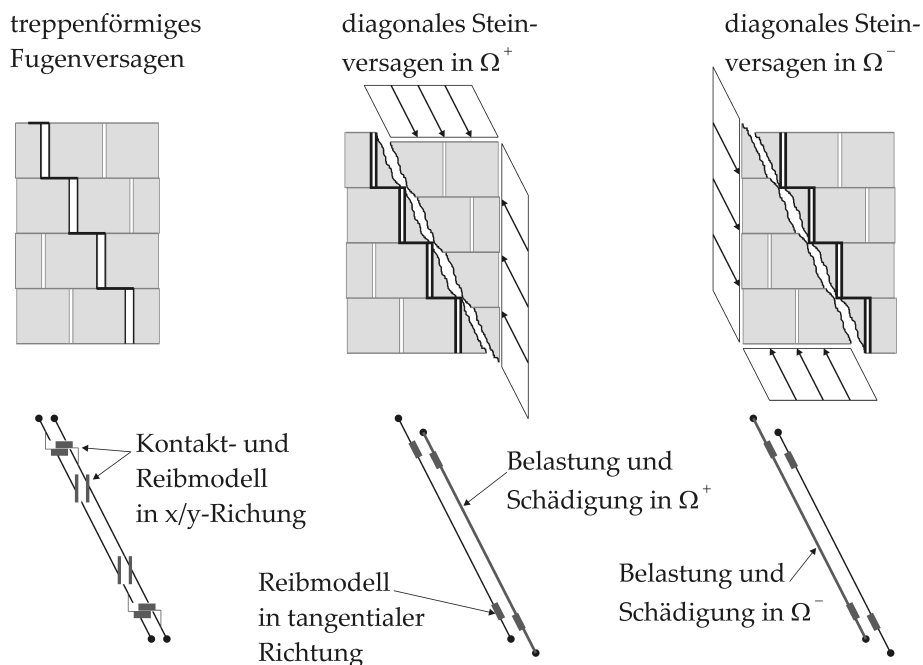
### 8.4.2 Elementformulierung für die Einheitszelle (Makroskala)

Da das diagonale Steinversagen und das treppenförmige Fugenversagen makroskopisch die gleiche Rissorientierung besitzen, können beide Versagensfälle mit einem einzigen diagonalen Kontaktelement beschrieben werden. Insgesamt muss das Kontaktelement drei Fälle abbilden können:

- treppenförmiges Fugenversagen (siehe Abs. 7.4.3)
- diagonales Steinversagen in  $\Omega^+$
- diagonales Steinversagen in  $\Omega^-$

Mit  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  wird das Steinversagen oberhalb und unterhalb der treppenförmigen Grenzschicht bezeichnet. Während an der treppenförmigen Fuge ein horizontales Reibversagen eintreten kann, ist beim diagonalen Steinversagen ein tangenciales Abgleiten möglich. Die unterschiedlichen Rissmuster mit der jeweiligen Kinematik im Versagenszustand sind in Abb. 8.18 dargestellt.

Um die zusätzlichen Versagensmoden für das Steinversagen abbilden zu können, wird beim diagonalen Kontaktelement das *erweiterte diskrete Rissmodell* von Abs. 8.1 angewendet. Auf Elementebene werden die unter-



**Abbildung 8.18:** Diagonale Versagensmoden im Mauerwerksverband (oben) - Abbildung mit dem Kontaktelement (unten)

schiedlichen Versagensmoden durch hierarchische Integrationspunkte (sogenannte *master-slave-points*) berücksichtigt:

- *master-point*:  
Schädigung  $d_M$  der Mörtelfuge  
Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  und Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der Grenzschicht
- *slave-point +* :  
Elastizitätsmodell für  $\sigma^+$  in  $\Omega^+$ ,  
Interne Variable  $\alpha_d^+$  des Steines oberhalb der Grenzschicht
- *slave-point -* :  
Elastizitätsmodell für  $\sigma^-$  in  $\Omega^-$ ,  
Interne Variable  $\alpha_d^-$  des Steines unterhalb der Grenzschicht

Die Anordnung der hierarchischen Integrationspunkte ist in Abb. 8.19 dargestellt. Für die Grenzschicht sind die Rissöffnungen  $[[u]]_{\bar{x}}$ ,  $[[u]]_{\bar{y}}$  und für die Kontinua  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  zusätzlich die Dehnungskomponenten  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+$ ,  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^-$  erforderlich. In der Matrix-Vektor-Notation werden die kinematischen Größen  $[[u]]_{\bar{x}}$ ,  $[[u]]_{\bar{y}}$ ,  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+$ ,  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^-$  im Vektor  $\boldsymbol{\epsilon}$  zusammengefasst und mit dem Operator  $\mathbf{B}_\epsilon$  diskretisiert:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} [[u]]_{\bar{x}} \\ [[u]]_{\bar{y}} \\ \epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+ \\ \epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^- \end{bmatrix} \approx \mathbf{B}_\epsilon \mathbf{d}$$

$$\mathbf{B}_\epsilon = \begin{bmatrix} -cn_1 & -sn_1 & -cn_2 & -sn_2 & cn_1 & sn_1 & cn_2 & sn_2 \\ sn_1 & -cn_1 & sn_2 & -cn_2 & -sn_1 & cn_1 & -sn_2 & cn_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-c}{dl} & \frac{-s}{dl} & \frac{c}{dl} & \frac{s}{dl} \\ \frac{-c}{dl} & \frac{-s}{dl} & \frac{c}{dl} & \frac{s}{dl} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{x2} & u_{y2} & u_{x3} & u_{y3} & u_{x4} & u_{y4} \end{bmatrix}$$

mit:  $n_1 = 1/2(1 - \zeta)$ ,  $n_2 = 1/2(1 + \zeta)$   
 $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$   
 $dl$  (Kantenlänge)

In Abb. 8.19 ist die Knotennummerierung für die Diskretisierung mit linearen Ansatzfunktionen dargestellt. Die diskontinuierliche Verzerrung  $[[\bar{\mathbf{u}}]]$  wird dem *master-point* zugewiesen, die Dehnungen  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+$ ,  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^-$  werden den *slave-points* zugewiesen.



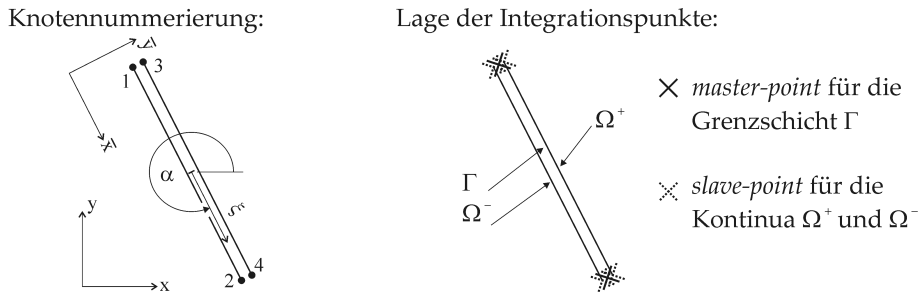


Abbildung 8.19: Elementformulierung für die diagonalen Versagensmoden

Mit den kinematischen Größen von  $\mathbf{B}_\epsilon$  kann mit dem nachfolgend beschriebenen Materialmodell der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der diagonalen Grenzschicht bestimmt werden. Für die Integration zu internen Knotenkräften wird der Operator  $\mathbf{B}_{[[\mathbf{u}]]}$  von (5.3) verwendet:  $\mathbf{f}^{int} = \int \mathbf{B}_{[[\mathbf{u}]]}^T \mathbf{t}(\epsilon) d\Gamma$

### 8.4.3 Materialmodell für die Einheitszelle (Makroskala)

#### Mehrstufiges skalares Schädigungsmodell:

Um das treppenförmige Fugenversagen des Mörtels und die beiden angrenzenden diagonalen Steinrisse abbilden zu können, wird das 2-Phasen-Materialmodell von Abs. 4.3.2 zu einem mehrstufigen Schädigungsmodell mit den Schädigungsvariablen  $d_M$  und  $d_S$  für Mörtel und Stein weiterentwickelt. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der diagonalen Grenzschicht berechnet sich mit:

$$\mathbf{t} = \underbrace{(1 - d_S) \mathbf{t}_M}_{\text{Stein ungeschädigt}} + \underbrace{d_S \mathbf{t}_S}_{\text{Stein geschädigt}} \quad (8.40)$$

$$\mathbf{t}_M = \mathbf{t}_M([[ \mathbf{u} ]], d_M) \quad (8.41)$$

Schädigungsmodell der Mörtelfuge siehe Alg. 7.3

$$\mathbf{t}_S = \mathbf{t}_S([[ \mathbf{u} ]], [[u]_{\bar{x}}^{pl}) \quad (8.42)$$

Kontakt- und Reibmodell siehe Alg. 4.1

$$d_S = g(\alpha_d) \quad \text{mit } \alpha_d = \max(\alpha_d^+, \alpha_d^-) \quad (8.43)$$

mit  $d_S$  Schädigung des Steins am *master-point* für  $\Gamma$

$\alpha_d^+$ ;  $\alpha_d^-$  Interne Variablen an den *slave-points* für  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$

$d_M$  Schädigung des Mörtels am *master-point* für  $\Gamma$

Mit  $\mathbf{t}_S$  wird der Spannungsvektor an einem vollständig entwickelten diagonalen Steinriss bezeichnet (Index  $S$  für *Stein*). Für die Berechnung von  $\mathbf{t}_S$  wird das Kontakt- und Reibgesetz von Abs. 4.3.3 angewendet.

Im ungeschädigten Zustand des Steins wird der Spannungsvektor  $\mathbf{t}_M$  an der treppenförmigen Fuge übertragen. Der Spannungsvektor der Mörtelfuge  $\mathbf{t}_M$  wird mit der Schädigungsvariable  $d_M$  beschrieben (siehe Abs. 7.4).

#### Erweitertes diskretes Rissmodell für die Kontinua $\Omega^+$ und $\Omega^-$ :

Auch das diagonale Steinversagen wird mit dem *erweiterten diskreten Rissmodell* von Abs. 8.1.1 beschrieben und die Evolution der Schädigungsvariable  $d_S$  für das Steinversagen abhängig vom Spannungstensor am Kontinuum formuliert. Da sich diagonale Steinrisse oberhalb und unterhalb des treppenförmigen Fugenversagens einstellen können (siehe Abb. 8.18), wird die Spannung  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$  getrennt an den Kontinua  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  ausgewertet:

- Berechnung von  $\sigma^+$  abhängig von  $\mathbf{t}_M$  und  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+$
- Berechnung von  $\sigma^-$  abhängig von  $\mathbf{t}_M$  und  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^-$

Für die beiden diagonalen Steinrisse werden zwei separate Schädigungsmodelle formuliert. Die Definition der internen Variable für den Stein wird exemplarisch für  $\alpha_d^+$  abhängig von  $\sigma^+$  gezeigt:

$$\sigma^{loc,+} = \mathbf{T}^{loc} \sigma^+ \quad \text{Spannung in Steinmitte} \quad (8.44)$$

$\mathbf{T}^{loc}$  siehe (8.38)

$$\sigma^{eq,+} = w_\alpha(\sigma^+) \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma^{loc,+}) \quad \text{Vergleichsspannung} \quad (8.45)$$

$$f_{d,S}^+ = \sigma^{eq,+} - \alpha_d^+ \leq 0 \quad \text{Schädigungsbedingung} \quad (8.46)$$

Die internen Variablen  $\alpha_d^+$  und  $\alpha_d^-$  werden getrennt für  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  ermittelt und an den *slave-points* abgespeichert (siehe Abb. 8.19). Am *master-point* für die Oberfläche  $\Gamma$  wird die maximale Schädigung berechnet:

$$\alpha_d = \max(\alpha_d^+, \alpha_d^-)$$

$$d_S = g(\alpha_d) = \begin{cases} 0,0 & \text{für } \alpha_d < 1,0 \\ 1 - \frac{1}{\alpha_d} \exp(h_d(1 - \alpha_d)) & \text{für } \alpha_d \geq 1,0 \end{cases} \quad (8.47)$$

#### Reduzierte Festigkeit für die Makroskala:

Die vereinfachte Kinematik mit der groben Diskretisierung auf der Makroskala wird beim Materialmodell mit reduzierten Festigkeiten kompensiert. Die Reduzierung der Festigkeit wird bei der Definition der Vergleichsspannung in Gleichung (8.45) umgesetzt. Da beim diagonalen und vertikalen Steinversagen die Schädigung in der Mitte des Steins beginnt, wird die gleiche Transformation  $\mathbf{T}^{loc}$  für die Beschreibung der lokalen Spannung verwendet. Das vollständige Materialmodell ist in Algorithmus 8.3 zusammengefasst, die dazugehörigen Materialparameter in Tab. 8.2.

---

**Algorithmus 8.3** Materialmodell für die diagonalen Versagensmoden der Einheitszelle
 

---

Eingangsgrößen:  $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$   $\epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1}^+$   $\epsilon_{\bar{x}\bar{x},n+1}^-$   $\alpha_{d,n}^+$   $\alpha_{d,n}^-$   $[[\mathbf{u}]]_n^{pl}$   
 weitere interne Variablen für das treppenförmige Versagen  
 des Mörtels siehe Algorithmus 7.3

**1. Schritt:**

Spannung  $\mathbf{t}_M$  des Mörtels (Stein ungeschädigt)

$$\mathbf{t}_M = \mathbf{t}_M ([[ \mathbf{u} ]]_{n+1}, \dots) \quad \text{siehe Algorithmus 7.3}$$

Spannung  $\mathbf{t}_S$  am diagonalen Steinriss mit Kontakt-/Reibmodell

$$\left\{ \mathbf{t}_S, [[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl} \right\} = \mathbf{t}_S ([[ \mathbf{u} ]], [[\mathbf{u}]]_n^{pl}) \quad \mathbf{t}_S \text{ siehe Algorithmus 4.1}$$


---

Schritt 2 bis 4 am *slave-point*  $\Omega^+$  bzw.  $\Omega^-$

**2. Schritt:** Spannung am Kontinuum  $\Omega^+$ 

$$\tilde{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \tilde{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}}(\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^+) \quad \tilde{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} \text{ siehe (8.48)}$$

$$\sigma^+ = \mathbf{C}_\epsilon \tilde{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} + \mathbf{C}_t \mathbf{t}_M \quad \mathbf{C}_\epsilon, \mathbf{C}_t \text{ siehe (8.17)}$$

**3. Schritt:** Vergleichsspannung

Lokale Spannung in Steinmitte:

$$\sigma^{loc,+} = \mathbf{T}^{loc} \sigma^+ \quad \mathbf{T}^{loc} \text{ siehe (8.38)}$$

Vergleichsspannung abhängig von Orientierung und Belastung

$$\sigma^{eq,+} = w_\alpha(\sigma^+) \tilde{\sigma}^{eq}(\sigma^{loc,+}) \quad \tilde{\sigma}^{eq} \text{ siehe (8.36)}$$

$w_\alpha$  siehe Abs. 8.1.3

**4. Schritt:** Kuhn-Tucker-Bedingung

$$f_d^{trial} = \sigma^{eq,+} - \alpha_{d,n}^+ \quad \text{elastischer Prädiktor}$$

$$\alpha_{d,n+1}^+ = \begin{cases} \alpha_{d,n}^+ & \text{für } f_d^{trial} \leq 0 \\ \sigma^{eq,+} & \text{für } f_d^{trial} > 0 \end{cases} \quad \mathbf{C}^{tan,+} \text{ siehe (8.24)}$$

Wiederhole Schritt 2 bis 4 mit  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}^-, \alpha_{d,n}^-$  für  $\alpha_{d,n+1}^-, \mathbf{C}^{tan,-}$

---

**5. Schritt:** maximale Schädigung am *master-point* für  $\Gamma$ 

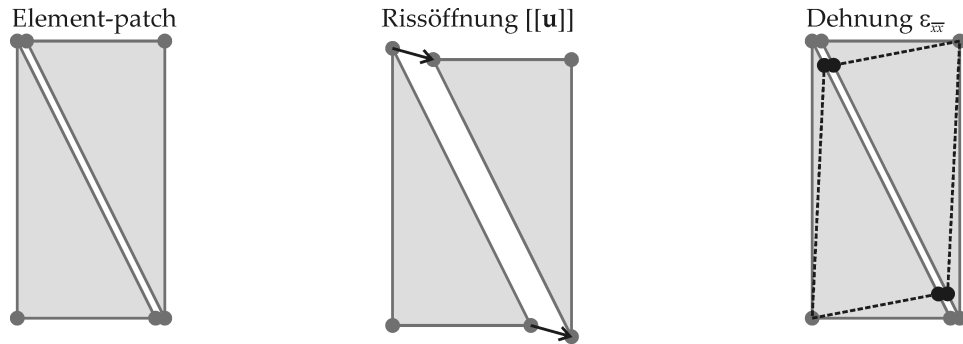
$$\{d_S, \mathbf{C}^{tan}\} = \begin{cases} g(\alpha_{d,n+1}^+), \mathbf{C}^{tan,+} & \text{für: } \alpha_{d,n+1}^+ > \alpha_{d,n+1}^- \\ g(\alpha_{d,n+1}^-), \mathbf{C}^{tan,-} & \text{für: } \alpha_{d,n+1}^+ \leq \alpha_{d,n+1}^- \end{cases}$$

**6. Schritt:** Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  an der Grenzschicht

$$\mathbf{t} = (1 - d_S) \mathbf{t}_M + d_S \mathbf{t}_S$$

Ergebnis:  $\mathbf{t}$   $\alpha_{d,n+1}^+$   $\alpha_{d,n+1}^-$   $[[\mathbf{u}]]_{n+1}^{pl}$   $\mathbf{C}^{tan}$

---



**Abbildung 8.20:** Verformungsmoden am erweiterten Kontaktelement und Interaktion mit dem Kontinuumsselement

### Regularisierung der Bruchenergie:

Um einen robusten Algorithmus mit gutem Konvergenzverhalten zu erzielen, wird bei der Makroskala eine höhere Bruchenergie verwendet als auf der Mikroskala (siehe Materialparameter von Tab. 8.2). Dadurch wird bei der Spannungs-Rissöffnungskurve die Festigkeit nicht beeinflusst, sondern lediglich die Entfestigung gedämpft. Bei dem erweiterten Kontaktelement werden sowohl die Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  als auch die Dehnung  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  diskretisiert. Bei der Einheitszelle kann sich das Kontaktelement bezüglich der Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  unabhängig von den Scheibenelementen verformen. Die Dehnung  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  des Kontaktelementes muss dagegen mit  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  der angrenzenden Scheibenelemente kompatibel sein (siehe Abb. 8.20). Um die Erhöhung der Bruchenergie bei  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  zu kompensieren, wird im Materialmodell folgender Term eingeführt:

$$\tilde{\epsilon}_{\bar{x}\bar{x}} = \begin{cases} \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} & \text{für } \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} > \epsilon_{\bar{x}\bar{x},0} \\ \epsilon_{\bar{x}\bar{x},0} + w_\epsilon (\epsilon_{\bar{x}\bar{x}} - \epsilon_{\bar{x}\bar{x},0}) & \text{für } \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} \leq \epsilon_{\bar{x}\bar{x},0} \end{cases} \quad (8.48)$$

mit  $w_\epsilon = \frac{G_f(\text{Makro})}{G_f(\text{Mikro})}$

Die Schranke  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x},0}$  wird so bestimmt, dass gilt:

$$\sigma^{eq}(\sigma_{\bar{x}\bar{x},0}) \equiv 1,0$$

mit  $\sigma_{\bar{x}\bar{x},0} = \bar{\mathbf{C}}_\epsilon \epsilon_{\bar{x}\bar{x},0}$   $\bar{\mathbf{C}}_\epsilon$  siehe (8.13)

Mit einer höheren Bruchenergie  $G_f(\text{Makro})$  wird die Entfestigung für die Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  zugunsten des Konvergenzverhaltens gedämpft. Gleichzeitig wird mit (8.48) diese höhere Bruchenergie für den Verformungsmodus  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  deaktiviert, so dass für diesen Verformungsmodus die Spannungs-Dehnungskurve von Mikro- und Makroskala identisch bleiben.

## 8.5 Validierung des Steinversagens

### 8.5.1 Prüfverfahren und Belastung der Schubwand

Für die Validierung des numerischen Modells wurde die Wandscheibe von Abb. 8.21 am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München experimentell geprüft [ZS11]. Aufgrund der exzentrischen Last weicht die Belastung von dem in Abs. 2.2 beschriebenen Verfahren ab. Gemäß Abb. 8.21 wird die Verteilung der vertikalen Kräfte abhängig von der horizontalen Auflagerreaktion  $H_1$  so gesteuert, dass in halber Wandhöhe die resultierende Kraft um 0,05 m versetzt angreift. Die Summe der vertikalen Kräfte aus  $F_1$  und  $F_2$  entspricht einer mittleren Pressung von  $q_y = 2,0 \text{ N/mm}^2$ . Die Anzahl und Intensität der statisch-zyklischen Horizontalverschiebung ist in Abb. 8.22 dargestellt.

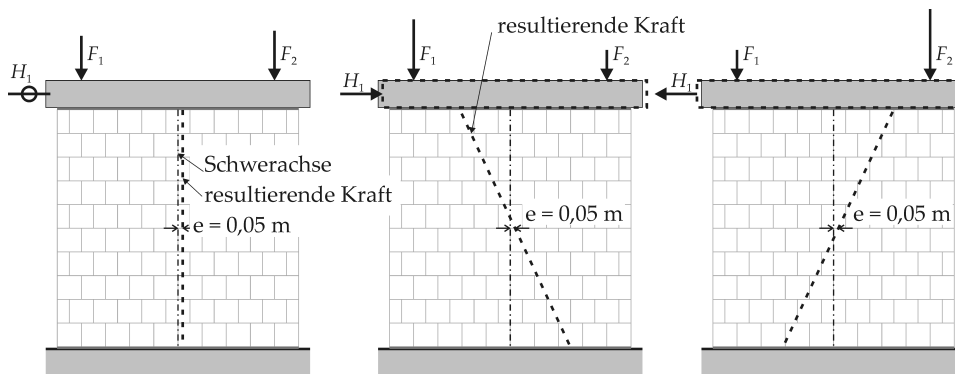


Abbildung 8.21: Belastung der Wand und Lage der resultierenden Kraft

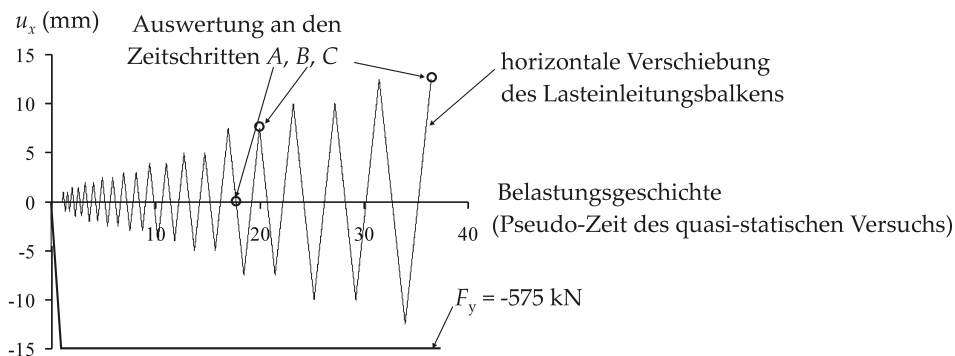


Abbildung 8.22: Belastungsgeschichte

### 8.5.2 Numerisches Modell

Das numerische Modell basierend auf Einheitszellen ist in Abb. 8.23 dargestellt. Der Lasteinleitungsbalken wird durch Scheibenelemente mit hoher Steifigkeit modelliert. Dabei wird die Belastung der Wandscheibe über den Kontrollknoten  $A$  gesteuert. Über folgende kinematische Kopplungen wird die Starrkörperbewegung des Lasteinleitungsbalkens mit den Freiheitsgraden des Kontrollknotens gekoppelt:

$$u_{x,i} = u_{x,A} \quad i = 1 \dots n$$

$$u_{y,i} = u_{y,A} + (x_i - x_A) \varphi_A \quad i = 1 \dots n$$

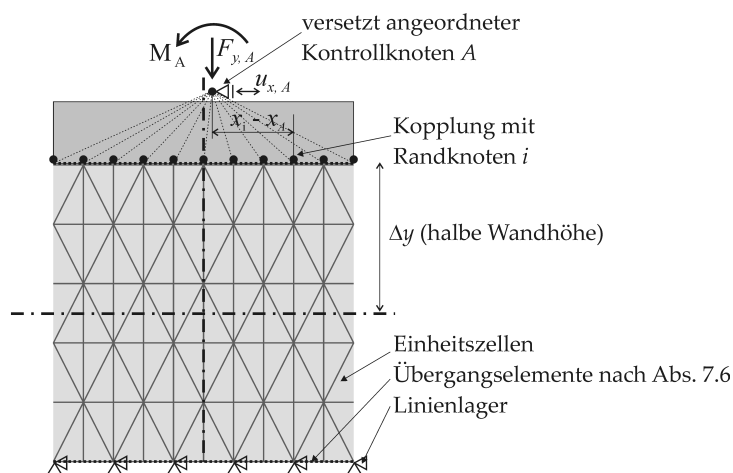
Diese kinematischen Kopplungen werden bei den Knoten  $i$  in der ersten Reihe des Lasteinleitungsbalkens modelliert. Auf den Kontrollknoten  $A$  mit dem zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrad  $\varphi_A$  werden folgende Lasten aufgebracht:

$$u_{x,A} = \bar{u}_x \quad \text{verschiebungsgesteuert} \quad (8.49)$$

$$F_{y,A} = \bar{F}_y \quad \text{kraftgesteuert} \quad (8.50)$$

$$M_A = F_{x,A} \Delta y \quad \text{Last abhängig von der Auflagerreaktion} \quad (8.51)$$

In (8.51) wird mit dem Moment  $M_A$  die Lage der resultierenden Kraft in halber Wandhöhe kontrolliert. Bei der numerischen Simulation wird mit ausreichend kleinen Zeitschritten Gleichung (8.51) explizit gelöst ( $M_A^{n+1} = F_{x,A}^n \Delta y$ ). Für die exzentrische vertikale Kraft wird der Kontrollknoten  $A$  um 0,05 m versetzt angeordnet.



**Abbildung 8.23:** Makromodell der Wandscheibe basierend auf Einheitszellen

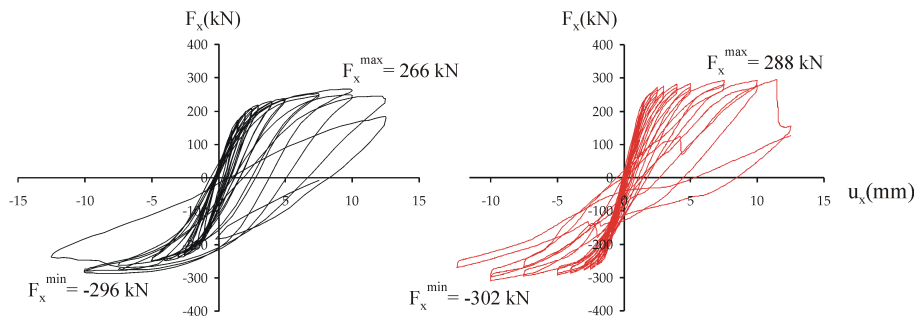


Abbildung 8.24: Last-Verschiebungskurve; Experiment (links), Numerik (rechts)

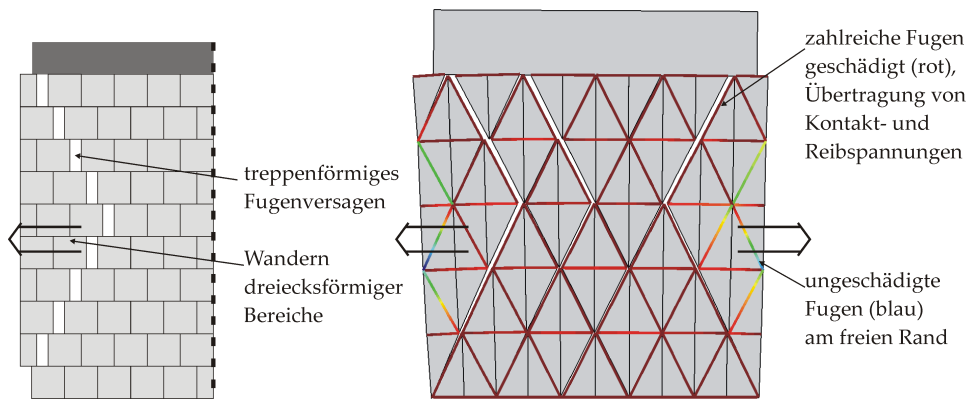
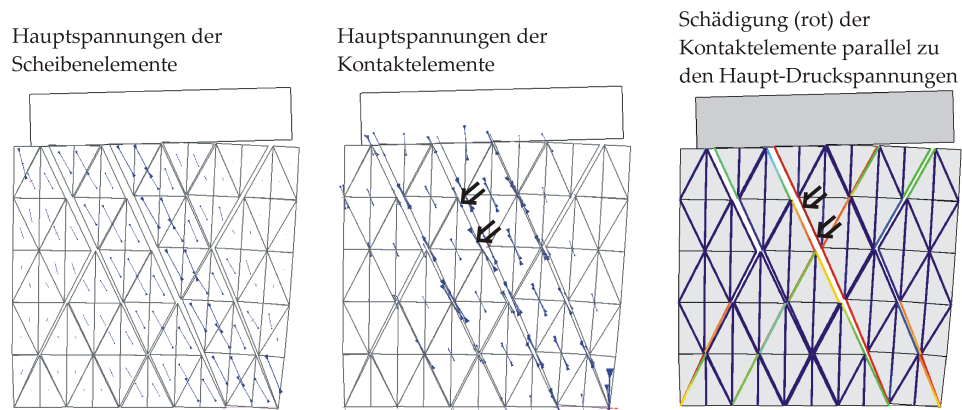


Abbildung 8.25: Zeitschritt A: Schädigung des Mörtels (Verformung 20-fach überhöht)

### 8.5.3 Abgleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse

Da die Materialmodelle die Ermüdung des Steins beim zyklischen Wandversuch nicht berücksichtigen, wurden die Festigkeiten von Tab. 8.2 um 10% abgemindert. Die Last-Verschiebungskurven von Abb. 8.24 zeigen, dass die wesentlichen mechanischen Effekte (Steifigkeit, Nichtlinearität, Entfestigung) vom numerischen Modell auch bei der zyklischen Belastung über eine lange Belastungsgeschichte zutreffend abgebildet werden können. Aufgrund der exzentrischen Lage von  $F_y$  driftet die Hysterese im Experiment und im numerischen Modell nach rechts ab. Bei positiven Verschiebungen werden im Vergleich zu den negativen Verschiebungen geringere Auflagerreaktionen erzielt. Nachfolgend werden die numerischen Ergebnisse an drei signifikanten Zeitschritten A, B und C ausgewertet (siehe Abb. 8.22).



**Abbildung 8.26:** Zeitschritt B: Hauptspannungen und Schädigung des Steins - Verformung 20-fach überhöht

#### Zeitschritt A:

Nach 14 Belastungszyklen mit geringen Verschiebungsamplituden haben sich im Modell noch keine signifikanten Steinrisse eingestellt. Es sind aber bereits fast alle Mörtelfugen geschädigt. Im geschädigten Zustand überträgt das 2-Phasen-Materialmodell von Abs. 7.1.2 lediglich Druck- und Schubspannungen mit einem Kontakt- und Reibmodell. Nach den 14 Lastzyklen sind die dreiecksförmigen Zonen der Wandscheibe aufgrund des treppenförmigen Fugenversagens nach außen gewandert (siehe Abb. 8.25). Im numerischen Modell wird dies durch die diagonalen Kontaktelemente abgebildet.

#### Zeitschritt B:

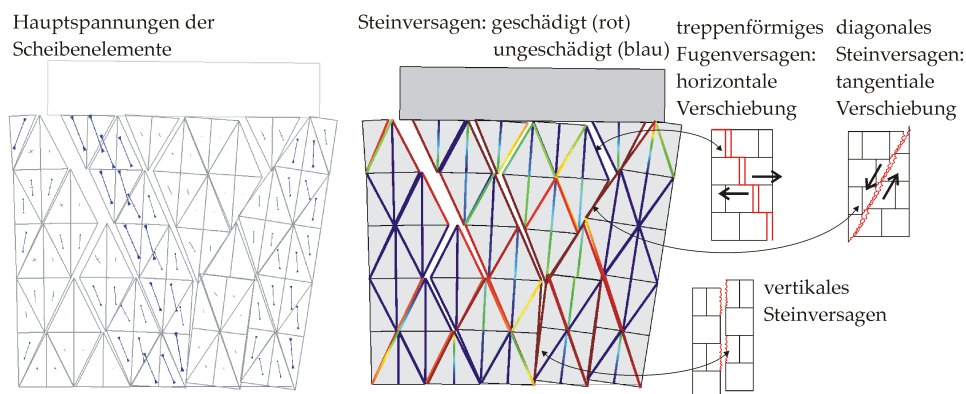
Bei einer Verschiebung von 7,5 mm stellen sich die ersten diagonalen Steinrisse ein. Makroskopische Zugspannungen sind aufgrund des vorherigen Fugenversagens bereits weitgehend abgebaut und die Schädigung des Steines wird durch diagonale Druckkräfte hervorgerufen. Die Schädigung stellt sich in den Kontaktelementen ein, welche parallel zu den Hauptdruckspannungen angeordnet sind (siehe Abb. 8.26). Die Schädigung des Steines wird überwiegend durch  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  (Stauchung parallel zum Kontaktelement) hervorgerufen, welches mit dem erweiterten diskreten Rissmodell von Abs. 8.1 zutreffend beschrieben wird. Übliche Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen (*traction-separation-law*) basieren lediglich auf der Rissöffnung  $[[\mathbf{u}]]$  und es fehlt damit die Komponente  $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$ .

#### Zeitschritt C:

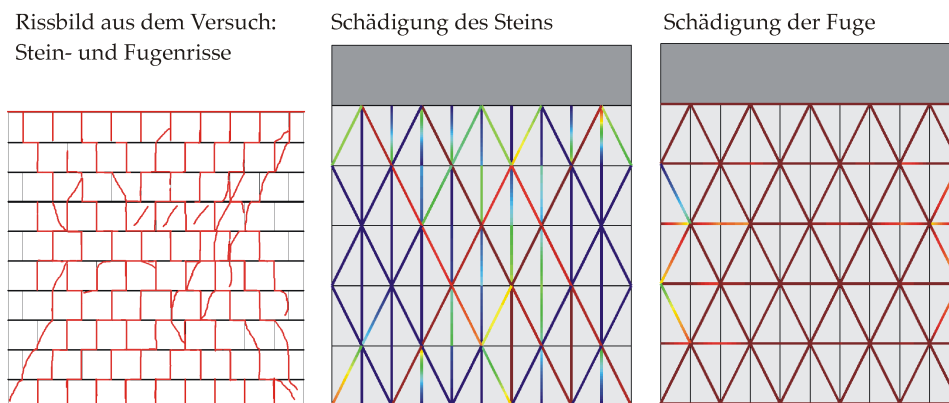
Am Ende der Berechnung haben sich zahlreiche diagonale und vertikale Steinrisse gebildet. Die Einheitszellen können mit dem diskreten Rissmo-



dell zahlreiche Diskontinuitäten im Verschiebungs- und Spannungsfeld abbilden (siehe Abb. 8.27). In dieser Darstellung sind die unterschiedlichen Versagensmoden des numerischen Modells mit den zugehörigen mechanischen Modellen für Fugen- und Steinversagen erläutert. Bei der geschädigten Wandscheibe sind die Schubkräfte weitgehend abgebaut. Im zerstörten Mauerwerksverband stellen sich vertikale Druckspannungen ein. Mit der numerischen Dämpfung von Abs. 5.4 konnte auch die Entfestigung numerisch stabil simuliert werden. Weitere Untersuchungen zur Robustheit des Algorithmus werden in Abs. 9.1.2 durchgeführt.



**Abbildung 8.27:** Zeitschritt C: Hauptspannungen und Schädigung des Steins - Verformung 20-fach überhöht



**Abbildung 8.28:** Zeitschritt C: Experimentelles Rissbild und Schädigung im Modell; geschädigte Kontaktelemente rot gekennzeichnet



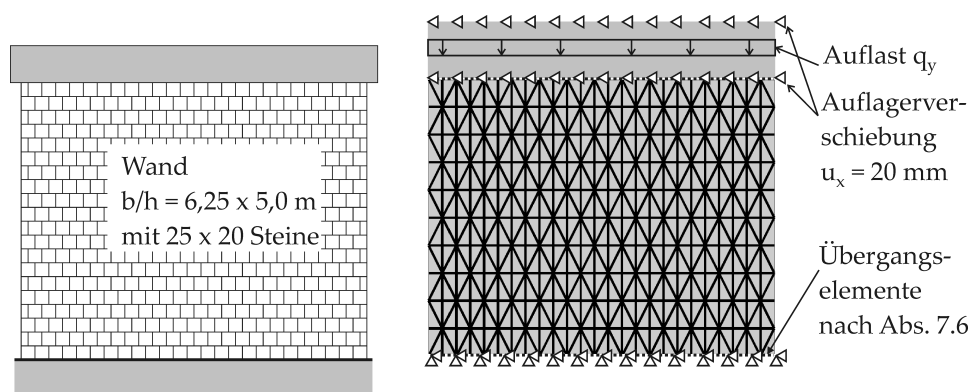
# Kapitel 9

## Numerische Untersuchungen

Das Simulationsmodell von Mauerwerk basierend auf Einheitszellen ist ein Makromodell, das für die Anwendung auf große Strukturen konzipiert ist. Anhand eines einfachen großformatigen Beispiels wird in Abs. 9.1 die Robustheit der Berechnungsmethode getestet. Gleichzeitig wird die Sensitivität des Berechnungsmodells auf Material- und Modellparameter untersucht. In Abs. 9.2 werden mit Vergleichsrechnungen auf der Mesoskala die Anwendungsgrenzen von diesem Makromodell aufgezeigt.

### 9.1 Robustheit des Makromodells bei einer großen Wandscheibe

Mit einer großen Schubwand bestehend aus  $25 \times 20$  Steinen wird die Robustheit und Effizienz des Makromodells basierend auf Einheitszellen aufgezeigt (siehe Abb. 9.1). Bei den Berechnungen wird die vertikale Last kon-



**Abbildung 9.1:** Geometrie der großen Wandscheibe (links) - numerisches Modell mit Einheitszellen (rechts)

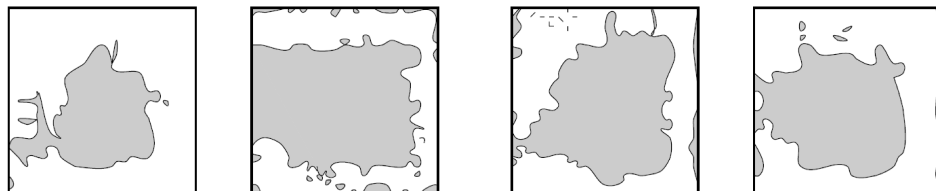
stant gehalten und die horizontale Verschiebung monoton gesteigert. Als Lösungsalgorithmus wird die pseudo-dynamische Analyse mit der adaptiven Zeitschrittweite gewählt (siehe Abs. 5.4.2). Die Anzahl der erforderlichen Zeitschritte wird als Maß für die Robustheit der Berechnungsmethode herangezogen. Die Sensitivität des numerischen Modells auf Material- und Modellparameter wird getrennt für Fugen- und Steinversagen untersucht. Da experimentelle Versuche aufgrund des Prüfstands auf kleine Wandscheiben begrenzt sind (siehe Abs. 10.1), wurde für diese numerische Untersuchungen ein frei gewähltes Beispiel gewählt. Validierungen des Berechnungsmodells anhand von experimentellen Ergebnissen wurden bereits in Abs. 7.5 und 8.5 für Stein- und Fugenversagen durchgeführt.

### 9.1.1 Einfluss der Materialparameter beim Fugenversagen

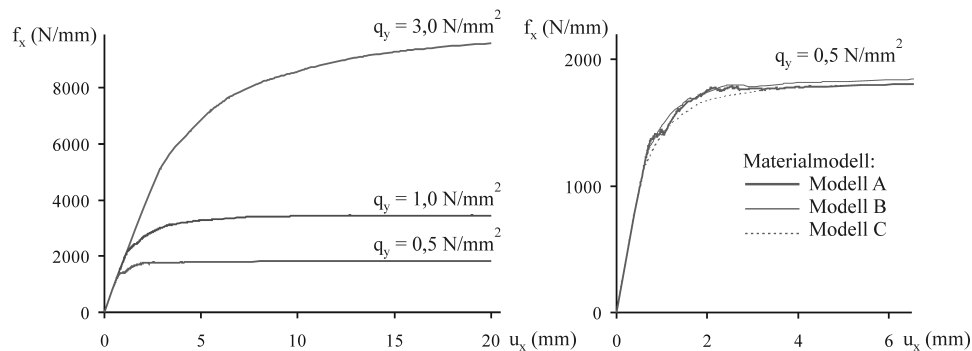
Die Materialparameter für das horizontale und treppenförmige Fugenversagen wurden in Abs. 7.3.1 und 7.4.2 mit numerischen Versuchen und dazugehörigen Homogenisierungsschritten hergeleitet. Dennoch ist die Bestimmung der Materialparameter für die Makroskala nicht eindeutig. Die Mikromodelle basieren auf Materialparametern, welche in [Bra05a] unter Laborbedingungen geprüft wurden. Beim Aufmauern von großen Wandscheiben werden oftmals Mörtelfugen von schlechter Qualität hergestellt, bei denen nur Teilflächen verklebt sind (siehe Abb. 9.2). Der Einfluss von Festigkeitsstreuungen wird mit folgenden drei Modellen abgeschätzt:

- Modell A: Schädigungsmodell mit unveränderter Festigkeit
- Modell B: Schädigungsmodell mit reduzierter Zugfestigkeit
- Modell C: Kontakt- und Reibmodell ohne Zugfestigkeit

Die Materialparameter und das dazugehörige Konvergenzverhalten bei der Schubwand sind in Tab. 9.1 zusammengestellt. Bei Modell B wurde mit der reduzierten Festigkeit gleichzeitig die Bruchenergie gegenüber Modell A verdoppelt, um die Entfestigung zu dämpfen.



**Abbildung 9.2:** Adhäsive Fläche in den Lagerfugen bei 4 Prüfkörpern nach [Plu92]



**Abbildung 9.3:** Last-Verschiebungskurve beim Fugenversagen; horizontale Auflagerkräfte  $f_x$  pro mm Wanddicke; Einfluss der vertikalen Auflast für Modell A (links) und der Materialparameter (rechts)

**Tabelle 9.1:** Parameterstudie zum Fugenversagen bei der Schubwand von Abb. 9.1

		Konvergenzverhalten (Anzahl der Zeitschritte) bei Auflastniveau der Wand $q_y$		
	Materialparameter	0,5 N/mm <sup>2</sup>	1,0 N/mm <sup>2</sup>	3,0 N/mm <sup>2</sup>
Modell A	$\beta_t = 0,35$ N/mm <sup>2</sup>	1.930	1.850	1.540
Modell B	$\beta_t = 0,17$ N/mm <sup>2</sup>	250	350	280
Modell C	$\beta_t = 0,00$ N/mm <sup>2</sup>	450	400	360
		übrige Materialparameter siehe Tab. 7.2 und 7.3		

Bei der Last-Verschiebungskurve der großen Schubwand zeigt sich, dass die unterschiedlichen Materialparameter keinen signifikanten Einfluss auf das Tragverhalten der großen Struktur haben. In Abb. 9.3 sind die horizontalen Auflagerkräfte für drei verschiedene Auflastniveaus dargestellt. Lediglich bei der niedrigsten Auflast von  $q_y = 0,5$  N/mm<sup>2</sup> gibt es geringfügige Abweichungen aufgrund der unterschiedlichen Materialparameter (siehe Abb. 9.3, rechts).

Mit den Einheitszellen konnte ein sehr robustes Makromodell für das Fugenversagen erzielt werden, welches wenig sensitiv auf Materialparameter ist. Entscheidend für die Schubtragfähigkeit der Wand sind das vertikale Auflastniveau und die Kontaktmechanik sowie die Orientierung der Fugenrisse. Diese geometrischen Größen, die von der Struktur des Mauerwerksverbands vorgegeben sind, können sehr gut von der Einheitszelle

abgebildet werden. Die Parameter von Modell B mit reduzierter Zugfestigkeit und moderater Bruchenergie erzielten das beste Konvergenzverhalten und werden für die weiteren Berechnungen angewendet.

#### Vereinfachtes Bemessungskonzept für das Fugenversagen:

In Abb. 9.4 sind die Verformung und Lastabtragung der Schubwand aufgezeigt. Aus dem Verformungsbild ist ersichtlich, dass einzelne Teile der Wandscheiben kippen und dass das Öffnen der horizontalen und diagonalen Kontaktelemente dominant ist. Die Druckstreben orientieren sich weitgehend parallel zu den diagonalen Kontaktelementen, die das treppenförmige Fugenversagen abbilden. In Tab. 9.2 ist das Verhältnis von horizontaler Schubkraft und vertikaler Kraft für verschiedene Wände und Auflastniveaus aufgelistet. Das konstante Kraftverhältnis von  $f_x/f_y \approx 0,5$  korrespondiert zur Orientierung der treppenförmigen Fuge. Bei einem quadratischen Steinformat beträgt das Verhältnis aus Überbindemaß und Steinhöhe  $\ddot{u}/h = 0,5$ . Roca [Roc04] gibt ein vereinfachtes Bemessungskonzept für das Fugenversagen von Schubwänden an, bei dem die Druckstrebenneigung durch einen Reibkoeffizient begrenzt ist. Offensichtlich ist beim quadratischen Steinformat nicht das tangentielle Reibversagen sondern das Öffnen in den treppenförmigen Mörtelfugen maßgebend. Daher wird für gedrungene Wandscheiben folgende Abschätzung der Schubkraft vorgeschlagen:

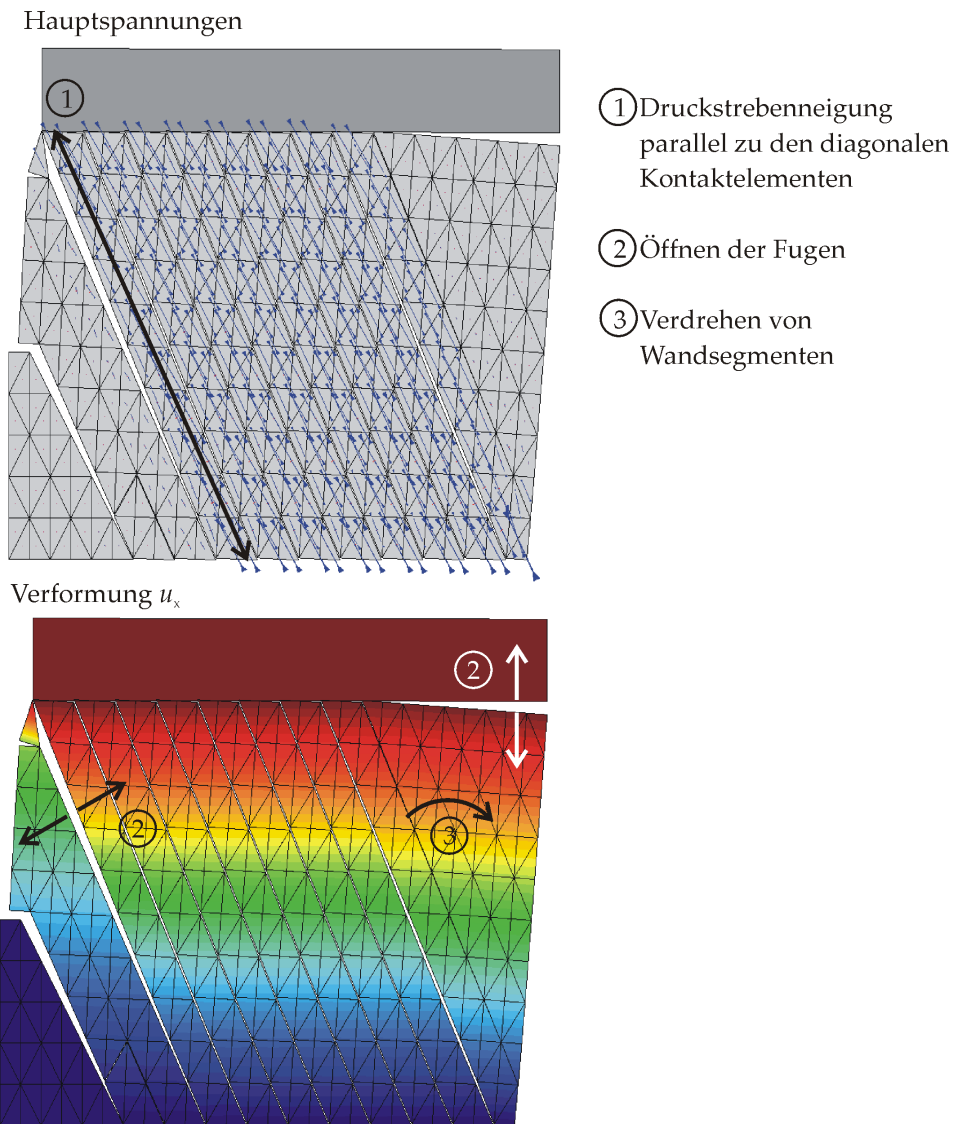
$$f_x \leq \begin{cases} \mu f_y & \text{Reibversagen} \\ \frac{\ddot{u}}{h} f_y = \frac{l}{2h} f_y & \text{treppenförmiges Öffnen der Fugen} \end{cases} \quad (9.1)$$

mit dem Überbindemaß  $\ddot{u}$ , der Steinhöhe  $h$  und Steinlänge  $l$

Diese einfache Abschätzung ist identisch mit dem Traglastmodell von MANN/MÜLLER in (7.21). Dieser Versagensmechanismus wird bei Steinformaten mit geringer Überbindelänge maßgebend.

**Tabelle 9.2:** Verhältnis von Schubkraft und Auflastniveau beim Fugenversagen

Wand	Kräfte pro mm Wanddicke			
	$q_y$ N/mm <sup>2</sup>	$f_x$ N/mm	$f_y$ N/mm	$f_x/f_y$
siehe Abb. 9.1	0,5	1833	3656	0,50
	1,0	3470	6781	0,51
	3,0	9590	18750	0,49
siehe Abb. 7.21	1,0	1405	2606	0,54



**Abbildung 9.4:** Tragverhalten der Wandscheibe ( $u_x = 20$  mm, Verformung 20-fach überhöht, Materialmodell B, Last  $q_y = 1,0$  N/mm<sup>2</sup>)

### 9.1.2 Einfluss der Modell- und Materialparameter beim Steinversagen

Beim Steinversagen konnten die Versagenskräfte mit dem diagonalen Druckversuch sehr gut bestimmt, eine Bruchenergie jedoch nur abgeschätzt werden (siehe Abs. 8.3.3). Bei folgender Parameterstudie werden der Einfluss dieses Materialparameters sowie die Effekte aus der numerischen Dämpfung untersucht:

- Modell D: moderate Bruchenergie und numerische Dämpfung
- Modell E: reduzierte numerische Dämpfung
- Modell F: reduzierte Bruchenergie
- Modell G: erhöhte Bruchenergie

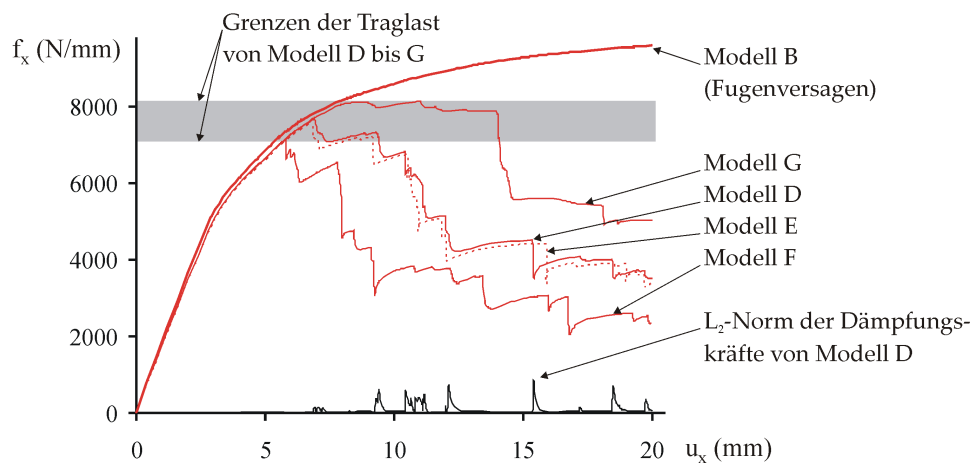
Die Parameterstudie wurde bei der Schubwand von Abb. 9.1 bei einem Auflastniveau von  $q_y = 3,0 \text{ N/mm}^2$  durchgeführt. In Tab. 9.3 und in Abb. 9.5 sind die Modellparameter, das Konvergenzverhalten und das Tragverhalten der Schubwand gegenübergestellt. Vergleicht man Modell D und E zeigt sich, dass die numerische Dämpfung unabhängig vom Dämpfungskoeffizient  $\eta$  keinen signifikanten Einfluss auf die Last-Verschiebungs-Kurve hat. Dagegen haben die unterschiedlichen Bruchenergien von Modell D, F und G auch einen Einfluss auf das Tragverhalten der Wand. Die Entfestigung der Struktur korrespondiert stark mit der gewählten Bruchenergie des Materialmodells. Dagegen hat die Bruchenergie nur einen geringen Einfluss auf die Traglast. Für die Simulation von diesem Mauerwerkstyp werden die Parameter von Modell D empfohlen, die sehr gut mit den experimentellen Wandversuchen validiert werden konnten (siehe Abs. 8.5).

**Tabelle 9.3:** Parameterstudie zum Steinversagen bei der Schubwand von Abb. 9.1

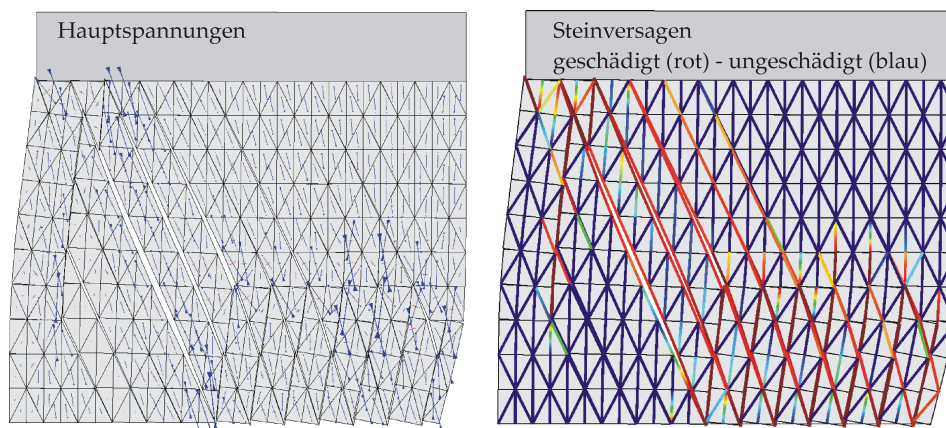
	Modellparameter			Konvergenz (Anzahl der Zeitschritte)
	Bruchenergie $G_f$ (N/mm)	Dämpfung $\eta$ (Ns/mm <sup>4</sup> )	Traglast $f_x$ (N/mm)	
Modell D	0,55	1,0e-6	7661	719
Modell E	0,55	1,0e-7	7551	1109
Modell F	0,22	1,0e-6	7143	1437
Modell G	1,10	1,0e-6	8156	460

Weitere Materialparameter zum Steinversagen siehe Tab. 8.2  
Materialparameter zum Fugenversagen von Modell B siehe Tab. 9.2





**Abbildung 9.5:** Last-Verschiebungskurve beim Steinversagen; horizontale Auflagerkräfte pro mm Wanddicke



**Abbildung 9.6:** Wandscheibe Modell D (Verformung 20-fach überhöht)

Die Visualisierung der Hauptspannungen und der Schädigung des Steins zeigen zufriedenstellende Ergebnisse (siehe Abb. 9.6). Zugspannungen werden abgebaut und die Schubkräfte über Druckstreben abgetragen. Die Schädigung des Steins konzentriert sich an den Ecken der Wandscheibe. Durch die Verwendung eines diskreten Rissmodells können makroskopische Risse auch mit einer groben Vernetzung sehr gut lokalisiert werden.

## 9.2 Anwendungsgrenzen der Makroskala

Die Simulation mit Einheitszellen ist für die Anwendung auf große Strukturen konzipiert, bei denen die Lastabtragung mit homogenisierten Größen zutreffend beschrieben werden kann und lokale Effekte wie z.B. Spannungskonzentrationen von untergeordneter Bedeutung sind. Um die Anwendungsgrenzen des Makromodells abzuschätzen, werden geschosshohe Wände mit unterschiedlicher Breite untersucht. Die Abmessungen der Wände sind in Abb. 9.7 aufgezeigt. Die Wände werden mit einer konstanten Auflast von  $q_y = 1,0 \text{ N/mm}^2$  belastet und die horizontale Verschiebung bis 10 mm monoton gesteigert. Als Referenzlösung für die Makroskala dienen Vergleichsrechnungen auf der Mesoskala nach Abs. 3.2.2. In allen Berechnungen wird nur das Fugenversagen abgebildet und der Stein als linear-elastisch angenommen.

Bei der Last-Verschiebungskurve zeigen alle drei Wandscheiben eine gute Übereinstimmung zwischen der Makro- und Mesoskala (siehe Abb. 9.8). Die innere Lastabtragung und die Spannungen müssen für die einzelnen Wandscheiben differenzierter betrachtet werden (siehe Abb. 9.9): Bei der schlanken Wandscheibe bildet die Mesoskala Spannungskonzentrationen an den Lasteinleitungspunkten ab, die von der Makroskala nicht mehr aufgelöst werden. Dagegen gibt es bei den gedrunenen Wandscheiben eine gute Übereinstimmung zwischen Meso- und Makroskala. Zusammen mit den Validierungsbeispielen in Abs. 7.5 und 8.5 lässt sich eine Mindestgröße von ca.  $8 \times 8$  Steinen für die Wandscheiben abschätzen (entspricht  $4 \times 2$  Einheitszellen). Bei kleinen oder schlanken Wandscheiben sollte daher das Tragverhalten mit der detaillierteren Mesoskala untersucht und die Anwendung der Makroskala auf große Wandscheiben begrenzt werden.

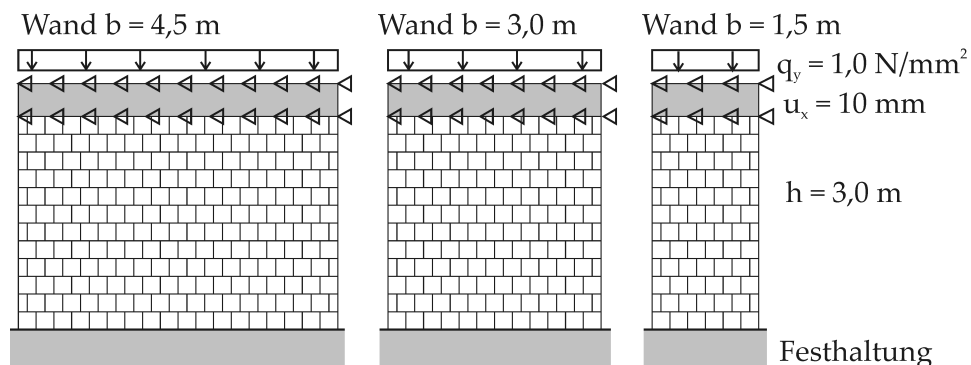


Abbildung 9.7: Geometrie und Belastung der Wände

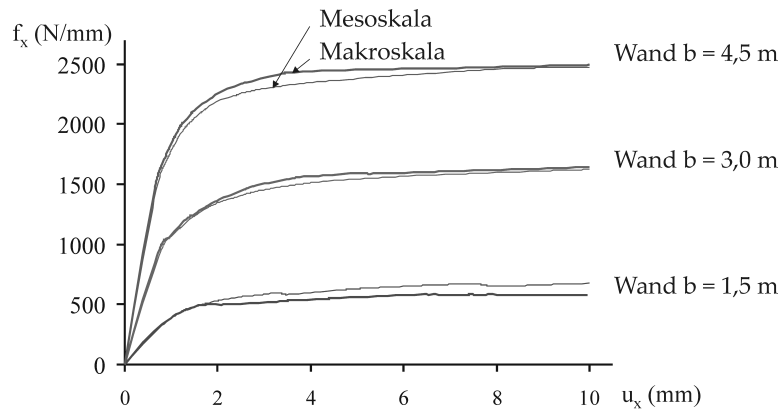


Abbildung 9.8: Wände von Abb. 9.7, Last-Verschiebungskurven, Auflagerkräfte pro mm Wandstärke

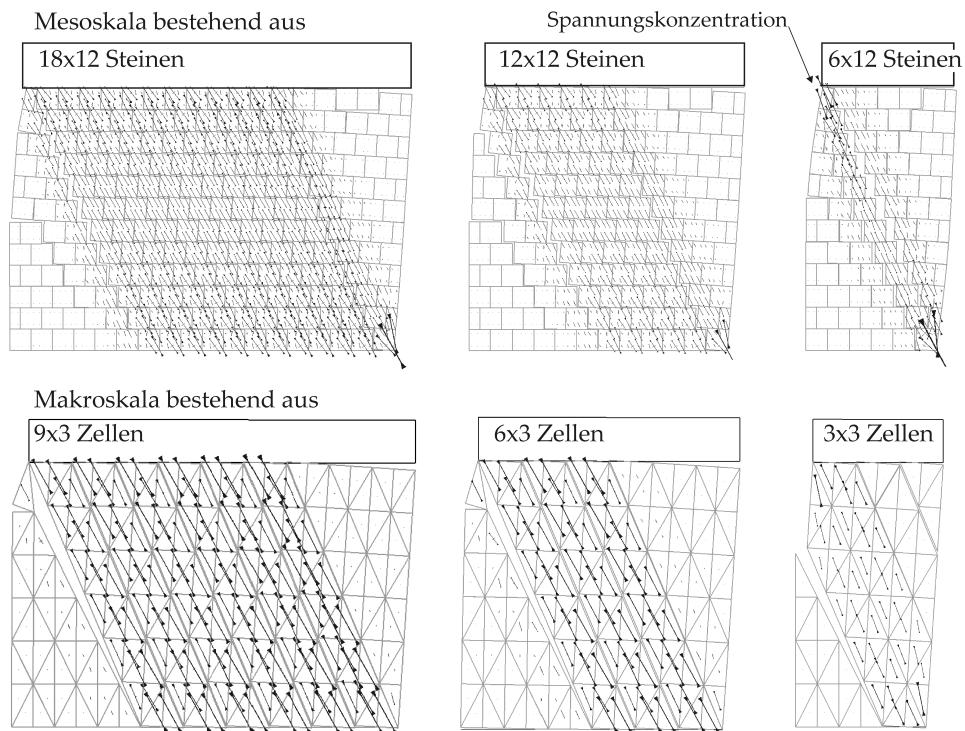


Abbildung 9.9: Wände von Abb. 9.7, Hauptspannungen bei  $u_x = 10$  mm, Verformung 20-fach überhöht



# Kapitel 10

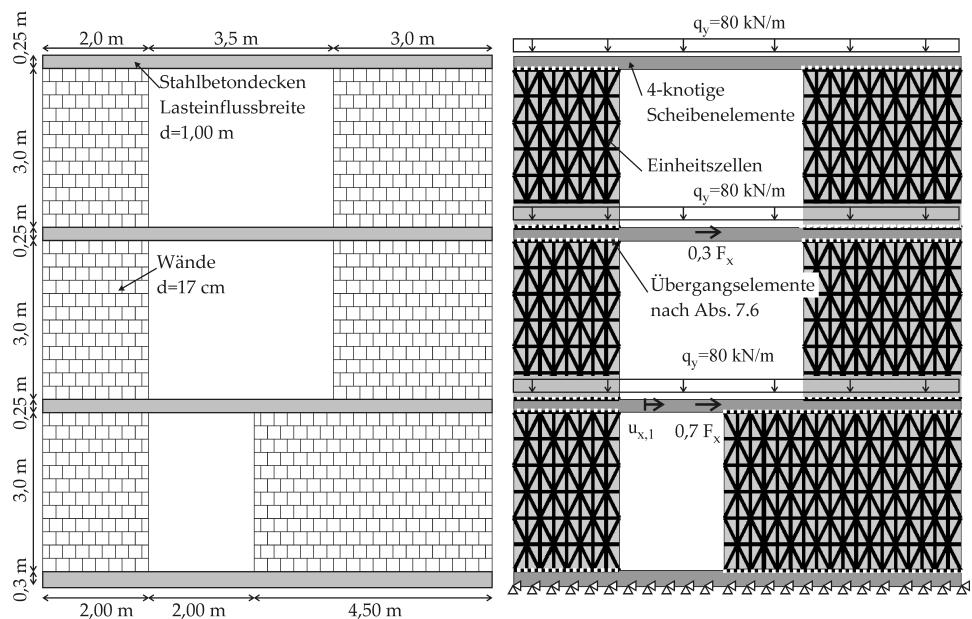
## Anwendungsbeispiel: Gebäudemodell

In diesem Kapitel wird das Berechnungsmodell auf ein 3-geschossiges Gebäude angewendet. Bei diesem großformatigen Beispiel werden die Robustheit der Berechnungsmethode und die Verträglichkeit mit anderen Bauteilen, wie z.B. Stahlbetondecken, aufgezeigt.

### 10.1 Geometrie, Modell und Belastung des Gebäudes

Am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München ist die Prüfeinrichtung auf geschosshohe Wandscheiben begrenzt. Auch in der Literatur gibt es nur wenige experimentelle Versuche, bei denen ganze Gebäude experimentell geprüft wurden. An der Universität Athen wurden 2-geschossige Gebäude an einem Rütteltisch dynamisch geprüft (siehe [ESE04]). Aufgrund der Prüfeinrichtung wurde ein sehr kleines Gebäude gewählt, welches in Belastungsrichtung mit einer Wandscheibe von 1,5 m × 2,5 m pro Stockwerk ausgesteift war. Ähnlich kleine Gebäudemodelle wurden in Ispra [AC08] geprüft. Schubversuche an Gebäuden mit großen Wandscheiben wurden 1983 in Salvitelle durchgeführt. Allerdings wurden historische Gebäude aus Bruchsteinmauerwerk geprüft, welche nach einem Erdbeben teilweise beschädigt waren und nach dem Versuch abgerissen wurden (siehe [ABTT83]). Das Berechnungsmodell in dieser Arbeit ist für Mauerwerk aus künstlichen Steinen entwickelt. Eine Anpassung der Berechnungsmethode auf Bruchsteinmauerwerk ist ohne fundierte Kleinkörperversuche nicht möglich.

Daher wird für das Anwendungsbeispiel ein fiktives Gebäudemodell bestehend aus großen Wandscheiben gewählt, für das leider keine experimentellen Ergebnisse zur Verfügung stehen. Die Berechnungsergebnisse können



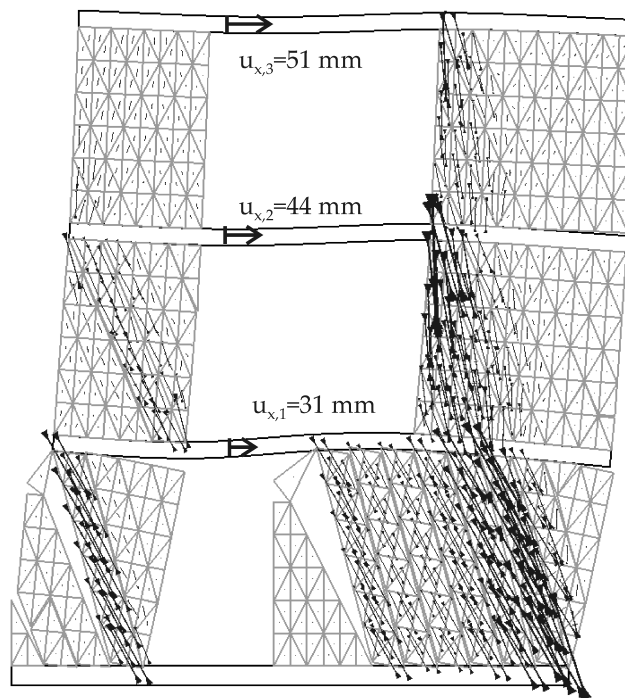
**Abbildung 10.1:** Geometrie und Modellierung des Gebäudemodells

daher nur auf Plausibilität geprüft werden. Eine Validierung der Berechnungsmethode wurde bereits in Abs. 7.5 und 8.5 anhand von einzelnen Wandscheiben durchgeführt.

In Abb. 10.1 sind der Querschnitt des 3-geschossigen Gebäudes und das dazugehörige numerische Modell dargestellt. Das Eigengewicht der Wandscheiben und die vertikalen Deckenlasten bleiben während der Belastungsgeschichte konstant, die horizontalen Kräfte werden monoton gesteigert. Die horizontalen Kräfte wurden auf die unteren beiden Geschossdecken verteilt, so dass ein Versagen im Erdgeschoss eintritt. Schwerpunkt der FE-Berechnung ist der Lastabtrag der gemauerten Wände und die Interaktion mit den angrenzenden Bauteilen. Auf ein realistisches Modell der Stahlbetondecken (grobe Vernetzung, linear-elastisches Materialmodell) wird weniger Wert gelegt. Für die Stahlbetondecke wird bei der Lastabtragung eine mitwirkende Breite von 1 m angenommen. Die gemauerten Wände haben eine Dicke von 0,17 m.

## 10.2 Statische Analyse und Lastabtragung

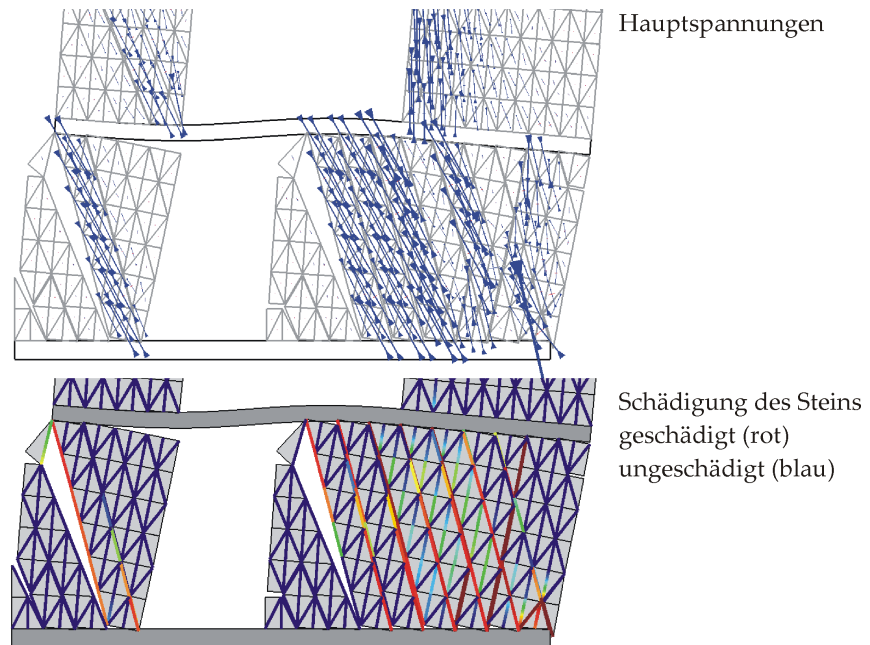
Es wurde eine Berechnung mit Fugenversagen (Modell A) und eine weitere Berechnung mit Fugen- und Steinversagen (Modell B) durchgeführt. In



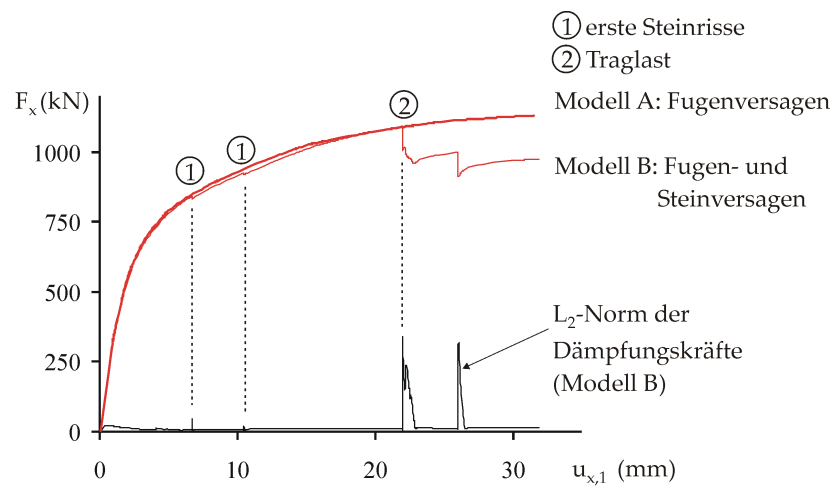
**Abbildung 10.2:** Hauptspannungen beim Fugenversagen (Modell A); Verformung 20-fach überhöht

Abb. 10.2 und 10.3 ist die makroskopische Lastabtragung am Ende der Belastungsgeschichte für die jeweiligen Berechnungsmodelle visualisiert. In Modell A werden Zugspannungen durch Fugenversagen abgebaut und die Wandscheiben tragen die Schublasten über diagonale Druckstreben ab. In Modell B treten Steinrisse in den hochbelasteten Wänden im Erdgeschoss auf. Die Last-Verschiebungskurve zeigt, dass das Steinversagen zu einem weiteren Abbau der horizontalen Schubkräfte führt (siehe Abb. 10.4).

Auch in diesem Beispiel konnte die Berechnung von Mauerwerk basierend auf Einheitszellen robust und effizient angewendet werden. Die Diskretisierung mit ca. 2.900 Knoten ist bei heutiger Computerleistung kein begrenzender Faktor für die Anwendung. Die Last-Verschiebungskurve zeigt bei  $u_{x,1} \approx 7$  mm und 11 mm kurze entfestigende Zeitschritte aufgrund erster Steinrisse (siehe Abb. 10.4). Die Traglast wird im numerischen Modell erst bei  $u_{x,1} \approx 22$  mm mit höheren Horizontalkräften erreicht. Um diese kurzen instabilen Zeitschritte überwinden zu können und die Berechnung nicht vorzeitig aufgrund von Konvergenzproblemen abbrechen zu müssen, wird eine globale Stabilisierung mit einer numerischen Dämpfung oder eine gleichwertige dynamische Analyse empfohlen.



**Abbildung 10.3:** Lastabtrag von Modell B (Ausschnitt Erdgeschoss); Verformung 20-fach überhöht



**Abbildung 10.4:** Last-Verschiebungskurve des Gebäudemodells



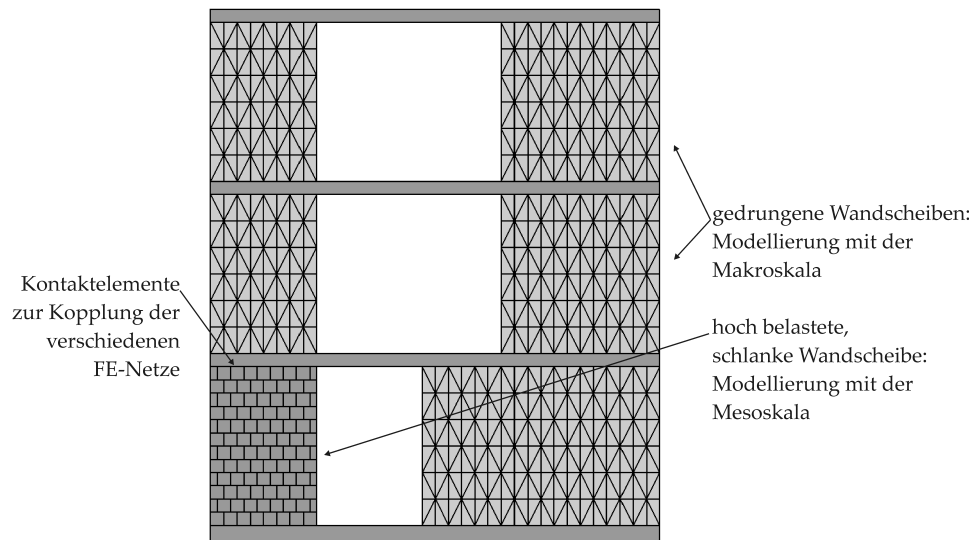
### 10.3 Kombination von Meso- und Makromodell

Numerische Untersuchungen in Abs. 9.2 zeigten, dass die Anwendung des Makromodells auf großformatige, gedrungene Wandscheiben beschränkt werden muss. Auch bei dem Gebäudemodell von Abs. 10.1 sind einzelne schlanke Wandscheiben vorhanden, bei denen die Anwendung des Makromodells in Frage gestellt werden darf. Zu diesem Zweck werden Meso- und Makromodelle kombiniert, um kleinformatische Wandscheiben innerhalb eines Gebäudemodells genauer zu modellieren:

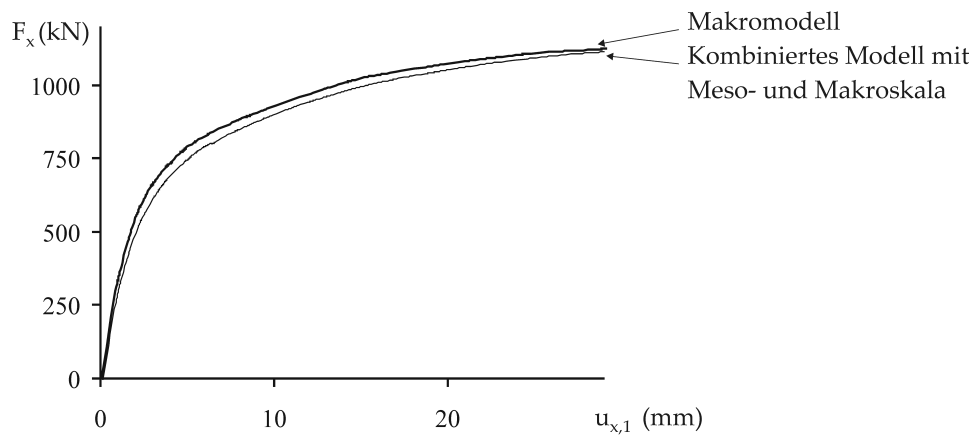
- schlanke Wandscheibe im EG: Simulation auf der Mesoskala
- übrige Wandscheiben: effiziente Simulation auf der Makroskala

Mit diesem Ansatz soll die Genauigkeit der detaillierten Analyse auf der Mesoskala mit der numerischen Effizienz des Makromodells kombiniert werden. Das numerische Modell ist in Abb. 10.5 dargestellt. Beim Gesamtmodell müssen im Übergangsbereich von den Meso- und Makromodellen FE-Netze mit verschiedenen Diskretisierungen gekoppelt werden. Entlang dieser Linie werden Kontaktelemente mit nicht koinzidenten Knoten nach Abs. 7.6.2 verwendet. Die Kombination von Meso- und Makromodellen zu einem Gesamtmodell wurde zunächst nur für das Fugenversagen umgesetzt und der Stein linear-elastisch modelliert. Die Erweiterung der Mesoskala auf das Steinversagen ist in Abs. 11.6 aufgezeigt.

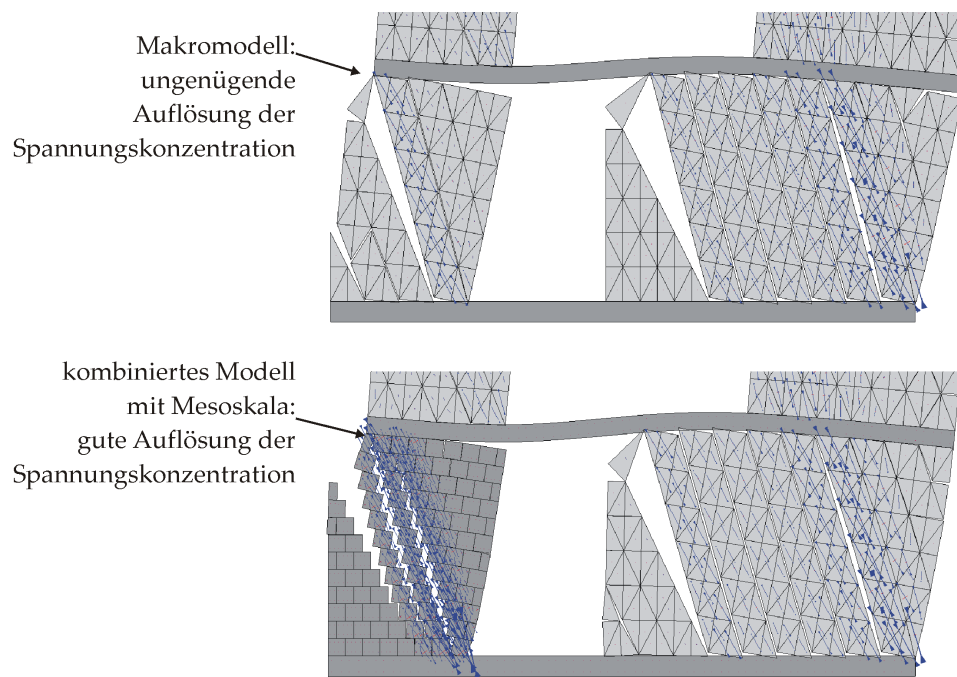
Mit dem kombinierten Berechnungsmodell konnte die vorgegebene Belastungsgeschichte robust simuliert werden. Im Vergleich zum reinen Makromodell erhöhte sich der numerische Aufwand von 550 auf 960 Zeitschritte. Die Anzahl der erforderlichen FE-Knoten erhöhte sich nur geringfügig von 2.921 auf 3.189 Knoten. Die Last-Verschiebungskurve zeigt eine große Übereinstimmung zwischen dem kombinierten Modell und dem reinen Makromodell (siehe Abb. 10.6). Anhand der Hauptspannungen wird jedoch deutlich, dass von der Mesoskala die Spannungskonzentrationen bei der schlanke Wandscheibe wesentlich besser im Vergleich zum Makromodell aufgelöst werden. Die Erweiterung von kombinierten Berechnungsmodellen auf das Steinversagen stellt eine sehr erfolgsversprechende Methode dar, mit der große Gebäude effizient simuliert und wichtige Teilbereiche der Struktur mit hoher Genauigkeit modelliert werden können.



**Abbildung 10.5:** Kombinierte Simulation des Gebäudemodells auf Meso- und Makroskala; Belastung siehe Abb. 10.1



**Abbildung 10.6:** Last-Verschiebungs-Kurve für das Fugenversagen



**Abbildung 10.7:** Visualisierung der Hauptspannungen beim Fugenversagen; Ausschnitt Erdgeschoss



# Kapitel 11

## Kalksandstein mit rechteckigem Steinformat

In diesem Kapitel wird die Berechnungsmethode auf den rechteckigen Kalksandstein (8DF-Stein) angewendet und die Ergebnisse mit dem quadratischen Stein (4DF-Stein) verglichen. Beide Steinsorten bestehen aus dem gleichen Steinmaterial und werden in Dünnbettmörtel aufgemauert.

Um die Berechnungsmethode auf das neue Steinformat anwenden zu können, sind im Wesentlichen einfache geometrische Anpassungen bei der Vernetzung der Einheitszelle erforderlich (siehe Abb. 11.1). Die Elementformulierung und die Schädigungsmodelle für die konstitutiven Gesetze bleiben unverändert. Lediglich beim diagonalen Steinversagen wird das Kontakt- und Reibmodell für den gerissenen Zustand um ein Dilatanzmodell erweitert. Mit dieser Formulierung konnte das Makromodell mit dem Wandversuch sehr gut validiert werden.

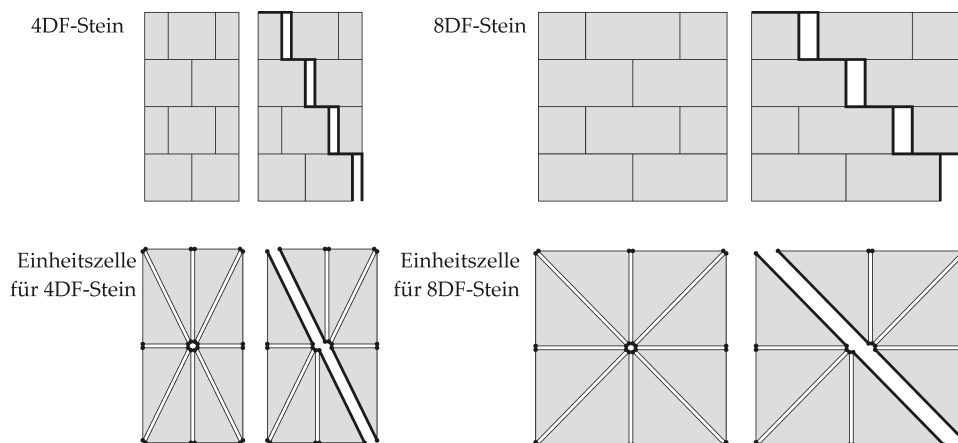


Abbildung 11.1: Anpassung der Einheitszelle an das Steinformat

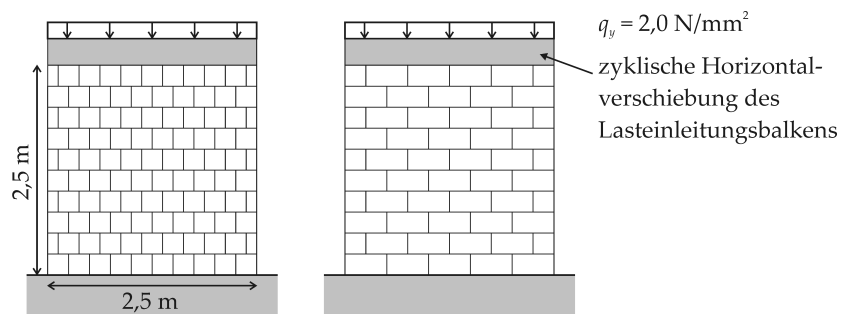


Abbildung 11.2: Wandversuche mit 4DF-Stein (links) und 8DF-Stein (rechts)

## 11.1 Mechanik der Schubwände

Um den Einfluss des Steinformats zu untersuchen, wurden zwei Wände aus 4DF-Steinen bzw. 8DF-Steinen experimentell geprüft [ZS11]. Die baugleichen Wände wurden statisch-zyklisch mit einer vertikalen Auflast von  $q_y = 2,0 \text{ N/mm}^2$  belastet (siehe Abb. 11.2). Während beim 4DF-Stein über viele Lastzyklen das Fugenversagen dominierte (siehe Abs. 8.5), zeigte sich beim 8DF-Stein vorrangig ein diagonales Steinversagen. Mit Hilfe des optischen Messsystems konnten der Ablauf, die Geometrie und die Mechanik des Risswachstums sehr genau ausgewertet werden (siehe Abb. 11.3). Die diagonalen Steinrisse beginnen an den Spannungskonzentrationen der vertikalen Stoßfuge. Aus der Anordnung der vertikalen Stoßfugen im Mauerwerksverband ergibt sich ein  $45^\circ$ -geneigtes, diagonales Scherband. Obwohl sich dieses Scherband bereits nach den ersten Lastzyklen zeigt, konnte die Wand auch im gerissenen Zustand stabil weiter geprüft werden.

Bei einer genaueren Auflösung des Rissbilds konnte eine unterschiedliche Orientierung der lokalen Steinrisse und des makroskopischen Scherbandes identifiziert werden: die diagonalen Steinrisse sind geringfügig steiler als das  $45^\circ$ -geneigte Scherband (siehe Abb. 11.4). Auch bei den numerischen Untersuchungen in Abs. 11.2 ergibt sich eine ca.  $55^\circ$ -orientierte Hauptspannung. Da die lokalen Steinrisse steiler sind als das makroskopische Scherband, können auch im gerissenen Zustand diagonale Druckkräfte abgetragen werden (siehe Abb. 11.4, rechts). Die Schubwand versagte erst nach weiteren Lastzyklen mit größeren Verschiebungen. Im Versagenszustand kommt es zu einer Vielzahl an Steinrisse, bei dem das gesamte Gefüge der Wand zerrüttet ist (siehe Abb. 11.5).

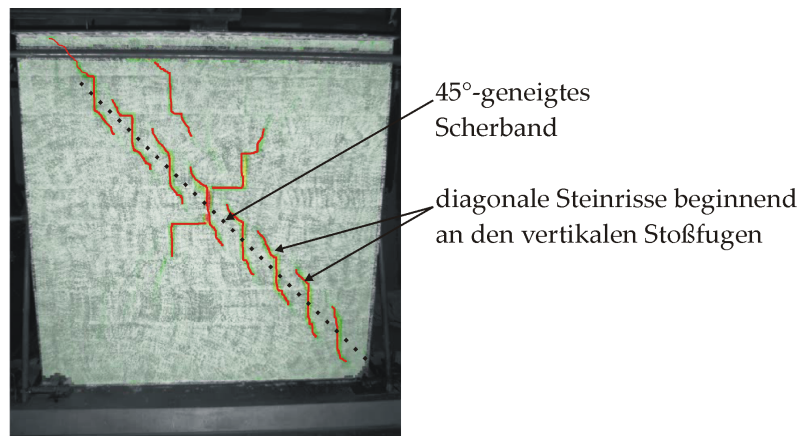
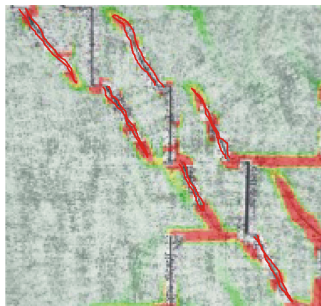


Abbildung 11.3: Wandversuch mit 8DF-Steinen nach [ZS11]; Visualisierung des Rissbilds mit optischem Messsystem

Rissbild Versuch  
(optisches Messsystem)



Schematische Lastabtragung

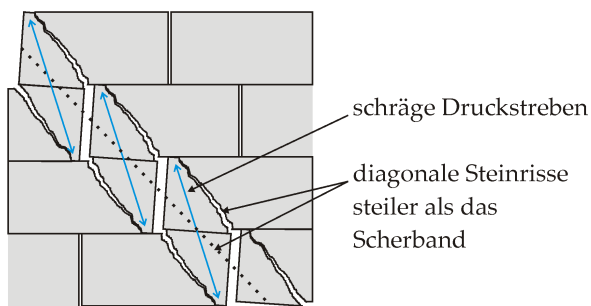


Abbildung 11.4: Wandversuch mit 8DF-Steinen nach [ZS11]; Detail Rissbild

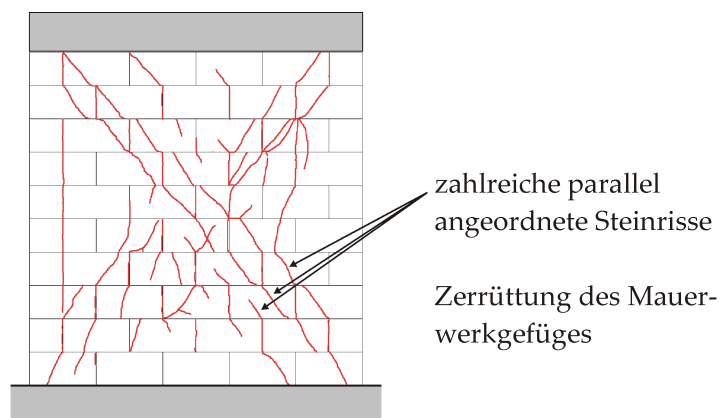
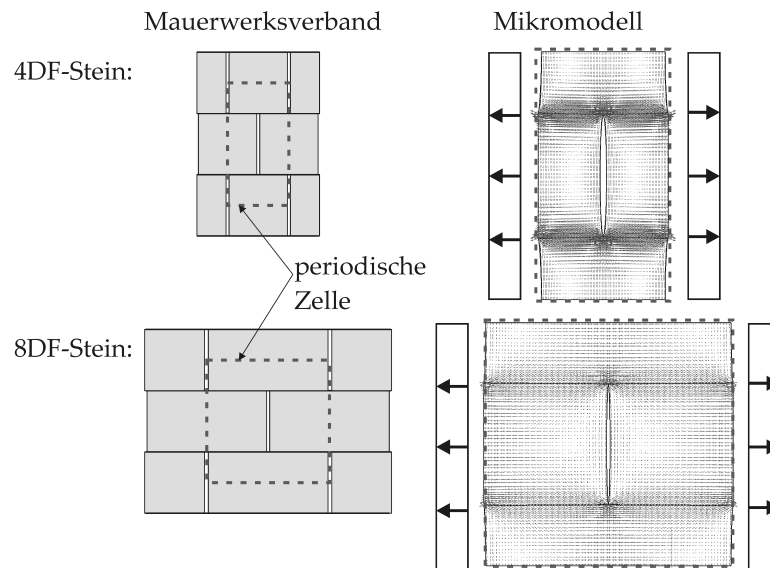


Abbildung 11.5: Rissbild der Wand im Versagenszustand nach [ZS11]



**Abbildung 11.6:** Definition der periodischen Zelle für 8DF- und 4DF-Stein, Homogenisierung der elastischen Eigenschaften des Kontinuums

## 11.2 Homogenisierung

Grundsätzlich werden beim 8DF-Stein die gleichen Homogenisierungsschritte angewendet wie beim 4DF-Stein. Das Verfahren ist im Anhang A zusammengefasst. Abgesehen vom Dilatanzmodell von Abs. 11.3 werden auf der Makroskala für beide Steinformate die gleichen konstitutiven Gesetze mit jeweils angepassten Materialparametern verwendet.

### Homogenisierung des Kontinuums:

In Abb. 11.6 sind die Mikromodelle für die Bestimmung des orthotropen Elastizitätsmodells der Makroskala gezeigt. Da beim 8DF-Stein der Abstand der unvermörtelten Stoßfugen im Vergleich zum 4DF-Stein verdoppelt ist, kommt es zu geringeren Störungen bei den Spannungstrajektorien. Diese Struktureigenschaft spiegelt sich auch in höheren Steifigkeiten bei der Makroskala wider (siehe Tab. 11.1).

### Homogenisierung des Fugenversagens:

Beim Fugenversagen ändert sich mit dem rechteckigen Steinformat auch die Orientierung der treppenförmigen Grenzschicht. Die Ausrichtung des diagonalen Kontaktelements innerhalb der Einheitszelle an die Orientierung des treppenförmigen Risses ist essentiell (siehe Abb. 11.1). Die Anpassung der Materialparameter für das Fugenversagen ist von untergeordneter Bedeutung (siehe Tab. 11.2).



**Tabelle 11.1:** Elastizitätsmodell der Makroskala abhängig vom Steinformat

	4DF	8DF	
$E_x =$	2.130	4.700	N/mm <sup>2</sup>
$E_y =$	10.000	10.000	N/mm <sup>2</sup>
$G_{xy} =$	2.760	3.620	N/mm <sup>2</sup>

**Tabelle 11.2:** Fugenversagen der Makroskala abhängig vom Steinformat

	4DF	8DF	
Materialparameter des Schädigungsmodells			
$p_{\bar{x},A} =$	60	150	N/mm <sup>3</sup>
$p_{\bar{y},A} =$	200	300	N/mm <sup>3</sup>
$\beta_t =$	0,175	0,175	N/mm <sup>2</sup>
$\beta_c =$	1,00	1,00	N/mm <sup>2</sup>
$G_f =$	0,010	0,010	N/mm
Materialparameter des Reibmodells für beide Steinformate siehe Tab. 7.2			

**Homogenisierung des vertikalen Steinversagens:**

Beim vertikalen Steinversagen wird für beide Steinformate angenommen, dass die Schädigung in der Mitte des Steins beginnt. Das Steinversagen wird auf der Makroskala mit dem Algorithmus 8.2 beschrieben. Für den 8DF-Stein müssen bei den Materialparametern von Tab. 8.2 lediglich die Einträge der Transformationsvorschrift (8.38) angepasst werden.

$$\sigma^{loc} = \mathbf{T}_{Mitte}^{loc} \langle \sigma \rangle \quad (11.1)$$

4DF-Stein:

$$\mathbf{T}_{Mitte}^{loc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6 \end{bmatrix}$$

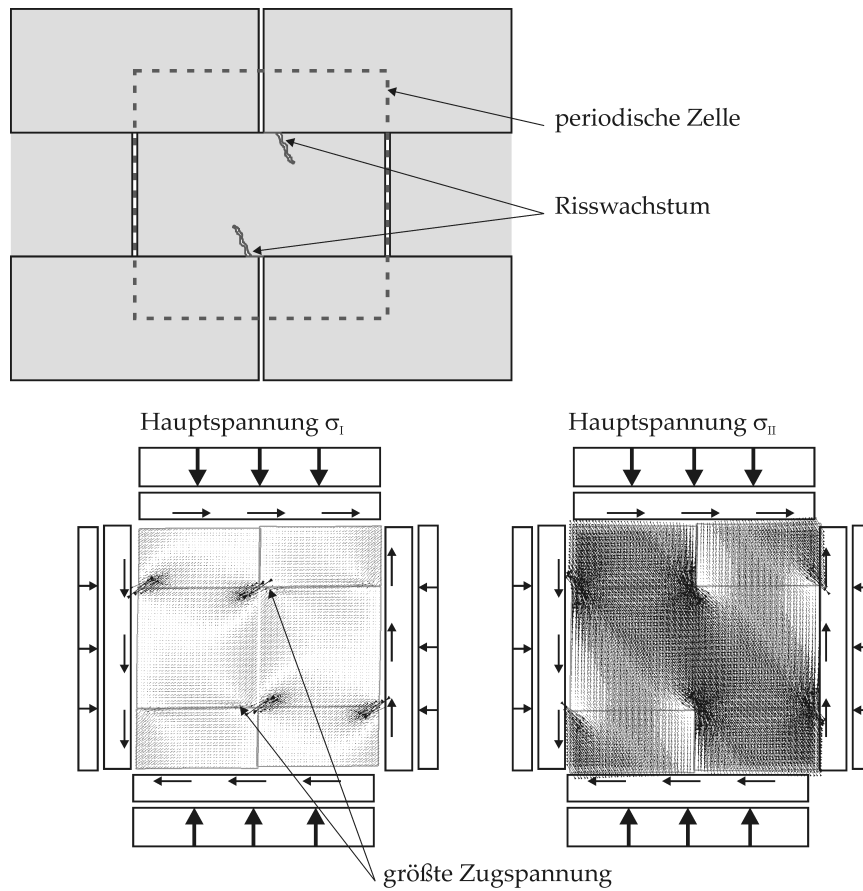
8DF-Stein:

$$\mathbf{T}_{Mitte}^{loc} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,51 \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung beschreibt die lokalen Spannungen im Zentrum des Steins abhängig von der makroskopischen Spannung.

**Homogenisierung des diagonalen Steinversagens:**

Für das diagonale Steinversagen wurde die periodische Zelle von Abb. 11.7



**Abbildung 11.7:** Mikromodell für das diagonale Steinversagen; Last siehe (11.2)

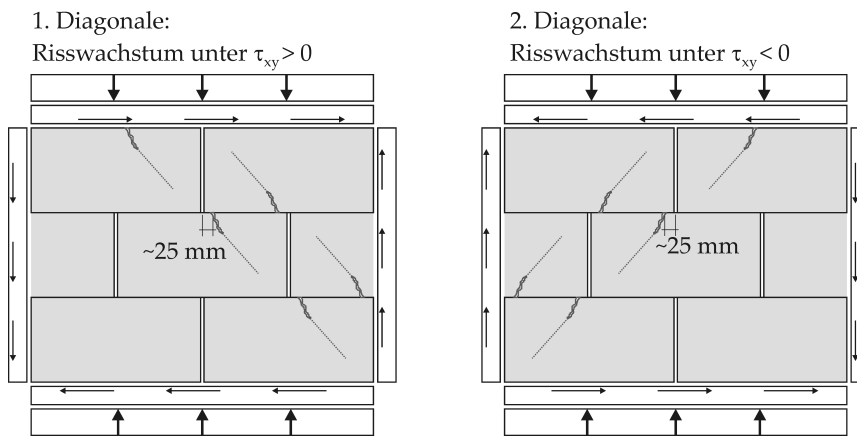
mit zwei unterschiedlichen Spannungscombinationen belastet und die Belastung mit dem Faktor  $\lambda$  monoton gesteigert:

$$1. \text{ Belastung: } \sigma_{xx} = -0,25 \lambda \quad \sigma_{yy} = -1,0 \lambda \quad \tau_{xy} = 0,5 \lambda \quad (11.2)$$

$$2. \text{ Belastung: } \sigma_{xx} = 0,0 \quad \sigma_{yy} = -1,0 \lambda \quad \tau_{xy} = 0,333 \lambda \quad (11.3)$$

Beide Belastungen stellen eine Druck-Schub-Kombination dar, die bei Schubwänden zum Steinversagen führt. Gleichzeitig ist bei dieser Lastkombination ein Fugenversagen nach dem Traglastmodell von MANN/MÜLLER ausgeschlossen (siehe Gleichung (7.23) bzw. Abs. 7.2).

Auf der Mikroskala wird die Fuge mit dem 2-Phasen-Materialgesetz von Abs. 7.1.2 und der Stein linear-elastisch abgebildet. Mit diesem vereinfachten Mikromodell soll die Lage und Intensität von Zugspannungskonzentrationen im Mauerwerksstein identifiziert werden. Ein verbessertes Mikromodell, bei dem das Steinversagen mit einem Schädigungsgesetz voll-



**Abbildung 11.8:** Lage der Spannungskonzentration und der diagonalen Risse abhängig von der Schubspannung

ständig abgebildet wird, war nicht zielführend. Das Versagensmuster, das bei Wandversuchen beobachtet und mit dem optischen Messsystem genau visualisiert wurde (siehe Abb. 11.4), wird durch die periodischen Randbedingungen beim Mikromodell behindert. Auch bei Kleinkörperversuchen wurde diese Kinematik im geschädigten Zustand durch den Prüfstand behindert [ZS11].

Bei beiden Belastungen treten im Mikromodell die größten Zugspannungen am unteren bzw. oberen Rand des Steins auf. Die Spannungskonzentration ist ca. 25 mm von der angrenzenden vertikalen Stoßfuge versetzt (siehe Abb. 11.7). Aus dem einfachen Mikromodell konnte für die Spannungskonzentration am Rand des Steins folgende Transformationsvorschrift abgeleitet werden:

$$\sigma^{loc} = \mathbf{T}_{Rand}^{loc} \langle \sigma \rangle \quad (11.4)$$

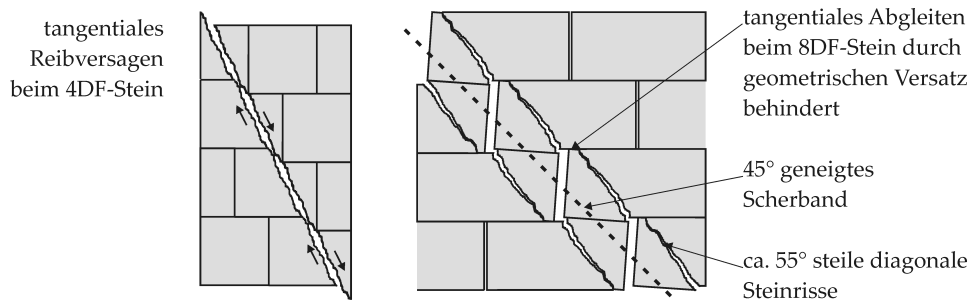
1. Diagonale  $\tau > 0$

$$\mathbf{T}_{Rand}^{loc} = \begin{bmatrix} 2,0 & 0 & -2,1 \\ -1,0 & 1,0 & -1,0 \\ -0,8 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

2. Diagonale  $\tau < 0$

$$\mathbf{T}_{Rand}^{loc} = \begin{bmatrix} 2,0 & 0 & 2,1 \\ -1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 0,8 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Abhängig von der Position der Spannungskonzentration ergeben sich in (11.4) unterschiedliche Transformationsvorschriften. Die Lage der Spannungskonzentration und der diagonalen Risse ist in Abb. 11.8 schematisch dargestellt. Die Ergebnisse des Mikromodells werden durch die experimentellen Versuche bestätigt (vgl. Abb. 11.7 mit Abb. 11.4).



**Abbildung 11.9:** Mechanik im gerissenen Zustand beim diagonalen Steinversagen

### 11.3 Dilatanzmodell für den geschädigten Zustand

Beim diagonalen Steinversagen des 8DF-Steins muss das konstitutive Gesetz für den gerissenen Zustand modifiziert und erweitert werden. Der gerissene Zustand wird beim 4DF-Stein mit einem Kontakt- und Reibmodell beschrieben. Für den 8DF-Stein ist das Reibmodell nicht mehr ausreichend, da durch einen geringen geometrischen Versatz das tangenciales Abgleiten behindert wird (siehe Abb. 11.9, rechts). Dieser kleine geometrische Versatz resultiert aus dem 45°-orientierten Scherband und den 55° geneigten Steinrissen (siehe Abs. 11.1). Numerische Untersuchungen am Validierungsbeispiel zeigten, dass beim Makromodell die Resttragfähigkeit aus dem geometrischen Versatz nicht vernachlässigt werden darf.

Experimentelle Kleinkörperversuche zum Verhalten im gerissenen Zustand sind nicht vorhanden. Die in diesem Abschnitt beschriebenen mechanischen Modelle wurden aus dem geschosshohen Wandversuch von Abs. 11.1 abgeleitet, bei dem ein signifikantes, 45° geneigtes Scherband beobachtet wurde. In diesem Scherband kommt es durch das Öffnen der Risse zu einer Auflockerung des Gefüges, was als Dilatanzeffekt bezeichnet wird [Kol05]. Wie beim treppenförmigen Fugenversagen von Abs. 7.4 wird auch beim diagonalen Steinversagen lediglich die makroskopische Orientierung des Scherbands mit einem diagonalen Kontaktelement abgebildet. Die lokale Geometrie der 55° geneigten Steinrisse und der geometrische Versatz wird zugunsten der numerischen Effizienz bei der Einheitszelle nicht mehr modelliert sondern phänomenologisch im konstitutiven Gesetz berücksichtigt.

#### **Mechanisches Modell für das diagonale Kontaktelement:**

In Abb. 11.10 ist das mechanische Verhalten im gerissenen Zustand und die Idealisierung für das mathematische Modell dargestellt. Da die diagonalen

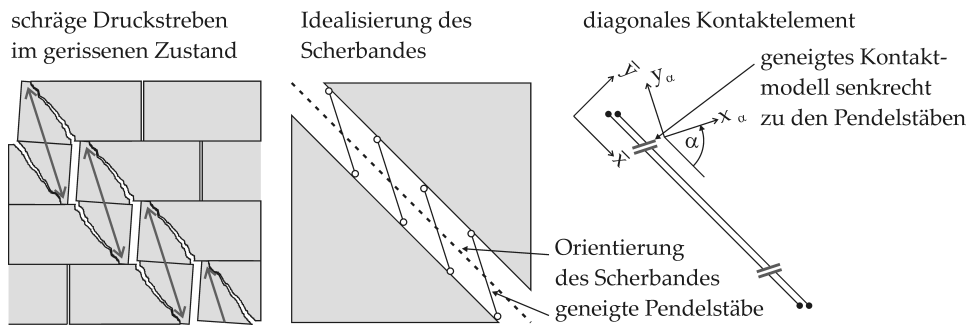


Abbildung 11.10: Dilatanzeffekt im gerissenen Zustand

Steinrisse geringfügig steiler sind als der treppenförmige Verband, bleibt eine horizontale Kontaktfläche erhalten. Über diese Kontaktfläche werden schräge Druckkräfte übertragen, deren Neigung sich aus der Geometrie der diagonalen Steinrisse und des Verbandes ergibt. Das Steigungsverhältnis der schrägen Druckstreben beträgt in horizontaler Richtung das Überbindemaß und vertikal zwei Steinhöhen (siehe Abb. 11.10, links). Die Druckstreben des Scherbandes werden zu diagonalen Pendelstäben idealisiert (siehe Abb. 11.10, Mitte). Auch beim Makromodell der Einheitszelle wird in die Orientierung des Scherbandes und in die unterschiedliche Neigung der Druckstreben unterschieden. Die Kontaktelemente sind entsprechend dem Scherband und die Kontaktbedingung senkrecht zu den Pendelstäben orientiert (siehe Abb. 11.10, rechts).

#### Konstitutives Gesetz mit Dilatanzeffekt:

Im konstitutiven Gesetz wird die Rissöffnung  $[[\bar{\mathbf{u}}]]$  um den Dilatanzwinkel  $\alpha$  gedreht:

$$[[\mathbf{u}]]_{\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha} [[\bar{\mathbf{u}}]]$$

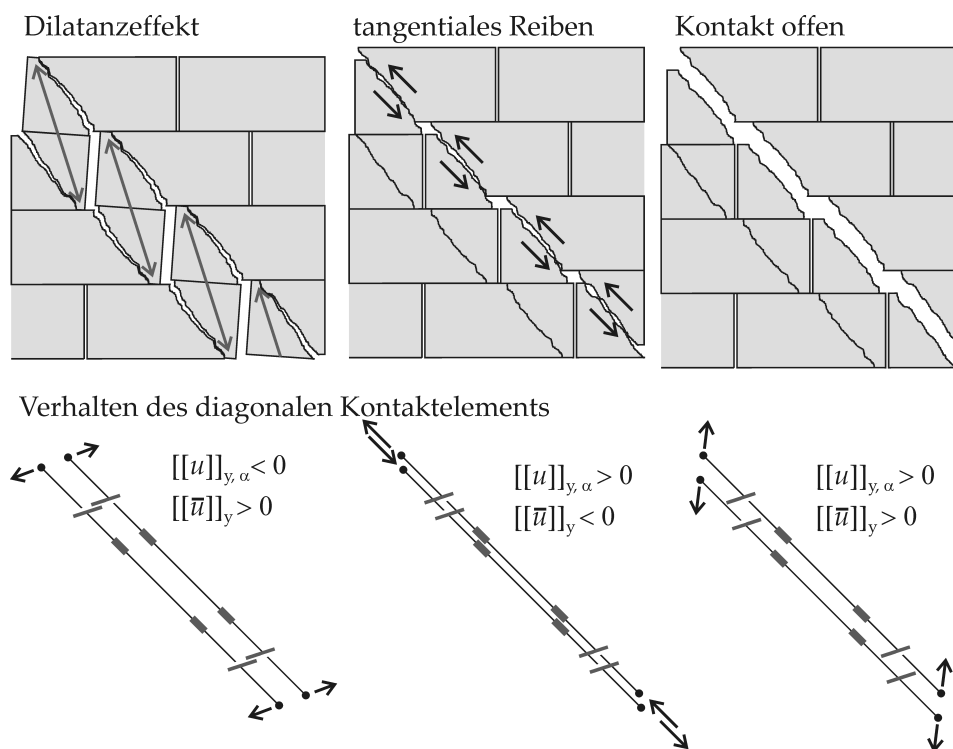
$$\mathbf{T}_{\alpha} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad \text{mit } c = \cos \alpha, \quad s = \sin \alpha \quad (11.5)$$

Der Dilatanzwinkel  $\alpha$  entspricht der Neigung der Pendelstäbe (siehe Abb. 11.10, rechts). Mit  $[[\mathbf{u}]]_{\alpha}$  wird die Kontaktspannung  $\mathbf{t}_{K,\alpha}$  berechnet:

$$\mathbf{t}_{K,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\sigma_{\alpha} = \begin{cases} p_{\alpha} [[u]]_{y,\alpha} & \text{für } [[u]]_{y,\alpha} < 0 \\ 0 & \text{für } [[u]]_{y,\alpha} \geq 0 \end{cases}$$

$p_{\alpha}$  Penalty-Steifigkeit



**Abbildung 11.11:** Versagensmoden im gerissenen Zustand; Mechanik (oben); Kontaktformulierung (unten)

Das Schädigungsmodell zur Berechnung des Spannungsvektors  $\mathbf{t}_S$  wird für das diagonale Steinversagen folgendermaßen erweitert:

$$\mathbf{t}_S = \underbrace{(1 - d_S) \mathbf{t}_A}_{\text{Stein ungeschädigt}} + d_S \underbrace{\left( \mathbf{t}_F + \mathbf{T}_\alpha^{-1} \mathbf{t}_{K,\alpha} \right)}_{\text{Stein geschädigt}} \quad (11.7)$$

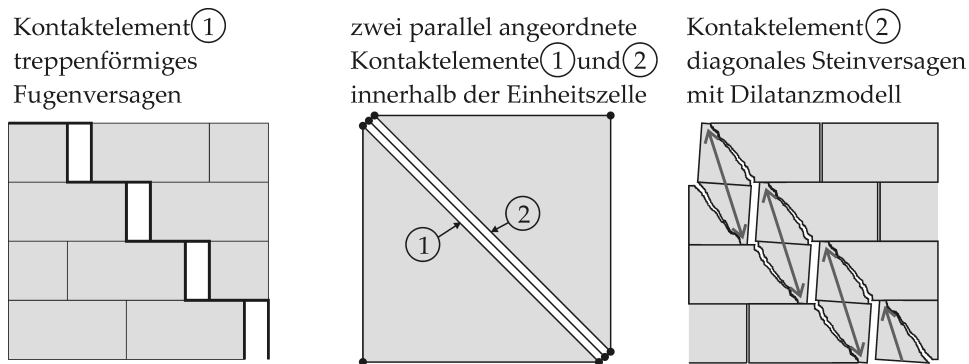
$$\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A ([[ \bar{\mathbf{u}} ]]) \quad \text{elastische Kopplung siehe (4.29)}$$

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{t}_F ([[ \bar{\mathbf{u}} ]], [[ \bar{\mathbf{u}} ]]^{pl}) \quad \text{Kontakt- und Reibmodell siehe Abs. 4.3.3}$$

$$\mathbf{t}_{K,\alpha} = \mathbf{t}_{K,\alpha} ([[ \mathbf{u} ]]_\alpha) \quad \text{Dilatanzmodell siehe (11.6)}$$

$$d_S \quad \text{Schädigungsvariable für den Stein siehe Algorithmus 8.3}$$

Im gerissenen Zustand sind drei verschiedene Versagensmoden möglich, bei denen entweder das Kontakt- und Reibmodell in tangentialer Richtung oder das Dilatanzmodell in geneigter Richtung aktiv ist (siehe Abb. 11.11). Bei diesem konstitutiven Gesetz wird der Dilatanzeffekt nicht durch ein Plastizitätsmodell [LO89, CIL07], sondern durch ein geneigtes Kontaktmodell berücksichtigt. Bei der nachfolgenden Validierung kann gezeigt wer-



**Abbildung 11.12:** Anordnung der Kontaktelemente innerhalb der Einheitszelle für die diagonalen Versagensmoden

den, dass mit dieser einfachen Kontaktformulierung die wesentlichen mechanischen Effekte auch bei zyklischer Belastung abgebildet werden können.

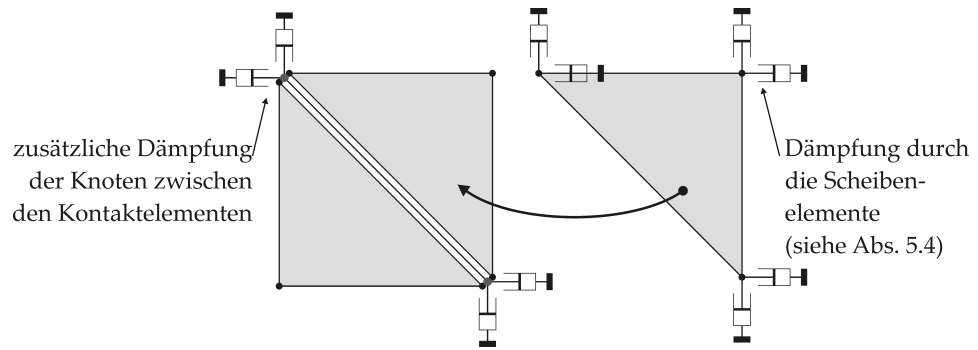
#### **Diskretisierung der Einheitszelle und Elementformulierung:**

Numerische Untersuchungen zeigten, dass bei der Berücksichtigung von Dilatanzeffekten beim konstitutiven Gesetz auch eine neue Topologie der Vernetzung auf Elementebene erforderlich wird. Zu diesem Zweck werden innerhalb der Einheitszelle zwei diagonale Kontaktelemente parallel angeordnet (siehe Abb. 11.12). Das obere Kontaktelement berücksichtigt mit  $t_S$  nach (11.7) das diagonale Steinversagen. Das untere Kontaktelement bildet den Spannungsvektor  $t_M$  für das treppenförmige Fugenversagen nach Algorithmus 7.3 ab. Die Kombination von  $t_S$  und  $t_M$  zu einem mehrstufigen skalaren Schädigungsmodell wie in (8.40) und die Modellierung eines einzigen diagonalen Kontaktelementes führte zu einer Unterschätzung der Steinschädigung und konnte die Mechanik inklusive Dilatanzeffekt nicht erfassen.

#### **Dynamische Analyse:**

Bei der pseudo-dynamischen Analyse muss darauf geachtet werden, dass auch die FE-Knoten zwischen den beiden Kontaktelementen für die Stabilisierung numerisch gedämpft werden. Wie in Abs. 5.4 beschrieben, sind die dynamischen Dämpfungskräfte abhängig vom Volumen bzw. Masse der Scheibenelemente. Da die FE-Knoten zwischen den Kontaktelementen nicht mit Scheibenelementen verknüpft sind, muss diesen Knoten eine künstliche Masse für die dynamische Stabilisierung zugewiesen werden (siehe Abb. 11.13). Im numerischen Modell werden Punktmassen aufge-

bracht, die 10% der Masse eines angrenzenden Scheibenelements entsprechen.



**Abbildung 11.13:** Numerische Dämpfung bei der Einheitszelle mit parallel angeordneten Kontaktelementen

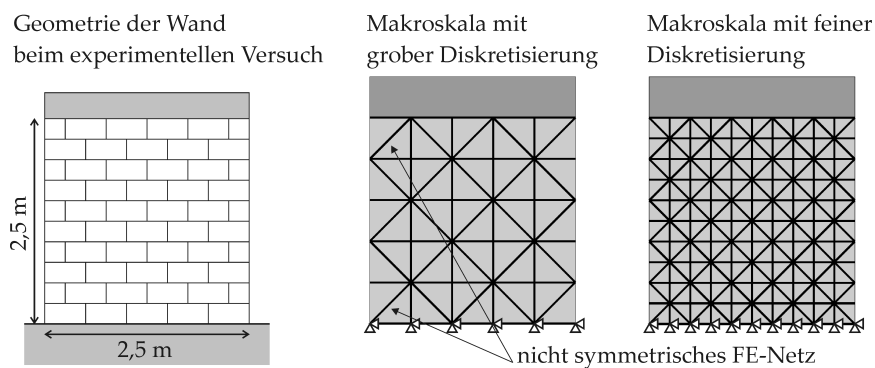


## 11.4 Validierung

### 11.4.1 Wandversuch und Diskretisierung

Mit 8DF-Steinen kann lediglich eine Wand bestehend aus 5x10 Steinen experimentell geprüft werden, da der Versuchsstand bei der TU München auf die Größe von geschosshohen Wänden begrenzt ist [ZS11]. Die Berechnung mit Einheitszellen ist für Strukturen von größeren Abmessungen oder kleineren Steinformaten konzipiert. Um die Berechnungsmethode dennoch auf dieses Beispiel anwenden zu können, wird die Größe der Einheitszelle von 2x4 Steinen auf 1x2 Steine reduziert (siehe Abb. 11.14). Bei dieser Modifikation bleibt die Orientierung der diagonalen Kontaktelemente erhalten. Mit der groben Diskretisierung könnte das Makromodell lokale Effekte im Randbereich der Wandscheibe nicht mehr erfassen. Gleichzeitig würden unsymmetrische Effekte aufgrund der Vernetzung auftreten.

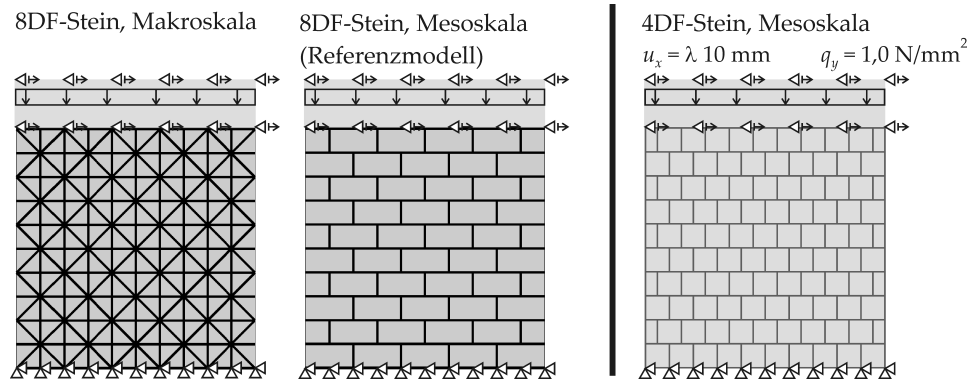
Grundsätzlich sollte die Einheitszelle bestehend aus 2x4 Steinen beibehalten und das Makromodell nur auf große Strukturen angewendet werden. Für kleine Wände wird das Mesomodell von Abs. 11.6 empfohlen. Die Modifikation des Makromodells wird nur für diese Validierung durchgeführt.



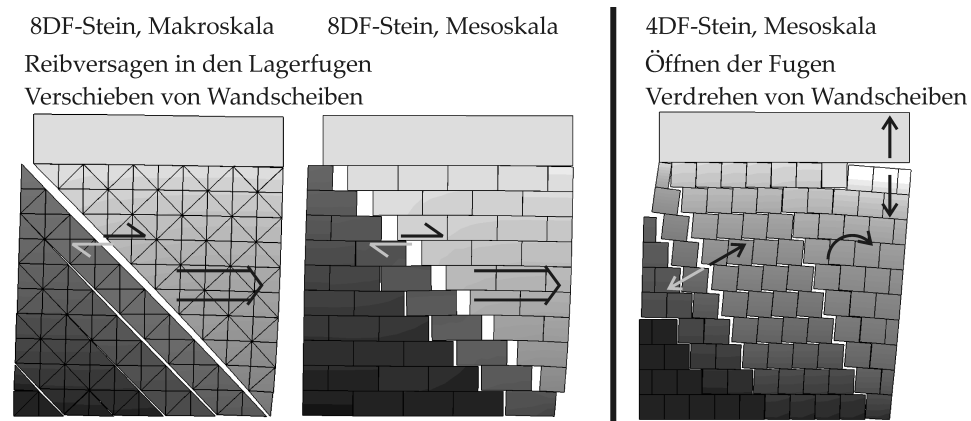
**Abbildung 11.14:** Experimenteller Versuch und Diskretisierung mit Einheitszellen

### 11.4.2 Validierung des Fugenversagens

Bezüglich des Fugenversagens wird das Makromodell der Einheitszelle mit einer Vergleichsrechnung auf der Mesoskala validiert, bei der nur das Fugenversagen mit den Materialparametern von Tab. 11.2 modelliert wird. Beim experimentellen Versuch wurde die Wand mit einer hohen Auflast



**Abbildung 11.15:** System und Belastung der Schubwände für das Fugenversagen



**Abbildung 11.16:** Tragverhalten der Wände von Abb. 11.15; Visualisierung der Verformung  $u_x$ ; Verformung 20-fach überhöht

von  $q_y = 2 \text{ N/mm}^2$  geprüft, so dass das Steinversagen dominierte. Die Berechnungsmodelle und die Belastung der Schubwand sind in Abb. 11.15 dargestellt. Um den Einfluss des Steinformats zu untersuchen, wird eine weitere Wand bestehend aus 4DF-Steinen modelliert.

Bei der Verformung der Wand zeigt sich beim 8DF-Stein eine gute Übereinstimmung zwischen Makro- und Mesoskala (siehe Abb. 11.16). Vergleicht man das Tragverhalten der Wände mit den unterschiedlichen Steinformaten, so wird der Einfluss des Mauerwerksverbands deutlich. Während sich beim 4DF-Stein die Risse öffnen, kommt es beim 8DF-Stein vorrangig zu einem Reibversagen in der Lagerfuge. Ein einfaches Traglastmodell für die Versagensmoden *Reiben* und *Kippen* ist in Abs. 9.1.1 beschrieben.

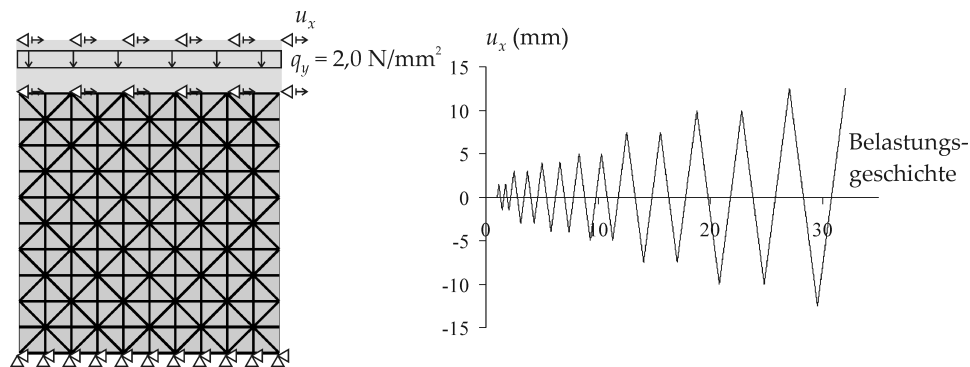


Abbildung 11.17: Wand von Abb. 11.14 - System und Belastungsgeschichte

### 11.4.3 Validierung des Stein- und Fugenversagens

Für die Validierung des Makromodells anhand des 8DF-Steins wurde eine Wand bestehend aus  $5 \times 10$  Steinen statisch-zyklisch geprüft [ZS11]. Die Geometrie der Wand ist in Abb. 11.14, das dazugehörige numerische Modell und die Belastung in Abb. 11.17 dargestellt.

#### Materialparameter:

Die Materialparameter für das Steinversagen sind in Tab. 11.3 zusammengefasst. Für das Schädigungsmodell konnten für den 4DF- und 8DF-Stein die gleichen Parameter verwendet werden, da beide Steinformate aus dem gleichen Steinmaterial bestehen (vgl. Tab. 8.2 und 11.3). Lediglich die Einträge in der Transformationsvorschrift  $\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$ , die den Einfluss der Mauerwerksstruktur und des Verbandes berücksichtigen, werden je nach Steinsorte angepasst (vgl. Gleichung (8.38) mit (11.1) und (11.4)).

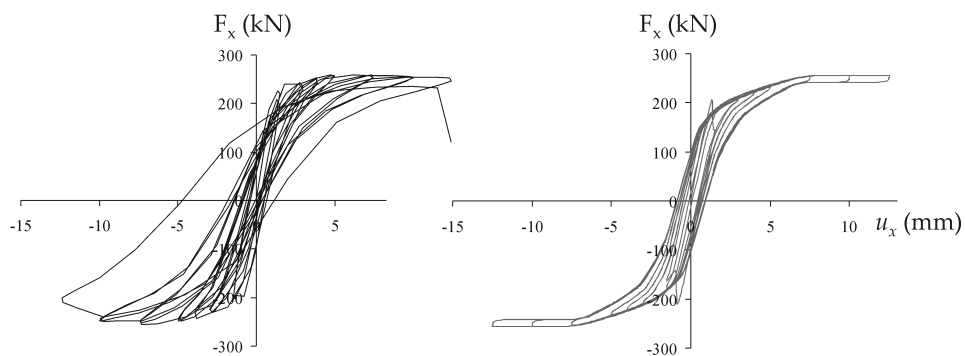
Für das Dilatanzmodell im geschädigten Zustand wird eine vergleichsweise niedrige Penalty-Steiifigkeit verwendet ( $p_\alpha = 0,75 \text{ N/mm}^3$ ), um das Tragverhalten des Scherbandes phänomenologisch beschreiben zu können. Entsprechend Abb. 11.10 erstreckt sich das Scherband über zwei Steinhöhen und die diagonalen Druckkräfte sind auf schmale Kontaktflächen eingengt, was zu einer niedrigen Steifigkeit führt. Im numerischen Modell wird beim diagonalen Kontaktelement ohne Dicke eine entsprechend niedrige Penalty-Steiifigkeit für das Dilatanzmodell gewählt.

#### Globales Trag- und Verformungsverhalten:

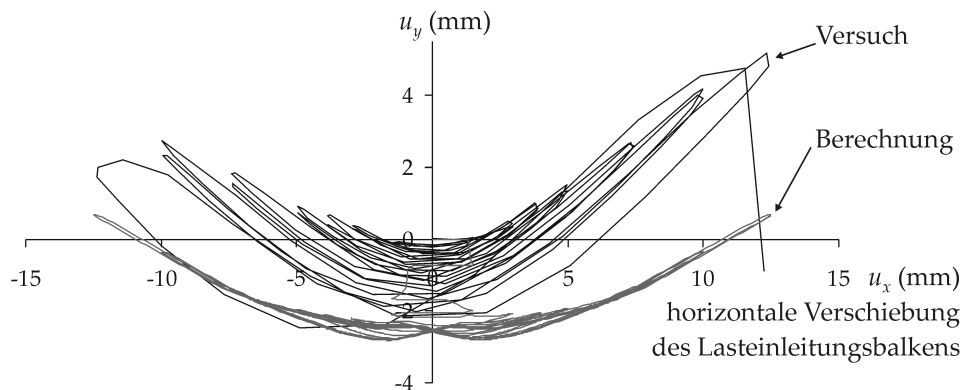
Auch beim 8DF-Stein kann das Makromodell das globale Tragverhalten der Wandscheibe über eine lange Belastungsgeschichte mit vielen Lastzyklen abbilden. Die Last-Verschiebungskurve von Abb. 11.18 zeigt, dass die wesentlichen mechanischen Effekte wie Steifigkeit, Traglast und Nichtlinea-

**Tabelle 11.3:** Materialparameter für das vertikale und diagonale Steinversagen des 8DF-Steins

ungeschädigter Zustand (Schädigungsmodell)	geschädigter Zustand (Kontakt- und Reibmodell Dilatanzmodell nur für diagonales Versagen)	
elastische Parameter:		
$p_{\bar{x},A} = 150 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 20 \text{ N/mm}^3$	
$p_{\bar{y},A} = 300 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 40 \text{ N/mm}^3$	
	$p_{\alpha} = 0,75 \text{ N/mm}^3$	Dilatanzmodell
Beschreibung des Kontinuums siehe Tab. 11.1		
inelastische Parameter:		
$\beta_t = 1,92 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 1,1$	Reibmodell
$\beta_c = 12,0 \text{ N/mm}^2$	$\alpha = 68^\circ$	Dilatanzwinkel
$\beta_b = 13,0 \text{ N/mm}^2$		
$G_{f,t} = 0,55 \text{ N/mm}$		
$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$		
$\mathbf{T}^{loc}$ siehe Gleichung (11.1) für vertikales Steinversagen bzw. Gleichung (11.4) für diagonales Steinversagen		



**Abbildung 11.18:** Wand von Abb. 11.14 - Last-Verschiebungskurve; Versuch (links), Berechnung (rechts)



**Abbildung 11.19:** Wand von Abb. 11.14 - vertikale Verschiebung  $u_y$  des Lasteinleitungsbalkens

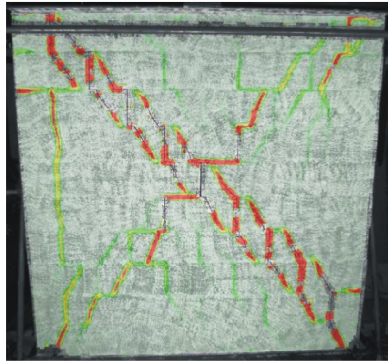
ritäten gut erfasst werden. Auch die vertikale Verformung des Lasteinleitungsbalkens wird vom numerischen Modell zutreffend beschrieben, so dass sich der Lasteinleitungsbalken unter horizontaler Schubverformung anhebt (siehe Abb. 11.19). Dieses „Wachsen“ der Wand ist auf den Dilatanzeffekt im Scherband zurückzuführen.

**Mechanik des Scherbands:** (siehe Abb. 11.20)

Beim Wandversuch konnte mit dem optischen Messsystem ein signifikantes Scherband identifiziert werden, das mit dem Makromodell basierend auf Einheitszellen bezüglich Lage und Orientierung sehr gut abgebildet wird. Die schematische Verformung verdeutlicht, dass die Schubverformung des Scherbands mit einer Auflockerung des Gefüges und einem Öffnen der Risse gekoppelt ist. Im numerischen Modell wird diese Kinematik durch das Öffnen der Kontaktelemente abgebildet. Entlang des Scherbands ist die Orientierung der Druckstreben durch die Kontaktpunkte vorgegeben. Die Hauptspannungen bei der Simulation sind entsprechend dieser Strebenneigung orientiert.

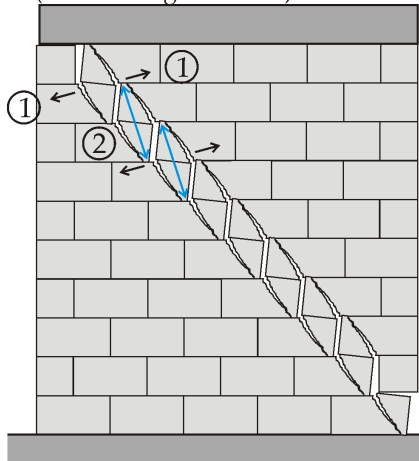
Beim numerischen Modell beginnt die Schädigung in der Wandmitte und setzt sich diagonal zu den Wandecken fort (siehe Abb. 11.21). Diese Entwicklung der Schädigung kann auch durch das optische Messsystem experimentell bestätigt werden. Obwohl die Wand bei einer Verschiebung von  $u_x = 3,0$  mm fast vollständig durchgerissen ist, können weitere Lastzyklen mit größeren Amplituden von bis zu 12,5 mm aufgebracht werden. Das Dilatanzmodell von Abs. 11.3 hat wesentlich dazu beigetragen, diese Resttragfähigkeit im numerischen Modell abzubilden.

Rissbild Versuch (optisches Messsystem)

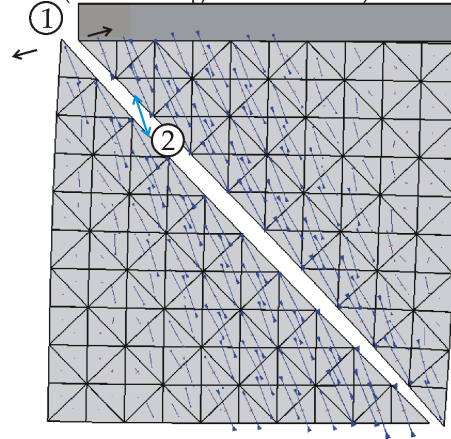


- ① Verformung des Scherbandes
- ② Druckstrebenneigung am Scherband

schematische Verformung  
(Verformung überhöht)



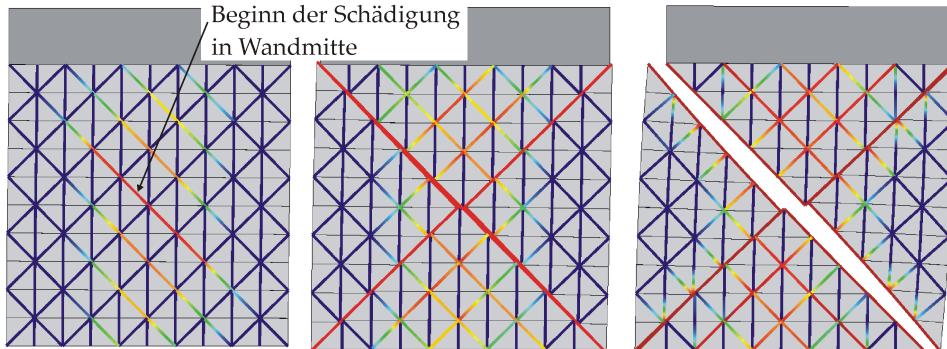
Hauptspannungen des Makromodells  
(Verformung 20 x überhöht)



**Abbildung 11.20:** Wand von Abb. 11.14 - Verformung und Lastabtragung der Wand mit diagonalem Scherband

Verformung:  $u_x = 1,5 \text{ mm}$        $u_x = 3,0 \text{ mm}$

$u_x = 12,5 \text{ mm}$



**Abbildung 11.21:** Wand von Abb. 11.14; Evolution der Schädigung beim Berechnungsmodell, Verformung 20-fach überhöht

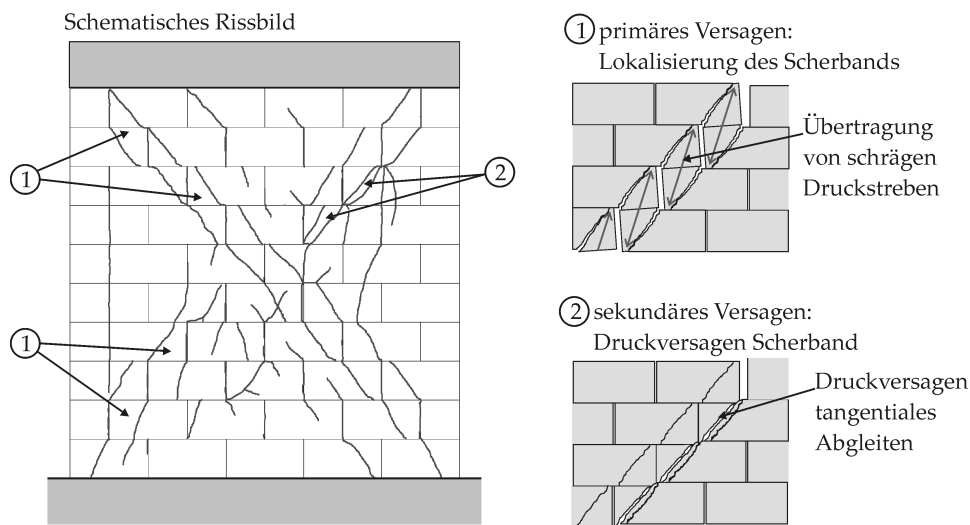


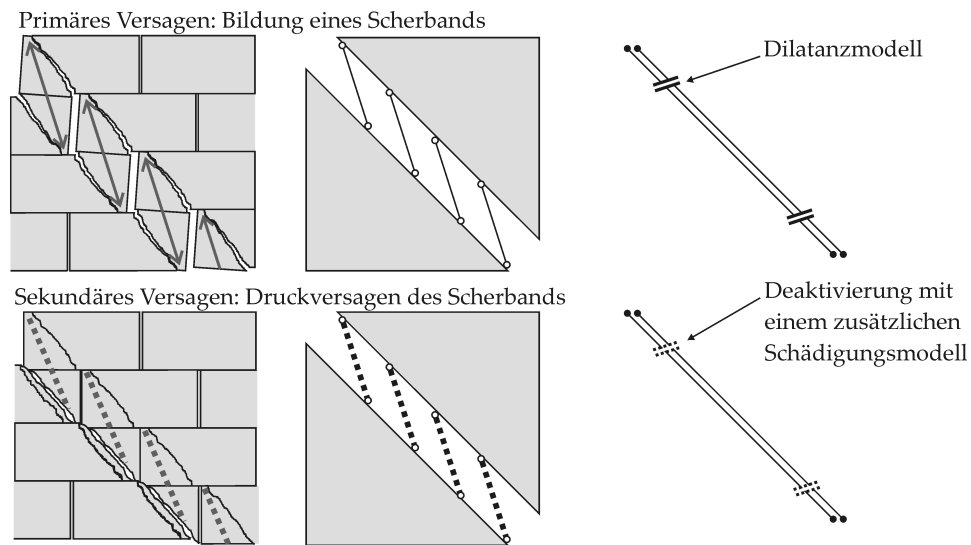
Abbildung 11.22: Druckversagen des Scherbands beim Wandversuch

## 11.5 Grenzen und Erweiterung des Makromodells

Beim Wandversuch tritt am Ende der Belastungsgeschichte ein weiterer Versagensmodus auf, der auf ein sekundäres Versagen zurückgeführt wird. Zunächst werden in den ersten Lastzyklen Zugspannungen durch diagonale Steinrisse abgebaut, so dass sich ein signifikantes Scherband ausbildet (siehe Abs. 11.1). Aufgrund dieser Vorschädigung kommt es am Ende der Belastungsgeschichte zu einem Druckversagen im Scherband mit parallel angeordneten Steinrissen (siehe Abb. 11.22). Dieses sekundäre Druckversagen wird vom derzeitigen Makromodell noch nicht berücksichtigt.

### Erweiterungsmöglichkeit des Makromodells:

Um dieses sekundäre Druckversagen mit dem Makromodell abbilden zu können, wäre lediglich eine Modifikation beim konstitutiven Gesetz erforderlich, der Aufbau der Einheitszelle kann beibehalten werden. Die Druckkräfte im Scherband werden beim diagonalen Kontaktelement vom Dilatanzmodell abgebildet. Mit einem weiteren Schädigungsmodell könnte dieses Dilatanzmodell deaktiviert und auch das sekundäre Druckversagen berücksichtigt werden. Ein entsprechendes mechanisches Modell ist in Abb. 11.23 dargestellt.



**Abbildung 11.23:** mögliche Erweiterung der konstitutiven Gesetze des Makromodells; Modellierung eines intakten Scherbands (oben) und beim Versagen (unten)

#### Grenzen des Makromodells:

Da die Einheitszelle das treppenförmige Fugenversagen zugunsten der numerischen Effizienz vereinfachend mit einem diagonalen Kontaktelement abbildet, wird bei diesem Makromodell auf Elementebene eine grobe Diskretisierung verfolgt. Daher wird auch empfohlen, die konstitutiven Gesetze auf Materialebene möglichst einfach zu halten, da eine einseitige Verbesserung der Materialmodelle die Qualität des gesamten Berechnungsansatzes nur geringfügig aufwertet. Auch für die Identifizierung der Materialparameter sind einfache Versagenskriterien von Vorteil. Aus diesen Gründen wurde das sekundäre Druckversagen im Materialmodell der Einheitszelle noch nicht umgesetzt. Wie die Validierung in Abs. 11.4 zeigt, ist das bestehende Makromodell zur Beschreibung der wesentlichen mechanischen Effekte und zur Beurteilung der Traglast ausreichend.

Unabhängig von der Genauigkeit der Materialmodelle bleibt das Makromodell auf die Anwendung von großen Strukturen beschränkt (siehe Abs. 9.2). Ein detaillierteres Mesomodell für die Analyse von kleinen Wandscheiben wird im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt.



## 11.6 Modellierung auf der Mesoskala

Im modernen Mauerwerksbau geht der Trend zu stark gegliederten Fassaden mit großen Fensteröffnungen. Bei der Verwendung von großformatigen Steinen können Makromodelle nur für gedrungene Wandscheiben angewendet werden. Schlanke Wandscheiben sollten mit einer detaillierteren Berechnung auf der Mesoskala untersucht werden. In diesem Abschnitt wird ein effizientes Mesomodell vorgestellt, das wesentliche Modellierungsstrategien der Makroskala übernimmt.

### 11.6.1 Einheitszelle für die Mesoskala

Auch für die Mesoskala wird eine sogenannte *Einheitszelle* entwickelt, die alle wesentlichen Versagensmoden des Mauerwerks diskret abbildet. Bei diesem Berechnungsansatz werden Fugen- und Steinversagen getrennt modelliert und mit entsprechenden Kontaktelementen diskretisiert (siehe Abb. 11.24). Im Vergleich zur Makroskala ist das Modell wesentlich detaillierter, da die Geometrie des treppenförmigen Fugenversagens im Gegensatz zum Makromodell exakt modelliert wird. Im Vergleich zur Mikroskala ist es deutlich effizienter, da die einzelnen Versagensmoden mit einer groben Diskretisierung und entsprechenden homogenisierten konstitutiven Gesetzen berücksichtigt werden.

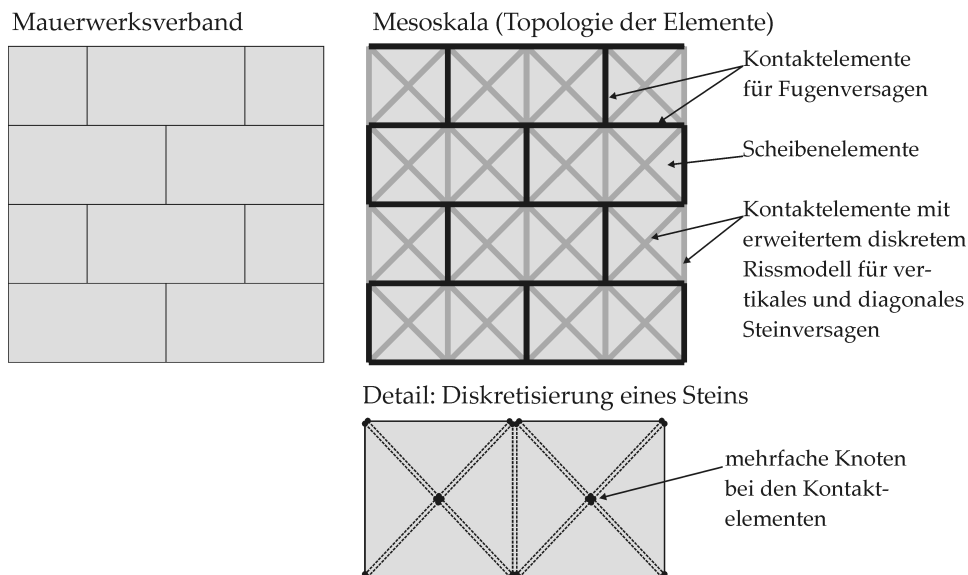
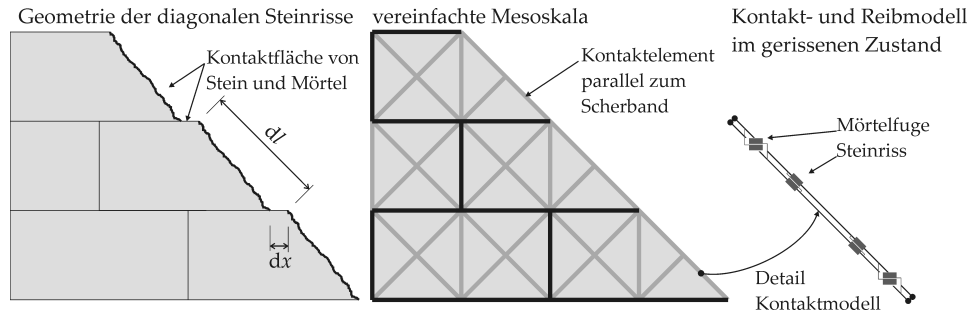


Abbildung 11.24: Modellierung auf der Mesoskala



**Abbildung 11.25:** Kontakt- und Reibmodell beim diagonalen Steinversagen auf der Mesoskala

**Diagonales Steinversagen:** (siehe Abb. 11.25)

Im Vergleich zu bekannten Mesomodellen, die lediglich ein vertikales Steinversagen abbilden [Lou96, For04, Sch04], wird bei diesem Ansatz ein besonderer Fokus auf diagonales Steinversagen gelegt. Für diesen Versagensmodus ist ein  $45^\circ$ -orientiertes Kontaktelement vorgesehen, so dass die Vernetzung der Einheitszelle auf der Mesoskala einfach bleibt und das Kontaktelement parallel zum makroskopischen Scherband ausgerichtet ist. Beim experimentellen Wandversuch zeigten sich allerdings Steinrisse, die steiler orientiert sind. Der gerissene Zustand wird mit zwei Kontakt- und Reibgesetzen für die horizontale Mörtelfuge und den schrägen Steinriss abgebildet. Das Schädigungsmodell zur Berechnung des Spannungsvektors  $\mathbf{t}_S$  für das diagonale Steinversagen wird folgendermaßen erweitert:

$$\mathbf{t}_S = \underbrace{(1 - d_S) \mathbf{t}_A}_{\text{Stein ungeschädigt}} + d_S \underbrace{\left( \mathbf{t}_{F,S} + T_\alpha^{-1} \frac{dx}{dl} \mathbf{t}_{F,M,h} \right)}_{\text{Stein geschädigt}} \quad (11.8)$$

$$\mathbf{t}_A = \mathbf{t}_A([\mathbf{\bar{u}}])$$

elastische Kopplung im ungeschädigten Zustand siehe (4.29)

$$\mathbf{t}_{F,S} = \mathbf{t}_{F,S}([\mathbf{\bar{u}}], [[\mathbf{\bar{u}}]]^{pl})$$

Kontakt- und Reibmodell entlang des Steinrisses siehe Abs. 4.3.3

$$\mathbf{t}_{F,M,h} = \mathbf{t}_{F,M,h}([\mathbf{u}]_h, [[\mathbf{u}]]_h^{pl})$$

Kontakt- und Reibmodell an der horizontalen Mörtelfuge

$T_\alpha$ ,  $[[\mathbf{u}]]_h$  siehe Algorithmus 7.3

$d_S$  Schädigungsvariable für den Stein siehe Algorithmus 8.3

Mit dem skalaren Faktor  $dx/dl$  in (11.8) wird die reduzierte Kontaktfläche in der horizontalen Lagerfuge berücksichtigt (siehe Abb. 11.25, links). Der

geschädigte Zustand ist analog zum treppenförmigen Fugenversagen von Abs. 7.4 formuliert, bei dem unterschiedlich orientierte Kontaktflächen zu einer effektiven Grenzfläche kombiniert werden.

**Homogenisierung für die Mesoskala:** (siehe Abb. 11.26)

Die konstitutiven Gesetze für die Mesoskala wurden mit numerischen Versuchen auf der Mikroskala bestimmt und die Homogenisierungsschritte wie bei der Makroskala durchgeführt. Beim vertikalen Steinversagen ergeben sich für die Meso- und Makroskala unterschiedliche Transformationsvorschriften, um die lokalen Spannungskonzentrationen abzubilden:

$$\sigma^{loc} = \mathbf{T}_{Mitte}^{loc} \langle \sigma \rangle \quad (11.9)$$

8DF-Stein (Makroskala):

$$\mathbf{T}_{Mitte}^{loc} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,51 \end{bmatrix}$$

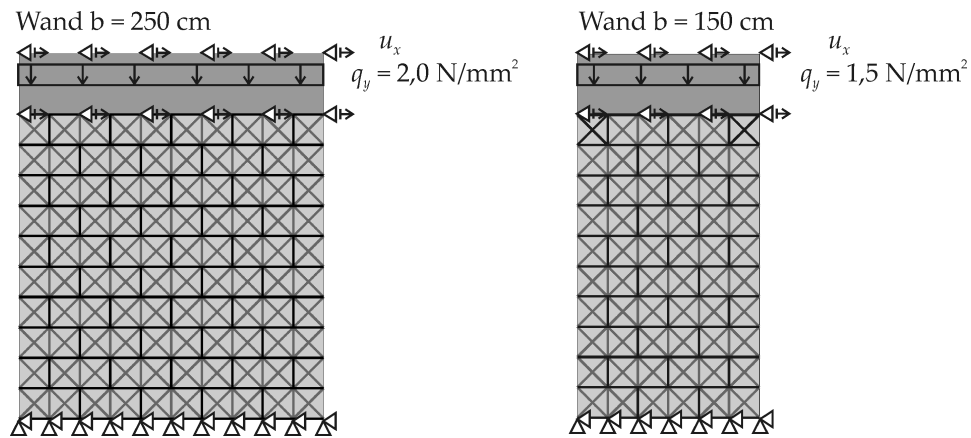
8DF-Stein (Mesoskala):

$$\mathbf{T}_{Mitte}^{loc} = \begin{bmatrix} 0,55 & 0 & 0 \\ 0,38 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,75 \end{bmatrix}$$

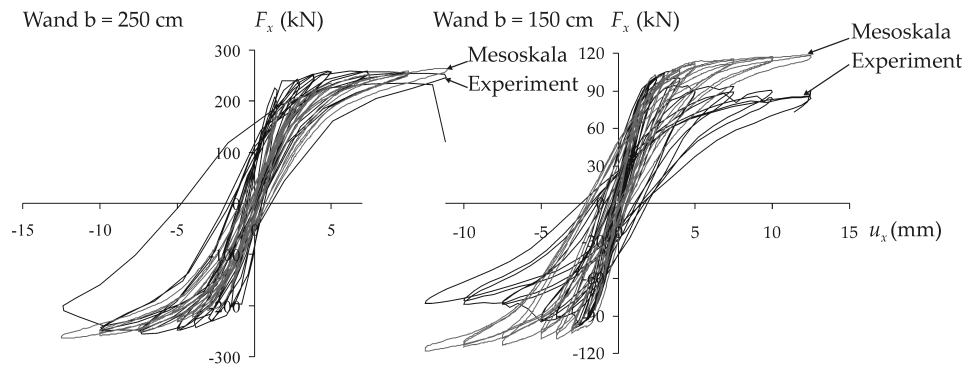
Beim diagonalen Steinversagen ergeben sich für Meso- und Makroskala identische Einträge in der Transformationsvorschrift (11.1). Die Materialparameter der Mesoskala sind in Tab. 11.4 und 11.2 zusammengefasst.

**Tabelle 11.4:** Materialparameter für das Steinversagen auf der Mesoskala

ungeschädigter Zustand (Schädigungsmodell)	geschädigter Zustand (Kontakt- und Reibmodell)
elastische Parameter:	
$p_{\bar{x},A} = 300 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{x},F} = 50 \text{ N/mm}^3$
$p_{\bar{y},A} = 150 \text{ N/mm}^3$	$p_{\bar{y},F} = 100 \text{ N/mm}^3$
Beschreibung des Kontinuums siehe Tab. 11.1	
inelastische Parameter:	
$\beta_t = 1,92 \text{ N/mm}^2$	Reibkoeffizient am Steinriss:
$\beta_c = 12,0 \text{ N/mm}^2$	$\mu_S = 0,9$
$\beta_b = 13,0 \text{ N/mm}^2$	Reibkoeffizient der Lagerfuge:
$G_{f,t} = 0,55 \text{ N/mm}$	$\mu_M = 0,65$
$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$	
$\mathbf{T}^{loc}$ siehe Gleichung (11.9) für vertikales Steinversagen bzw. Gleichung (11.4) für diagonales Steinversagen	



**Abbildung 11.26:** Berechnungsmodelle der Schubwände auf der Mesoskala; zyklische Horizontalverschiebung  $u_x$  für beide Wände siehe Abb. 11.17



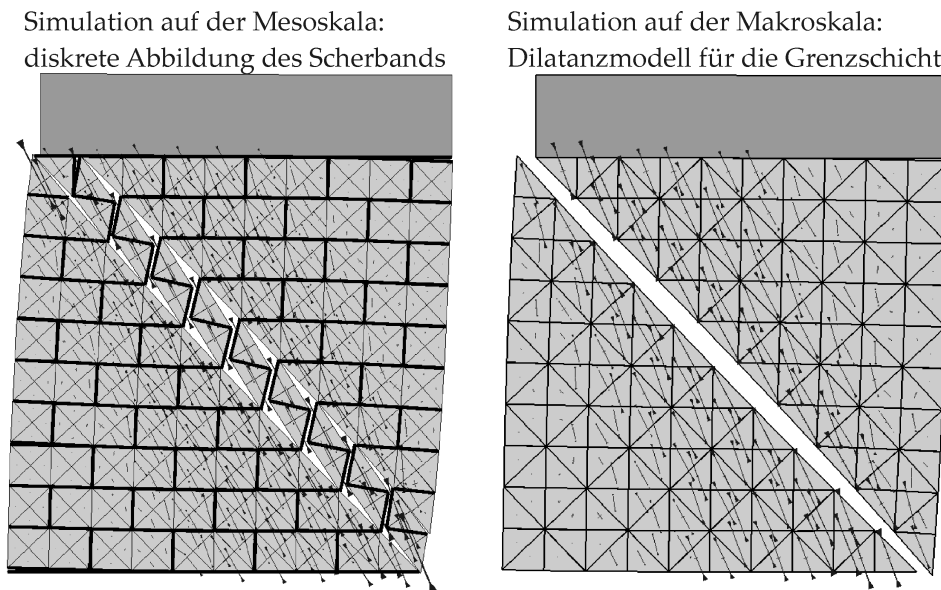
**Abbildung 11.27:** Wände von Abb. 11.26; Last-Verschiebungskurven

### 11.6.2 Validierung der Mesoskala

Das vorgestellte Mesomodell kann mit zwei geschosshohen Wänden von unterschiedlicher Breite (150 cm und 250 cm) validiert werden, die am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München statisch-zyklisch geprüft wurden [ZS11]. Die dazugehörigen Berechnungsmodelle auf der Mesoskala sind in Abb. 11.26 dargestellt. Die quadratische Wandscheibe wurde bereits für die Validierung des Makromodells herangezogen (siehe Abs. 11.4.1). Für die schlanke Wandscheibe von 150 cm Breite ist das Makromodell zu grob. Das in diesem Abschnitt vorgestellte Mesomodell ist ausreichend detailliert, um beide Wandscheiben berechnen zu können.

#### **Globales Trag- und Verformungsverhalten:**

Das vereinfachte Mesomodell kann das Tragverhalten von beiden Wand-

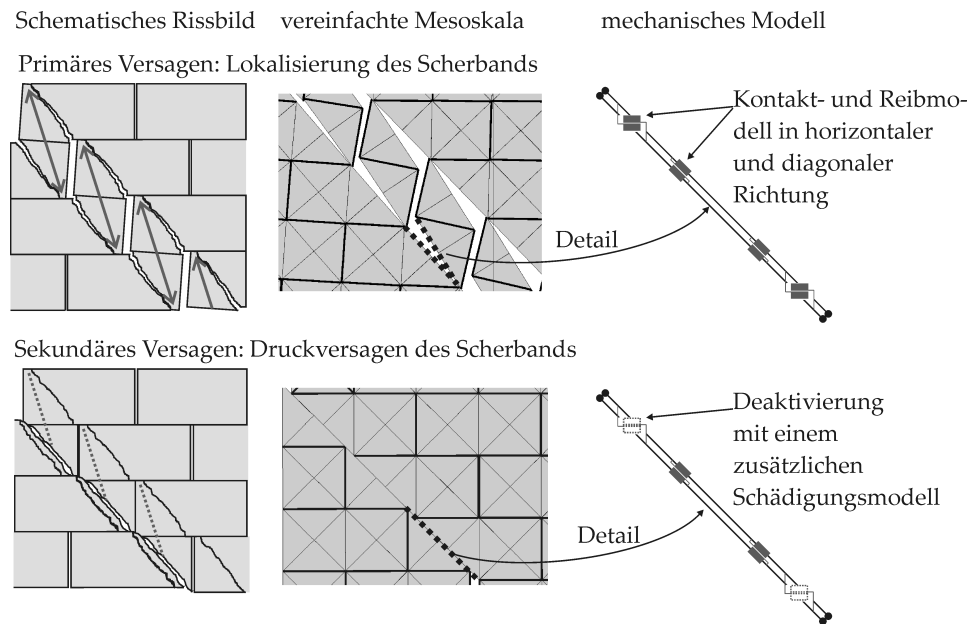


**Abbildung 11.28:** Wand  $b = 250$  cm; Numerische Abbildung des Scherbands

scheiben über viele Lastzyklen abbilden. Die Last-Verschiebungskurven von Abb. 11.27 zeigen, dass die wesentlichen mechanischen Effekte wie Steifigkeit, Traglast und Nichtlinearitäten gut erfasst werden. Lediglich bei der schlanken Wand wird bei den letzten Lastzyklen mit großen Verschiebungen die Entfestigung nicht mehr abgebildet. In Abs. 11.6.3 wird ein erster Ausblick zur Erweiterung und Verbesserung des Mesomodells gegeben.

#### **Mechanik des Scherbands:** (Wand $b = 250$ cm)

In Abb. 11.28 wird die numerische Modellierung des Scherbands auf der Mesoskala mit der auf der Makroskala verglichen. Mit der Mesoskala wird das Scherband diskret abgebildet und erlaubt eine intuitive und klare Interpretation der Berechnungsergebnisse. Dagegen wird bei der Makroskala die Breite des Scherbands zu einer Grenzschicht ohne Dicke idealisiert und die Mechanik mit einem Dilatanzmodell phänomenologisch beschrieben. Trotz dieser starken Idealisierung behält das Makromodell aufgrund der numerischen Effizienz und Robustheit seine Berechtigung. Ein direkter Vergleich von beiden Skalen erscheint bei diesem Beispiel nicht sinnvoll, da für die Anwendung auf diese kleine Wandscheibe die Einheitszelle des Makromodells verkleinert werden musste. Die Effizienz von beiden Skalen wurde u.a. in Abs. 7.5 verglichen.



**Abbildung 11.29:** Mechanik des primären und sekundären Steinversagens (links) und Abbildung auf der Mesoskala (rechts)

### 11.6.3 Erweiterung der Mesoskala

Wie bereits in Abs. 11.5 beschrieben, gibt es beim 8DF-Stein nach der Lokalisierung des diagonalen Scherbands ein sekundäres Druckversagen. Um dieses Versagen auf der Mesoskala abbilden zu können, müsste am diagonalen Kontaktelement mit einem weiteren Schädigungsmodell das horizontale Kontaktmodell deaktiviert werden. Ein entsprechendes mechanisches Modell wird in Abb. 11.29 vorgestellt. Ähnlich wie bei der Makroskala ist auch bei der Mesoskala lediglich eine Erweiterung der konstitutiven Gesetze erforderlich. Der Aufbau der Einheitszelle für die Mesoskala kann beibehalten werden, eine aufwändige Neuvernetzung auf Elementebene ist nicht erforderlich. Um zutreffende Kriterien für das sekundäre Druckversagen formulieren und die Materialparameter mit experimentellen Versuchen kalibrieren zu können, ist zusätzlicher Forschungsaufwand erforderlich, der im Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt werden konnte.

## 11.7 Zusammenfassung 8DF-Stein

Das Makromodell basierend auf Einheitszellen konnte durch einfache geometrische Anpassung bei der Vernetzung auf den rechteckigen Stein angewendet werden. Bei diesem Steinformat sind das Versagen und die Orientierung der lokalisierten Scherbänder stark vom Verband geprägt. Um die Mechanik des Scherbands auch im gerissenen Zustand abbilden zu können, wurde das Makromodell um ein Dilatanzmodell erweitert (siehe Abs. 11.3). Die Validierung anhand einer geschosshohen Wandscheibe zeigt, dass dieses Makromodell die Mechanik über viele Lastzyklen sehr gut abbilden kann (siehe Abs. 11.4).

Dennoch bleibt die Anwendung des Makromodells auf große Wandscheiben begrenzt, bei denen das Steinformat im Vergleich zur Wandabmessung klein ist. Die Anwendungsgrenzen und mögliche Verbesserungsmöglichkeiten des Makromodells wurden in Abs. 11.5 diskutiert.

Alternativ zum Makromodell wird in Abs. 11.6 eine detailliertere Berechnungsmethode auf der Mesoskala entwickelt. Auch beim Mesomodell wird die Idee der *Einheitszelle* aufgegriffen, so dass mit einem vorgegebenen Elementpatch alle wesentlichen Versagensmoden diskret abgebildet werden können. Dieses Berechnungsmodell konnte anhand zweier Wandversuche mit unterschiedlicher Geometrie und Belastung validiert werden. Im Gegensatz zum Makromodell ist bei der Mesoskala kein aufwändiges Dilatanzmodell erforderlich.

Auf die Kombination von Meso- und Makromodellen innerhalb eines Gebäudemodells wird auf Abs. 10.3 verwiesen. Mit dieser Methode können ganze Gebäudemodelle effizient auf der Makroskala simuliert und wichtige Teilbereiche auf der Mesoskala detaillierter modelliert werden.





# Kapitel 12

## Hochlochziegel

In diesem Kapitel wird die Einheitszelle auf einen Hochlochziegel angewendet. Bei diesem Mauerwerkstyp weist die Struktur neben den unvermörtelten vertikalen Stoßfugen zusätzlich Schwächungen durch das Lochbild des Steins auf. Diese Inhomogenitäten werden mit einer 2-stufigen Homogenisierung berücksichtigt.

Auch das Ziegelmaterial selbst hat wesentlich andere mechanische Eigenschaften als Kalksandstein. Der Ziegel ist sehr spröde und hat wegen herstellungsbedingter Brandrisse große Streuungen bei den Festigkeiten, was die Identifizierung von Materialparametern erschwert.

Die Berechnung von Wandscheiben aus Ziegelmauerwerk mit diesem Makromodell kann als erster numerischer Tastversuch angesehen werden. Bei den Berechnungen wird die Traglast der Wandscheiben unter einer monotonen Belastung bestimmt. Um die nichtlinearen Effekte über eine lange Belastungsgeschichte mit vielen Lastzyklen abbilden zu können, sind weitere experimentelle Versuche und eine entsprechende Anpassung des numerischen Modells erforderlich.

### 12.1 Mechanische Eigenschaften

Mit dem Hochlochziegel wird ein Mauerwerksstein verwendet, der sich im Vergleich zum Kalksandstein hinsichtlich Material und Steinlochung unterscheidet. Großformatige Ziegelsteine werden ausschließlich als Lochsteine hergestellt, um den Trocknungsprozess zu verkürzen. Je nach Anforderung an Tragfähigkeit und Wärmeschutz werden Steine mit unterschiedlichem Lochbild produziert. In diesem Kapitel wird ein Stein der Rohdichteklasse 0,9 ( $\rho \approx 0,9 \text{ kg/dm}^3$ ) und der Steinfestigkeitsklasse 12 ( $\beta_c > 12 \text{ N/mm}^2$ ) untersucht. Aufgrund der dickwandigen Stege besitzt der Stein eine hohe

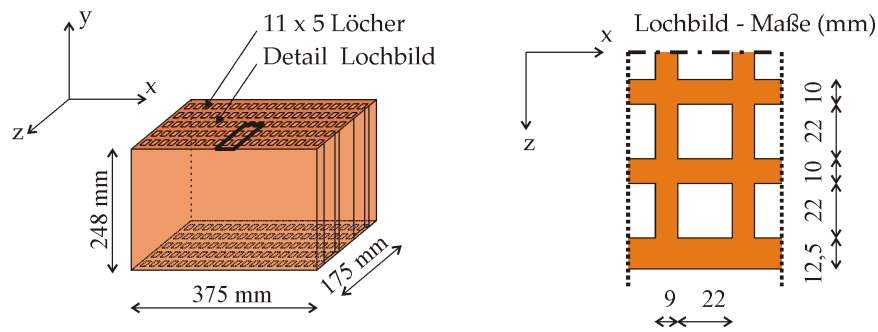


Abbildung 12.1: Geometrie und Lochbild des Hochlochziegels

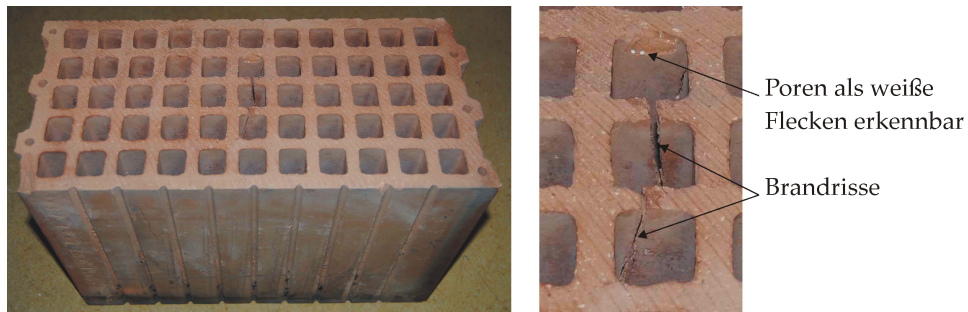


Abbildung 12.2: Brandrisse und Poren beim Ziegelmaterial

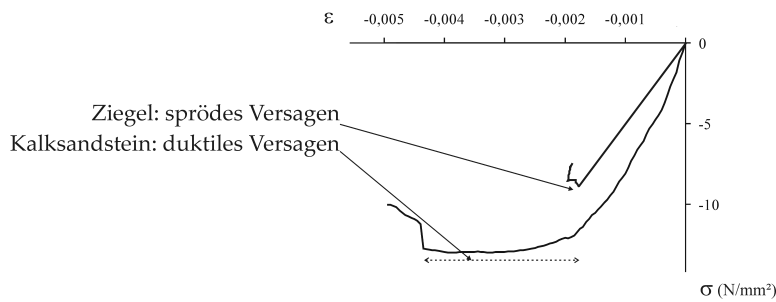
Festigkeit und wird für tragendes Mauerwerk verwendet. Die Geometrie und das Lochbild des Steins sind in Abb. 12.1 dargestellt.

#### Eigenschaften des Ziegels:

Abgesehen vom Lochbild hat auch das Steinmaterial andere mechanische Eigenschaften als Kalksandstein. Ziegelmaterial gehört zur Gruppe der keramischen Werkstoffe und hat im Vergleich zu kohäsiven Reibmaterialien eine wesentlich kleinere Rissprozesszone. Bei der Herstellung von Ziegel werden Porosierungsmittel beigemischt, um nach dem Brennen die Rohdichte durch fein verteilte Poren zu reduzieren (siehe Abb. 12.2). Diese Poren erzeugen eine gewisse Inhomogenität auf einer kleinen Skala. Dadurch stellt der Ziegel eine Kombination aus den homogenen keramischen und den inhomogenen kohäsiven Reibmaterialien dar. Abgesehen von den Poren schwindet der Ziegel während des Trocknens sehr stark, was zu Brandrissen beim Brennen führen kann. Die in Abb. 12.2 ersichtlichen Brandrisse sind typisch für den Ziegel und stellen keine Qualitätsmängel dar. Aufgrund des Strangpressens sind die Brandrisse vorrangig vertikal ausgerichtet.

**Mechanische Kenngrößen des Ziegels:**

Experimentelle Versuche zum Hochlochziegel wurden an verschiedenen Prüflaboren durchgeführt. Im Bericht der Technischen Universität München [ZGS08] wird der Ziegel als *Hlz 12/0,9-17,5* - im Bericht der Universität Kassel [FSE04] als *optimised 2* bezeichnet. Die mechanischen Kenngrößen aus den Prüfberichten sind in Tab. 12.1 zusammengefasst. Bei Kleinkörperversuchen wurden die vertikale Druckfestigkeit, die horizontale Zugfestigkeit und der E-Modul bestimmt. Die Festigkeiten wurden an einzelnen Steinen geprüft und die Bruchspannung auf den Bruttoquerschnitt inklusiv Steinlochung bezogen. Der E-Modul wurde aus der Spannungs-Dehnungsbeziehung von Abb. 12.3 ausgewertet. Der Ziegel verhält sich bis zum Erreichen der Druckfestigkeit nahezu linear-elastisch. Anschließend versagt der Prüfkörper sehr spröde, so dass eine Bruchenergie nicht ausgewertet werden kann.



**Abbildung 12.3:** Spannungs-Dehnungsbeziehung von Ziegel [ZGS08] und Kalksandstein [ZS11] beim 1-achsigen vertikalen Druckversuch

**Tabelle 12.1:** Mechanische Kenngrößen des Hochlochziegels nach [ZGS08]

	Druckfestigkeit		Zugfestigkeit		E-Modul
	$F_{c,y}$ kN	$\beta_{c,y}$ N/mm <sup>2</sup>	$F_{t,x}$ kN	$\beta_{t,x}$ N/mm <sup>2</sup>	$E_y$ N/mm <sup>2</sup>
Mittelwert	1080,0	16,9	7,53	0,17	5.000
Prüfkörper	1063,0	16,55	8,39	0,19	5.000
	1012,0	15,89	8,49	0,20	
	1144,0	17,96	5,70	0,13	
	1034,0	16,19			
	1149,0	18,04			
	1075,0	16,88			

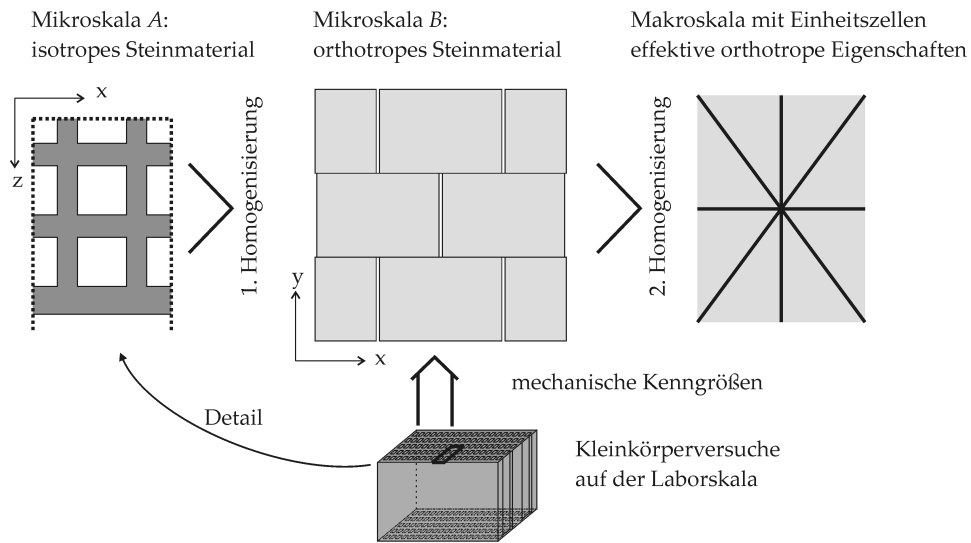


Abbildung 12.4: Mehrskalensmodell für den Hochlochziegel

## 12.2 Homogenisierung

Um die wesentlichen Effekte beim Hochlochziegel zu erfassen, wird ein 3-stufiges Skalenmodell mit zwei Mikroskalen und der Makroskala mit Einheitseinheiten verfolgt. Auf der kleinsten Skala (sog. Mikroskala A) wird ein isotropes Steinmaterial angenommen. Mit einem ersten Hochskalieren wird die Lochstruktur des Steins homogenisiert und auf der Mikroskala B durch ein orthotropes Materialmodell berücksichtigt. Diese Skala bildet mit einer getrennten Modellierung von Stein und Mörtel den Mauerwerksverband detailliert ab. Bei einem zweiten Homogenisierungsschritt wird auf die Makroskala der Einheitseinheit hoch skaliert, um den Mauerwerksverband makroskopisch zu beschreiben.

Der prinzipielle Ablauf bei dem Mehrskalensmodell ist in Abb. 12.4 zusammengefasst. Bei dieser Methode wird bereits im 1. Schritt die Lochstruktur homogenisiert, so dass auf der Mikroskala B kein aufwändiges 3-dimensionales Mikromodell erforderlich ist. Gleichzeitig wurden auf dieser Skala experimentelle Versuche durchgeführt (sog. Laborskala siehe Abs. 12.1).

### 1. Homogenisierungsschritt:

Für die Homogenisierung der Lochstruktur wird ein einfaches analytisches Verfahren angewendet, bei dem Stein und Lochung durch eine geschichtete Annahme vereinfacht werden. Diese Methode wurde von Ganz [Gan85] für

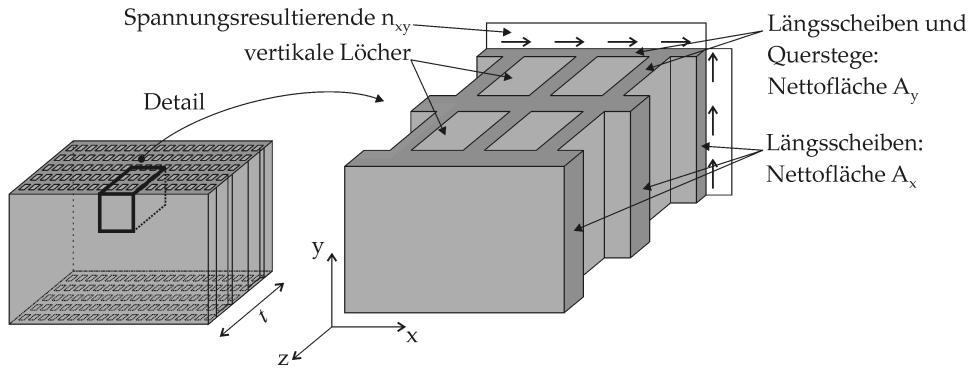


Abbildung 12.5: Mechanisches Modell für den ersten Homogenisierungsschritt

ein regelmäßiges Lochbild entwickelt und von Mojsilović [Moj95] auf unregelmäßige Lochbilder angepasst. Bei diesem mechanischen Modell wird von einer orthotropen Schwächung des Steins durch die vertikalen Löcher ausgegangen. In  $x$ - und  $y$ -Richtung wird ein unterschiedliches Verhältnis von Netto- und Bruttoquerschnittsfläche definiert (siehe Abb. 12.5).

$$a_x = \frac{A_x(\text{Netto})}{A(\text{Brutto})} \quad a_y = \frac{A_y(\text{Netto})}{A(\text{Brutto})} \quad (12.1)$$

Die Spannungen auf der Skala  $A$  lassen sich abhängig von den Querschnitten, der Steindicke  $t$  und den Spannungsergebnissen  $n_{ij}$  ausdrücken.

$$\sigma_{xx}^A = \frac{1}{a_x t} n_{xx} \quad \sigma_{yy}^A = \frac{1}{a_y t} n_{yy} \quad \tau_{xy}^A = \frac{1}{a_x t} n_{xy} \quad (12.2)$$

Für die Lastabtragung der Schubkräfte  $n_{xy}$  wird der Nettoquerschnitt  $a_x$  der Längsscheiben ohne Querstege angesetzt. Ganz [Gan85] bezeichnet daher die Längsscheiben als 2-achsig und die Querstege als 1-achsig beanspruchte Bauteile.

Auf der Mikroskala  $B$  werden die Spannungen auf die gesamte Querschnittsfläche bezogen:

$$\sigma_{ij}^B = \frac{n_{ij}}{A(\text{Brutto})} \quad (12.3)$$

Durch Kombination von (12.3) mit (12.1) und (12.2) können die Spannungen zwischen den einzelnen Skalen umgerechnet und bei Vernachlässigung von Querdehneffekten das orthotrope Elastizitätsgesetz für die Mikroskala  $B$  bestimmt werden:

$$\sigma_{xx}^B = a_x \sigma_{xx}^A \quad \sigma_{yy}^B = a_y \sigma_{yy}^A \quad \tau_{xy}^B = a_x \sigma_{xy}^A \quad (12.4)$$

$$E_x^B = a_x E^A \quad E_y^B = a_y E^A \quad G_{xy}^B = a_x G^A \quad (12.5)$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise erhält man aus (12.4):

$$\sigma^A = \mathbf{T}^A \sigma^B \quad (12.6)$$

$$\text{mit } \mathbf{T}^A = \begin{bmatrix} 1/a_x & & \\ & 1/a_y & \\ & & 1/a_x \end{bmatrix} \text{ und } \sigma^{A,B} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

## 2. Homogenisierungsschritt:

Für die Homogenisierung von der Mikroskala  $B$  zur Makroskala der Einheitszelle werden die gleichen Homogenisierungsmethoden wie beim Vollstein angewendet (siehe Kapitel 6 bis 8).

Bei der Homogenisierung des Kontinuums wird aus dem orthotropen Stein und den unvermörtelten vertikalen Stoßfugen das homogenisierte orthotrope Elastizitätsgesetz für die Makroskala bestimmt. Die E-Moduln der einzelnen Skalen sind in Tab. 12.2 zusammengefasst. Während sich der Kalksandstein vor dem Versagen stark nichtlinear verhält, wird bei den experimentellen Versuchen am Hochlochziegel ein lineares Verhalten bis zum Druckversagen beobachtet (siehe Abb. 12.3). Daher wird die Erweiterung auf ein nichtlineares Materialmodell (siehe Abs. 6.3) beim Ziegelmaterial nicht angewendet.

Die Beschreibung des horizontalen und treppenförmigen Fugenversagens wird bei der Einheitszelle wieder mit entsprechenden horizontalen und diagonalen Kontaktelementen abgebildet. Die mechanischen Eigenschaften der Dünnbettfuge sind nicht nur vom verwendeten Kleber sondern auch stark von der Materialkombination Stein und Kleber abhängig. Während beim Kalksandstein umfangreiche Versuchsreihen durchgeführt wurden (siehe Abs. 7.1.1), stehen für die Fugenkombination aus Dünnbettmörtel und Hochlochziegel keine zuverlässigen experimentellen Daten zur Verfügung. Für eine erste Abschätzung des Fugenversagens wird das 2-Phasen-Modell angewendet, wobei das Schädigungsmodell mit dem Algorithmus

**Tabelle 12.2:** Elastizitätsmodell der verschiedenen Skalen bei Hochlochziegel

Skala A (isotrop)	Skala B (orthotrop)	Makroskala (orthotrop)	
$E = 9.027$	$E_x = 3.353$	1.263	N/mm <sup>2</sup>
	$E_y = 5.000$	5.000	N/mm <sup>2</sup>
	$G_{xy} = 2.130$	1.200	N/mm <sup>2</sup>
$\nu = 0,0$	$\nu_{xy} = 0,0$	0,0	

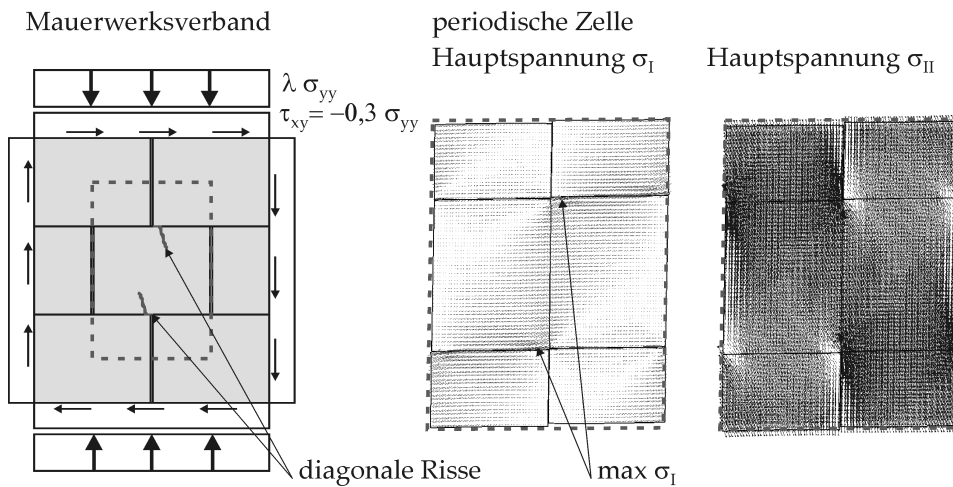


Abbildung 12.6: Zweiter Homogenisierungsschritt; Spannungskonzentrationen für diagonale Steinrisse

7.1 und das Reibmodell mit Algorithmus 4.1 verwendet wird. Für dieses einfache Reibmodell ist lediglich der Reibkoeffizient  $\mu$  als inelastischer Parameter abzuschätzen. Da beim Aufmauern der Kleber in die Lochstruktur des Ziegels eindringt und die ausgehärteten Mörtelklumpen die angrenzenden Steinreihen verzahnen, ist bei Lochsteinen ein im Vergleich zum Vollstein höherer Reibkoeffizient in der Lagerfuge zu erwarten.

Für das Steinversagen werden durch numerische Mikromodelle Spannungskonzentrationen bestimmt. Beim vertikalen Steinversagen wird die größte Zugspannung in der Mitte des Steins, beim diagonalen Steinversagen am Rand des Steins angenommen (siehe Abb. 12.6). Im Materialmodell der Makroskala werden diese Spannungskonzentrationen durch Transformationsvorschriften abhängig von den makroskopischen Spannungen  $\langle \sigma \rangle$  berücksichtigt. Aus der periodischen Zelle wurden für die Mikroskala  $B$  folgende Einträge für  $\mathbf{T}^{loc,B}$  bestimmt:

$$\sigma^{loc,B} = \mathbf{T}^{loc,B} \langle \sigma \rangle \tag{12.7}$$

	vertikaler Riss	diagonaler Riss $\tau > 0$	diagonaler Riss $\tau < 0$
	max $\sigma_I$ in Steinmitte	am Rand des Steins	am Rand des Steins
$\mathbf{T}^{loc,B} =$	$\begin{bmatrix} 0,79 & 0 & 0 \\ 1,1 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,52 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,91 & 0 & 1,43 \\ 4,24 & 1,0 & 3,18 \\ 1,00 & 0 & 0,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1,91 & 0 & -1,43 \\ 4,24 & 1,0 & -3,18 \\ 1,00 & 0 & -0,75 \end{bmatrix}$

Diese Homogenisierungsschritte abhängig von der Lage der Spannungskonzentration wurden für den Ziegelstein analog zum 8DF-Stein durchge-

führt (siehe Abs. 11.2). Durch Einsetzen von (12.7) in (12.6) erhält man die Spannungskonzentrationen für die Mikroskala  $A$  abhängig von der Makroskala der Einheitszelle:

$$\sigma^{loc,A} = \mathbf{T}^{loc} \langle \sigma \rangle \quad (12.8)$$

vertikaler Riss	diagonaler Riss $\tau > 0$	diagonaler Riss $\tau < 0$
$\mathbf{T}^{loc} = \begin{bmatrix} 2,14 & 0 & 0 \\ 2,00 & 1,8 & 0 \\ 0 & 0 & 4,09 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,14 & 0 & 3,85 \\ 7,65 & 1,8 & 5,74 \\ 2,69 & 0 & 2,02 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,14 & 0 & -3,85 \\ 7,65 & 1,8 & -5,74 \\ 2,69 & 0 & -2,02 \end{bmatrix}$

mit  $a_x = 0,37$   $a_y = 0,55$  und der Def. von  $a_x, a_y$  siehe (12.1)

Analog zur Einwirkung auf das Material lässt sich auch der Widerstand des Materials von der Skala  $B$  in die Mikroskala  $A$  umrechnen. Die Festigkeiten wurden experimentell auf der Skala  $B$  bestimmt (siehe Tab. 12.1) und werden mit Gleichung (12.4) in Skala  $A$  umgerechnet:

	Skala $A$	Skala $B$ (Laborskala)
Steinzugfestigkeit:	$\beta_t^A = 0,5 \text{ N/mm}^2$	$= 1/a_x \beta_{t,x}^B$
Steindruckfestigkeit:	$\beta_c^A = 30,0 \text{ N/mm}^2$	$= 1/a_y \beta_{c,y}^B$

Auf der Skala  $A$  mit den isotropen Eigenschaften kann die Festigkeit mit einer minimalen Anzahl an Materialparametern beschrieben werden.

### 12.3 Validierung

#### Prüfverfahren von Ziegelmauerwerk:

An der Universität Kassel wurden zwei baugleiche Wände aus Hochlochziegeln statisch-zyklisch mit unterschiedlichen vertikalen Auflasten geprüft [FSE04]. Analog zum Prüfverfahren an der Technischen Universität München wurden in Kassel die Wände mit einer konstanten vertikalen Kraft und in horizontaler Richtung zyklisch beansprucht. Allerdings wurde in Kassel die horizontale Einwirkung der ersten Lastzyklen lastgesteuert und bei allen weiteren Lastzyklen weggesteuert aufgebracht. Das genaue Prüfverfahren ist in [Stü11] beschrieben. Die Geometrie und das schematische Rissbild sind in Abb. 12.7, die dazugehörigen Last-Verschiebungskurven in Abb. 12.8 dargestellt. Im Gegensatz zum Prüfverfahren in München stand in Kassel noch kein optisches Vermessungssystem zur Verfügung, so dass die Rissbilder nur qualitativ erfasst werden konnten.



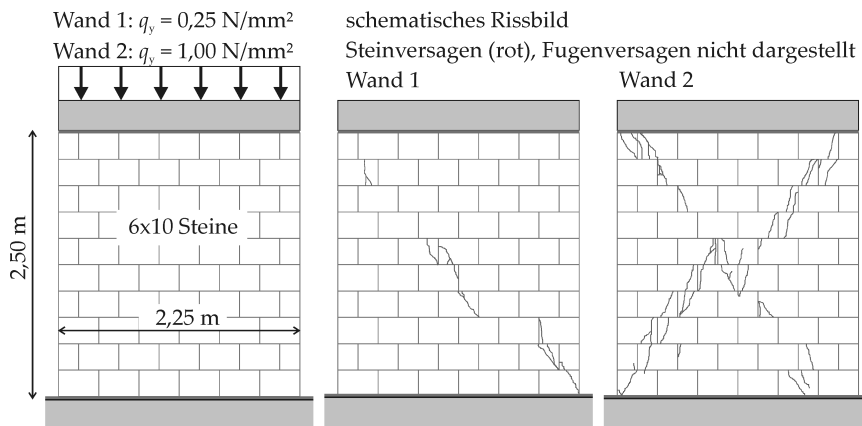


Abbildung 12.7: Statisch-zyklische Prüfung von Schubwänden nach [FSE04] - Geometrie und Rissbild der Wände

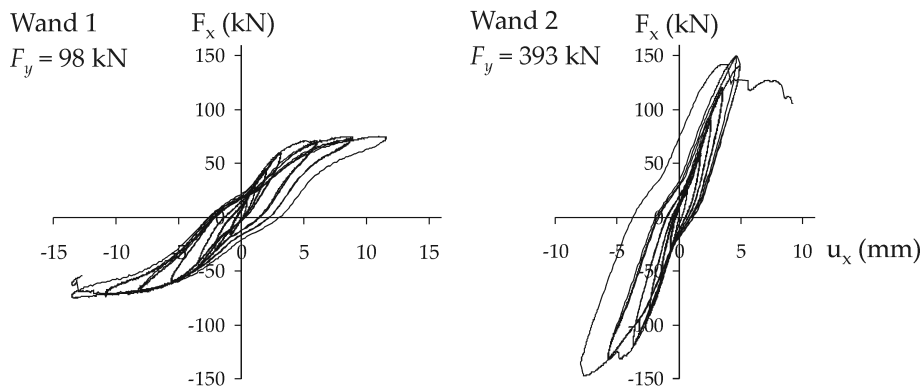


Abbildung 12.8: Last-Verschiebungskurve der Wände von Abb. 12.7 / [FSE04]

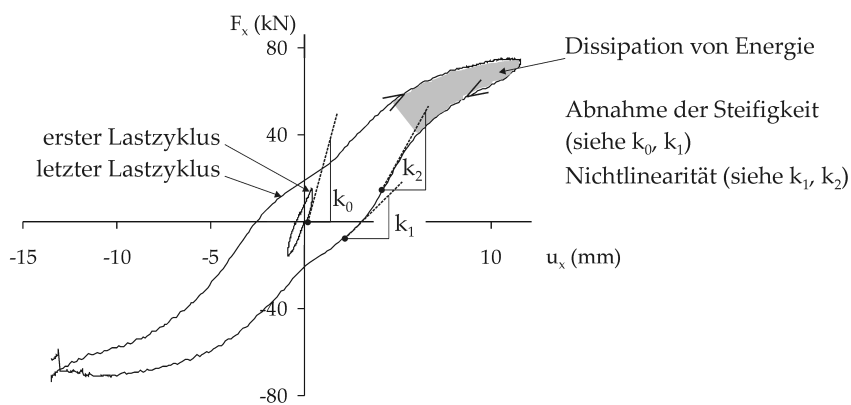


Abbildung 12.9: Inelastisches Verhalten der Wand 1; Auszug aus der Last-Verschiebungskurve von Abb. 12.8; Versuchsergebnis nach [FSE04]

**Mechanische Eigenschaften von Ziegelmauerwerk:**

Bei der Wand mit der niedrigeren Auflast ( $q_y = 0,25 \text{ N/mm}^2$ ) traten vor allem Fugenrisse auf, bei der höher belasteten Wand ( $q_y = 1,0 \text{ N/mm}^2$ ) Steinrisse. Sowohl die maximale Schubkraft als auch die Steifigkeit der baugleichen Wände sind abhängig von der vertikalen Auflast (siehe Abb. 12.8). Die Last-Verschiebungskurven beider Wandversuche weisen starke inelastische Effekte auf: Bei der zyklischen Belastung gibt es starke Hystereseffekte. Diese Energiedissipation ist nicht direkt auf das Risswachstum im Ziegelmaterial zurückzuführen, bei dem sehr wenig Bruchenergie freigesetzt wird. Vielmehr kann Reibenergie in den Mörtelfugen dissipiert werden. Auch eine ungewollte Energiedissipation aufgrund der Prüfeinrichtung wird von Stürz [Stü11] vermutet. Die Abnahme der Steifigkeit und die nichtlineare Last-Verschiebungskurve sind weitere inelastische Effekte bei der Wand, deren mechanische Ursache noch nicht identifiziert werden konnte (siehe Abb. 12.9).

**Numerisches Modell:**

Für die Validierung anhand des Hochlochziegels wurde die Schubwand bestehend aus  $6 \times 10$  Steinen mit Einheitszellen modelliert (siehe Abb. 12.10). Das Makromodell wurde für größere Wandscheiben mit relativ kleinen Steinformaten konzipiert. Um dieses Makromodell dennoch an diesem Beispiel mit relativ wenig Steinen anwenden zu können, wird eine feine Vernetzung gewählt, so dass die Größe der Einheitszelle  $1 \times 2$  Steinen entspricht. Diese Strategie bei der Vernetzung wurde auch beim rechteckigen Kalksandstein in Abs. 11.4 angewendet. Während die Wände im Versuch statisch-zyklisch geprüft werden, wird im numerischen Modell nur eine monotone Belastung aufgebracht, um die Traglast abzuschätzen. Für den Hochlochziegel stehen noch keine ausreichenden Versuchsergebnisse zur Verfügung, um das inelastische Verhalten von Wandscheiben bei einer zyklischen Belastung numerisch abbilden zu können. Grundsätzlich sind die Materialmodelle der Einheitszelle so formuliert, dass auch eine zyklische Belastung simuliert werden kann (siehe Abs. 8.5).

**Validierung des Fugenversagens:**

Bei Wand 1 mit der niedrigen Auflast von  $q_y = 0,25 \text{ N/mm}^2$  wird im numerischen Modell der Stein linear-elastisch angenommen. Da zum Fugenversagen keine geeigneten Kleinkörperversuche zur Verfügung stehen, wird der Reibkoeffizient mit folgenden Parameterstudien abgeschätzt:

- Modell A: Kontakt- und Reibmodell mit  $\mu = 0,6$
- Modell B: Kontakt- und Reibmodell mit  $\mu = 0,85$
- Modell C: Schädigungsmodell mit Zugfestigkeit  $\beta_t = 0,175 \text{ N/mm}^2$

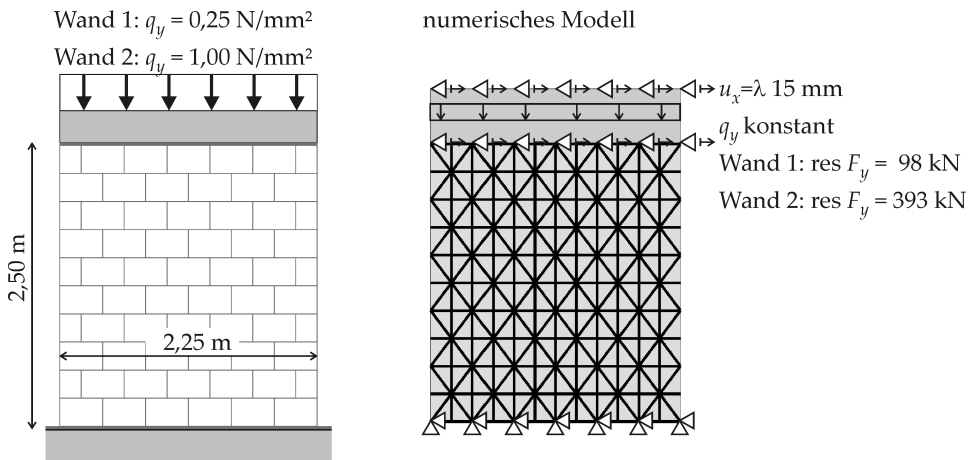


Abbildung 12.10: Geometrie und Berechnungsmodell der Wand

Tabelle 12.3: Materialparameter für das Fugenversagen des Hochlochziegels

Kontakt- und Reibmodell	Schädigungsmodell
Modell A: $\mu = 0,6$	Modell C: $\beta_t = 0,175 \text{ N/mm}^2$
Modell B und C: $\mu = 0,85$	$\beta_c = 1,75 \text{ N/mm}^2$
	$G_f = 0,01 \text{ N/mm}$
Penalty-StEIFigkeiten für die Kontaktelemente siehe Tab. 7.3	
Elastizitätstensor für das Kontinuum siehe Tab. 12.2	

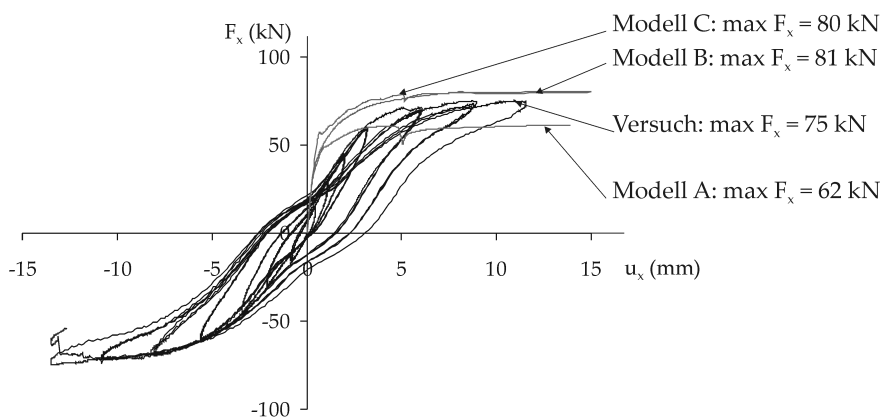


Abbildung 12.11: Last-Verschiebungskurve von Wand 1 bei Versuch und Berechnung; reduzierte Steifigkeit beim Versuch mit zyklischer Last siehe Abb. 12.9

Bei Modell A und B wird für die Mörtelfuge ein Kontakt- und Reibmodell ohne Zugfestigkeit verwendet, bei Modell C das 2-Phasen-Materialmodell von Abs. 4.3.2. Die Materialparameter der einzelnen Modelle sind in Tab. 12.3 zusammengefasst. Bei der Last-Verschiebungskurve von Abb. 12.11 zeigt sich, dass bei Modell B und C die Traglast sehr gut angenähert wird.

#### Validierung des Steinversagens:

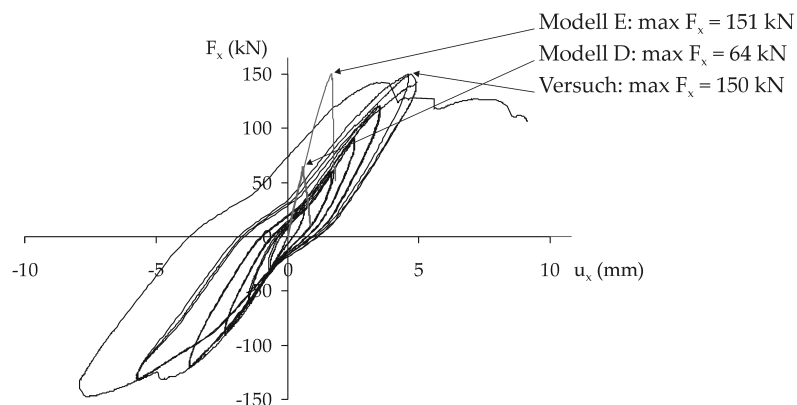
Das Fugen- und Steinversagen wird mit Wand 2 validiert, bei der signifikante Steinrisse aufgrund der höheren Auflast von  $q_y = 2,0 \text{ N/mm}^2$  auftreten. Bei den Materialparametern bleibt die Identifizierung der Bruchenergie und der Steinzugfestigkeit schwierig. Für die Bruchenergie wurde 50% des Wertes von Kalksandstein angesetzt. Die Zugfestigkeit wird mit folgender Parameterstudie untersucht:

- Modell D: Zugfestigkeit aus Versuch  $\beta_t = 0,5 \text{ N/mm}^2$  siehe (12.9)
- Modell E: höhere Zugfestigkeit  $\beta_t = 2,25 \text{ N/mm}^2$

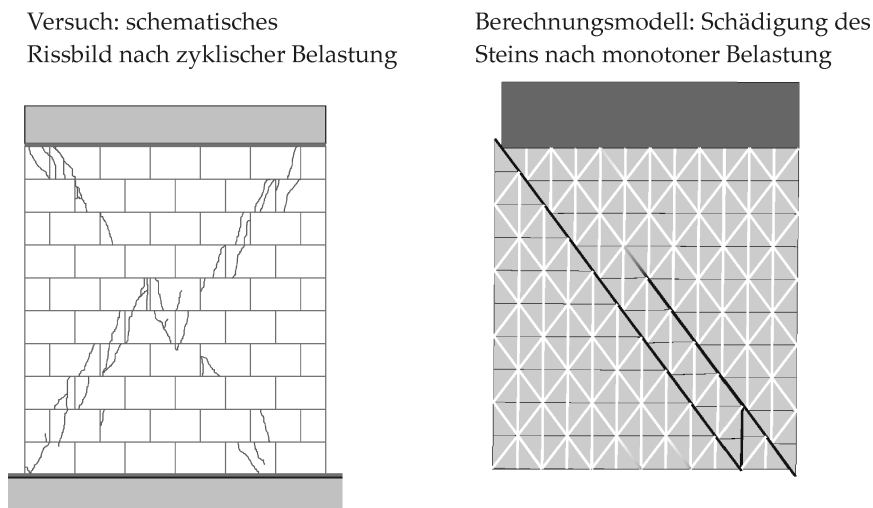
Die hohe Streuung bei den Kleinkörperversuchen und die extrem niedrige Zugfestigkeit im Vergleich zur Druckfestigkeit weisen darauf hin, dass beim direkten Zugversuch die ermittelten Festigkeiten stark von den Brandrissen abhängig sind (siehe Tab. 12.1). Dagegen haben die Brandrisse auf die Druckfestigkeit keinen signifikanten Einfluss. Bei Schubwänden, die unter Druck und Schub belastet werden, wird vermutet, dass die Schwächung durch die Brandrisse einen geringeren Einfluss hat. Daher wird bei Modell E eine höhere Zugfestigkeit angenommen. Die Materialparameter von Modell D und E sind in Tab. 12.4 zusammengefasst.

**Tabelle 12.4:** Materialparameter für das Steinversagen des Hochlochziegels

Schädigungsmodell	Reibmodell im gerissenen Zustand
Modell D: $\beta_t = 0,5 \text{ N/mm}^2$	$\mu = 0,6$
Modell E: $\beta_t = 2,25 \text{ N/mm}^2$	
$\beta_c = 30 \text{ N/mm}^2$	
$G_f = 0,2 \text{ N/mm}$	
$\sigma^{loc} = \mathbf{T}^{loc} \sigma$ Einträge von $\mathbf{T}^{loc}$ siehe (12.8)	
Penalty-StEIFigkeiten für die Kontaktelemente siehe Tab. 8.2	
Elastizitätstensor für das Kontinuum siehe Tab. 12.2	
Materialparameter für das Fugenversagen siehe Modell C von Tab. 12.3	



**Abbildung 12.12:** Last-Verschiebungskurve von Wand 2 bei Versuch und Berechnung; reduzierte Steifigkeit beim Versuch mit zyklischer Last siehe Abb. 12.9



**Abbildung 12.13:** Steinversagen von Wand 2; Vergleich Versuch - Berechnung

Bei Modell D wird die Traglast signifikant unterschätzt, jedoch bei Modell E gut angenähert (siehe Abb. 12.12). Auch die Schädigung des Steins von Modell E stimmt mit dem Rissbild des Versuchs gut überein (siehe Abb. 12.13). Da nur eine monotone Belastung simuliert wird, kann das numerische Modell die inelastischen Effekte vom Versuch nicht vollständig abbilden. Um das numerische Modell zuverlässig auf Ziegelmauerwerk anwenden zu können, müsste die empirisch gewählte Zugfestigkeit und die Bruchenergie mit weiteren großskaligen Versuchen validiert werden.



# Kapitel 13

## Zusammenfassung und Ausblick

### 13.1 Zusammenfassung des Strukturmodells

Das numerische Simulationsmodell von Mauerwerk basierend auf Einheitszellen stellt ein Makromodell dar, mit dem große Strukturen effizient berechnet werden können. Bei Wandversuchen wurden horizontale, vertikale und diagonale Rissmuster im Mauerwerk identifiziert, die auf den regelmäßigen Mauerwerksverband zurückzuführen sind. Im Verband wirken die Mörtelfugen als schwache Schichten und haben daher einen entscheidenden Einfluss auf die Orientierung der Fugen- und Steinrisse.

Das Strukturmodell der Einheitszelle bildet das Tragverhalten eines typischen Mauerwerksausschnitts ab: Die elastische Verformung des Kontinuums Mauerwerk wird mit Scheibenelementen, die Rissmuster mit den drei dominanten Orientierungen mit Kontaktelementen diskretisiert. Eine geeignete Größe der Einheitszelle abhängig vom Steinformat wurde in Abs. 3.4.1 festgelegt und bei zahlreichen Anwendungsbeispielen bestätigt (siehe Abs. 7.5, 8.5 und 9.1).

Für das Fugen- und Steinversagen sind separate Materialmodelle vorgesehen. Im Vergleich zu einer homogenisierten Beschreibung von Stein und Mörtel bleiben die Schädigungsmodelle für die einzelnen Komponenten relativ einfach. Gleichzeitig ist die Identifizierung der Materialparameter für die Komponenten Stein und Mörtel einfacher als für einen Ersatzwerkstoff Mauerwerk. Die wesentlichen Versagenskriterien für die Makroskala der Einheitszelle wurden aus einem Mehrskalenmodell numerisch hergeleitet und mit Kleinkörperversuchen geeicht.

Bei der Einheitszelle wird das treppenförmige Fugenversagen makroskopisch zu einer diagonalen Grenzschicht vereinfacht. Dadurch ist man bei

der Diskretisierung nicht mehr auf die Größe des Steinformats begrenzt und die Einheitszelle kann die Vorteile von diskreten Rissmodellen auf der Mesoskala mit der numerischen Effizienz von bekannten Makromodellen kombinieren.

**Fugenversagen:**

Bei der Mörtelfuge dominieren treppenförmige und horizontale Versagensmoden. Die äquivalente Beschreibung der treppenförmigen Grenzschicht mit einem diagonalen Kontaktelement wurde hergeleitet. Diese Formulierung ist konsistent mit dem mechanischen Modell von Mann/Müller [MM73, MM78], die von einem blockförmigen Spannungsverlauf ausgehen. Das verwendete Materialgesetz basiert auf dem 2-Phasen-Modell von Alfano und Sacco [AS06, SGR09], bei dem Risswachstum mit einem Schädigungsmodell und die Resttragfähigkeit im geschädigten Zustand mit einem Kontakt- und Reibmodell abgebildet werden. Dadurch werden Schädigung für Risswachstum und Plastizität für Reibeffekte konsistent kombiniert und die inelastischen Effekte bei einer zyklischen Belastung können sehr gut erfasst werden. Um bei diesem Materialmodell unterschiedliche Bruchenergien in normaler und tangentialer Richtung berücksichtigen zu können, wurde das Reibmodell um ein Entfestigungsgesetz erweitert, das die Abnahme der Oberflächenrauigkeit beschreibt.

**Steinversagen:**

Beim quadratischen Stein zeigten die Untersuchungen auf der Mesoskala, dass der Stein vorrangig bei einer Druck-/Schubbelastung abgeschert wird, da makroskopische Zugspannungen durch die schwächeren Mörtelfugen abgebaut werden. Für dieses Steinversagen wurde ein *erweitertes diskretes Rissmodell* entwickelt, bei dem die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung um den Spannungstensor  $\sigma$  des Kontinuums erweitert wird. Da das dazugehörige Schädigungsmodell im Spannungsraum des Kontinuums formuliert ist, kann dieses erweiterte Modell die Versagenskriterien unter kombinierter Druck-/Schubbelastung besser erfassen als das diskrete Rissmodell, das vor allem für die Zug-/Schubkombination ausgelegt ist.

**Validierung und Anwendung auf große Strukturen:**

Beim Abgleich mit Wandversuchen am quadratischen Steinformat kann das Strukturmodell das wesentliche Tragverhalten erfassen. Nichtlinearität, Versagenskräfte und Hysterese-Effekte werden über eine lange Belastungsgeschichte mit vielen Lastzyklen abgebildet. Mit Vergleichsrechnungen auf der Mesoskala wird gezeigt, dass das Makromodell auf verschiedene Wandgeometrien anwendbar ist. Im Vergleich zu bekannten Makromodellen [Lou96, MAC07, Sei94] können Risse sehr gut lokalisiert werden.



Auch bei der Anwendung auf große praxisrelevante Beispiele zeigt diese Methode ein sehr robustes Verhalten. Das Strukturmodell in Kombination mit einer numerischen Dämpfung weist auch bei globaler Entfestigung eine gute Konvergenz auf, ohne dass diese Regularisierung die Berechnungsergebnisse signifikant verfälscht.

**Steinformate und Steinsorten:**

Durch einfache geometrische Anpassung der Einheitszelle an den Mauerwerksverband kann dieses Strukturmodell auf verschiedene Steinformate und Steinsorten angewendet werden (siehe Kapitel 11 und 12). Im Vergleich zu homogenisierten Makromodellen, bei denen die Geometrie des Steinformats nur sehr schwierig auf Materialebene berücksichtigt werden kann, ist beim Strukturmodell der Einheitszelle eine Anpassung der Vernetzung sehr einfach möglich.

## 13.2 Ausblick

Wie bei allen Makromodellen werden beim Strukturmodell der Einheitszelle zugunsten der numerischen Effizienz Vereinfachungen getroffen, die das Tragverhalten von Mauerwerksbauten nur mit einer Näherungslösung beschreiben können. Risse werden nur bis zu einer gewissen Feinheit aufgelöst - darunter wird das Tragverhalten phänomenologisch beschrieben. Aufgrund von Modell- und Diskretisierungsfehlern ergeben sich Anwendungsgrenzen, die ggf. durch eine Weiterentwicklung vergrößert werden können. Die sog. Einheitszelle, die für die effiziente Simulation von Mauerwerk entwickelt wurde, beinhaltet Lösungsansätze, die auch auf andere Werkstoffe mit sprödem Verhalten anwendbar sind.

**Erweiterungsmöglichkeiten des Strukturmodells und der konstitutiven Gesetze:**

In einem ersten Schritt wurde die Einheitszelle für ein quadratisches Steinformat entwickelt, bei dem sehr gute Berechnungsergebnisse erzielt werden konnten. Beim rechteckigen Steinformat war beim Steinversagen ein Kontakt- und Reibgesetz für den gerissenen Zustand nicht mehr ausreichend. Durch die Erweiterung um ein Dilatanzmodell konnte die Mechanik der Scherbänder im gerissenen Zustand über viele Lastzyklen abgebildet werden (siehe Abs. 11.3). Erst am Ende der Belastungsgeschichte traten beim Wandversuch Ermüdungsrisse auf, die vom numerischen Modell nicht mehr erfasst werden. Gegebenfalls kann durch die Erweiterung des Schädigungsmodells um ein Ermüdungsmodell (*low cycle fatigue*) dieser

Effekt berücksichtigt werden [Poo07]. Bei einer Erweiterung der Materialmodelle sind für die Identifizierung der zusätzlichen Materialparameter aufwändigere Versuche notwendig, so dass eine angemessene Komplexität des numerischen Modells immer abgewogen werden muss.

#### **Anwendungsgrenzen des Makromodells und Kombination mit anderen Berechnungsmethoden:**

Die Simulation mit Einheitszellen ist für die Anwendung auf große Strukturen konzipiert, bei denen die Lastabtragung mit homogenisierten Größen zutreffend beschrieben werden kann. Die Anwendungsgrenzen wurden mit Vergleichsrechnungen auf der Mesoskala und mit experimentellen Wandversuchen untersucht (siehe Abs. 9.2 und 11.5). Kleine Bauteile und schlanke Wandscheiben sollten mit einer genaueren Berechnung auf der Mesoskala untersucht werden. Erste Modellierungsstrategien für die Mesoskala inklusive Steinversagen sind in Abs. 11.6 angedacht. Die Kombination von Meso- und Makroskala in einem gemischten Modell wird in Abs. 10.3 vorgestellt. Mit dieser Vorgehensweise können ganze Gebäude effizient auf der Makroskala simuliert und einzelne Bauteile (schlanke, hochbelastete Wände) auf der Mesoskala genauer untersucht werden.

#### **Experimentelles und numerisches Bestimmen der Versagenskräfte:**

Mit einem diagonalen Druckversuch konnten die Versagenskräfte für das quadratische Steinformat sehr kostengünstig am Lehrstuhl für Massivbau der Technischen Universität München bestimmt werden [ZS11]. Im Vergleich zu Materialprüfungen an noch kleineren Proben wird bei diesem Versuchsaufbau ein repräsentativer Ausschnitt des Mauerwerksverbands maßstabsgetreu geprüft. Für rechteckige Steinformate ist diese einfache Prüfmethode versuchsbedingt nicht mehr durchführbar. Der diagonale Druckversuch würde zu einem Fugen- und nicht zu einem Steinversagen führen. Daher wurde das Mikromodell in Abs. 8.3.2 anhand des quadratischen Steins kalibriert und die Versagenskräfte beim rechteckigen Stein mit numerischen Versuchen auf der Mikroskala bestimmt (siehe Abs. 11.2). Ein weiteres Kalibrieren der Versagenskräfte auch mit experimentellen Kleinkörperversuchen wird empfohlen.

#### **Erweiterung auf ein 3-dimensionales Berechnungsmodell:**

Grundsätzlich erscheint das Strukturmodell auch auf eine 3-dimensionale Formulierung für die Berechnung von Wänden erweiterbar, die senkrecht zur Wandebene belastet werden. Durch die Reduzierung auf die wesentlichen Versagensmoden konnte beim 2-dimensionalen Modell unter Scheibenbelastung das Tragverhalten mit einer minimalen Anzahl an Freiheitsgraden beschrieben werden. Aus Sicht der Rechenkapazität ist eine 3D-

Formulierung mit entsprechend mehr Freiheitsgraden problemlos möglich. Für diese Erweiterung müssten die Scheibenelemente durch Kontinuums-elemente und die linienförmigen Kontaktelemente durch flächige Elemente ersetzt werden. Entsprechende Ansätze bei der Element- und Materialformulierung sind in [BBR00, SK09] gegeben.

Erste Untersuchungen in [HM95, Jox09, AB05, BR09] zeigten, dass ein *diskretes Rissmodell* im Vergleich zum *verschmierten Ansatz* wesentlich schwieriger erweiterbar ist. Allerdings sind beim Mauerwerk aufgrund der bevorzugten Versagensflächen Vereinfachungen möglich.

#### **Berechnungsansätze für weitere Werkstoffe:**

Der Lösungsansatz, mit einer Einheitszelle einen charakteristischen Ausschnitt aus einer periodischen Struktur zu beschreiben, lässt sich auf andere Verbundwerkstoffe, wie zum Beispiel faserverstärkte Werkstoffe, übertragen. Bei einem neuen Verbundwerkstoff müssten charakteristische Versagensmoden identifiziert und mit einer entsprechenden Einheitszelle abgebildet werden.

Das vorgestellte *erweiterte diskrete Rissmodell* kombiniert den Spannungstensor vom verschmierten Rissmodell mit der diskontinuierlichen Kinematik beim diskreten Ansatz (siehe Abs. 8.1). Die Robustheit und Genauigkeit von diesem Rissmodell wurde bei verschiedenen Berechnungen auf der Mikro-, Meso- und Makroskala untersucht (siehe Abs. 8.2, 11.6 und 8.5). Damit ist dieses Rissmodell auch für andere Werkstoffe und Grenzschichten anwendbar. Klebefugen, Schweißnähte bei Stahlverbindungen oder die Fuge zwischen Aufbeton und Altbeton sind praxisrelevante Anwendungsmöglichkeiten für dieses erweiterte diskrete Rissmodell.



## Anhang A

# Homogenisierungsschritte für die Einheitszelle

Um die Einheitszelle auf andere Mauerwerksarten anwenden zu können, sind die wichtigsten Homogenisierungsschritte hier zusammengefasst.

Bei diesem Makromodell werden lokale Effekte und Spannungskonzentrationen zugunsten der numerischen Effizienz nicht mehr abgebildet. Diese Vereinfachung auf Elementebene muss im Gegenzug durch ein Materialmodell mit reduzierten Steifigkeiten und abgeminderten Festigkeiten kompensiert werden. Aus homogenisierten Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Rissöffnungsbeziehungen werden geeignete Materialparameter für die Makroskala abgeleitet. Die makroskopischen Spannungskurven können entweder aus experimentellen Kleinkörperversuchen (siehe schräger Druckversuch von Abs. 8.3.3) oder aus numerischen Versuchen (siehe Abs. 3.2.1 und 3.1) bestimmt werden.

Im Vergleich zum experimentellen Versuch bietet die numerische Analyse mit einem Mikromodell viele Vorteile: die innere Lastabtragung und die Spannungsverteilung kann detaillierter ausgewertet, Materialstreuungen können ausgeblendet und Lasteinleitungseffekte mittels periodischer Randbedingungen reduziert werden. Allerdings müssen für die Mikromodelle selbst wiederum Materialparameter für Stein und Mörtel bestimmt werden, so dass kostenintensive experimentelle Versuche nicht vollständig vermieden werden. Im Vergleich zu großformatigen Versuchen an Mauerwerksprüfkörpern sind diese Materialtests wesentlich einfacher.

In dieser Arbeit werden drei separate Homogenisierungsschritte für die jeweiligen Verformungsmoden des Mauerwerks vorgeschlagen:

1. Elastische Verformung des Kontinuums Mauerwerks
2. Horizontales und treppenförmiges Fugenversagen
3. Vertikales und diagonales Steinversagen

Alle Verformungsmoden können mit der periodischen Zelle von Abs. 6.2.1 analysiert werden.

**zu Schritt 1:** (siehe Abs. 6.2)

Die Verformung des Kontinuums Mauerwerks wird mit einem elastischen Mikromodell abgeschätzt, damit die lokalisierten Versagensmoden von Schritt 2 und 3 ausgeblendet werden. Bei der periodischen Zelle wird vorrangig die Mikrostruktur durch die unvermörtelten vertikalen Stoßfugen abgebildet, die mit drei Einheits-Lastfällen auf  $\langle \sigma_{xx} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{yy} \rangle$  und  $\langle \tau_{xy} \rangle$  getestet wird. Für die Makroskala wird daraus ein äquivalentes orthotropes Elastizitätsmodell bestimmt.

**zu Schritt 2:** (siehe Abs. 7.3 und 7.4)

Für das Fugen- und Steinversagen ist ein nichtlinearer Homogenisierungsschritt erforderlich. Aufgrund der lokalisierten Versagensmoden wird die gesamte Verformung der periodischen Zelle in einen kontinuierlichen Anteil  $\langle \epsilon \rangle$  und einen diskontinuierlichen Anteil  $\langle [[\mathbf{u}]] \rangle$  aufgespalten. Die additive Zerlegung der Verformung ist abhängig von der Rissorientierung, die mit der Normale  $\mathbf{n}$  definiert ist (vgl. Abb. 7.11 mit 7.17). Mit der Spannungskontinuität nach CAUCHY kann auch der Spannungsvektor  $\langle \mathbf{t} \rangle$  abhängig von  $\langle \sigma \rangle$  und  $\mathbf{n}$  ausgedrückt werden, so dass die homogenisierte Spannungs-Rissöffnungsbeziehung vollständig ausgewertet werden kann.

Beim Fugenversagen wird die periodische Zelle unter verschiedenen Normalspannungsniveaus belastet und die Schubverzerrung monoton gesteigert. Mit dem Traglastmodell von Abs. 7.2 können geeignete Belastungskombinationen für die periodische Zelle definiert werden, so dass gezielt ein horizontales bzw. treppenförmiges Fugenversagen modelliert wird. Bei der Makroskala werden die Festigkeiten des Schädigungsmodells mit (7.27) anisotrop abgemindert und mit dem Strukturparameter  $w_\tau$  eine geeignete Kurvenanpassung von  $\tau$  der Makroskala an  $\langle \tau \rangle$  des Mikromodells durchgeführt.

**zu Schritt 3:** (siehe Abs. 8.3.2)

Das Steinversagen und die entsprechenden Homogenisierungsschritte sind stark vom Mauerwerksverband abhängig. Beim quadratischen Steinformat mit kurzen Überbindelängen sind vor dem Steinversagen die Mörtelfugen bereits treppenförmig entkoppelt, während beim rechteckigen Steinformat mit besserer Verzahnung die Mörtelfugen ungeschädigt sind. Entsprechend müssen die jeweiligen Mikromodelle angepasst werden (vgl. Abs. 8.3.2 mit 11.2). Die Mikromodelle werden mit hohen Druck- und moderaten Schubspannungen belastet, so dass Stein- und nicht Fugenversagen eintritt. Unter dieser Druck-Schubbelastung wird die Position der größ-

---

ten Zugspannung im Mikromodell ausgewertet. Beim quadratischen Stein tritt die größte Zugspannung in der Mitte des Steins auf, beim rechteckigen Stein in der Nähe der vertikalen Stoßfuge. Der Stein wird bei der periodischen Zelle vereinfachend linear-elastisch modelliert und damit lediglich die lokale Spannungskonzentration  $\sigma^{loc}$  abhängig von  $\langle \sigma \rangle$  bestimmt. Auf der Makroskala wird mit der Transformation (8.38) wieder von der makroskopischen Spannung  $\sigma$  auf  $\sigma^{loc}$  zurückgerechnet und damit die Festigkeit des Schädigungsmodells phänomenologisch abgemindert.

Für Lochsteine wird in Abs. 12.2 ein Mehrskalenmodell vorgeschlagen, bei dem in einem ersten Homogenisierungsschritt die Lochstruktur und in einem zweiten Schritt der Mauerwerksverband berücksichtigt wird.





## Anhang B

# Linearisierung der Materialmodelle

Für die Linearisierung der Materialmodelle sind folgende partielle Ableitungen erforderlich.

### B.1 Schädigungsmodell von Abs. 6.3

$$\sigma^{eq}(\tilde{\sigma}) = \sqrt{\tilde{\sigma}_{xx}^2 + \tilde{\sigma}_{yy}^2 - \tilde{\sigma}_{xx}\tilde{\sigma}_{yy} + 3\tilde{\tau}_{xy}^2} / \beta_{c,0} \quad \text{siehe (6.11)}$$

$$\text{Ableitung: } \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{1}{2 \beta_{c,0} \sqrt{\tilde{\sigma}_{xx}^2 + \dots}} \begin{bmatrix} 2\tilde{\sigma}_{xx} - \tilde{\sigma}_{yy} \\ 2\tilde{\sigma}_{yy} - \tilde{\sigma}_{xx} \\ 6\tilde{\tau}_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

### B.2 Schädigungsmodell von Abs. 7.1.2

$$\sigma^{eq}(\mathbf{t}_A) = \sigma_I / \beta_t - \sigma_{II} / \beta_c \quad \text{siehe (7.5)}$$

$$\text{mit } \sigma_{I,II}(\tilde{\mathbf{t}}_A) = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_A \pm \sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2} \quad \text{siehe (7.4)}$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_A = \mathbf{T} \mathbf{t}_A \quad \text{siehe (7.1)}$$

$$\text{Ableitung: } \frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \mathbf{t}_A} = 1/\beta_t \frac{\partial \sigma_I}{\partial \tilde{\mathbf{t}}_A} \mathbf{T} - 1/\beta_c \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \tilde{\mathbf{t}}_A} \mathbf{T} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{mit } \frac{\partial \sigma_{I,II}}{\partial \tilde{\mathbf{t}}_A} = \begin{bmatrix} \pm \frac{\tilde{\tau}_A}{\sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2}} \\ 1/2 \pm \frac{\tilde{\sigma}_A}{4\sqrt{\frac{1}{4} \tilde{\sigma}_A^2 + \tilde{\tau}_A^2}} \end{bmatrix}$$

### B.3 Plastizitätsmodell von Abs. 7.1.2

$$\begin{aligned} \tau_y &= -\mu \sigma_F + \tau_{y,1} + \tau_{y,2} && \text{siehe (7.8)} \\ \text{mit: } \tau_{y,1} &= \tau_\mu \left( 1 - \left( \frac{\sigma_\mu - \sigma_F}{\sigma_\mu} \right)^2 \right) && \text{für } \sigma_F \geq \sigma_\mu \\ \tau_{y,2} &= \tau_c \left( \frac{\alpha_u - \alpha_y}{\alpha_u} \right)^2 && \text{für } \alpha_y < \alpha_u \\ \tau_c &= \tau_{c,0} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_c - \sigma_F}{\sigma_c} \right)^2 \right) && \text{für } \sigma_F \geq \sigma_c \end{aligned}$$

$$\text{Ableitung: } H_1 = \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \alpha_y} = 2\tau_c \frac{\alpha_y - \alpha_u}{\alpha_u^2} \quad \text{für } \alpha_y < \alpha_u \quad (\text{B.3})$$

$$H_2 = \frac{\partial \tau_y}{\partial \sigma_F} = -\mu + \frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F} + \frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \sigma_F} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{mit: } \frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F} = 2\tau_\mu \frac{\sigma_\mu - \sigma_F}{\sigma_\mu^2} \quad \text{für } \sigma_F \geq \sigma_\mu$$

$$\frac{\partial \tau_{y,2}}{\partial \sigma_F} = \left( \frac{\alpha_u - \alpha_y}{\alpha_u} \right)^2 \frac{\partial \tau_c}{\partial \sigma_F}$$

$$\frac{\partial \tau_c}{\partial \sigma_F} = 2\tau_{c,0} \frac{\sigma_c - \sigma_F}{\sigma_c^2} \quad \text{für } \sigma_F \geq \sigma_c$$

Für  $\sigma_F < \sigma_\mu$  gilt  $\tau_{y,1} = \text{konstant}$  und  $\frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F} = 0$ . Analog ist bei den Materialparametern  $\sigma_\mu$  und  $\sigma_c$  für die Definition von  $\frac{\partial \tau_{y,1}}{\partial \sigma_F}$  und  $\frac{\partial \tau_c}{\partial \sigma_F}$  zu verfahren.

## B.4 Erweitertes diskretes Rissmodell von Abs. 8.2

$$\sigma^{eq}(\sigma) = w_\alpha \tilde{\sigma}^{eq} \quad \text{siehe (8.36)}$$

$$\frac{\partial \sigma^{eq}}{\partial \sigma} = w_\alpha \frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma} + \tilde{\sigma}^{eq} \frac{\partial w_\alpha}{\partial \sigma} \quad (\text{B.5})$$

Definition des RANKINE-DRUCKER/PRAGER-Modells von (8.36):

$$\tilde{\sigma}^{eq} = \begin{cases} \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\beta_1} + \sqrt{\frac{\sigma_I^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}}{\beta_2^2}} & \text{für } \sigma_I > 0 \\ \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\beta_1} + \sqrt{\frac{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}{\beta_2^2}} & \text{für } \sigma_I \leq 0 \end{cases}$$

Ableitung des RANKINE-DRUCKER/PRAGER-Modells:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma_I} \frac{\partial \sigma_I}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma_{II}} \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \sigma} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{mit: } \frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma_I} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} + \frac{\frac{2\sigma_I - \sigma_{II}}{\beta_3^2} - \frac{\sigma_{II}}{\beta_2^2}}{2\sqrt{\frac{\sigma_I^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}}{\beta_2^2}}} & \text{für } \sigma_I > 0 \\ \frac{1}{\beta_1} + \frac{2\sigma_I - \sigma_{II}}{2\beta_2^2 \sqrt{\frac{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}{\beta_2^2}}} & \text{für } \sigma_I \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}^{eq}}{\partial \sigma_{II}} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1} + \frac{2\sigma_{II} - \sigma_I}{2\beta_2^2 \sqrt{\frac{\sigma_I^2}{\beta_3^2} + \frac{\sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}}{\beta_2^2}}} & \text{für } \sigma_I > 0 \\ \frac{1}{\beta_1} + \frac{2\sigma_{II} - \sigma_I}{2\beta_2^2 \sqrt{\frac{\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2}{\beta_2^2}}} & \text{für } \sigma_I \leq 0 \end{cases}$$

Definition der Hauptspannungen:

$$\sigma_{I, II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{siehe (7.4)}$$

Ableitung der Hauptspannungen:

$$\frac{\partial \sigma_{I, II}}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \pm \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \pm \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Definition der Regularisierung für die Rissorientierung:

$$w_\alpha(\sigma) = 1 - w_{iso} \cos^2 \Delta\alpha \quad \text{siehe (8.31)}$$

Ableitung der Regularisierung:

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial \sigma} = 2 w_{iso} \cos \Delta\alpha \sin \Delta\alpha \frac{\partial \Delta\alpha}{\partial \sigma} - \cos^2 \Delta\alpha \frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma} \quad (\text{B.8})$$

Definition von  $w_{iso}$ :

$$w_{iso}(\sigma) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{\sigma_I - \sigma_{II}}\right)^2} \quad \text{siehe (8.32)}$$

Ableitung:

$$\frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma} = \frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma_I} \frac{\partial \sigma_I}{\partial \sigma} + \frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma_{II}} \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \sigma} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{mit } \frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma_I} = \sigma_{II} \frac{\sigma_I^2 - \sigma_{II}^2}{(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2)^2}$$

$$\frac{\partial w_{iso}}{\partial \sigma_{II}} = -\sigma_I \frac{\sigma_I^2 - \sigma_{II}^2}{(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2)^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial \sigma} \text{ und } \frac{\partial \sigma_{II}}{\partial \sigma} \text{ siehe (B.7)}$$

Orientierung der Hauptspannung  $\alpha_\sigma$  und des Kontaktelementes  $\alpha_e$ :

$$\Delta\alpha(\sigma) = \alpha_\sigma - \alpha_e \quad \text{siehe (8.33)}$$

$$\alpha_\sigma(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) & \text{für } \sigma_{xx} > \sigma_{yy} \\ \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{für } \sigma_{xx} \leq \sigma_{yy} \end{cases} \quad \text{siehe (8.34)}$$

$\alpha_e$  konstant und nicht von  $\sigma$  abhängig

Ableitung:

$$\frac{\partial \Delta\alpha}{\partial \sigma} = \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial \sigma} = \frac{1}{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 \left( 1 + \left( \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)^2 \right)} \begin{bmatrix} -\tau_{xy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

# Notation

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen:

## Abkürzungen

FE	Finite Elemente
M	Mörtel, Mörtelfuge
S	Stein

## Geometrie

A	Fläche
V	Volumen
h	Steinhöhe
l	Steinlänge
$\alpha$	Winkel

## Kinematik

$\mathbf{u}, u$	Verschiebungsvektor, Verschiebung
$\mathbf{d}$	Vektor der Verschiebungen an FE-Knoten
$\epsilon, \epsilon$	Dehnungstensor, Dehnung
$[[\mathbf{u}]]$	diskontinuierliche Verschiebung der Rissöffnung

## Kräfte, Lasten, Spannungen

F	Einzellast
M	Moment
q	Linien- oder Flächenlast
$\sigma$	Spannungstensor
$\sigma_I, \sigma_{II}$	Hauptspannungen
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	Spannungskomponenten von $\sigma$
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor ( <i>traction stress</i> )
$\sigma, \tau$	Normal- und Schubspannungen von $\mathbf{t}$

**Konstitutive Gesetze, Materialmodelle***elastische Materialparameter*

$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	Querdehnzahl
$\mathbf{C}$	Materialtensor
$C_{xxxx}, C_{xxyy}, C_{xxxy} \dots$	Komponenten des Materialtensors
$\mathbf{D}$	Nachgiebigkeitstensor
$p$	Penalty-Steifigkeit für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung
$\mathbf{C}$	Steifigkeitsmatrix für die Spannungs-Rissöffnungsbeziehung

*inelastische Materialparameter, Festigkeiten*

$\beta_t, \beta_c, \beta_b$	Zugfestigkeit, Druckfestigkeit, biaxiale Druckfestigkeit
$G_{f,t}$	Bruchenergie (einachsiger Zug)
$\mu$	Reibkoeffizient für Oberflächenrauigkeit
$\tau_{c,0}, \tau_\mu$	Kohäsive Schubspannungen beim Reibmodell

*Materialmodelle*

$\epsilon^{pl}, [[\mathbf{u}]]^{pl}$	Plastische Dehnung bzw. Rissöffnung
$\mathbf{t}_A$	Adhäsiiver Spannungsvektor (ungeschädigter Anteil von $\mathbf{t}$ )
$\mathbf{t}_F$	Geschädigter Anteil des Spannungsvektors mit Kontakt- und Reibmodell (Index $F$ für <i>Friction</i> )
$\mathbf{t}_K$	Spannungsvektor bei einem Kontaktmodell (ohne Reibung)
$d$	Skalare Schädigungsvariable
$f_y, f_d$	Fließfunktion, Schädigungsfunktion
$\sigma^{eq}$	Vergleichsspannung
$\alpha$	Vektor der internen Variablen
$\alpha_y$	Interne Variable äquivalent zur plastischen Verzerrung bei Plastizitätsmodellen
$\alpha_d$	Interne Variable äquivalent zur Vergleichsspannung bei Schädigungsmodellen

*Mehrskalensmodelle*

$\langle [[\mathbf{u}]] \rangle, \langle \epsilon \rangle$	Homogenisierte Rissöffnung, Dehnung
$\langle \mathbf{t} \rangle, \langle \sigma \rangle$	Homogenisierter Spannungsvektor, Spannungstensor
$\sigma^A, \sigma^B$	Spannungen der Mikroskala $A$ und der Mikroskala $B$

# Literaturverzeichnis

- [AB05] P.M.A Areias and T. Belytschko. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 63:760–788, 2005.
- [ABTT83] C. Alessandri, S.B. Bati, G. Tempest, and U. Tonietti. Investigation on the behavior of masonry buildings: the experiments of Salvitelle (in Italian). Technical report, University of Florence, Faculty of Achitecture, 1983.
- [AC08] A. Anthoine and P. Capéran. Earthquake tests and analysis of the experimental results. Technical Report D 8.3, ESECMaSE, 2008.
- [Ant95] A. Anthoine. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *Int. J. Solids Structures*, 32:137–163, 1995.
- [AS06] G. Alfano and E. Sacco. Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 68:542–582, 2006.
- [Baz83] Bazant, Z.-P. and Oh, B.-H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16:155–177, 1983.
- [Baz04] Bazant, Z.P. Quasibrittle fracture scaling and size effect - final report. *Materials and Structures*, 37:547–568, 2004.
- [BB99] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 45:601–620, 1999.
- [BBR00] K.-U. Bletzinger, M. Bischoff, and E. Ramm. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers and Structures*, 75:321–334, 2000.

- [BGM10] C. Butenweg, C. Gellert, and U. Meyer. Erdbebenbemessung bei Mauerwerksbauten. In *Mauerwerk Kalender 2010*. Ernst & Sohn, 2010.
- [BLS08] T. Belytschko, S. Loehnert, and J.-H. Song. Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 73:869–894, 2008.
- [Bor86] R. de Borst. *Non-Linear Analysis of Frictional Materials*. PhD thesis, Delft, 1986.
- [BR09] I. Bruss and E. Ramm. Modelling of continuous curved crack surfaces in three dimensional composite structures. In *International Conference on Extended Finite Element Method*, 2009.
- [Bra05a] Brameshuber, W. and Schmidt, U. Untersuchungen zur Bestimmung von Stoffgesetzen von Kalksandsteinen und des Verbundes - Experimentelle Untersuchungen. Technical Report F7044/1, Institut für Bauforschung Aachen, 2005.
- [Bra05b] Brameshuber, W. and Schmidt, U. Untersuchungen zur Bestimmung von Stoffgesetzen von Kalksandsteinen und des Verbundes - Theoretische Untersuchungen. Technical Report F7044/2, Institut für Bauforschung Aachen, 2005.
- [BRN06] R. de Borst, J. Remmers, and A. Needleman. Mesh-independent discrete numerical representations of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 73:160–177, 2006.
- [CIL07] I. Carol, A. Idiart, and C. López. Multiaxial behavior of concrete - a mesomechanical approach. *Damage and fracture in geomaterials*, 11:907–926, 2007.
- [CWC08] A. Caballero, K.J. Willam, and I. Carol. Consistent tangent formulation for 3d interface modeling of cracking/fracture in quasi-brittle materials. *Comput. Methods Appl. Engrg.*, 197:2804–2822, 2008.
- [DIN96] DIN 1053 Teil 1: Mauerwerk, 1996.
- [DMB01] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:6825–6846, 2001.



- [Eri83] A. Eringen. Theories of nonlocal plasticity. *International Journal of Engineering Science*, 21:741–751, 1983.
- [ESE04] ESECMaSE. Stress-strain-relation of perforated brick. Technical report, National Technical University of Athens, 2004.
- [Fei04] C. Feist. *A Numerical Model for Cracking of Plain Concrete Based on the Strong Discontinuity Approach*. PhD thesis, Universität Innsbruck, 2004.
- [FKLH04] C. Feist, W. Kerber, H. Lehar, and G. Hofstetter. A comparative study of numerical models for concrete cracking. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2004.
- [For04] G. Formica. *Multilevel Analysis of Masonry Buildings*. PhD thesis, Università Degli Studi della Calabria, 2004.
- [FSC02] G. Formica, V. Sanslone, and R. Casciaro. A mixed solution strategy for the nonlinear analysis of brick masonry walls. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:5847–5876, 2002.
- [FSE04] E. Fehling, J. Stürz, and A. Emami. Test results on the behaviour of masonry under static (monotonic and cyclic) in plane lateral loads. Technical Report D 7.1a, Universität Kassel, 2004.
- [Fur10] T. Furtmüller. *Numerische und experimentelle Untersuchungen von Mauerwerk in Gründerzeithäusern in Hinblick auf deren Erdbebensicherheit*. PhD thesis, Universität Innsbruck, 2010.
- [Gan85] H.R. Ganz. *Mauerwerksscheiben unter Normalkraft und Schub*. PhD thesis, ETH Zürich, 1985.
- [Gel10] C. Gellert. *Nichtlinearer Nachweis von unbewehrten Mauerwerksbauten unter Erdbebeneinwirkung*. PhD thesis, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 2010.
- [GJ06] P. Grassl and M. Jirásek. Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*, 43:7166–7196, 2006.
- [GJ08] P. Grassl and M. Jirasék. Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:1921–1943, 2008.

- [GT82] H.R. Ganz and B. Thürlimann. Versuche über die Festigkeit von zweiachsig beanspruchtem Mauerwerk. Technical Report Versuchsbericht Nr. 7502-3, ETH Zürich, 1982.
- [GT84] H.R. Ganz and B. Thürlimann. Versuche an Mauerwerksscheiben unter Normalkraft und Querkraft. Technical Report Versuchsbericht Nr. 7502-4, ETH Zürich, 1984.
- [HH98a] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure. *Computers and Structures*, 69:707–717, 1998.
- [HH98b] B. Hassani and E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers and Structures*, 69:719–738, 1998.
- [HM95] G. Hofstetter and H.A. Mang. *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Vieweg, 1995.
- [HMP76] A. Hillerborg, M. Modéer, and P.-E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773–781, 1976.
- [Hug87] J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Dover publications, 1987.
- [Jag00] M. Jagfeld. *Tragverhalten und statische Berechnung gemauerter Gewölbe bei großen Auflagerverschiebungen - Untersuchungen mit der Finite-Element-Methode*. PhD thesis, Technische Universität München, 2000.
- [JB02a] M. Jirásek and Z.P. Bažant. *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley, 2002.
- [JB02b] M. Jirásek and T. Belytschko. Computational resolution of strong discontinuities. In *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- [Jir98] M. Jirásek. Nonlocal models for damage and fracture: comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35:4133–4145, 1998.

- [Jir00] M. Jirasék. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188:307–330, 2000.
- [Jir05] M. Jirasék. Non-local damage model based on displacement averaging. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 63:77–102, 2005.
- [Jox09] S. Jox. *3D hygromechanische Modellierung von Rissbildung in Verbindung mit Feuchtetransport in Betonstrukturen auf Basis der Extended Finite Element Method*. PhD thesis, Bochum, 2009.
- [Kac86] L.M. Kachanov. *Continuum damage mechanics*. Nijhoff, M., 1986.
- [Kol05] D. Kolymbas. *Geotechnik, Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau*. Springer, 2005.
- [Kra03] Krausz. *Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2003.
- [Kuh00] E. Kuhl. *Numerische Modelle für kohäsive Reibmaterialien*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2000.
- [Lac99] R. Lackner. *Berechnung von Flächentragwerken aus Stahlbeton mittels adaptiver Finiten Elemente*. PhD thesis, Technische Universität Wien, 1999.
- [Lem92] J. Lemaître. *A Course on Damage Mechanics*. Springer, 1992.
- [Leu05] M. Leukart. *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2005.
- [LO89] Y. Leroy and M. Ortiz. Finite element analysis of strain localization in frictional materials. *Int. J. Numer. and Anal. Meth. in Geomechanics*, 13:53–74, 1989.
- [Lou96] P.B. Lourenço. *Computational Strategies for Masonry Structures*. PhD thesis, Delft, 1996.
- [LRB98] P.B. Lourenço, J.G. Rots, and J. Blaauwendraad. Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation. *Journal of Structural Engineering*, 124:642–652, 1998.
- [MAC07] M. Mistler, A. Anthoine, and Butenweg C. In-plane and out-of-plane homogenisation of masonry. *Computers and Structures*, 85:1321–1330, 2007.

- [MB96] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139:289–314, 1996.
- [MB02] N. Moës and T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813–833, 2002.
- [MBFS07] M. Mistler, C. Butenweg, E. Fehling, and J. Stürz. Verformungsbasierte seismische Bemessung von Mauerwerksbauten auf Grundlage zyklischer Wandversuche. *Bauingenieur*, 82:3–11, 2007.
- [MH08] H.A. Mang and G. Hofstetter. *Festigkeitslehre*. Springer, 2008.
- [Mie97] Jan G. M. van Mier. *Fracture process of concrete*. CRC Press, 1997.
- [Mil11] G. Milani. Simple homogenization model for the non-linear analysis of in-plane loaded masonry walls. *Computers and Structures*, in press, 2011.
- [Mis06] M. Mistler. *Verformungsbasiertes seismisches Bemessungskonzept für Mauerwerksbauten*. PhD thesis, Technische Hochschule Aachen, 2006.
- [MM73] W. Mann and H. Müller. Bruchkriterien für querkraftbeanspruchtes Mauerwerk und ihre Anwendung auf gemauerte Wandscheiben. *Die Bautechnik*, 50:421–425, 1973.
- [MM78] W. Mann and H. Müller. Schubtragfähigkeit von Mauerwerk. *Mauerwerkskalender*, 1:35–65, 1978.
- [MM85] W. Mann and H. Müller. Schubtragfähigkeit von gemauerten Wänden und Voraussetzung für das Entfallen des Windnachweises. *Mauerwerkskalender*, 1:95–114, 1985.
- [MM03] P. Mayorca and K. Meguro. Modeling masonry structures using the applied element method. *SEISAN KENK YU*, 55:581–584, 2003.
- [MMP03] G. Magenes, P. Morandi, and A. Penna. Test results on the behaviour of masonry under static cyclic in plane lateral loads. Technical report, University of Pavia, 2003.

- [Moj95] N. Mojsilović. *Zum Tragverhalten von kombiniert beanspruchtem Mauerwerk*. PhD thesis, ETH Zürich, 1995.
- [MPG04] T.J. Massart, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. Mesoscopic modeling of failure and damage-induced anisotropy in brick masonry. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23:719–735, 2004.
- [MPG07] T.-J. Massart, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations with localization of damage. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 69:1022–1059, 2007.
- [MPGG05] T.J. Massart, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, and S. Gottcheiner. Mesoscopic modeling of failure in brick masonry accounting for three-dimensional effects. *Engineering Fracture Mechanics*, 72:1238–1253, 2005.
- [MSMB00] N. Moës, N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. An extended finite element method (X-FEM) for two- and three-dimensional crack modeling. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, 2000.
- [OHS06] J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:4732–4752, 2006.
- [OHSC02] J. Oliver, A.E. Huespe, E. Samaniego, and E.W.V. Chaves. Modelling strong discontinuities in solid mechanics by means of strain softening constitutive equations. In *Proc. World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*, pages 363–372, 2002.
- [Pag83] A.W. Page. The strength of brick masonry under biaxial tension-compression. *International Journal of Masonry Construction*, 3:26–31, 1983.
- [Pah04] D.H. Pahr. Linear and Non-Linear Homogenization using FEM. Technical report, Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik TU Wien, 2004.

- [PCR11] L. Pelà, M. Cervera, and P. Roca. Continuum damage model for orthotropic materials: Application to masonry. *Comp.Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200:917–930, 2011.
- [Plu92] R. van der Pluijm. Material properties of masonry and its components under tension and shear. In *6th Canadian Masonry Symposium*, pages 675–686, 1992.
- [Poo07] L.P. Pook. *Metal fatigue*. Springer, 2007.
- [PU03] S. Pietruszczak and R. Ushaksarai. Description of inelastic behaviour of structural masonry. *International Journal of Solids and Structures*, 40:4003–4019, 2003.
- [Rik79] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 15:529–551, 1979.
- [Roc04] P. Roca. Simplified methods for assessment of masonry shear-walls. In *6th Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sismica*, pages 101–117, 2004.
- [Rot88] J.G. Rots. *Computational Modelling of Concrete Fracture*. PhD thesis, Delft, 1988.
- [Sch92] J.C. Schellekens. *Computational strategies for composite structures*. PhD thesis, Delft, 1992.
- [Sch04] R. Schlegel. *Numerische Berechnung von Mauerwerksstrukturen in homogenen und diskreten Modellierungsstrategien*. PhD thesis, Bauhaus-Universität Weimar, 2004.
- [Sei94] W. Seim. *Numerische Modellierung des anisotropen Versagens zweiachsiger beanspruchter Mauerwerksscheiben*. PhD thesis, Karlsruhe, 1994.
- [SGR09] A. Spada, G. Giambanco, and P. Rizzo. Damage and plasticity at the interfaces in composite materials and structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198:3884–3901, 2009.
- [SH00] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 2000.
- [SK09] J. Schmidt and M. Kaliske. Models for numerical failure of wooden structures. *Engineering Structures*, 31:571–579, 2009.

- [SSS07] P. Schubert, K. Schneider, and T. Schoch. *Mauerwerksbau-Praxis*. Bauwerk, 2007.
- [Stü11] J. Stürz. *Ein empirischer Ansatz zur Beschreibung der Horizontaltragfähigkeit gemauerter Wandscheiben unter Berücksichtigung der Interaktion innerhalb der Gebäudestruktur*. PhD thesis, Universität Kassel, 2011.
- [Sua95] R.L.M. Suanno. *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 1995.
- [TF06] R. Technev and B. Falzon. A pseudo-transient solution strategy for the analysis of delamination by means of interface elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42:698–708, 2006.
- [Tho05] B. Thomée. *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlfaserbetonkonstruktionen*. PhD thesis, Technische Universität München, 2005.
- [Val11] B. Valentini. *A three-dimensional constitutive model for concrete and its application to large scale finite element analyses*. PhD thesis, Universität Innsbruck, 2011.
- [ZFG<sup>+</sup>04] K. Zilch, W. Finkch, S. Grabowski, D. Schermer, and W. Scheufler. Test results on the behaviour of masonry under static cyclic in plane lateral loads. D 7.1b, Technische Universität München, [www.esecmase.org](http://www.esecmase.org), 2004.
- [ZFG<sup>+</sup>08] K. Zilch, W. Finkch, S. Grabowski, D. Schermer, and W. Scheufler. Test results on the earthquake resistance on improved masonry materials by pseudo dynamic tests. D 7.2b, Technische Universität München, [www.esecmase.org](http://www.esecmase.org), 2008.
- [ZGS08] K. Zilch, S. Grabowski, and W. Scheufler. Experimentelle Untersuchungen des nichtlinearen Tragverhaltens zusammengesetzter Schubwandquerschnitte aus unbewehrtem Mauerwerk unter Erdbebenbeanspruchung. Technical Report Z 6 -10.07.03-04.10, Technische Universität München, 2008.
- [Zie05] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. Elsevier, 2005.
- [ZL07] A. Zucchini and P.B. Lourenço. Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach. *Computers and Structures*, 85:193–204, 2007.

- [ZS11] G. Zilch and W. Scheufler. DFG-Abschlussbericht - Numerische Modellierung von Mauerwerk mit diskreten Elementen auf Basis experimenteller Methoden. Technical report, Technische Universität München, 2011.