

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Schätzverfahren in einem neuen  
COGARCH-Modell**

Diplomarbeit

von

Matthias Zapp

Themensteller/in: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Betreuer/in: Stephan Haug

Abgabetermin: 15. Oktober 2004

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 15. Oktober 2004

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Claudia Klüppelberg für die interessante Themenstellung und freundliche Unterstützung danken.

Besonderer Dank geht auch an Stephan Haug für die Ideen und vielen Anmerkungen sowie an Thierry Jeantheau, der mit seinen Vorschlägen die Richtung der Arbeit maßgeblich beeinflusst hat.

Unbedingt erwähnen möchte ich auch Dr. Alexander Lindner, der trotz großer räumlicher Entfernung in entscheidenden Situationen zur Hilfe stand.

Meinen Eltern möchte ich für die Unterstützung während der gesamten Studienzzeit danken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Modellierung von Volatilität . . . . .	1
1.2	Empirische Charakteristika von Finanzzeitreihen . . . . .	4
1.3	Ziel und Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>ARCH-Prozesse und Erweiterungen</b>	<b>6</b>
2.1	Das ARCH-Modell . . . . .	7
2.2	Das GARCH-Modell . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Das COGARCH-Modell von Klüppelberg, Lindner und Maller</b>	<b>10</b>
3.1	Definition . . . . .	10
3.2	Momente zweiter Ordnung des Volatilitätsprozesses . . . . .	13
3.3	Momente zweiter Ordnung des COGARCH . . . . .	15
3.4	Der zusammengesetzte Poisson-Prozess als Spezialfall . . . . .	16
3.4.1	Definition . . . . .	16
3.4.2	Momente . . . . .	17
3.4.3	Stationaritätskriterium . . . . .	19
3.4.4	Simulation . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Schätzverfahren</b>	<b>25</b>
4.1	Momentenschätzer . . . . .	27
4.1.1	Voraussetzungen . . . . .	27
4.1.2	Theoretische und empirische Momente . . . . .	29
4.1.3	Identifizierbarkeit der Parameter . . . . .	29
4.1.4	Vorgehen . . . . .	32
4.1.5	Konsistenz des Momentenschätzers . . . . .	34
4.1.6	Ergebnisse . . . . .	39
4.2	Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	45
4.2.1	QML in diskreten GARCH-Modellen . . . . .	45
4.2.2	Voraussetzungen . . . . .	47
4.2.3	Vorgehen im stetigen Fall . . . . .	47
4.2.4	Ergebnisse . . . . .	49

<b>5</b>	<b>Volatilitätsschätzer</b>	<b>55</b>
5.1	Bekannte Parameter . . . . .	55
5.2	Unbekannte Parameter . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Residuenanalyse und Beschreibungsgüte</b>	<b>63</b>
6.1	Residuenanalyse . . . . .	63
6.2	Wiedergabe von Charakteristika . . . . .	63
6.3	Der Smile-Effekt . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Lévy-Prozesse</b>	<b>70</b>
A.1	Definition . . . . .	70
A.2	Unendlich teilbare Verteilungen . . . . .	71
<b>B</b>	<b>Programmcodes</b>	<b>74</b>
B.1	Momentenschätzer . . . . .	74
B.2	QML-Schätzer . . . . .	76
B.3	Smile-Effekt . . . . .	77

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Modellierung von Volatilität

Volatilität ist einer der zentralen Begriffe in der Finanzmathematik. Sie beschreibt das Schwankungsverhalten von Finanzzeitreihen wie Wertpapieren, Rohstoffpreisen, Zinssätzen oder Wechselkursen im Laufe der Zeit und ist somit ein Maß für das Risiko von Kapitalanlagen. Forschung und Finanzdienstleister widmen der Volatilität große Aufmerksamkeit, da sie entscheidende Auswirkungen auf ökonomisches Handeln besitzt. So werden von ihr unter anderem die Struktur von Zinskurven, die Zusammensetzung von Portfolios oder die Preisbestimmung von Derivaten maßgeblich beeinflusst. Schon früh erkannte man, siehe z.B. Mandelbrot [34], dass das Risiko gemessen in Varianz und Kovarianz zeitlich nicht konstant ist. Doch tat man sich lange schwer, dieser empirischen Feststellung in Theorie und Praxis Rechnung zu tragen. So legt das wohl bekannteste und noch immer häufig verwendete Modell von Black und Scholes [7] Basiswerte zugrunde, die konstante Volatilität besitzen.

Die Versuche, Modelle zu entwickeln, die zeitliche Schwankungen in den zweiten Momenten erklären, führten im wesentlichen in zwei verschiedene Richtungen. Der Hauptunterschied zwischen diesen beiden Entwicklungen ist der Volatilitätsprozess. Bei Modellen mit autoregressiver bedingter Heteroskedastie (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, ARCH) wird die Volatilität eines (Preis-) Prozesses als Funktion vorangegangener Prozesswerte beschrieben. Hingegen wird bei Modellen mit stochastischer Volatilität (SV) die Volatilität von latenten Variablen bestimmt. Für beide Ansätze gibt es Ausführungen in diskreter und stetiger Zeit, die im Folgenden kurz vorgestellt werden, ohne dabei auf sämtliche Modellvoraussetzungen einzugehen.

Engle [16] gelang es durch sein zeitdiskretes ARCH-Modell, eine weithin anerkannte Grundstruktur zu schaffen, die Gegenstand von vielen hunderten Veröffentlichungen ist. Untersuchungen beschäftigen sich mit Eigenschaften, Verallgemeinerungen und Anwendbarkeit auf praktische Problemstellungen. Die mit Abstand am häufigsten verwendete Form ist ein Modell mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, GARCH) von Bol-

lerslev [9]. Sein GARCH(1,1)-Modell lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} Y_n &= \epsilon_n \sigma_n, \\ \sigma_n^2 &= \beta + \lambda Y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2, \end{aligned}$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\epsilon_n$  unabhängig identisch standardnormal verteilte Zufallsvariablen sind. Dies ist eine Verallgemeinerung des ARCH-Modells und wird in Kapitel 2 detailliert behandelt.

Die Vorteile dieses Vorgehens sind leicht zu erkennen. Finanzzeitreihen liegen in zeitdiskreter Form vor, häufig als Tagesdaten, daher bietet sich ein äquidistantes Zeitreihenmodell an. Die Abhängigkeit der Volatilität von vorangegangenen Prozesswerten erscheint plausibel und ist leicht zu verstehen. Weiterhin ist es relativ einfach, die Modellparameter mittels Maximum-Likelihood-Methode zu bestimmen. Dies sind einige Gründe, weshalb der GARCH-Ansatz unter den Praktikern große Popularität erlangt hat.

Andererseits bedarf es Einschränkungen an die Parameter  $\beta, \delta$  und  $\lambda$ , damit der Volatilitätsprozess nicht negativ werden kann. Auch eignen sich GARCH-Modelle nicht besonders gut, die Preise von komplizierteren Derivaten zu bestimmen.

Weniger weit entwickelt ist der Versuch, zeitstetige GARCH-Modelle aufzustellen. Hobson und Rogers [26] geben ein Modell an, dessen Volatilität durch exponentiell gewichtete Momente des vorangegangenen Preisprozesses  $Z$  gegeben ist:

$$\begin{aligned} dZ_t &= \mu \left( S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)} \right) dt + \sigma \left( S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)} \right) dB_t, \\ S_t^{(m)} &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} (Z_t - Z_{t-u})^m du, \end{aligned}$$

wobei  $B$  eine Brownsche Bewegung ist. Allerdings sind die probabilistischen und stationären Eigenschaften des Modells weitgehend unbekannt. Näher an zeitdiskreten GARCH-Prozessen orientieren sich Klüppelberg, Lindner und Maller (KLM) [30, 31] bei der Herleitung ihres COGARCH (*continuous time* GARCH) Modells. Dadurch kann es die wichtigsten GARCH-Eigenschaften beibehalten. Der integrierte COGARCH-Prozess  $G$  hat die Form

$$\begin{aligned} dG_t &= \sigma_t dL_t, \quad G_0 = 0, \\ \sigma_t^2 &= \left( \beta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t}, \\ X_t &= -t \log \delta - \sum_{0 < s \leq t} \log \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} (\Delta L_s)^2 \right), \end{aligned}$$

mit  $t \geq 0$  und einem Lévy-Prozess  $L$ . Obwohl das Modell völlig neu ist, sind bereits Aussagen über Stationarität, Momente und Tail-Verhalten bekannt.

Parallel zu den GARCH-Prozessen entwickelte sich die Klasse der Modelle mit stochastischer Volatilität (SV). Die Grundidee hierbei ist, die Volatilität nicht von vorangegangenen Beobachtungen abhängig zu machen, sondern von latenten Variablen. Der

bekannteste Ansatz in diskreter Zeit ist von Taylor [45]:

$$\begin{aligned} Y_n &= \epsilon_n \sigma_n e^{0.5 \sigma_n^2}, \\ \sigma_n^2 &= \gamma_0 + \gamma_1 \sigma_{n-1}^2 + \eta_{n-1}, \end{aligned}$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $\epsilon_n, \eta_n$  zwei Folgen, die jeweils aus unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen bestehen, untereinander jedoch nicht zwingend unkorreliert sind. So erlaubt  $\text{Cov}(\epsilon_n, \eta_n) \neq 0$  eine Modellierung des Leverage-Effekts, der im nächsten Abschnitt erklärt wird. Man erkennt sofort, dass im Gegensatz zu den GARCH-Modellen der Volatilitätsprozess nicht rein von vorangegangenen Prozesswerten abhängt, sondern durch die zusätzlichen Zufallsvariablen  $\eta_n$  bestimmt ist.

In stetiger Zeit werden sowohl der Preisprozess als auch die Volatilität meist mittels stochastischer Differentialgleichungen beschrieben. Dabei werden die beiden Prozesse von jeweils einer Quelle von Unsicherheit (meist Lévy-Prozess wie z.B. Brownsche Bewegung) getrieben. Beispielsweise hat das Modell von Hull und White [27], eines der ersten dieser Art, die Form

$$\begin{aligned} \frac{dY_t}{Y_t} &= \mu(Y_t, \sigma_t, t)dt + \sigma_t dB_t^{(1)}, \\ \frac{d\sigma_t^2}{\sigma_t^2} &= \gamma(\sigma_t^2, t)dt + \delta(\sigma_t^2, t)dB_t^{(2)}, \end{aligned}$$

wobei  $B^{(1)}$  und  $B^{(2)}$  eventuell korrelierte Brownsche Bewegungen sind. Den Autoren gelang es damit, den Preis einer europäischen Call-Option zu bestimmen. Ein neueres Modell, das viel Aufmerksamkeit erlangt hat, ist von Barndorff-Nielsen und Shephard [2, 3]. Hier wird die Volatilität durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess beschrieben, der von einem Lévy-Prozess getrieben wird:

$$\begin{aligned} dG_t &= (a + b\sigma_t^2)dt + \sigma_t dB_t, \\ \sigma_t^2 &= -\lambda\sigma_t^2 dt + dL_{\lambda t}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $B$  eine Brownsche Bewegung und  $L$  ein Subordinator. Dies erlaubt die Modellierung von Sprüngen.

Zu den Vorteilen der zeitstetigen SV-Modelle zählt die Möglichkeit, Daten konsistent auf verschiedenen Skalen zu beschreiben. Weiterhin sind sie für Hochfrequenzdaten und zur Preisbestimmung von Derivativen geeigneter als GARCH-Modelle. Allerdings ist es weitaus schwieriger, Parameter zu schätzen. Außerdem ist das Modell durch die Verwendung von zwei Quellen von Unsicherheit nicht mehr vollständig.

Folgende Tabelle fasst die betrachteten Beispiele der Modellklassen nochmals zusammen:

	GARCH-Modelle	SV-Modelle
diskret	Engle [16]; Bollerslev [9]	Taylor [45]
stetig	Hobson und Rogers [26]; Klüppelberg, Lindner und Maller [30]	Hull und White [27]; Barndorff-Nielsen und Shephard [2, 3]



Es gibt eine Reihe von Versuchen, einen Zusammenhang zwischen den zeitdiskreten GARCH-Modellen und den zeitstetigen SV-Modellen herzustellen. Beispielsweise gibt Nelson [37] Bedingungen an, unter denen stochastische Differenzgleichungen für immer kleiner werdende Zeitschritte gegen Itô-Prozesse konvergieren. Damit zeigt er, dass aus einem GARCH(1,1)-Prozess mittels klassischer Diffusionsapproximation ein SV-Modell wird. Andererseits zeigt dies auch, dass ein zeitstetiges GARCH-Modell nicht einfach durch Grenzwertbildung abgeleitet werden kann.

Welche Modellklasse man verwenden sollte, hängt neben dem Anwendungsgebiet auch von der Güte ab, mit der das Modell reale Daten beschreibt. Hier können Likelihood-Ratio-Statistiken einen Vergleich zwischen Modellen liefern. Anpassungsgüte spiegelt sich aber auch bei der Beschreibung empirischer Charakteristika wieder. Zwar wird es nie möglich sein, alle Eigenschaften wiederzugeben, jedoch ist eine zu schlechte Beschreibung von Merkmalen oft Grund, das Modell zu verwerfen. Im Folgenden werden einige typische Eigenschaften von Finanzzeitreihen aufgeführt.

## 1.2 Empirische Charakteristika von Finanzzeitreihen

Im Finanzbereich werden häufig Renditen von Wertpapieren betrachtet. Einige empirische Eigenschaften dieser Zeitreihen, die größtenteils auch für andere Beobachtungen wie Wechselkurse oder Zinssätze gelten, sind hier aufgezählt. Eine ausführliche Auflistung und weitere Referenzen finden sich in Ghysels, Harvey und Renault [22].

(i) *Volatilitätscluster*

Finanzzeitreihen weisen Phasen hoher und niedriger Volatilität auf. Im vorangegangenen Abschnitt wurden Möglichkeiten erwähnt, mit deren Hilfe diese wichtige Erkenntnis modelliert werden kann.

(ii) *Leptokurtosis*

Bereits Anfang der sechziger Jahre erkannte man, dass Renditen Verteilungen besitzen, die in den Enden mehr Masse haben als die Normalverteilung. Häufig wird hierfür auch der englische Ausdruck *fat* bzw. *heavy tailed* benutzt. Ein Hauptgrund dafür ist die erwähnte, schwankende Volatilität. Es besteht somit eine enge Verbindung zwischen Volatilitätscluster und Leptokurtosis.

(iii) *Leverage Effekt*

Die Erscheinung, dass Aktienkurse negativ mit der Volatilität korreliert sind, wird als Leverage-Effekt bezeichnet. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass ein fallender Aktienkurs zu einem höheren Verschuldungsgrad und somit zu mehr Unsicherheit führt.

(iv) *Inhomogene Ankunft von Information*

Viele Finanzzeitreihen werden an diskreten Zeitpunkten gleichen Abstands gemessen. Marktinformationen wie Handelsvolumen, Kursdaten, oder vorhersehbare Ereignisse (z.B. Dividendenankündigungen, Konjunkturdaten) treffen jedoch

unregelmäßig ein. Dies wird als mögliche Ursache für variierende Volatilität betrachtet. Verschiedene Ansätze versuchen, diese Erkenntnis in den Griff zu bekommen, indem sie die Zeitachse bezüglich der Ankunfts Häufigkeit von Information reskalieren.

(v) *Lange Beständigkeit der Volatilität*

Gerade in Hinblick auf Daten kleiner Schrittweiten (Hochfrequenzdaten) ist auffällig, dass die Autokorrelation sehr langsam abfällt. Ding und Granger [13] zeigen, dass auch tägliche Renditen verschiedener spekulativer Anlagen über mehrere Hundert Tage signifikant positiv korreliert sind.

(vi) *Verhalten impliziter Volatilität*

Auf Finanzmärkten werden Optionspreise häufig durch implizite Volatilität notiert. Obwohl diese immer auf einem spezifischen Modell, nämlich dem von Black und Scholes, basiert, ist es aufgrund der großen Akzeptanz dennoch sinnvoll, das Verhalten der impliziten Volatilität zu betrachten. Beispielsweise steigt (fällt) die implizite Volatilität mit der Laufzeit, falls sie für kurze Laufzeiten niedrig (hoch) ist. Über verschiedene Ausübungspreise einer Call-Option hinweg zeigt die implizite Volatilität eine U-förmige Kurve. Dies wird als *Smile-Effekt* bezeichnet.

### 1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Es wurde bereits einiges über GARCH- und SV-Modelle zur Modellierung von stochastischer Volatilität erwähnt. Der Ansatz von Klüppelberg, Lindner und Maller [30] lieferte dabei einen neuen Ansatz für ein zeitstetiges GARCH-Modell. Ziel dieser Arbeit ist es, Schätzverfahren zu entwickeln, mit denen die Parameter dieses Modells bestimmt werden können. Diese Aufgabe erweist sich bereits für bekannte GARCH und SV-Modelle als schwierig. Die dort verwendeten Methoden können nicht ohne weiteres übertragen werden, so dass neue Verfahren entwickelt werden müssen. Zunächst wird in Kapitel 2 das bereits erwähnte ARCH-Modell von Engle [16] vorgestellt und auf Erweiterungsmöglichkeiten, allen voran das GARCH-Modell von Bollerslev [9], eingegangen. Darauf aufbauend wird in Kapitel 3 der COGARCH-Prozess von Klüppelberg, Lindner und Maller [30] eingeführt. Es werden auch Aussagen zu Stationarität und Momenten zweiter Ordnung gemacht. Kapitel 4 zeigt zwei Schätzverfahren und testet diese mittels simulierter Daten. Die erste der beiden Methoden ist ein Momentenschätzer und basiert auf dem Vergleich von theoretischer und empirischer Autokovarianzfunktion. Die Zweite ist ein Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer, der durch das diskrete GARCH-Modell motiviert ist. Anschließend wird in Kapitel 5 ein Volatilitätsschätzer vorgestellt und einige seiner Eigenschaften beschrieben. Damit ist es möglich, in Kapitel 6 eine Residuenanalyse vorzunehmen. Schließlich werden in Kapitel 7 die Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf weitere Entwicklungsrichtungen gegeben.

# Kapitel 2

## ARCH-Prozesse und Erweiterungen

Modelle mit (generalisierter) autoregressiver bedingter Heteroskedastie bieten die Möglichkeit, die zwei wichtigsten empirischen Charakteristika von Finanzzeitreihen, Volatilitätscluster und Leptokurtosis, abzubilden. Im folgenden Kapitel werden diese Modelle vorgestellt und einige ihrer Eigenschaften untersucht.

Alle stochastischen Größen sind auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definiert. Die vom Preisprozess  $Y$  und Volatilitätsprozess  $\sigma^2$  erzeugte natürliche Filtration wird mit  $\{\mathcal{F}_n, n > 0\}$  bezeichnet. Zu Beginn des Kapitels werden noch einige Begriffe definiert. Dazu sei  $T$  Indexmenge für einen stochastischen Prozess.

**Definition 2.1 (Strikte Stationarität).** Ein Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  heißt strikt stationär, falls  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{D}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  für alle  $t_1, \dots, t_n, h \in T$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definition 2.2 (Autokovarianzfunktion).**  $(X_t)_{t \in T}$  sei ein stochastischer Prozess mit  $\text{Var}(X_t) < \infty \forall t \in T$ . Dann heißt

$$\gamma_X(r, s) = \text{Cov}(X_r, X_s) = E((X_r - E(X_r))(X_s - E(X_s))), \quad \forall r, s \in T,$$

Autokovarianzfunktion von  $(X_t)_{t \in T}$ .

**Definition 2.3 (Schwache Stationarität).** Ein Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  heißt schwach stationär, falls

$$(i) \quad E(|X_t|^2) < \infty \quad \forall t \in T,$$

$$(ii) \quad E(X_t) = \mu \quad \forall t \in T,$$

$$(iii) \quad \gamma_X(r, s) = \gamma_X(r+h, s+h) \quad \forall r, s, h : r, s, r+h, s+h \in T.$$

**Bemerkung 2.4.** Wenn  $(X_t)_{t \in T}$  strikt stationär ist mit  $E(X_t^2) < \infty$ , dann ist  $(X_t)_{t \in T}$  auch schwach stationär. Die Umkehrung gilt nicht.

**Bemerkung 2.5.** Für einen schwach stationären Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  gilt nach Definition  $\gamma_X(r, s) = \gamma(r-s, 0)$ . Man definiert deshalb  $\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \quad \forall t, h$ .

**Definition 2.6 (Weißes Rauschen).** Ein Prozess  $(Z_t)_{t \in T}$  heißt weißes Rauschen (white noise), falls

$$E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in T \quad \text{und} \quad \gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } h = 0, \\ 0 & \text{für } h \neq 0. \end{cases}$$

## 2.1 Das ARCH-Modell

Die Entwicklung der ARCH-Modelle begann mit der Vorstellung des einfachen univariaten ARCH-Modells durch Robert F. Engle. Im Jahr 2003 wurde er dafür zusammen mit Clive W.J. Granger mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Engle [16] definiert einen zeitdiskreter Prozess  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Form

$$\begin{aligned} Y_n &= \epsilon_n \sigma_n, \\ \sigma_n^2 &= \beta + \sum_{i=1}^q \lambda_i Y_{n-i}^2 \\ &= \beta + \Lambda(B) Y_n^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

als linearen ARCH-Prozess der Ordnung  $q$ , kurz ARCH( $q$ ). Dabei ist  $B$  der Backshift-Operator, definiert durch  $B^j Y_t = Y_{t-j}$ . Weiter steht  $\Lambda$  für das charakteristische Polynom  $\Lambda(B) = \lambda_1 B + \lambda_2 B^2 + \dots + \lambda_q B^q$  und  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge von nicht degenerierten, unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen ( $\epsilon_n \stackrel{D}{=} \epsilon$ ) mit  $P(\epsilon = 0) = 0$ . Die Parameter  $q$ ,  $\beta$  und  $\lambda_i$  erfüllen  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, q-1$  und  $\lambda_q > 0$ . Man erkennt, dass  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $q = 0$  gerade weißem Rauschen entspricht und somit ein homoskedastischer Prozess ist.

Nach (2.1) ist  $\sigma_n$  zum Zeitpunkt  $n-1$  bereits vorhersagbar. Betragsmäßig große Prozessrealisierungen führen zu einer hohen Varianz. Daher ist es einleuchtend, warum auf betragsmäßig große (kleine)  $Y_{n-q}, \dots, Y_{n-1}$  tendenziell wieder ein betragsmäßig großes (kleines)  $Y_n$  folgt. Es können die bereits angesprochenen Volatilitätscluster entstehen. Wird die Ordnung  $q$  des Prozesses bei ansonsten gleich bleibendem Modell vergrößert, so sind längere Phasen ähnlicher Volatilität wahrscheinlicher.

Im Folgenden wird für  $\epsilon$  die gängige Voraussetzung übernommen, dass  $E(\epsilon) = 0$  und  $\text{Var}(\epsilon) = 1$  ist. Da  $\sigma_n^2$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar ist, ergibt sich

$$E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(\epsilon_n \sigma_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n E(\epsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Weiterhin gilt auch für den unbedingten Erwartungswert

$$E(Y_n) = E(E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1})) = 0.$$

Die bedingte Varianz von  $Y_n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(\epsilon_n^2 \sigma_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - E(\epsilon_n \sigma_n | \mathcal{F}_{n-1})^2 \\ &= \sigma_n^2 E(\epsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - (\sigma_n E(\epsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}))^2 \\ &= \sigma_n^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde benutzt, dass  $\epsilon_n$  unabhängig von  $\mathcal{F}_{n-1}$  ist. Satz 2.7 wird zeigen, dass für die Varianz von  $Y_n$  im stationären Fall gilt

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{\beta}{1 - \sum_{i=1}^q \delta_i}.$$

Es ist wichtig, den Unterschied zwischen bedingter und unbedingter Volatilität zu verstehen. Die bedingte Varianz  $\sigma_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}$  ist vorhersagbar und durch die vorangegangenen  $q$  Prozesswerte bestimmt. Die unbedingte Varianz  $\sigma_n^2$  hingegen ist vollkommen stochastisch, und da  $E(\epsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$  ist, gilt

$$E(\sigma_n^2) = E(\sigma_n^2 E(\epsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})) = E(\sigma_n^2 \epsilon_n^2) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 = \text{Var}(Y_n).$$

Analog ist eine Unterscheidung zwischen bedingtem und unbedingtem ARCH-Prozess nötig. So ist  $Y_n | \mathcal{F}_{n-1}$  verteilt wie  $\sigma_n \epsilon_n$ , wobei  $\sigma_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar und somit bekannt ist. Beispielsweise gilt, falls  $\epsilon_n$  standardnormalverteilt ist, dass  $Y_n | \mathcal{F}_{n-1} \stackrel{D}{=} N(0, \sigma_n^2)$ , während  $Y_n$  eine fat tailed Verteilung besitzt. Die erste Frage in Hinblick auf die unbedingten Prozesse lautet stets, ob eine stationäre Lösung für diese existiert. Stationaritätsbedingungen werden im nächsten Abschnitt behandelt.

## 2.2 Das GARCH-Modell

Ein Grund für die große Popularität der ARCH-Struktur ist die Möglichkeit, das Modell in verschiedene Richtungen zu verallgemeinern. Zu den Erweiterungen zählt unter anderem das E-GARCH-Modell von Nelson [39], das den so genannten Leverage-Effekt erklären kann. Weitere Varianten sind das ARCH-M-Modell von Engle, Lilien und Robins [18], das IGARCH-Modell von Engle und Bollerslev [17] oder das FACTOR-ARCH-Modell von Engle, Ng und Rothschild [20].

Die populärste Verallgemeinerung ist jedoch das Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) Modell von Bollerslev [9]. Ein GARCH( $p, q$ )-Prozess hat die Form

$$Y_n = \epsilon_n \sigma_n \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \beta + \sum_{i=1}^q \lambda_i Y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{n-i}^2 \\ &= \beta + \Lambda(B) Y_n^2 + \Delta(B) \sigma_n^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit den Bedingungen des ARCH-Modells. Zusätzlich gilt  $p \in \mathbb{N}$  und  $\Delta(B)$  ist definiert durch  $\Delta(B) = \delta_1 B + \delta_2 B^2 + \dots + \delta_p B^p$ . Die Parameter erfüllen  $\delta_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, p-1$  und  $\delta_p > 0$ . Hier ist die bedingte Varianz bestimmt durch die vorangegangenen Werte des Preisprozesses und der Volatilität. Es ist einleuchtend, dass das GARCH-Modell die Volatilitätscluster noch besser erklären kann, da auch die vorangegangene Volatilität mit berücksichtigt wird.

Die erwähnten Überlegungen zu bedingten und unbedingten Verteilungen bei ARCH-Prozessen gelten im wesentlichen auch für das GARCH-Modell. Allerdings ist dieses flexibler und besser auf reale Daten anzupassen. So wird in der Praxis meist ein einfaches GARCH(1,1)-Modell verwendet.

Eine Reihe von Publikationen beschäftigt sich mit Stationaritätsbedingungen für GARCH( $p, q$ )-Prozesse, siehe z.B. Nelson [38] oder Bougerol und Picard [10].

**Satz 2.7.** (Bollerslev [9], Theorem 1) *Es gelte  $\epsilon \stackrel{D}{=} N(0,1)$ . Dann ist das durch (2.2) und (2.3) definierte GARCH( $p,q$ )-Modell strikt stationär mit  $E(Y_n) = 0$ ,  $\text{Var}(Y_n) = \beta(1 - \Lambda(1) - \Delta(1))^{-1}$  und  $\text{Cov}(Y_s, Y_t) = 0$  für  $s \neq t$  genau dann, wenn  $\Lambda(1) + \Delta(1) < 1$ .*

Der folgende Satz bezieht sich auf einen GARCH(1,1) Prozess, verlangt aber im Gegenzug keine Voraussetzungen an die Verteilung von  $\epsilon$ .

**Satz 2.8.** (KLM [30], Theorem 2.1) *Sei  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein GARCH(1,1) Prozess, d.h.  $Y_n = \epsilon_n \sigma_n$  mit  $\sigma_n^2 = \beta + \lambda Y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\beta > 0, \lambda \geq 0, \delta \geq 0$ . Weiterhin gelte*

$$E(|\log(\delta + \lambda \epsilon_1^2)|) < \infty \quad \text{und} \quad E(\log(\delta + \lambda \epsilon_1^2)) < 0. \quad (2.4)$$

*Dann sind der GARCH(1,1) und Varianzprozess stabil, d.h.  $Y_n \xrightarrow{D} Y$  und  $\sigma_n \xrightarrow{D} \sigma$ , für  $n \rightarrow \infty$  und endliche Zufallsvariablen  $Y$  und  $\sigma$ . Gilt (2.4) nicht, dann  $Y_n \xrightarrow{P} \infty$  und  $\sigma_n \xrightarrow{P} \infty$ , für  $n \rightarrow \infty$ .*

**Bemerkung 2.9.** *Bedingung (2.4) impliziert  $\delta < 1$ . Gilt umgekehrt  $\delta > 0$  und  $\delta + E(\epsilon_1^2) < 1$ , dann gilt (2.4) nach der Jensenschen Ungleichung.*

# Kapitel 3

## Das COGARCH-Modell von Klüppelberg, Lindner und Maller

Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt führen Versuche, GARCH-Modelle durch immer kleiner werdende Schrittweiten zeitstetig zu machen, auf Modelle mit stochastischer Volatilität, die zwei Quellen von Unsicherheit enthalten. Dies ist irritierend, da der GARCH-Prozess von nur einem White-Noise-Prozess getrieben wird. Aus ökonomischer Sicht ist ein Modell mit mehr Unsicherheiten nicht mehr vollständig. Weiterhin benötigt man Annahmen, beispielsweise über Risikoprämien, um Preise von Optionen zu bestimmen.

Einen anderen Ansatz beschreiben Klüppelberg, Lindner und Maller [30]. Ihr COGARCH-Modell beinhaltet nur eine Quelle von Unsicherheit und wird direkt durch das zeitdiskrete GARCH-Modell motiviert. Daher kann es die meisten GARCH-Eigenschaften übernehmen, denn sein Verhalten wird weiterhin einzig durch die Abhängigkeitsstruktur des Modells geprägt. Dieser zeitstetige Ansatz ist somit grundsätzlich verschieden von anderen SV-Modellen, dennoch sind viele gemeinsame Eigenschaften vorhanden. Ein Vergleich zu dem SV-Modell von Barndorff-Nielsen und Shephard [2, 3] ist in Klüppelberg, Lindner und Maller [31] zu finden.

Im Folgenden wird nun das COGARCH-Modell vorgestellt, Momente zweiter Ordnung hergeleitet und ein Spezialfall betrachtet. Sämtliche Beweise zu den folgenden Sätzen sind in Klüppelberg, Lindner und Maller [30] zu finden.

### 3.1 Definition

Der diskrete GARCH(1,1)-Prozess hat die Form

$$Y_n = \epsilon_n \sigma_n \quad \text{mit} \quad \sigma_n^2 = \beta + \lambda Y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei  $\beta > 0, \lambda \geq 0, \delta \geq 0$ . Rekursiv erhält man für  $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n^2 = \beta + (\delta + \lambda \epsilon_{n-1}^2) \sigma_{n-1}^2 \quad (3.1)$$

$$= \beta \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n-1} (\delta + \lambda \epsilon_j^2) + \sigma_0^2 \prod_{j=0}^{n-1} (\delta + \lambda \epsilon_j^2) \quad (3.2)$$

$$= \beta \int_0^n \exp \left( \sum_{j=[s]+1}^{n-1} \log(\delta + \lambda \epsilon_j^2) \right) ds + \sigma_0^2 \exp \left( \sum_{j=0}^{n-1} \log(\delta + \lambda \epsilon_j^2) \right). \quad (3.3)$$

Diese Darstellung bietet die Möglichkeit, die zeitdiskrete Umgebung zu verlassen und die Noise-Variablen  $\epsilon_i$  durch die Inkremente eines Lévy-Prozesses zu ersetzen.

Sei daher  $L$  ein Lévy-Prozess mit Sprüngen  $\Delta L = L_t - L_{t-}$ ,  $t \geq 0$ , und einem Lévy-Maß  $\nu_L \neq 0$ . Für die Definition des Lévy-Maßes und weiteren Eigenschaften von Lévy-Prozessen sei auf Anhang A verwiesen.

**Definition 3.1 (Càdlàg-Eigenschaft).** *Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , der fast sicher (f.s.) rechtsseitig stetige Pfade mit linksseitigen Grenzwerten besitzt, heißt càdlàg (continu à droite limité à gauche).*

In Hinblick auf Gleichung (3.3) wird der càdlàg Prozess  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definiert als

$$X_t = -t \log \delta - \sum_{0 < s \leq t} \log \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} (\Delta L_s)^2 \right), \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

wobei  $0 < \delta < 1, \lambda \geq 0$ . Mit  $\beta > 0$  und  $\sigma_0$  einer endlichen Zufallsvariable, unabhängig von  $(L_t)_{t \geq 0}$ , wird der linksseitig stetige Volatilitätsprozess  $\sigma^2 = (\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  analog zu (3.3) definiert als

$$\sigma_t^2 = \left( \beta \int_0^t e^{X_s} ds + \sigma_0^2 \right) e^{-X_t}, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Der integrierte COGARCH Prozess  $G = (G_t)_{t \geq 0}$ , definiert durch

$$dG_t = \sigma_t dL_t, \quad t > 0, \quad G_0 = 0, \quad (3.6)$$

ist càdlàg und springt zu den gleichen Zeiten wie  $L$  mit Sprunghöhen  $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$ ,  $t \geq 0$ . Wie bereits angedeutet übernehmen nun die Sprünge  $\Delta L_t$  die Rolle der Innovationen im zeitdiskreten Modell. Die Hoffnung ist nun, dass  $(G_t)_{t \geq 0}$  und  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  weiterhin GARCH ähnliches Verhalten aufweisen. Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Hoffnung berechtigt ist.

**Proposition 3.2.** (KLM [30], Proposition 3.2) *Der Prozess  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  erfüllt die stochastische Differentialgleichung*

$$d\sigma_{t+}^2 = \beta dt + \sigma_t^2 e^{X_t} d(e^{-X_t}), \quad t > 0, \quad (3.7)$$

mit der Lösung

$$\sigma_t^2 = \beta t + \log \delta \int_0^t \sigma_s^2 ds + \frac{\lambda}{\delta} \sum_{0 < s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 + \sigma_0^2, \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$



Aus Gleichung (3.1) folgt

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = \beta - (1 - \delta)\sigma_n^2 + \lambda\sigma_n^2\epsilon_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und Aufsummieren ergibt

$$\sigma_n^2 = \beta n - (1 - \delta) \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i^2 + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i^2 \epsilon_i^2 + \sigma_0^2 \quad (3.9)$$

analog zu (3.8). Diese Ähnlichkeit zeigt, dass in der Tat der COGARCH-Prozess die wichtige Rückkopplungs- und autoregressive Eigenschaft übernommen hat.

Im Hinblick auf Stationaritätsbedingungen lässt sich folgender Satz angeben:

**Satz 3.3.** (KLM [30], Theorem 3.1) *Sei*

$$\int_{\mathbb{R}} \log(1 + (\lambda/\delta)y^2) \nu_L(dy) < -\log \delta. \quad (3.10)$$

Dann folgt  $\sigma_t^2 \xrightarrow{D} \sigma_\infty^2$  für  $t \rightarrow \infty$ , wobei  $\sigma_\infty$  eine endliche Zufallsvariable ist, für die gilt

$$\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \beta \int_0^\infty e^{-Xt} dt.$$

Gilt umgekehrt (3.10) nicht, dann folgt  $\sigma_t^2 \xrightarrow{P} \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Das nächste Resultat besagt, dass  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  strikt stationär ist, falls der Prozess mit  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$  gestartet wird.

**Satz 3.4.** (KLM [30], Theorem 3.2) *Falls die Grenzvariable  $\sigma_\infty^2$  in Satz 3.3 existiert und  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$ , unabhängig von  $(L_t)_{t \geq 0}$ , dann ist  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  strikt stationär.*

Der Prozess  $G_t = \int_0^t \sigma_s dL_s, t \geq 0$ , erfüllt für beliebiges  $0 \leq y < t$

$$G_t = G_y + \int_{y+}^t \sigma_s dL_s, \quad t \geq 0.$$

Der Integrand  $(\sigma_s)_{y < s \leq t}$  hängt von der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt  $y$  nur durch  $\sigma_y$  ab und der Integrator ist von der Vergangenheit unabhängig. Daher folgt aus Satz 3.4:

**Korollar 3.5.** (KLM [30], Korollar 3.1) *Der bivariate Prozess  $(\sigma_t, G_t)_{t \geq 0}$  besitzt die Markoveigenschaft. Falls die Grenzvariable  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  die strikt stationäre Version des Prozesses mit  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$  ist, dann ist  $(G_t)_{t \geq 0}$  ein Prozess mit stationären Zuwächsen.*

**Bemerkung 3.6.** (i) *Die Analogie zwischen (3.8) und (3.9) ist nicht exakt, da die Parametrisierung leicht unterschiedlich ist:  $(1 - \delta)$  wird in der stetigen Version durch  $-\log \delta$  ersetzt.*

- (ii) Der Wert  $\lambda = 0$  ist zulässig in (3.4). In diesem Fall ist  $X_t = -t \log \delta$ ,  $t \geq 0$ , ( $0 < \delta < 1$ ), und mit (3.5) ergibt sich die triviale Lösung

$$\sigma_t^2 = \frac{\beta(1 - \delta^t)}{-\log \delta} + \sigma_0^2 \delta^t, t \geq 0.$$

Für den diskreten GARCH-Prozess ergibt sich aus (3.2) für  $\lambda = 0$

$$\sigma_n^2 = \beta \sum_{i=0}^{n-1} \delta^{n-1-i} + \sigma_0^2 \delta^n = \frac{\beta(1 - \delta^n)}{1 - \delta} + \sigma_0^2 \delta^n, n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt wiederum die Übereinstimmung zwischen dem diskreten und stetigen Fall. Dieselben Ergebnisse folgen für  $L \equiv 0$ .

- (iii) Da (3.4)-(3.10)  $\delta > 0$  voraussetzen, enthält der stetige GARCH keinen stetigen ARCH als Unterklasse. Um den ARCH Fall mit  $\delta = 0$  unterzubringen, ändert man (3.4) zu

$$X_t = -t \log \lambda - \sum_{0 < s \leq t} \log(\Delta L_s)^2 1_{\{\Delta L_s \neq 0\}}, t \geq 0.$$

Dies ist jedoch nur dann ein wohl definierter (Lévy) Prozess, falls  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist.

## 3.2 Momente zweiter Ordnung des Volatilitätsprozesses

Bereits (3.5) lässt erkennen, dass Momente von  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  mit gewissen exponentiellen Momenten von  $(X_t)_{t \geq 0}$  korrespondieren. Das folgende Lemma verdeutlicht diese Beziehung.

**Lemma 3.7.** (KLM [30], Lemma 4.1) Sei  $c > 0$ . Dann gilt

- (a) Für die Laplace-Transformierte von  $X_t$  an der Stelle  $c$  gilt  $E(e^{-cX_t}) < \infty$  für ein  $t > 0$ , oder äquivalent für alle  $t > 0$ , genau dann, wenn  $E(L_1^{2c}) < \infty$ .
- (b) Für  $E(e^{-cX_t}) < \infty$  sei  $\Psi(c)$  definiert durch  $\Psi(c) = \Psi_X(c) = \log E(e^{-cX_t})$ . Dann folgt  $|\Psi(c)| < \infty$ ,  $E(e^{-cX_t}) = e^{t\Psi(c)}$  und

$$\Psi(c) = c \log \delta + \int_{\mathbb{R}} ((1 + (\lambda/\delta)y^2)^c - 1) \nu_L(dy).$$

- (c) Falls  $E(L_1^2) < \infty$  und  $\Psi(1) < 0$ , dann gilt (3.10) und  $\sigma_t^2$  konvergiert in Verteilung gegen eine endliche Zufallsvariable.
- (d) Falls  $\Psi(c) < \infty$  für ein  $c > 0$ , dann gilt  $\Psi(d) < 0$  für alle  $0 < d < c$ .

Die folgende Proposition liefert die ersten beiden Momente und die Autokovarianzfunktion von  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  in Abhängigkeit von  $\Psi$ . Die Autokovarianzfunktion fällt mit wachsendem Lag  $h$  exponentiell ab.

**Proposition 3.8.** (KLM [30], Proposition 4.1) *Sei  $t > 0$ ,  $h \geq 0$ . Dann gilt*

(a)  $E(\sigma_t^2) < \infty$  genau dann, wenn  $E(L_1^2) < \infty$  und  $E(\sigma_0^2) < \infty$ . Falls dies erfüllt ist, folgt weiterhin

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\beta}{-\Psi(1)} + \left( E(\sigma_0^2) + \frac{\beta}{\Psi(1)} \right) e^{t\Psi(1)},$$

wobei für  $\Psi(1) = 0$  die rechte Seite als ihr Grenzwert für  $\Psi(1) \rightarrow 0$ , d.h.  $E(\sigma_t^2) = \beta t + E(\sigma_0^2)$ , interpretiert werden muss.

(b)  $E(\sigma_t^4) < \infty$  genau dann, wenn  $E(L_1^4) < \infty$  und  $E(\sigma_0^4) < \infty$ . In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^4) &= \frac{2\beta^2}{\Psi(1)\Psi(2)} + \frac{2\beta^2}{\Psi(2) - \Psi(1)} \left( \frac{e^{t\Psi(2)}}{\Psi(2)} - \frac{e^{t\Psi(1)}}{\Psi(1)} \right) \\ &\quad + 2\beta E(\sigma_0^2) \left( \frac{e^{t\Psi(2)} - e^{t\Psi(1)}}{\Psi(2) - \Psi(1)} \right), \\ \text{Cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t+h}^2) &= \text{Var}(\sigma_t^2) e^{h\Psi(1)}. \end{aligned}$$

Das folgende Resultat gilt für die stationäre Version des Volatilitätsprozesses. Nach Satz 3.4 muss  $\sigma_0 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty$  für  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  gelten, wobei  $\sigma_\infty$  die Grenzzufallsvariable aus Satz 3.3 ist.

**Proposition 3.9.** (KLM [30], Proposition 4.2)  $E(\sigma_\infty^{2k}) < \infty$  genau dann, wenn  $E(L_1^{2k}) < \infty$  und  $\Psi(k) < 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . In diesem Fall gilt

$$E(\sigma_\infty^{2k}) = k! \beta^k \prod_{l=1}^k \frac{1}{-\Psi(l)}.$$

Damit ergibt sich folgendes Resultat

**Satz 3.10.** (KLM [30], Korollar 4.1) *Falls  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  der stationäre Prozess mit  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$  ist, dann gilt*

$$E(\sigma_\infty^2) = \frac{\beta}{-\Psi(1)}, \quad (3.11)$$

$$E(\sigma_\infty^4) = \frac{2\beta^2}{\Psi(1)\Psi(2)}, \quad (3.12)$$

$$\text{Cov}(\sigma_t^2, \sigma_{t+h}^2) = \beta^2 \left( \frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)} \right) e^{h\Psi(1)}, \quad t, h \geq 0, \quad (3.13)$$

vorausgesetzt, dass  $E(L_1^{2k}) < \infty$  und  $\Psi(k) < 0$ , mit  $k = 1$  für (3.11) und  $k = 1, 2$  für (3.12), (3.13).

Ziel ist es nun, die Funktion  $\Psi_X$  bezüglich des treibenden Lévy-Prozesses  $(L_t)_{t \geq 0}$  auszudrücken. Zunächst folgen Bedingungen für die Existenz von Momenten von  $\sigma_\infty^2$ .

**Satz 3.11.** (KLM [30], Theorem 4.1) *Sei  $k \in \mathbb{N}, 0 < \delta < 1, \lambda \geq 0$ . Dann existiert die Grenzvariable  $\sigma_\infty^2$  mit  $E(\sigma_\infty^{2k}) < \infty$  genau dann, wenn*

$$\left(\frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{\lambda}{\delta} y^2\right)^k - 1 \nu_L(dy) < -\log \delta. \quad (3.14)$$

Es stellt sich heraus, dass das stetige GARCH-Modell, wie auch das diskrete, fat tails besitzt. Die ist eine Folge daraus, dass der Volatilitätsprozess niemals Momente aller Ordnungen besitzt.

**Proposition 3.12.** (KLM [30], Proposition 4.3) *Sei  $k \in \mathbb{N}, 0 < \delta < 1, \lambda \geq 0$ .*

- (a) *Für jeden Lévy-Prozess  $(L_t)_{t \geq 0}$  mit  $\int_{\mathbb{R}} \log(1 + y^2) \nu_L(dy) < \infty$  und Lévy-Maß ungleich Null existieren Parameter  $\delta, \lambda \in (0, 1)$ , für die  $\sigma_\infty^2$  existiert aber  $E(\sigma_\infty^2) = \infty$ .*
- (b) *Für jeden Lévy-Prozess  $(L_t)_{t \geq 0}$  mit  $E(L_1^{2k}) < \infty$  und jedes  $\delta \in (0, 1)$  existiert ein  $\lambda_\delta > 0$ , so dass die Grenzvariable  $\sigma_\infty^2$  existiert und  $E(\sigma_\infty^2) < \infty$  für alle Parameterpaare  $(\delta, \lambda)$  mit  $0 \leq \lambda \leq \lambda_\delta$  gilt.*
- (c) *Sei  $k \in \mathbb{N}, 0 < \delta < 1, \lambda > 0$ . Dann gibt es keinen Lévy-Prozess  $(L_t)_{t \geq 0}$  mit Lévy-Maß ungleich Null, für den die Momente aller Ordnungen von  $\sigma_\infty^2$  existieren. Im speziellen existiert die Laplace-Transformierte von  $\sigma_\infty^2$  nicht für negative Argumente.*

### 3.3 Momente zweiter Ordnung des COGARCH

In (3.6) wurde der integrierte COGARCH-Prozess durch  $dG_t = \sigma_t dL_t, t \geq 0, G_0 = 0$  definiert, d.h.  $G$  springt zu den selben Zeiten wie  $L$  und hat Sprunghöhen  $\Delta G_t = \sigma_t \Delta L_t$ . Die Definition impliziert, dass für jeden festen Zeitpunkt  $t$  alle Momente von  $\Delta G_t$  Null sind. Jedoch ist es sinnvoll, Momente für die Zuwächse von  $G$  auf beliebigen Zeitintervallen zu berechnen. Daher sei für  $r > 0$

$$G_t^{(r)} := G_{t+r} - G_t = \int_{t+}^{t+r} \sigma_s dL_s, \quad t \geq 0.$$

Die folgenden Ergebnisse gelten für strikt stationäres  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ . Mit Korollar 3.5 folgt daraus unmittelbar die strikte Stationarität von  $G^{(r)} = (G_t^{(r)})_{t \geq 0}$ .

**Satz 3.13.** (KLM [30], Proposition 5.1) *Sei  $(L_t)_{t \geq 0}$  ein quadratisch reiner Sprungprozess, d.h.  $\tau_L^2 = 0$ , mit  $E(L_1^2) < \infty, E(L_1) = 0$  und  $\Psi(1) < 0$ . Weiterhin sei  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  der strikt stationäre Volatilitätsprozess mit  $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$ . Dann gilt für  $t \geq 0$  und  $h \geq r > 0$ ,*

$$\begin{aligned} E(G_t^{(r)}) &= 0, \\ E(G_t^{(r)})^2 &= \frac{\beta r}{-\Psi(1)} E(L_1^2), \\ \text{Cov}(G_t^{(r)}, G_{t+h}^{(r)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sei ferner  $E(L_1^4) < \infty$  und  $\Psi(2) < 0$ . Dann gilt

$$\text{Cov}((G_t^{(r)})^2, (G_{t+h}^{(r)})^2) = \left( \frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) E(L_1^2) \text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) e^{h\Psi(1)}. \quad (3.16)$$

Dabei ist

$$\text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) = \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) \text{Var}(\sigma_0^2) \left( 1 - e^{r\Psi(1)} - \log \delta \left( \frac{1 - e^{r\Psi(1)}}{-\Psi(1)} \right) \right). \quad (3.17)$$

Falls  $E(L_1^8) < \infty$ ,  $\Psi(4) < 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} x^3 \nu_L(dx) = 0$ , dann ist die rechte Seite von (3.16) strikt positiv.

## 3.4 Der zusammengesetzte Poisson-Prozess als Spezialfall

Es werden nun ausführlich die Eigenschaften des COGARCH Modells untersucht, wobei für den treibenden Lévy-Prozess  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess angenommen wird.

### 3.4.1 Definition

Im Folgenden werden einige Begriffe aus der Theorie der Lévy-Prozesse verwendet. Diese können in Anhang A nachgelesen werden.

**Definition 3.14 (Poisson-Prozess).** Ein stochastischer Prozess  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  heißt Poisson-Prozess mit Rate  $c > 0$ , falls er die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $N_0 = 0$  f.s.
- (ii)  $N$  hat rechtsseitig stetige Pfade mit Sprüngen der Höhe 1.
- (iii) Unabhängige Zuwächse: Für beliebige Wahl von  $n \geq 1$  und  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind die Zufallsvariablen  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  unabhängig.
- (iv) Stationäre Zuwächse: Die Verteilung von  $X_{t+h} - X_t$  hängt nicht von  $t$  ab.
- (v) Für  $t > 0$  gilt:  $P(N_t = j) = e^{-ct} \frac{(ct)^j}{j!}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ .

**Bemerkung 3.15.** Der Poisson-Prozess ist ein Zählprozess, d.h.  $N_t$  gibt die Anzahl von Ereignissen im Intervall  $[0, t]$  wieder.  $T_n$  bezeichne die Zeit zwischen dem  $(n-1)$ -ten und  $n$ -ten Ereignis. Dann heißt  $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$  die Folge der Zwischenankunftszeiten.

**Proposition 3.16.** (Ross [40], Proposition 2.2.1) Sei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess mit Rate  $c > 0$ . Dann sind die Zwischenankunftszeiten  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , unabhängig identisch exponential verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $1/c$ .

**Definition 3.17 (Zusammengesetzter Poisson-Prozess).** Ein stochastischer Prozess  $L = (L_t)_{t \geq 0}$  heißt zusammengesetzter Poisson-Prozess, falls er für  $t \geq 0$  eine Darstellung der Form

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad (3.18)$$

besitzt, wobei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein Poisson-Prozess und  $\{X_i : i = 0, 1, \dots\}$  eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $P(X_1 = 0) = 0$  ist. Weiterhin werden  $(N_t)$  und  $(X_t)$  als unabhängig angenommen.

Die Definition lässt erkennen, dass ein zusammengesetzter Poisson-Prozess stückweise konstante Pfade und exponential verteilte Zwischenankunftszeiten besitzt. Dies führt zur nächsten Proposition.

**Proposition 3.18.** (Cont und Tankov [11], Proposition 3.3)  $(L_t)_{t \geq 0}$  ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess genau dann, wenn er ein Lévy-Prozess mit stückweise konstanten Pfaden ist.

### 3.4.2 Momente

Im Folgenden sollen Momente für den zusammengesetzten Poisson-Prozess bestimmt werden. Dazu wird die charakteristische Funktion benützt.

**Definition 3.19 (Charakteristische Funktion).** Die charakteristische Funktion der Verteilung  $F_X$  einer Zufallsvariable  $X$  ist definiert durch

$$\varphi_X(z) = E(e^{izX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} F_X(dx), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Da  $|\varphi_X(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}$ , existiert die charakteristische Funktion  $\varphi_X(z)$  für jede Zufallsvariable  $X$ .

**Beispiel 3.20.** Die Dichte der Zufallsvariable  $X$  sei mit  $f_X(x)$  bezeichnet.

- Falls  $X$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist, gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \gamma)^2}{\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\varphi_X(z) = \exp\left(i\gamma z - \frac{1}{2} \sigma^2 z^2\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

- Falls  $X$  Laplace-verteilt mit Parameter  $\alpha$  und Erwartungswert  $E(X) = 0$  ist, gilt

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-|\alpha x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\varphi_\mu(z) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + z^2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

- Falls  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $c$  ist, gilt

$$\begin{aligned} P(X = k) &= e^{-c} \frac{c^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \varphi_\mu(z) &= \exp(c(e^{iz} - 1)), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.21.** (Bauer [4], Korollar 25.3) Sei  $X$  Zufallsvariable mit  $E(|X|^n) < \infty$ . Dann gilt für  $k \leq n$

$$E(X^k) = \frac{1}{i^k} \left[ \frac{\partial^k \varphi_X(z)}{\partial z^k} \right]_{z=0}.$$

Die Existenz von  $E(|X_t|^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , lässt sich mittels folgendem Satz überprüfen.

**Satz 3.22.** (Sato [42], Theorem 25.3) Sei  $(X_t)$  ein Lévy-Prozess mit Lévy-Maß  $\nu$ . Dann gilt

$$E[|X_t|^n] < \infty \Leftrightarrow \int_{|x|>1} |x|^n \nu(dx) < \infty.$$

**Proposition 3.23.** (Cont und Tankov [11], Proposition 3.4) Sei  $(L_t)_{t \geq 0}$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c$  und Sprungverteilung  $F_X$ . Dann ist die charakteristische Funktion von  $L_t$  gegeben durch

$$\varphi_{L_t}(z) = \exp(ct(\varphi_X(z) - 1)), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \varphi'_{L_t}(z) &= \varphi_{L_t}(z) ct \varphi'_X(z), \\ \varphi''_{L_t}(z) &= ct (\varphi'_{L_t}(z) \varphi'_X(z) + \varphi_{L_t}(z) \varphi''_X(z)) \\ &= ct (\varphi_{L_t}(z) ct (\varphi'_X(z))^2 + \varphi_{L_t}(z) \varphi''_X(z)). \end{aligned}$$

Mit Proposition 3.21 erhält man sofort

$$E(L_t) = \frac{1}{i} \varphi'_{L_t}(0) = \frac{1}{i} ctiE(X) = ct E(X), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} E(L_t^2) &= \frac{1}{i^2} \varphi''_{L_t}(0) = -ct (ct (iE(X))^2 + i^2 E(X^2)) \\ &= (ct)^2 E(X)^2 + ct E(X^2). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Man benötigt also die Momente der Sprungverteilung. Diese lassen sich ebenfalls leicht mittels charakteristischer Funktion bestimmen.

**Beispiel 3.24.** • Falls  $X$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist, gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu, \\ E(X^2) &= \mu^2 + \sigma^2, \\ E(X^3) &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2, \\ E(X^4) &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4. \end{aligned}$$

- Falls  $X$  Laplace-verteilt mit Parameter  $\alpha$  und Erwartungswert  $E(X) = 0$  ist, gilt

$$E(X^k) = \begin{cases} \frac{k!}{\alpha^k} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wie bereits erwähnt, lässt sich die Existenz von  $E(|L_t|^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mittels Satz 3.22 überprüfen. Falls  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c < \infty$  und Sprungverteilung  $F_X$  ist, gilt

$$\int_{|x|>1} |x|^n \nu(dx) = \int_{|x|>1} |x|^n c F_X(dx) \leq c \int_{\mathbb{R}} |x|^n F_X(dx).$$

Somit folgt aus  $E(|X|^n) < \infty$ , dass  $E(|L_t|^n) < \infty$  und damit auch von  $E(L_t^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel 3.25.** Falls  $X$  normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist, gilt  $E[|X|^n] < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.4.3 Stationaritätskriterium

Bedingung (3.14) sichert die Stationarität des Volatilitätsprozesses  $\sigma^2$  und Existenz des  $k$ -ten Moments, d.h.  $E(\sigma_\infty^{2k}) < \infty$ . Falls  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c$  und Sprungverteilung  $F_X$  ist, gilt für  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} x^2 \right)^k - 1 \right) \nu_L(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} x^2 \right)^k - 1 \right) c F_X(dx) \\ &= c E \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} X^2 \right)^k - 1 \right]. \end{aligned}$$

Daher ist (3.14) äquivalent zu

$$E \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} X^2 \right)^k \right] - 1 + \frac{k}{c} \log \delta < 0. \quad (3.21)$$

Es sei nochmals daran erinnert, dass dies gerade  $\Psi(k) < 0$  und  $E(L_1^{2k}) < \infty$  entspricht. Diese Bedingungen sind stets ein Zusammenspiel von  $\delta, \lambda, c$  und der Sprungverteilung  $F_X$ .

Damit die Voraussetzungen für Satz 3.10 und 3.13 erfüllt sind und die Autokovarianzfunktionen von  $\sigma^2$  und  $(G^{(r)})^2$  angegeben werden können, benötigt man neben  $E(L_1^4)$  daher  $\Psi(1) < 0$  und  $\Psi(2) < 0$ . Dazu wird die kumulantenenerzeugende Funktion



$\Psi(c)$  aus Lemma 3.7 für den zusammengesetzten Poisson-Prozess berechnet:

$$\begin{aligned}
 \Psi(1) &= \log \delta + \int_{\mathbb{R}} \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} x^2 \right) - 1 \right) \nu_L(dx) \\
 &= \log \delta + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\lambda}{\delta} x^2 \right) cF_X(dx) \\
 &= \log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} E(X^2)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(2) &= 2 \log \delta + \int_{\mathbb{R}} \left( \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta} x^2 \right)^2 - 1 \right) \nu_L(dx) \\
 &= 2 \log \delta + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\lambda^2}{\delta^2} x^4 + \frac{2\lambda}{\delta} x^2 \right) cF_X(dx) \\
 &= 2 \log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} \left( \frac{\lambda}{\delta} E(X^4) + 2E(X^2) \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Abbildung 3.1 zeigt die Nullniveaulinien von  $\Psi(1)$  und  $\Psi(2)$  als Funktion von  $\delta$  und  $\lambda$ , falls  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c = 1$  und  $N(0, 1)$ -verteilten Sprüngen ist.

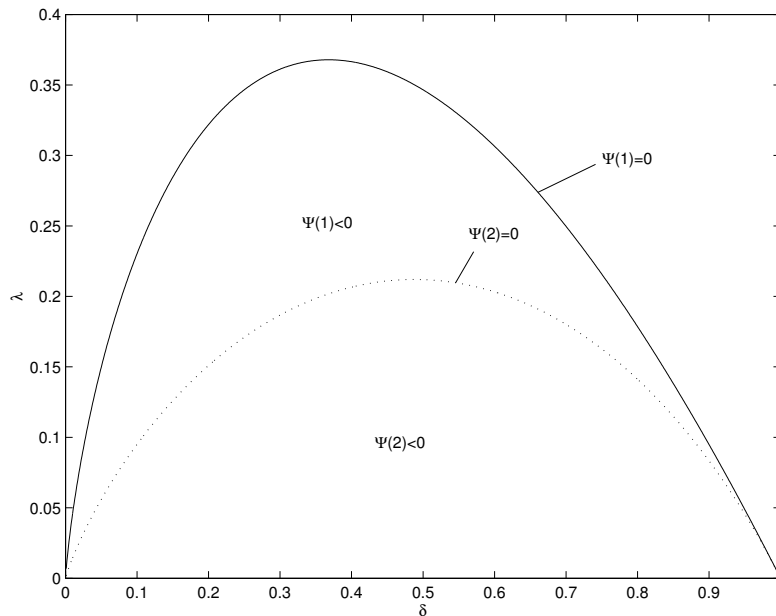


Abbildung 3.1: Nullniveaulinien von  $\Psi(1)$  und  $\Psi(2)$ , falls  $L$  zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c = 1$  und  $N(0, 1)$ -verteilten Sprüngen ist.

### 3.4.4 Simulation

Legt man sich auf einen bestimmten Lévy-Prozess  $L$  fest, so lässt sich der integrierte COGARCH Prozess  $G$  simulieren. Nach Proposition 3.16 können die Zwischenankunftszeiten eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Hilfe einer Folge von unabhängig

identisch exponential verteilten Zufallsvariablen erzeugt werden. Eine weitere Folge von unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen liefert die Sprünge. Die gespeicherten Sprungzeiten und -höhen werden in (3.4) eingesetzt, man erhält  $X$ . Integrieren, wie in (3.5) beschrieben, liefert  $\sigma^2$ . Aus (3.6) bekommt man wiederum mit den Sprungzeiten und -höhen von  $L$  den gesuchten integrierten COGARCH Prozess  $G$ .

**Beispiel 3.26.** Auf Basis eines zusammengesetzten Poisson-Prozess  $(L_t)_{0 \leq t \leq 20000}$  mit Rate  $c = 1$  und standardnormalverteilten Sprüngen wurde der integrierte COGARCH Prozess simuliert. Abbildung 3.2 zeigt  $(L_t)$  sowie die zugehörigen Prozesse  $(X_t)$ ,  $(\sigma_t)$  und  $(G_t)$  für  $0 \leq t \leq 5000$ . Das letzte Bild zeigt den durch Differenzenbildung entstandenen Prozess  $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ . Als Parameter wurden  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$  gewählt.  $\sigma_0^2$  wurde auf  $E(\sigma_\infty^2) = 51.7539$  gesetzt.

Man erkennt, dass  $G$  dem treibenden Lévy-Prozess  $L$  ähnlich sieht, jedoch treten immer wieder Bereiche auf, in denen sich  $G$  über-/ unterproportional im Vergleich zu  $L$  verändert. Die Volatilitätscluster werden am besten durch Betrachtung von  $\sigma^2$  deutlich, sind aber auch bei  $G^{(1)}$  gut erkennbar.

Abbildung 3.3 zeigt das Makroverhalten derselben Prozesse. Ein Vergleich mit (3.4) bestätigt, dass  $X$  zu den gleichen Zeiten wie  $L$  (stets nach unten) springt und zwischen zwei Sprüngen linear mit Steigung  $-\log \delta$  wächst. Man erkennt auch den in (3.5) beschriebenen exponentiellen Abfall von  $\sigma^2$  zwischen den Sprungzeiten. Auch im Makrobereich ist  $G$  dem treibenden Lévy-Prozess  $L$  ähnlich. Die Proportion der Sprünge ist jedoch unterschiedlich.

Aus (3.22) und (3.23) ergibt sich  $\Psi(1) = -0.0193$  und  $\Psi(2) = -0.0332$ . Weiterhin sichert Beispiel 3.25  $E(L_1^{2k}) < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Damit existiert eine stationäre Lösung  $\sigma_\infty^2$  mit  $E(\sigma_\infty^2) < \infty$  und  $E(\sigma_\infty^4) < \infty$ . Auch sind die Voraussetzungen für Satz 3.10 und 3.13 erfüllt. Somit hat die Autokovarianzfunktion von  $(G^{(1)})^2$  die Form (3.16). In Abbildung 3.4 ist die empirische Autokovarianzfunktion der Simulation, eine Glättung hiervon und die theoretische Autokovarianzfunktion dargestellt. Bei der Berechnung der theoretischen Autokovarianzfunktion wurde für  $\text{Var}(\sigma_0^2)$  in (3.17) die Varianz der stationären Lösung  $\text{Var}(\sigma_\infty^2)$  aus (3.14) verwendet.

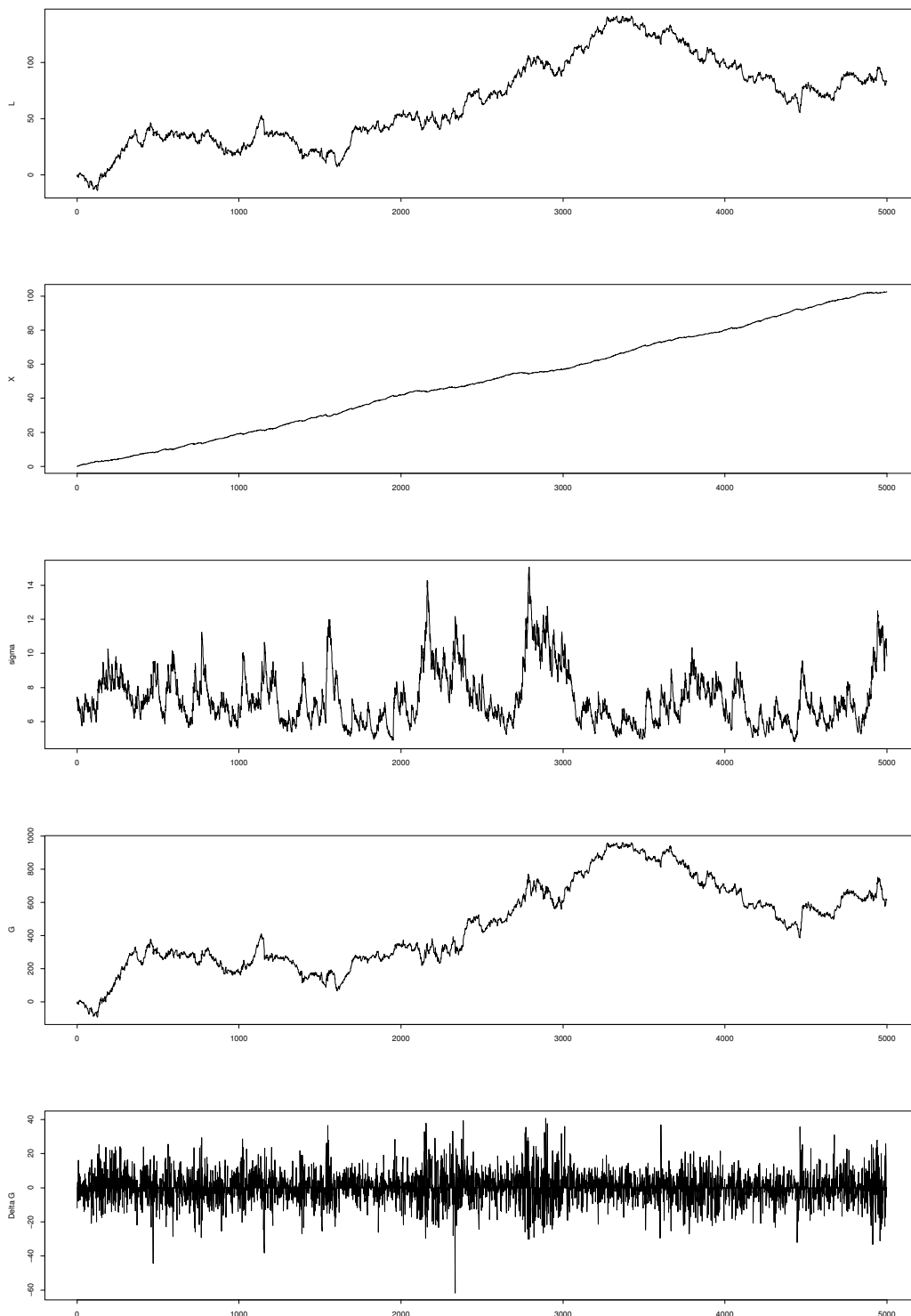


Abbildung 3.2: Simulierter zusammengesetzter Poisson-Prozess  $(L_t)$  aus Beispiel 3.26, zugehörige Prozesse  $(X_t)$ ,  $(\sigma_t)$  und  $(G_t)$  für  $0 \leq t \leq 5000$ , sowie der durch Differenzbildung entstandenen Prozess  $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ .

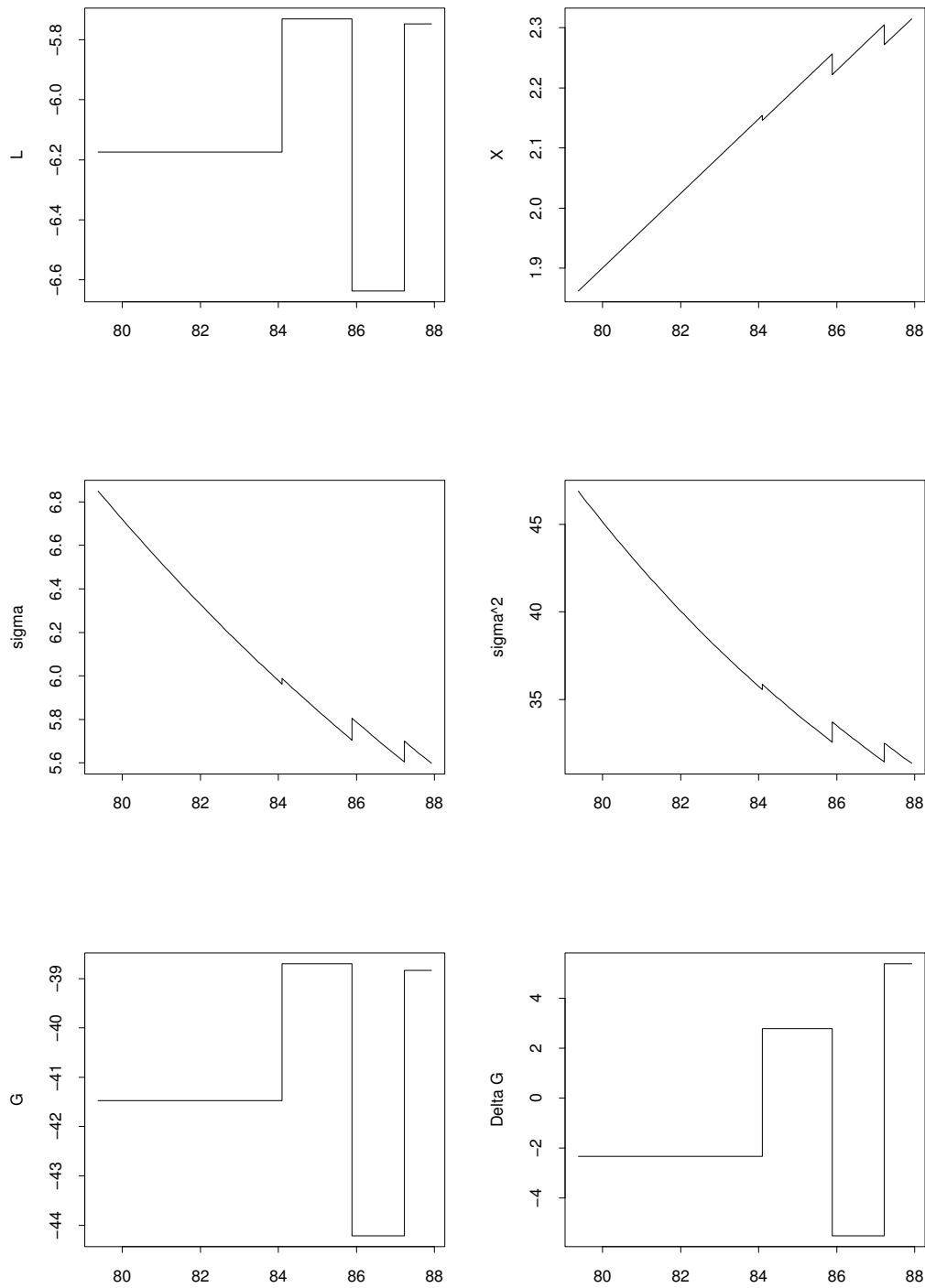


Abbildung 3.3: Simulierter zusammengesetzter Poisson-Prozess ( $L_t$ ) aus Beispiel 3.26, zugehörige Prozesse ( $X_t$ ), ( $\sigma_t$ ) und ( $G_t$ ) für  $79 \leq t \leq 88$ , sowie der durch Differenzbildung entstandenen Prozess  $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$ .

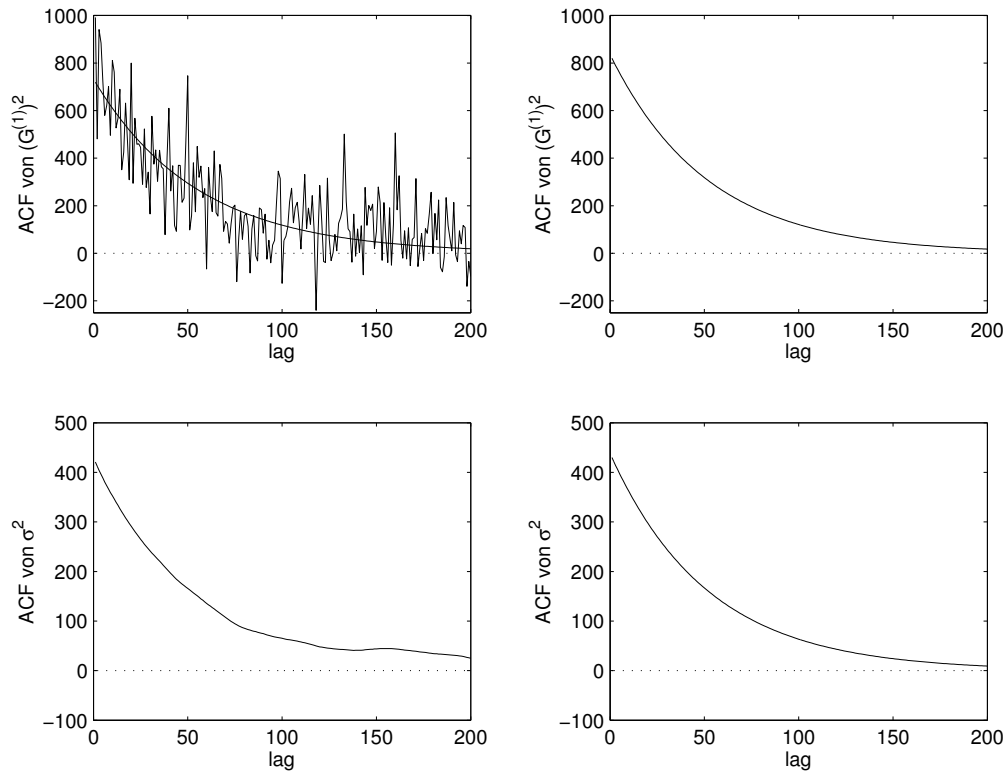


Abbildung 3.4: Empirische Autokovarianzfunktion für  $(G_t^{(1)})^2$  sowie Glättung durch exponentiell abfallende Kurve. Daneben die theoretische Autokovarianzfunktion. In der zweiten Zeile findet man die empirische Autokovarianzfunktion für  $(\sigma_t^2)$  sowie die zugehörige theoretische Autokovarianzfunktion.

# Kapitel 4

## Schätzverfahren

Ziel dieser Arbeit ist es, Schätzverfahren darzustellen, die es ermöglichen, aus einer Prozessrealisierung des integrierten COGARCH-Prozesses  $G$  das zugrunde liegende Modell der Form (3.4)-(3.6) zu identifizieren. Ursprünglich ist der COGARCH für Hochfrequenzdaten gedacht. Dennoch wird hier die Annahme getroffen, dass eine endliche Anzahl von Beobachtungen  $(G_t)_{t=0,\dots,T}$  gleichen Abstands vorliegt. Zu bestimmen sind nun nicht nur die Parameter  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$ , mit  $\beta, \lambda \geq 0$ ,  $0 < \delta < 1$ , sondern auch der Lévy-Prozess  $L$ . Als solcher ist in dem Modell jeder Lévy-Prozess zugelassen, dessen Lévy-Maß  $\nu_L \neq 0$  ist. Darunter fallen Sprungprozesse, die in letzter Zeit von großem Interesse für finanzmathematische Modellierung sind. Beispiele sind normal inverse Gaußprozesse (z.B. Barndorff-Nielsen und Shephard [2]), Varianz Gamma Prozesse (Madan und Seneta [33]), Meixner-Prozesse (z.B. Schoutens und Teugels [43]) oder einfache stabile Prozesse (z.B. Samorodnitsky und Taqqu [41]).

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, ist es weitaus schwieriger Parameter von SV-Modellen zu schätzen als von GARCH-Modellen. Dennoch gibt es eine Reihe von erprobten Verfahren, für die es zu prüfen gilt, inwiefern sie auf den COGARCH übertragbar sind.

Ein recht intuitiver Ansatz ist die generalisierte Momentenmethode (GMM). Beispiele hierfür sind zu finden in Melino und Turnbull [35] für zeitdiskrete und Hansen und Scheinkman [24] für zeitstetige Prozesse. Dieses Verfahren schließt aus dem Vergleich von empirischen mit theoretischen Momenten auf die gesuchten Parameter. Abschnitt 4.1 beschäftigt sich mit einem solchen Ansatz, der jedoch nicht nur einzelne Momente vergleicht, sondern die ganze Struktur der Autokovarianzfunktion berücksichtigt.

Nelson [36] und Harvey, Ruiz und Shephard [25] beschäftigen sich mit Quasi-Maximum-Likelihood (QML)-Verfahren für SV-Modelle. Diese beruhen auf der Tatsache, dass das (normalverteilte) SV-Modell in ein lineares, nicht mehr normalverteiltes, zeitdiskretes Zustandsraummodell transformiert werden kann. Mittels Kalman-Filter und Normalverteilungsannahme lässt sich nun ein QML-Schätzer angeben. Dieses Vorgehen ist nicht direkt auf den COGARCH übertragbar. Zum einen wird das Modell nicht durch Brownsche Bewegungen getrieben, zum anderen ist die Abhängigkeitsstruktur komplizierter. Daher kann kein brauchbares lineares Zustandsraummodell mehr bestimmt werden. Allerdings zeichnet sich das Modell ja gerade durch eine GARCH-

Struktur aus. Diese Tatsache verwendet das QML-Verfahren, das in Abschnitt 4.2 vorgestellt wird.

Eine weitere Methode beruht auf der Verwendung von Schätzfunktionen. Das sind Funktionen, die sowohl die Daten als auch die zu schätzenden Parameter beinhalten. Schätzwerte erhält man üblicherweise durch Nullsetzen und Auflösen nach den gesuchten Parametern. Das Vorgehen ist für eine Vielzahl von statistischen Modellen geeignet. Bibby, Jacobsen und Sørensen [5] untersuchen die Anwendung auf Diffusionsmodelle. Anfangs recht viel versprechend in Bezug auf den COGARARCH sieht die Methode der vorhersagebasierten Schätzfunktionen (*prediction-based estimating functions*) von Sørensen [44] aus. Die Schätzfunktion hat hierbei die Form

$$F_T(\theta) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \Pi_i^{(t-1)}(\theta) \{f_i(G_t^{(1)}) - \hat{\pi}_i^{(t-1)}(\theta)\},$$

wobei  $\theta$  der zu schätzende Parametervektor und  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ , eindimensionale Funktionen mit  $E_\theta(f_i(G_i^{(1)}))^2 < \infty$  für alle  $\theta$  und  $t = 1, \dots, T$  sind.  $\Pi_i^{(t-1)}(\theta)$  ist ein stochastischer Vektor und  $\hat{\pi}_i^{(t-1)}(\theta)$  der lineare Prädiktor von  $f_i(G_t^{(1)})$  in einen linearen Unterraum  $\mathcal{P}_{(t-1),i}^\theta$ . Um einen guten Schätzer zu bekommen benötigt man allerdings Momente der Form  $E((G_i^{(1)})^2(G_j^{(1)})^2(G_k^{(1)})^2(G_l^{(1)})^2)$ , die leider noch nicht vorliegen.

Mit steigender Rechenkapazität gewinnen simulationsbasierte Schätzverfahren immer mehr an Bedeutung. Die Methode der simulierten Momente (SMM), die von Duffie und Singleton [15] für Zeitreihen behandelt wird, ist eine Alternative zur GMM. Falls theoretische Momente nicht mehr bestimmt werden können, ist es weiterhin möglich, für gegebene Parameter Prozesse zu simulieren und damit empirische Momente zu bestimmen. Gesucht sind die Parameter, welche den Abstand der so gefundenen Momente zu den empirischen Momenten der gegebenen Daten minimieren. Da in jedem Schritt dieses Minimierungsproblems hinreichend viel simuliert werden muss, ist es einleuchtend, dass diese Methode sehr rechenintensiv ist. Dies erschwert die Anwendung auf den COGARARCH sehr, dennoch ist es denkbar, das in Abschnitt 4.1 beschriebene Verfahren durch Momente zu ergänzen, die mittels SMM gewonnen wurden.

Der Vollständigkeit halber sei noch die *method of indirect inference* von Gouriéroux, Monfort und Renault [23] sowie der *moment matching* Ansatz von Gallant und Tauchen [21] erwähnt. Diese Verfahren schätzen die Parameter unter Verwendung eines Hilfsmodells. Allerdings ist es nicht einfach, ein hinreichend gutes Hilfsmodell für den COGARARCH zu finden, außerdem sind die Ansätze wieder sehr rechenaufwändig. Daher werden sie in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die nächsten beiden Abschnitte stellen jeweils eine Schätzmethode vor, geben die nötigen Voraussetzungen an und testen die Verfahren an simulierten Daten. Dazu werden zu gegebenen Parametern 100 Realisierungen eines integrierten COGARARCH simuliert. Daraus werden die Parameter geschätzt und mit den wahren Werten verglichen.

## 4.1 Momentenschätzer

Da für die Schätzung Prozessrealisierungen von  $G$  gleicher Schrittweite vorliegen, ist es möglich, durch Differenzenbildung des Prozesses  $(G_t^{(1)})_{t=0,\dots,T}$  zu erzeugen. Satz 3.13 besagt, dass der Erwartungswert von  $G_t^{(1)}$  und die Autokovarianzfunktion für Lags  $h \geq 1$  gleich Null ist. Daher wird  $(G^{(1)})^2$  verwendet. In Abbildung 3.4 ist bereits zu erkennen, wie gut die exponentiell geglättete empirische Autokovarianzfunktion die wahren Werte von  $\text{Cov}((G_t^{(1)})^2, (G_{t+h}^{(1)})^2)$  schätzt. Im Folgenden wird nun versucht, durch Gleichsetzen von empirischen und theoretischen Momenten Parameter zu bestimmen.

### 4.1.1 Voraussetzungen

Da es kaum möglich ist, die ganze Struktur von  $L$  aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungen  $(G_t)_{t=0,\dots,T}$  zu bestimmen, wird hier nur die Klasse der zusammengesetzten Poisson-Prozesse mit Rate  $c < \infty$  betrachtet. Diese Klasse ist sehr umfangreich. Beispielsweise besagt Satz A.3, dass jeder Lévy-Prozess durch eine Folge von zusammengesetzten Poisson-Prozessen approximiert werden kann. Nach Satz 3.18 ist jeder Lévy-Prozess mit stückweise konstanten Pfaden ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. Auch sind zusammengesetzte Poisson-Prozesse mathematisch leicht greifbar und erfüllen die Bedingung  $E(L_1^{2k}) < \infty$ , falls die entsprechenden Momente der Sprungverteilung existieren. Diese sichert für geeignetes  $\delta$  und  $\lambda$  die Eigenschaften zweiter Ordnung, wie sie in Satz 3.10 und 3.13 beschrieben sind, falls die entsprechenden Momente der Sprungverteilung existieren.

Die stetige Sprungverteilung  $F_X$  soll zunächst recht allgemein gehalten werden. Allerdings kann der Erwartungswert der Sprünge, eventuell nach Herausfiltern eines Trends, als Null angenommen werden, d.h. es gilt  $E(X) = 0$ . Die Höhe der Sprünge von  $G$  hängt sowohl von den Sprunghöhen von  $L$  als auch von  $\sigma$  ab, wie man in (3.6) erkennen kann. Damit eine sinnvolle Interpretation von  $\sigma$  als Volatilität möglich ist, sollte  $\text{Var}(L_1) = 1$  gelten. Nach (3.19) und (3.20) gilt mit  $E(X) = 0$

$$\text{Var}(L_1) = E(L_1^2) - (E(L_1))^2 = c^2 E(X)^2 + cE(X^2) - (cE(X))^2 = cE(X^2).$$

Im Folgenden werden nur Sprungverteilungen  $F_X$  mit  $E(X) = 0$  betrachtet, deren Parameter  $\xi$  durch  $E(X^2)$  bestimmt werden können. Beispiel 4.1 wird zeigen, dass dies für die Normalverteilung und die Laplace-Verteilung der Fall ist.

Somit lässt sich der Lévy-Prozess, bei bekannter Verteilungsfamilie der Sprünge, auf die beiden Werte  $c$  und  $E(X^2)$  reduzieren, die weiterhin die Bedingung  $cE(X^2) = 1$  erfüllen müssen. Zuletzt wird noch  $E(X^4) < \infty$  benötigt, was die Identifizierbarkeit der Parameter sicherstellt. Direkt aus Beispiel 3.24 folgt

**Beispiel 4.1.** • Falls  $X \stackrel{D}{=} N(0, v^2)$ , gilt  $v^2 = E(X^2)$  und  $E(X^4) = 3v^4$ .

- Falls  $X$  Laplace-verteilt mit Parameter  $\alpha$  und Erwartungswert  $E(X) = 0$  ist, gilt  $\alpha^2 = 2/E(X^2)$  und  $E(X^4) = 24/\alpha^4$ .



Die zusammengefassten Annahmen lauten folglich:

- (1) Es liegen Beobachtung gleicher Schrittweite  $(G_t)_{t=0,\dots,T}$  vor.
- (2)  $L$  ist zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c < \infty$ .
- (3) Die Sprünge haben stetige Verteilung  $F_X$  mit  $E(X) = 0$ .
- (4) Die Parameter  $\xi \in \Xi$  der Sprungverteilung sind eine bekannte Funktion von  $E(X^2)$ , d.h. es existiert ein bekanntes  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Xi$  mit  $\xi = g(E(X^2))$ .
- (5)  $\text{Var}(L_1) = 1$ , d.h.  $cE(X^2) = 1$ .
- (6) Die Sprünge haben endliches viertes Moment, d.h.  $E(X^4) < \infty$ .

Wie bereits angedeutet, sollen die Parameter aus 100 Prozessrealisierungen von  $G$  der Länge 20000 geschätzt werden. Den Annahmen entsprechend wurde als treibender Lévy-Prozess ein zusammengesetzter Poisson-Prozess gewählt. Die Parameter sind wie in Beispiel 3.26 gewählt, d.h.  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$ . Das Ganze wird für verschiedene Raten und Sprungverteilungen des zusammengesetzten Poisson-Prozesses wiederholt.

Unter Verwendung von Voraussetzung (5) vereinfachen sich (3.22) und (3.23) zu

$$\Psi(1) = \log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} E(X^2) = \log \delta + \frac{\lambda}{\delta}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi(2) &= 2 \log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} \left( \frac{\lambda}{\delta} E(X^4) + 2E(X^2) \right) \\ &= 2 \log \delta + \frac{\lambda}{\delta} \left( \frac{c\lambda}{\delta} E(X^4) + 2 \right) \\ &= 2 \log \delta + \frac{\lambda}{\delta} \left( \frac{a\lambda}{c\delta} + 2 \right) \quad \text{mit} \quad a = \frac{E(X^4)}{(E(X^2))^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Größe  $a$  existiert nach Voraussetzung (6). Für eine  $N(0, v^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist  $a = 3$ , während für eine Laplace-verteilte Zufallsvariable mit  $E(X) = 0$  gerade  $a = 6$  gilt. Nebenbei sei noch erwähnt, dass  $a - 3$  gerade der Kurtosis entspricht.

Nach (4.1) hängt die Rate, mit der die Autokovarianzfunktion von  $(G^{(r)})^2$  abfällt, nicht mehr von  $c$  oder der Sprungverteilung ab. Abbildung 3.4 zeigt, dass für die gewählten Parameter die Autokovarianz für einen Lag von  $h = 200$  bereits recht nahe an Null ist.

Da die Autokovarianzfunktion dennoch relativ langsam abfällt, stellt die Parameterwahl, wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, zumindest für Tagesdaten genug Praxisnähe sicher. Gleichzeitig ist das Modell jedoch weit genug von der Nichtstationarität entfernt, so dass numerische Probleme vermieden werden. Um den Effekt der jeweiligen Startwerte von  $\sigma_0^2$  und  $G_0$  zu unterdrücken, wurden die Pfade bis  $t = 20500$  erzeugt und die Werte für  $t < 500$  abgeschnitten. So können die simulierten Daten als Realisierungen eines stationären Prozesses mit  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$  angenommen werden.

### 4.1.2 Theoretische und empirische Momente

Satz 3.13 gibt für den stationären Fall Momente von  $(G^{(r)})^2$  an. Übersichtshalber seien (3.15) und (3.16) nochmals dargestellt:

$$E(G_t^{(r)})^2 = \frac{\beta r}{-\Psi(1)} E(L_1^2),$$

$$\text{Cov}((G_t^{(r)})^2, (G_{t+h}^{(r)})^2) = \left( \frac{e^{-r\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) E(L_1^2) \text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) e^{h\Psi(1)}$$

mit

$$\text{Cov}(G_r^2, \sigma_r^2) = \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) \text{Var}(\sigma_0^2) \left( 1 - e^{r\Psi(1)} - \log \delta \left( \frac{1 - e^{r\Psi(1)}}{-\Psi(1)} \right) \right).$$

Im Folgenden wird stets der Fall  $r = 1$  betrachtet. Die theoretischen Momente sollen nun mit den empirischen verglichen werden. Dazu wird die empirische Autokovarianzfunktion benötigt.

**Definition 4.2 (Empirische Autokovarianzfunktion).** Die empirische oder Stichprobenautokovarianzfunktion der Stichprobe  $X_1, \dots, X_T$  ist definiert durch

$$\widehat{\gamma}(h) = \widehat{\text{Cov}}(X_{t+h}, X_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X}), \quad 0 \leq h \leq T,$$

wobei  $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_j$  das arithmetische Mittel von  $X_1, \dots, X_T$  ist.

Die empirische Schätzung von  $E(G_t^{(r)})^2$  lautet

$$\widehat{E}((G_t^{(r)})^2) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (G_t^{(r)})^2.$$

### 4.1.3 Identifizierbarkeit der Parameter

In diesem Abschnitt soll überprüft werden, ob mit den getroffenen Annahmen die gesuchten Parameter eindeutig bestimmt werden können. Da nach (4.1)  $\Psi(1)$  unabhängig von  $c$  ist, erscheint es bei erster Betrachtung, als ob dann die Rate  $c$  überhaupt nicht in (3.16) vorkommen würde. Da jedoch stets Realisierungen des stationären Prozesses mit  $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$  betrachtet werden, setzt man in (3.17) nach Satz 3.10

$$\text{Var}(\sigma_0^2) = \beta^2 \left( \frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)} \right). \quad (4.3)$$

Somit kommt über  $\Psi(2)$  die Rate  $c$  doch in der theoretischen Autokovarianzfunktion vor. Der folgende Satz gibt Aufschluss über die Identifizierbarkeit der Parameter.

**Satz 4.3.** *L sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Sprungverteilung  $F_X$  und bekannter Rate  $c < \infty$ . Es gelte  $E(X) = 0$  und  $E(X^4) < \infty$ . Weiter sei  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  der strikt stationäre Volatilitätsprozess mit  $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$  und  $E(\sigma_\infty^2) < \infty$ . Dann folgt:*

- (a) *Die Parameter  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  sowie  $E(X^2)$  können durch die Autokovarianzfunktion  $\text{Cov}((G_t^{(1)})^2, (G_{t+h}^{(1)})^2)$ ,  $h \geq 1$ , und  $E(G_t^{(1)})^2$  nicht eindeutig identifiziert werden.*
- (b) *Falls zusätzlich  $\text{Var}(L_1) = 1$  und*

$$c > \frac{a\lambda}{\delta} \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta \log \delta} \right) \quad \text{mit} \quad a = \frac{E(X^4)}{(E(X^2))^2} \quad (4.4)$$

*gilt, so sind die Parameter  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  sowie  $E(X^2)$  durch  $\text{Cov}((G_t^{(1)})^2, (G_{t+h}^{(1)})^2)$ ,  $h \geq 1$ , und  $E(G_t^{(1)})^2$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Zu (a): Definiere unter Verwendung von (3.17) und (4.3)

$$\begin{aligned} \kappa &:= \left( \frac{e^{-\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) E(L_1^2) \text{Cov}(G_1^2, \sigma_1^2) \\ &= \left( \frac{e^{-\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) c E(X^2) \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) \text{Var}(\sigma_0^2) A(\delta) \\ &= \left( \frac{e^{-\Psi(1)} - 1}{-\Psi(1)} \right) c E(X^2) \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) \beta^2 \left( \frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)} \right) A(\delta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei  $A(\delta)$  abkürzend für

$$A(\delta) = \left( 1 - e^{\Psi(1)} - \log \delta \left( \frac{1 - e^{\Psi(1)}}{-\Psi(1)} \right) \right)$$

steht. Nach (3.16) und (3.17) ist dann  $\text{Cov}((G_t^{(r)})^2, (G_{t+h}^{(r)})^2) = \kappa e^{h\Psi(1)}$ ,  $h \geq 1$ . Diese Funktion von  $h$  wird durch  $\kappa$  und  $\Psi(1)$  eindeutig festgelegt. Es wird nun gezeigt, dass zu einem Modell  $M$  basierend auf  $L$  mit Sprungverteilung  $F_X$  und den Parametern  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$ , das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, ein von  $M$  verschiedenes Modell  $M'$  konstruiert werden kann, das dieselbe Autokovarianzfunktion sowie gleiches Moment  $E(G_t^{(1)})^2$  besitzt.

Gleichheit der Autokovarianzfunktion bedingt  $\Psi(1) = \Psi(1)'$ , d.h.

$$\log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} E(X^2) = \log \delta' + \frac{c\lambda'}{\delta'} E(X^2)'. \quad (4.6)$$

Dies und die Gleichheit von  $E(G_t^{(1)})^2$  liefert unter Verwendung von (3.15) sofort, dass

$$\beta E(X^2) = \beta' E(X^2)'. \quad (4.7)$$

Wählt man nun für  $M'$  den Parameter  $\delta' = \delta$  und ein zulässiges  $\lambda' \neq \lambda$ , dann ergibt sich mit (4.6), dass  $E(X^2)' = \frac{\lambda}{\lambda'} E(X^2)$  und aus (4.7) folgt  $\beta' = \frac{\lambda'}{\lambda} \beta$ .

Damit folgt unter Verwendung von (3.23)

$$\begin{aligned}\Psi(2)' &= 2 \log \delta + \frac{c\lambda'}{\delta} \left( \frac{\lambda'}{\delta} a (E(X^2)')^2 + 2E(X^2)' \right) \\ &= 2 \log \delta + \frac{c\lambda'}{\delta} \left( \frac{\lambda'}{\delta} a \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} (E(X^2))^2 + 2 \frac{\lambda}{\lambda'} E(X^2) \right) \\ &= 2 \log \delta + \frac{c\lambda}{\delta} \left( \frac{\lambda}{\delta} a (E(X^2))^2 + 2E(X^2) \right) = \Psi(2).\end{aligned}$$

Auch ist

$$\frac{E(X^2)'\beta'^2}{\lambda'} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'} E(X^2) \frac{\lambda'^2}{\lambda^2} \beta^2}{\lambda'} = \frac{E(X^2)\beta^2}{\lambda}.$$

Dies alles eingesetzt in (4.5) zeigt  $\kappa' = \kappa$ . Folglich hat man ein Modell  $M' \neq M$  gefunden, das dieselbe Autokovarianzfunktion sowie gleichen Erwartungswert besitzt.

Zu (b): Nach Voraussetzung gilt nun  $\text{Var}(L_1') = 1$ . Damit folgt sofort  $E(X^2) = \frac{1}{c}$ . Gleichheit der Autokovarianzfunktion bedingt  $\Psi(1) = \Psi(1)'$ , d.h. nach (4.1) gilt

$$\log \delta + \frac{\lambda}{\delta} = \log \delta' + \frac{\lambda'}{\delta'}. \quad (4.8)$$

Dies und die Gleichheit von  $E(G_t^{(1)})^2$  liefert unter Verwendung von (3.15) sofort, dass  $\beta' = \beta$ . Mit Äquivalenzumformungen und (4.2), (4.8) ergibt sich aus  $\kappa = \kappa'$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \left(\frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)} - \frac{1}{\Psi^2(1)}\right) A(\delta) &= \left(\frac{\delta'}{\lambda'}\right) \left(\frac{2}{\Psi(1)\Psi(2)'} - \frac{1}{\Psi^2(1)'}\right) A(\delta') \\ \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \left(\frac{2\Psi(1) - \Psi(2)}{\Psi(1)\Psi(2)}\right) A(\delta) &= \left(\frac{\delta'}{\lambda'}\right) \left(\frac{2\Psi(1) - \Psi(2)'}{\Psi(1)\Psi(2)'}\right) A(\delta') \\ \left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \left(\frac{a\lambda^2}{c\delta^2\Psi(2)}\right) A(\delta) &= \left(\frac{\delta'}{\lambda'}\right) \left(\frac{a\lambda'^2}{c\delta'^2\Psi(2)'}\right) A(\delta') \\ \frac{a\lambda A(\delta)}{c\delta \left(2 \log \delta + \frac{\lambda}{\delta} \left(\frac{a\lambda}{c\delta} + 2\right)\right)} &= \frac{a\lambda' A(\delta')}{c\delta' \left(2 \log \delta' + \frac{\lambda'}{\delta'} \left(\frac{a\lambda'}{c\delta'} + 2\right)\right)} \\ \frac{a\delta\lambda A(\delta)}{2c\delta^2\Psi(1) + a\lambda^2} &= \frac{a\delta'\lambda' A(\delta')}{2c\delta'^2\Psi(1) + a\lambda'^2}.\end{aligned} \quad (4.9)$$

Aus (4.8) folgt

$$\lambda' = \left( \log \delta - \log \delta' + \frac{\lambda}{\delta} \right) \delta'. \quad (4.10)$$

Einsetzen von (4.10) in (4.9) ergibt ein quadratisches Gleichungssystem für  $\delta'$  und Auflösen nach  $\delta'$  ergibt nach aufwändigen Umformungen folgende zwei Lösungen:

$$\delta'_1 = \delta, \quad \delta'_2 = \exp\left(\frac{a\delta\lambda \log \delta + a\lambda^2 - c\delta^2 \log \delta}{\delta(c\delta + a\lambda)}\right). \quad (4.11)$$

Gelingt es zu zeigen, dass  $\delta'_2$  nicht zulässig ist, so folgt die Eindeutigkeit von  $\delta$ . Mit (4.10) ist dann  $\lambda$  eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit von  $\beta$  wurde bereits bewiesen.

Der Zähler in (4.11) ist positiv genau dann, wenn

$$c > \frac{a\delta\lambda \log \delta + a\lambda^2}{\delta^2 \log \delta} = \frac{a\lambda}{\delta} \left( 1 + \frac{\lambda}{\delta \log \delta} \right).$$

Dies ist nach Voraussetzung gerade erfüllt. Damit ist  $\delta'_2 > 1$ , d.h. nicht zulässig.  $\square$

**Bemerkung 4.4.** Die Voraussetzung (4.4) ist nicht sonderlich stark. Beispielsweise gilt mit  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$  gerade  $c > 0.0133a$ . Allerdings ist eine solche Schranke intuitiv nicht verständlich. Es wäre daher sinnvoll zu prüfen, ob man  $\delta'_2$  nicht auf anderem Wege ausschließen kann. So könnte man versuchen zu zeigen, dass  $\delta'_2$  für alle  $c$  und  $a$  das Stationaritätskriterium 3.21 für  $k = 1$  verletzt.

#### 4.1.4 Vorgehen

Satz 4.3 setzt eine gewisse Information über die Rate  $c$  voraus. Diese Rate kann auch relativ einfach geschätzt werden. Dazu bezeichne  $S_t$  die Anzahl der Sprünge von  $L$ , und damit auch von  $G$ , auf dem Intervall  $[t, t + 1)$ ,  $t = 0, \dots, T - 1$ . Da  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, sind die Zufallsvariablen  $S_t$  unabhängig identisch Poisson-verteilt mit Rate  $c$ . Damit sind auch die Zufallsvariablen  $1_{\{S_t=0\}}$ ,  $t = 0, \dots, T$ , unabhängig identisch verteilt. Da die Sprungverteilung  $F_X$  als stetig vorausgesetzt wurde, ist  $G_t^{(1)} = 0$  fast sicher genau dann, wenn  $S_t = 0$ , d.h.

$$1_{\{S_t=0\}} = 1_{\{G_t^{(1)}=0\}} \text{ f.s.}$$

für  $t = 0, \dots, T - 1$ . Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt somit

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{G_t^{(1)}=0\}} \xrightarrow{\text{f.s.}} E(1_{\{S_1=0\}}) = P(S_1 = 0) = e^{-c} \quad \text{für } T \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Definiert man  $z(T)$  als die Anzahl der Intervalle, auf denen keine Veränderung von  $G$  stattfindet, d.h.  $z(T) = \sum_{t=0}^{T-1} 1_{\{G_t^{(1)}=0\}}$ , dann folgt aus (4.12)

$$-\log \left( \frac{z(T)}{T} \right) \xrightarrow{\text{f.s.}} c \quad \text{für } T \rightarrow \infty.$$

Somit ist ein konsistenter Schätzer für die Rate  $c$  gegeben durch

$$\hat{c} = -\log \left( \frac{z(T)}{T} \right). \quad (4.13)$$

Wie bereits erwähnt, sind die Zufallsvariablen  $1_{\{G_t^{(1)}=0\}}$ ,  $t = 0, \dots, T$  unabhängig identisch verteilt. Daher lässt sich der zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace anwenden. Es gilt

$$\frac{z(T) - Te^{-c}}{\sqrt{Te^{-c}(1 - e^{-c})}} \xrightarrow{D} X \quad \text{für } T \rightarrow \infty$$

mit  $X \stackrel{D}{=} N(0, 1)$ . Dies ermöglicht die Angabe eines  $100(1 - \alpha)\%$ -Konfidenzintervalls:

$$1 - \alpha \approx P \left( \left| \frac{z(T) - Te^{-c}}{\sqrt{Te^{-c}(1 - e^{-c})}} \right| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \approx P \left( \left| \frac{z(T) - Te^{-c}}{\sqrt{z(T)(1 - \frac{z(T)}{T})}} \right| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}} \right),$$

wobei  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist. Die zweite Approximation verwendet  $e^{-c} \approx z(T)/T$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass kein Sprung auf einem Intervall stattfindet, wird durch den empirischen Mittelwert angenähert. Dies ist hier sinnvoll, da  $T$  ausreichend groß ist (siehe z.B. Blyth und Still [8]). Auflösen nach  $c$  ergibt ein  $100(1 - \alpha)\%$ -Konfidenzintervall für  $e^{-c}$ :

$$\left[ \frac{z(T)}{T} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}}, \frac{z(T)}{T} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}} \right]$$

Da  $e^{-c}$  eine Wahrscheinlichkeit ist, gilt  $e^{-c} \in [0, 1]$ . Damit kann das Konfidenzintervall weiter verbessert werden:

$$\left[ \max \left\{ 0, \frac{z(T)}{T} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}} \right\}, \min \left\{ 1, \frac{z(T)}{T} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}} \right\} \right]$$

Nun lässt sich durch Logarithmieren und Multiplikation mit  $(-1)$  ein entsprechendes Konfidenzintervall für  $c$  angeben:

$$\left[ -\log \left( \max \left\{ 0, \frac{z(T)}{T} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}} \right\} \right), \right. \\ \left. -\log \left( \min \left\{ 1, \frac{z(T)}{T} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{T} \sqrt{z(T) - \frac{z(T)^2}{T}} \right\} \right) \right]$$

Das Schätzverfahren für  $c$  funktioniert nur, falls  $z(T) > 0$ . Sollte  $G$  auf fast allen Intervallen gesprungen sein, so wird  $\hat{c}$  sehr groß. Dies deutet dies auf eine zu große Schrittweite zwischen den Beobachtungen hin.

Damit kann das Vorgehen zur Parameterbestimmung, das im Beweis von Satz 4.3 deutlich wurde, unter den Voraussetzungen (1)-(6) und (4.4) dargestellt werden:

- Schätzen der Rate  $c$  mittels

$$\hat{c} = -\log \left( \frac{z(T)}{T} \right).$$

- Mit Voraussetzung (5) ergibt sich sofort

$$\hat{E}(X^2) = \frac{1}{\hat{c}}.$$

- Mit Voraussetzung (4) folgt  $\hat{\xi} = g(\hat{E}(X^2))$ .

- Anpassen einer exponentiellen Kurve der Form  $ke^{ph}$  an die empirischen Autokovarianzen mittels Methode der kleinsten Quadrate.  $\hat{k}$  und  $\hat{p}$  seien dabei die Werte, die

$$\min_{k,p} \sum_{h=1}^{h_{max}} (\hat{\gamma}(h) - ke^{ph})^2$$

erfüllen, wobei  $h_{max}$  der (frei zu wählende) maximale Lag ist, der zu Schätzung herangezogen wird. Damit ist  $\hat{p}$  ein Schätzer für  $\Psi(1)$ .

- Auflösen von (3.15) nach  $\beta$  ergibt den Schätzer  $\hat{\beta} = -\hat{p} \hat{E}((G_t^{(r)})^2)$ .

- $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$  erhält man nun durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \log \delta + \frac{\lambda}{\delta} \\ \hat{k} &= \left( \frac{e^{-\hat{p}} - 1}{-\hat{p}} \right) \left( \frac{\delta}{\lambda} \right) \hat{\beta}^2 \left( \frac{2}{\hat{p} \Psi(2)} - \frac{1}{\hat{p}^2} \right) \left( 1 - e^{\hat{p}} - \log \delta \left( \frac{1 - e^{\hat{p}}}{-\hat{p}} \right) \right) \end{aligned}$$

wobei

$$\Psi(2) = 2 \log \delta + \frac{\lambda}{\delta} \left( \frac{a\lambda}{c\delta} + 2 \right) \quad \text{mit} \quad a = \frac{E(X^4)}{(E(X^2))^2}.$$

### 4.1.5 Konsistenz des Momentenschätzers

Im vorhergehenden Abschnitt wurde ein Schätzer für die Rate des zusammengesetzten Poisson-Prozesses vorgestellt und dessen Konsistenz gezeigt. Damit ist auch der Schätzer  $\hat{E}(X^2) = (\hat{c})^{-1}$  aus Schritt 2 konsistent. Dies soll nun auch für die Momentenschätzer  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$  nachgewiesen werden. Dazu benötigt man einige Definitionen.

**Definition 4.5 (Ergodische und mischende Transformation).** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (i) Eine  $\mathcal{F}$ -messbare Abbildung  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  heißt *maßerhaltende Transformation*, falls  $P(T^{-1}(A)) = P(A) \forall A \in \mathcal{F}$ .

- (ii) Eine Menge  $A \in \mathcal{F}$  wird als invariant unter der maßerhaltenden Transformation  $T$  bezeichnet, falls  $A = T^{-1}(A)$ .
- (iii) Eine maßerhaltende Transformation  $T$  heißt ergodisch, falls entweder  $P(A) = 0$  oder  $P(A^c) = 0$  für jede invariante Menge  $A$ .
- (iv) Eine maßerhaltende Transformation  $T$  heißt mischend, falls für alle  $A, C \in \mathcal{F}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A \cap T^{-n}(C)) = P(A)P(C).$$

**Definition 4.6 (Ergodische und mischende Zufallsfolge).** Sei  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ -wertigen Zufallsvariablen, die auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definiert sind. Dann heißt  $Z$  ergodisch (mischend), falls der Forward-Operator  $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ , definiert durch  $F(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (Z_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ , eine ergodische (mischende) Transformation auf  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0}, P_Z = P \circ Z^{-1})$  ist.

**Definition 4.7 (Mischer Prozess).** Ein Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$  mit Werten in  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  heißt mischend, falls für alle  $\bar{U}, \bar{V}$  in den Borel-Mengen von  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P((Z_w)_{w \geq 0} \in \bar{U}, (Z_{w+t})_{w \geq 0} \in \bar{V}) = P((Z_w)_{w \geq 0} \in \bar{U}) P((Z_w)_{w \geq 0} \in \bar{V}). \quad (4.14)$$

erfüllt ist.

**Bemerkung 4.8.** Falls der Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$  mischend ist, ist auch der eingebettete Prozess  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mischend. Dies folgt unmittelbar aus dem Vergleich der beiden Definitionen.

**Satz 4.9.** Sei  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  der strikt stationäre Volatilitätsprozess und  $L$  von beschränkter Variation. Dann ist der Prozess  $(G_t^{(h)})_{t \geq 0}$  mischend für jedes  $h > 0$ .

*Beweis.* Sei

$$Z_t := \int_{(t, t+h]} \sigma_s dL_s = G_t^{(h)}.$$

Da die Borel-Mengen  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$  und die Verteilung von  $Z$  durch Zylindermengen erzeugt werden, reicht es (4.14) für spezielle Zylindermengen zu zeigen (siehe Ash und Gardner [1], Theorem 3.2.7). Daher sei  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t_1 < \dots < t_p$ ,  $0 \leq w_1 < \dots < w_q$  und

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u'_1) \times \dots \times (u_p, u'_p), \\ V &= (v_1, v'_1) \times \dots \times (v_q, v'_q), \end{aligned}$$

mit  $u_i < u'_i, v_j < v'_j$ . Somit ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}, Z_{w_1+t}, \dots, Z_{w_q}) \in U \times V) \\ = P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U) P((Z_{w_1}, \dots, Z_{w_q}) \in V). \end{aligned} \quad (4.15)$$



Sei nun

$$\begin{aligned} A_s &:= e^{-(X_s - X_{(t_p+h)-})} \\ B_s &:= \beta \int_{t_p+h}^s e^{(X_r - X_{(t_p+h)-})} dr e^{-(X_s - X_{(t_p+h)-})}. \end{aligned}$$

Dann gilt unter Verwendung von (3.5)

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \beta \int_0^{t_p+h} e^{X_r} dr e^{-X_{(t_p+h)-}} e^{-(X_s - X_{(t_p+h)-})} + \beta \int_{t_p+h}^s e^{X_r} dr e^{-X_s} + \sigma_0^2 e^{-X_s} \\ &= (\sigma_{t_p+h} - \sigma_0^2 e^{-X_{(t_p+h)-}}) e^{-(X_s - X_{(t_p+h)-})} + \beta \int_{t_p+h}^s e^{X_r} dr e^{-X_s} + \sigma_0^2 e^{-X_s} \\ &= A_s \sigma_{t_p+h}^2 + B_s, \quad s \geq t_p + h, \end{aligned}$$

und  $(A_s, B_s)$  sind unabhängig von  $(L_t)_{0 \leq t \leq t_p+h}$ . Mit geeigneter Definition von  $C_s$  gilt

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sqrt{B_s} + (\sigma_s - \sqrt{B_s}) \\ &= \sqrt{B_s} + \frac{A_s \sigma_{t_p+h}^2}{\sigma_s + \sqrt{B_s}} =: \sqrt{B_s} + C_s. \end{aligned}$$

Da  $\sigma_s^2$  nach unten beschränkt ist (siehe KLM [31], Proposition 2) und  $A_s$  fast sicher gegen Null konvergiert, falls  $s \rightarrow \infty$ , (siehe Beweis von Theorem 3.1 in KLM [30]), gilt  $C_s \rightarrow 0$  fast sicher für  $s \rightarrow \infty$ . Weiter folgt, dass für jedes  $j \in \{1, \dots, q\}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{w_j+t}^{w_j+t+h} C_s dL_s \rightarrow 0 \quad f.s.$$

(z.B. da  $L$  von beschränkter Variation ist). Sei

$$\begin{aligned} Y_t &:= \int_{(t, t+h]} \sqrt{B_s} dL_s, \\ R_t &:= \int_{(t, t+h]} C_s dL_s. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$Z_t = Y_t + R_t.$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} &P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U, Y_{w_1+t} \in (v_1 + \varepsilon, v'_1 - \varepsilon), \dots, v_{w_q+t} \in (v_q + \varepsilon, v'_q - \varepsilon)) \\ &\quad - P(\exists j \in \{1, \dots, q\} : |R_{w_j+t}| \geq \varepsilon) \\ &\leq P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U, (Z_{w_1+t}, \dots, Z_{w_q+t}) \in V) \\ &\leq P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U, Y_{w_1+t} \in (v_1 - \varepsilon, v'_1 + \varepsilon), \dots, v_{w_q+t} \in (v_q - \varepsilon, v'_q + \varepsilon)) \\ &\quad + P(\exists j \in \{1, \dots, q\} : |R_{w_j+t}| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Für  $t \rightarrow \infty$ , und unter Verwendung der Tatsache, dass  $R_t$  fast sicher gegen Null konvergiert und dass  $Y_t$  unabhängig von  $(L_s)_{0 \leq s \leq t_p+h}$  für  $t \geq t_p + h$  ist, erhält man

$$\begin{aligned}
& P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U) \liminf_{t \rightarrow \infty} P(Y_{w_1+t} \in (v_1 + \varepsilon, v'_1 - \varepsilon), \dots, Y_{w_q+t} \in (v_q + \varepsilon, v'_q - \varepsilon)) \\
& \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U, (Z_{w_1+t}, \dots, Z_{w_q+t}) \in V) \\
& \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U, (Z_{w_1+t}, \dots, Z_{w_q+t}) \in V) \\
& \leq P((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_p}) \in U) \\
& \quad \times \limsup_{t \rightarrow \infty} P(Y_{w_1+t} \in (v_1 - \varepsilon, v'_1 + \varepsilon), \dots, Y_{w_q+t} \in (v_q - \varepsilon, v'_q + \varepsilon)).
\end{aligned}$$

Ähnlich erhält man

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} P(Y_{w_1+t} \in (v_1 - \varepsilon, v'_1 + \varepsilon), \dots, Y_{w_q+t} \in (v_q - \varepsilon, v'_q + \varepsilon)) \\
& \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} P(Z_{w_1+t} \in (v_1 - 2\varepsilon, v'_1 + 2\varepsilon), \dots, Z_{w_q+t} \in (v_q - 2\varepsilon, v'_q + 2\varepsilon)) \\
& = P(Z_{w_1} \in (v_1 - 2\varepsilon, v'_1 + 2\varepsilon), \dots, Z_{w_q} \in (v_q - 2\varepsilon, v'_q + 2\varepsilon))
\end{aligned}$$

und eine ähnliche Abschätzung für  $\liminf$ . Nun folgt (4.15) aus

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(Z_{w_1} \in (v_1 - 2\varepsilon, v'_1 + 2\varepsilon), \dots, Z_{w_q} \in (v_q - 2\varepsilon, v'_q + 2\varepsilon)) \\
& = P(Z_{w_1} \in (v_1, v'_1), \dots, Z_{w_q} \in (v_q, v'_q)).
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt verwendet, dass  $(Z_{w_1}, \dots, Z_{w_q})$  eine stetige Verteilung besitzt. Dies folgt, da  $\sigma_\infty^2$  selbstzerlegbar und somit stetig ist.  $\square$

**Satz 4.10.** (Ash und Gardner [1], Theorem 3.2.6) *Sei  $T$  eine mischende Transformation auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dann ist  $T$  ergodisch.*

Damit und aus Bemerkung 4.8 folgt, dass  $(G_t^{(1)})_{t \in \mathbb{N}_0}$  sowohl mischend als auch ergodisch ist.

**Satz 4.11.** (Ash und Gardner [1], Theorem 3.2.6) *Sei  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine stationäre,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ -wertige, ergodische Folge. Dann gilt mit dem Forward-Operator  $F$ :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(F^k Z) \xrightarrow{f.s.} E(f(Z)) \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0}, P_Z, \mathbb{R}). \quad (4.16)$$

Dieses Resultat soll nun verwendet werden um die fast sichere Konvergenz der empirischen Autokovarianzen gegen die theoretischen zu zeigen. Dazu betrachtet man die empirische Autokovarianzfunktion

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (Z_{t+h} - \bar{Z})(Z_t - \bar{Z}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} (Z_{t+h} Z_t - Z_{t+h} \bar{Z} - Z_t \bar{Z} + \bar{Z}^2)$$

für  $0 \leq h \leq T$ . Zunächst wird der Term  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} Z_{t+h} Z_t$  untersucht. Dazu setzt man für festes  $h \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X &:= (Z_{t+1})_{t \in \mathbb{N}_0}, \\ Y &:= (Z_{t+h+1})_{t \in \mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $X = (X_0, X_1, \dots) = (Z_1, Z_2, \dots)$  und  $Y = (Y_0, Y_1, \dots) = (Z_{h+1}, Z_{h+2}, \dots)$  zwei stationäre Folgen sind. Der Beweis, der gezeigt hat, dass  $Z$  für den COGARCH-Fall ergodisch war, kann nun leicht modifiziert werden, um zu zeigen, dass der Vektor  $(X, Y)$  ergodisch ist (dieser ist auf dem Raum  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0} \times \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0})$  definiert). Nun setze

$$f(X, Y) = f((X_0, X_1, \dots), (Y_0, Y_1, \dots)) := X_0 Y_0,$$

d.h.  $f$  greift jeweils auf den ersten Eintrag der beiden Folgen zu und multipliziert sie miteinander. Damit hat man

$$f(X, Y) = Z_1 Z_{h+1},$$

und

$$f(F^t(X, Y)) = Z_{t+1} Z_{t+h+1}, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Falls  $E(Z_0^2) < \infty$ , so ist  $f \in L^1$ , und es gilt nach Satz 4.11

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t Z_{t+h} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f(F^t(X, Y)) \xrightarrow{f.s.} E(f(X, Y)) = E(Z_1 Z_{h+1}).$$

Für den Grenzwert spielt es dabei keine Rolle, dass die Summe bis  $T$  und nicht bis  $T - h$  geht.

Für die restlichen Terme greift die eindimensionale Konvergenz. Es gilt wieder unter Verwendung von Satz 4.11

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} Z_{t+h} \bar{Z} &= \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} Z_{t+h} \right) \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t \right) \xrightarrow{f.s.} E(Z_1)^2, \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} Z_t \bar{Z} &= \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} Z_t \right) \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t \right) \xrightarrow{f.s.} E(Z_1)^2, \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} \bar{Z}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-h} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t \right)^2 \xrightarrow{f.s.} E(Z_1)^2. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die empirische Autokovarianzfunktion punktweise fast sicher gegen die theoretische Autokovarianzfunktion. Da  $E(G_0^{(1)}) < \infty$  nach (3.15) und Voraussetzung (6), gilt dies auch für  $(G_t^{(1)})$ , d.h.  $\hat{\gamma}(h) \xrightarrow{f.s.} \kappa e^{\Psi(1)h}$ , wobei  $\kappa$  definiert ist wie in (4.5). Damit folgt, dass für  $h_{max} \geq 2$

$$\min_{k,p} \sum_{h=1}^{h_{max}} (\hat{\gamma}(h) - k e^{ph})^2 \xrightarrow{f.s.} 0 \quad (4.17)$$

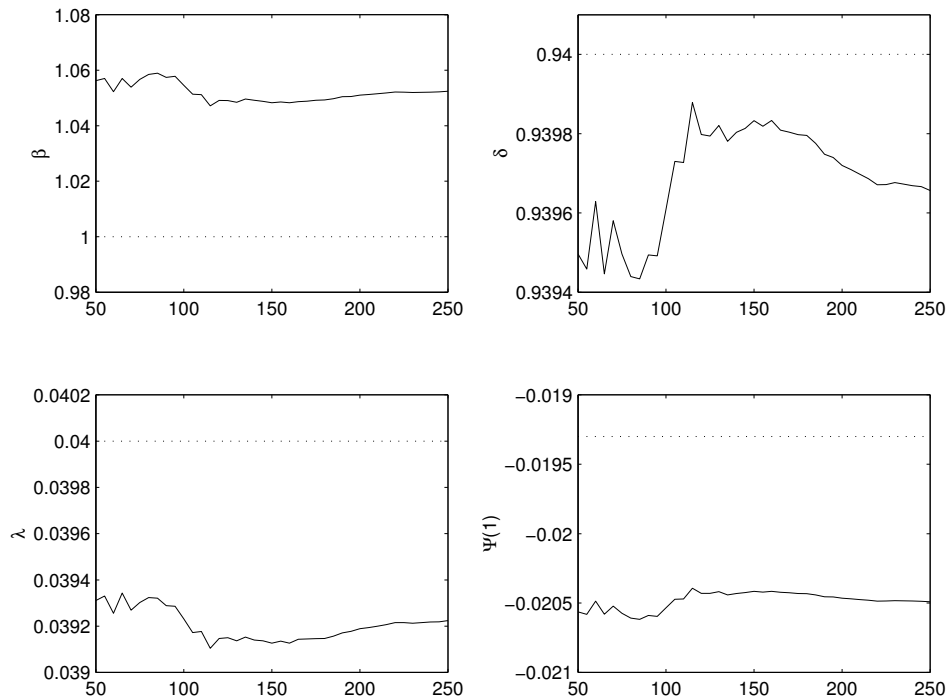


Abbildung 4.1: Einfluss der Länge der empirischen Autokovarianzfunktion auf  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\lambda}$  und  $\hat{\Psi}(1)$ . Die gepunkteten Linien geben die wahren Parameterwerte an. Wie die Skalierung der vertikalen Achse zeigt, sind die geschätzten Werte sehr nah an den theoretischen.

genau dann wenn  $\hat{k} \xrightarrow{f.s.} \kappa$  und  $\hat{p} \xrightarrow{f.s.} \Psi(1)$ . Denn würde  $\hat{k}$  oder  $\hat{p}$  nicht gegen  $\kappa$  bzw.  $\Psi(1)$  konvergieren, dann würde auch die Summe in (4.17) nicht gegen Null gehen und die Schätzer entsprächen nicht dem Minimum. Dies gilt für  $h_{max} \geq 2$ , da  $\gamma(h)$  durch die Werte an zwei verschiedenen Lags bereits eindeutig bestimmt ist.

Um  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$  zu erhalten, wird nur noch eine Gleichung und ein Gleichungssystem gelöst. Falls die Identifizierbarkeitsbedingungen aus Satz 4.3 erfüllt sind, gilt auch  $\hat{\beta} \xrightarrow{f.s.} \beta$ ,  $\hat{\delta} \xrightarrow{f.s.} \delta$  und  $\hat{\lambda} \xrightarrow{f.s.} \lambda$ . Somit sind die Schätzer konsistent.

### 4.1.6 Ergebnisse

Bevor das Verfahren angewendet werden kann, muss entschieden werden, bis zu welchem Lag  $h_{max}$  die Autokovarianzfunktion zum Anpassen der exponentiell abfallenden Kurve verwendet werden soll. Werte, die nur kleine Lags abdecken, liefern eventuell zu wenig Information über die Kurve. Andererseits sollten keine zu großen Lags einbezogen werden, da diese, anstatt monoton gegen Null abzufallen, sehr stark fluktuieren und somit der relative Fehler besonders groß ist. Für eine erste Abschätzung empfiehlt es sich, die empirische Autokorrelationsfunktion zu betrachten.

Die geschätzten Werte ergeben sich jeweils aus dem Mittelwert aus den 100 Rea-

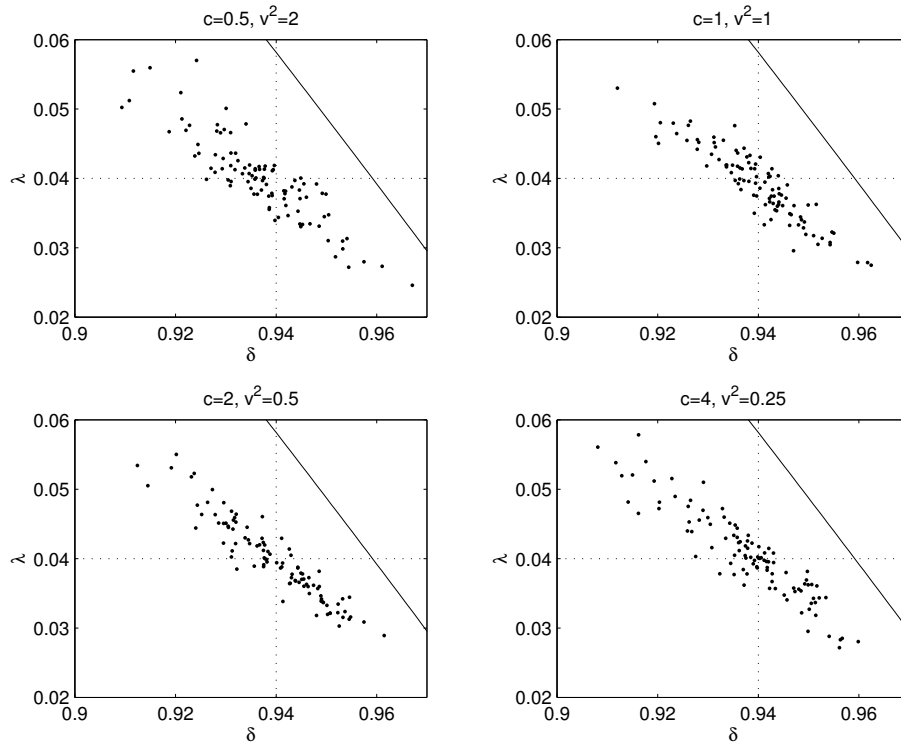


Abbildung 4.2: Die einzelnen Schätzwerte  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\lambda}$  für normalverteilte Sprünge. Die gepunkteten Linien geben die wahren Parameterwerte an. Die Niveaulinie  $\Psi(1) = 0$  ist durchgezogen dargestellt.

lisierungen. In Abbildung 4.1 ist die Abhängigkeit der Schätzwerte  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\lambda}$  und  $\hat{\Psi}(1)$  von der Länge der empirischen Autokovarianzfunktion dargestellt. Dabei wurden die Realisierungen mit Rate  $c = 1$  und standardnormalverteilten Sprüngen verwendet. Erstaunlicherweise ist der Einfluss der Anzahl an Lags recht gering. Eine Verwendung der ersten 150 Lags scheint eine gute Wahl zu sein.

Zuletzt stellt sich die Frage, welche Startwerte für das Gleichungssystem in Punkt 6 verwendet werden sollen. Die Voraussetzungen von Satz 3.13 verlangen  $\Psi(1), \Psi(2) < 0$ . Abbildung 3.1 zeigt die Nullniveaulinien von  $\Psi(1)$  und  $\Psi(2)$ . Da  $\Psi(1)$  negativ, jedoch mit möglichst kleinem Absolutbetrag sein sollte (die Autokovarianzfunktion fällt sehr langsam ab), kommen eigentlich nur Werte  $\delta > 0.9$  und  $\lambda < 0.1$  in Frage. Als Startwerte wurden hier  $\delta = 0.9$  und  $\lambda = 0.02$  gewählt.

Tabelle 4.1 beinhaltet die Schätzwerte für normalverteilte Sprünge, jeweils mit Angabe des Bias, des mittleren absoluten Fehlers (*mean absolute error*, MAE), des mittleren quadratischen Fehlers (*mean square error*, MSE) und der Standardabweichung. In Abbildung 4.2 sind die einzelnen Schätzwerte  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$  geplottet. Dies soll die Streuung der einzelnen Werte grafisch verdeutlichen. Tabelle 4.2 gibt die Ergebnisse für Laplace-verteilte Sprünge.

Die Werte sind allesamt sehr nah an den wahren Werten. Erwähnenswert ist weiterhin, dass sämtliche Pfade ein  $\hat{\Psi}(1) < 0$ , d.h. eine abfallende Autokovarianzfunktion

aufweisen. Dies ist besonders gut in Abbildung 4.2 zu sehen, da alle Schätzwerte linksunterhalb der Nullniveauline von  $\Psi(1)$  liegen. Nach Proposition 3.9 erfüllen damit alle Schätzer die Stationaritätsbedingung.

Interessant ist die Frage, wie wichtig die Kenntnis der Sprungverteilungsfamilie von  $L$  ist. Um dies beurteilen zu können, wurden die Parameter mit den Prozessrealisierungen mit Laplace-verteilten Sprüngen erneut geschätzt, jedoch unter der Annahme, dass das Modell normalverteilte Sprünge besitzt. Dies bedeutet, dass das Gleichungssystem in Schritt 6 mit  $a = 3$  statt  $a = 6$  gelöst wird. Die so errechneten Schätzwerte sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Während sich die übrigen Schätzer nicht verändert haben, sind die Werte für  $\delta$  und  $\lambda$  deutlich schlechter geworden.

	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
$\hat{c}$	0.4995	1.0011	1.9999	4.0071
Bias( $\hat{c}$ )	-0.0005	0.0011	0.0001	0.0071
MAE( $\hat{c}$ )	0.0049	0.0075	0.0130	0.0366
MSE( $\hat{c}$ )	$3.5110 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0003	0.0022
Std.Abw. ( $\hat{c}$ )	0.0059	0.0094	0.0167	0.0466
$\hat{v}^2$	2.0024	0.9989	0.5001	0.2496
Bias( $\hat{v}^2$ )	0.0024	-0.0011	0.0001	-0.0004
MAE( $\hat{v}^2$ )	0.0198	0.0075	0.0032	0.0023
MSE( $\hat{v}^2$ )	0.0006	0.0001	$1.7320 \cdot 10^{-5}$	$0.8523 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{v}^2$ )	0.0237	0.0094	0.0042	0.0029
$\hat{\beta}$	1.1738	1.0483	1.0278	1.0823
Bias( $\hat{\beta}$ )	0.1738	0.0483	0.0278	0.0823
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.2736	0.1880	0.1975	0.2280
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.1210	0.0599	0.0616	0.0936
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.3028	0.2412	0.2478	0.2961
$\hat{\delta}$	0.9365	0.9398	0.9395	0.9377
Bias( $\hat{\delta}$ )	-0.0035	-0.0002	-0.0005	-0.0023
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0088	0.0072	0.0081	0.0087
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0111	0.0094	0.0099	0.0112
$\hat{\lambda}$	0.0402	0.0392	0.0399	0.0406
Bias( $\hat{\lambda}$ )	0.0002	-0.0008	-0.0001	0.0006
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0046	0.0043	0.0047	0.0048
MSE( $\hat{\lambda}$ )	$4.0969 \cdot 10^{-5}$	$2.8699 \cdot 10^{-5}$	$3.3189 \cdot 10^{-5}$	$3.9819 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0064	0.0053	0.0058	0.0063
$\hat{\Psi}(1)$	-0.0227	-0.0204	-0.0199	-0.0210
Bias( $\hat{\Psi}(1)$ )	-0.0034	-0.0011	-0.0006	-0.0017
MAE( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0054	0.0038	0.0038	0.0044
MSE( $\hat{\Psi}(1)$ )	$4.6954 \cdot 10^{-5}$	$2.5023 \cdot 10^{-5}$	$2.2739 \cdot 10^{-5}$	$3.6469 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0060	0.0049	0.0048	0.0058

Tabelle 4.1: Schätzwerte mit Momentenmethode für normalverteilte Sprünge. Die wahren Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$ ,  $\Psi(1) = 0.0193$  und  $c, v^2$  wie angegeben.

	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
$\hat{c}$	0.4991	1.0003	1.9990	4.0100
Bias( $\hat{c}$ )	-0.0009	0.0003	-0.0010	0.0100
MAE( $\hat{c}$ )	0.0050	0.0076	0.0136	0.0401
MSE( $\hat{c}$ )	$4.7177 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0003	0.0028
Std.Abw. ( $\hat{c}$ )	0.0061	0.0098	0.0175	0.0522
$\hat{\alpha}^2$	0.9982	2.0006	3.9979	8.0200
Bias( $\hat{\alpha}^2$ )	-0.0018	0.0006	-0.0021	0.0200
MAE( $\hat{\alpha}^2$ )	0.0100	0.0153	0.0273	0.0802
MSE( $\hat{\alpha}^2$ )	0.0002	0.0004	0.0012	0.0112
Std.Abw. ( $\hat{\alpha}^2$ )	0.0123	0.0195	0.0350	0.1043
$\hat{\beta}$	1.1751	1.1344	1.0759	1.0591
Bias( $\hat{\beta}$ )	0.1751	0.1344	0.0759	0.0591
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.3072	0.2394	0.2239	0.1804
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.1788	0.0975	0.0777	0.0621
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.3868	0.2833	0.2695	0.2433
$\hat{\delta}$	0.9399	0.9384	0.9389	0.9379
Bias( $\hat{\delta}$ )	-0.0001	-0.0016	-0.0011	-0.0021
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0106	0.0075	0.0077	0.0070
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0136	0.0091	0.0094	0.0093
$\hat{\lambda}$	0.0365	0.0389	0.0396	0.0410
Bias( $\hat{\lambda}$ )	-0.0035	-0.0011	-0.0004	0.0010
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0068	0.0045	0.0046	0.0042
MSE( $\hat{\lambda}$ )	0.0001	$3.0766 \cdot 10^{-5}$	$3.2437 \cdot 10^{-5}$	$3.1496 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0074	0.0055	0.0057	0.0056
$\hat{\Psi}(1)$	-0.0228	-0.0222	-0.0208	-0.0204
Bias( $\hat{\Psi}(1)$ )	-0.0035	-0.0028	-0.0015	-0.0011
MAE( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0063	0.0048	0.0043	0.0036
MSE( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0001	$4.0552 \cdot 10^{-5}$	$2.9987 \cdot 10^{-5}$	$2.3695 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0078	0.0057	0.0053	0.0048

Tabelle 4.2: Schätzwerte mit Momentenmethode für Laplace-verteilte Sprünge. Die wahren Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$ ,  $\Psi(1) = 0.0193$  und  $c, \alpha^2$  wie angegeben.



	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
$\hat{c}$	0.4991	1.0003	1.9990	4.0100
Bias( $\hat{c}$ )	-0.0009	0.0003	-0.0010	0.0100
MAE( $\hat{c}$ )	0.0050	0.0076	0.0136	0.0401
MSE( $\hat{c}$ )	$4.7177 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0003	0.0028
Std.Abw. ( $\hat{c}$ )	0.0061	0.0098	0.0175	0.0522
$\hat{v}^2$	2.0039	0.9998	0.5003	0.2494
Bias( $\hat{v}^2$ )	0.0039	-0.0002	0.0003	-0.0006
MAE( $\hat{v}^2$ )	0.0201	0.0076	0.0034	0.0025
MSE( $\hat{v}^2$ )	0.0006	0.0001	$1.9115 \cdot 10^{-5}$	$1.0605 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{v}^2$ )	0.0248	0.0097	0.0044	0.0032
$\hat{\beta}$	1.1751	1.1344	1.0759	1.0591
Bias( $\hat{\beta}$ )	0.1751	0.1344	0.0759	0.0591
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.3072	0.2394	0.2239	0.1804
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.1788	0.0975	0.0777	0.0621
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.3868	0.2833	0.2695	0.2433
$\hat{\delta}$	0.9250	0.9225	0.9187	0.9194
Bias( $\hat{\delta}$ )	-0.0150	-0.0175	-0.0213	-0.0206
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0166	0.0181	0.0215	0.0207
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0005	0.0004	0.0006	0.0005
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0158	0.0107	0.0122	0.0100
$\hat{\lambda}$	0.0516	0.0546	0.0588	0.0586
Bias( $\hat{\lambda}$ )	0.0116	0.0146	0.0188	0.0186
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0120	0.0146	0.0188	0.0186
MSE( $\hat{\lambda}$ )	0.0002	0.0003	0.0004	0.0004
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0092	0.0063	0.0079	0.0064
$\hat{\Psi}(1)$	-0.0228	-0.0222	-0.0208	-0.0204
Bias( $\hat{\Psi}(1)$ )	-0.0035	-0.0028	-0.0015	-0.0011
MAE( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0063	0.0048	0.0043	0.0036
MSE( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0001	$4.0552 \cdot 10^{-5}$	$2.9987 \cdot 10^{-5}$	$2.3695 \cdot 10^{-5}$
Std.Abw. ( $\hat{\Psi}(1)$ )	0.0078	0.0057	0.0053	0.0048

Tabelle 4.3: Schätzwerte mit Momentenmethode für Laplace-verteilte Sprünge unter der Annahme, es lägen normalverteilte Sprünge vor. Die wahren Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$ ,  $\Psi(1) = 0.0193$  und  $c$  wie angegeben.

## 4.2 Quasi-Maximum-Likelihood-Schätzer

Das hier vorgestellte Quasi-Maximum-Likelihood (QML)-Verfahren wird durch das Vorgehen in zeitdiskreten GARCH-Modellen motiviert. Daher wird zunächst diese Methode erläutert, dann die nötigen Annahmen für den COGARCH getroffen und die Methode übertragen.

### 4.2.1 QML in diskreten GARCH-Modellen

Hier sei nochmals der diskrete GARCH(1,1)-Prozess

$$Y_n = \epsilon_n \sigma_n, \quad (4.18)$$

$$\sigma_n^2 = \beta + \lambda Y_{n-1}^2 + \delta \sigma_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.19)$$

erwähnt, wobei  $\beta > 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$  ist. Eine Möglichkeit, die Parameter bei bekannter Verteilung von  $\epsilon_n$  zu bestimmen, ist ein Maximum-Likelihood (ML)-Ansatz. Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist die unbedingte Verteilung von  $Y_n$  nicht bekannt, wohl aber die bedingte. Falls beispielsweise  $\epsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unabhängig identisch  $N(0, 1)$ -verteilt sind, gilt mit den wahren Parametern  $\theta = (\beta, \delta, \lambda)$  für die bedingte Dichte ( $\sigma_n^2$  ist  $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar)

$$f(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{Y_n^2}{\sigma_n^2}\right).$$

Basierend auf den Beobachtungen  $Y_n, n = 0, \dots, N$ , und einem Startwert für  $\sigma_0^2$ , wird  $\sigma_n^2$  schrittweise durch Gleichung (4.19) berechnet. Folgende Zerlegung der gemeinsamen Dichte von  $Y_0, \dots, Y_N$  verwendet die Definition der bedingten Dichte:

$$\begin{aligned} f(Y_0, \dots, Y_N | \sigma_0^2, \theta) &= f(Y_1, \dots, Y_N | \mathcal{F}_0, \theta) f(Y_0 | \sigma_0^2, \theta) \\ &= f(Y_2, \dots, Y_N | \mathcal{F}_1, \theta) f(Y_1 | \mathcal{F}_0, \theta) f(Y_0 | \sigma_0^2, \theta) \\ &= f(Y_3, \dots, Y_N | \mathcal{F}_1, \theta) f(Y_2 | \mathcal{F}_1, \theta) f(Y_1 | \mathcal{F}_0, \theta) f(Y_0 | \sigma_0^2, \theta) \\ &= \dots \\ &= \prod_{n=0}^N f(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}, \theta). \end{aligned}$$

Weiterhin wird benützt, dass  $\mathcal{F}_n$  durch  $\sigma_0^2, Y_0, \dots, Y_n$  erzeugt wird, sowie die vereinfachende Bezeichnung  $\mathcal{F}_{-1}$  für  $\sigma_0^2$ . Damit kann der Log-Likelihood geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \log L(Y_0, \dots, Y_N | \sigma_0^2, \theta) &= \log \prod_{n=0}^N f(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}, \theta) = \sum_{n=0}^N \log f(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}, \theta) \\ &= \sum_{n=0}^N \log \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{Y_n^2}{\sigma_n^2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \log \sigma_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{Y_n^2}{\sigma_n^2} + \text{const.} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Maximieren des Log-Likelihoods ergibt einen Schätzer  $\hat{\theta}_N = (\hat{\beta}, \hat{\delta}, \hat{\lambda})$  für  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_N = \arg \max_{\theta} \log L(Y_1, \dots, Y_N | \sigma_0^2, \theta). \quad (4.21)$$

Im normalverteilten Fall lassen sich die Score-Gleichungen explizit angeben:

$$\frac{\partial \log f}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial \theta} \frac{1}{\sigma_n^2} \left( \frac{Y_n^2}{\sigma_n^2} - 1 \right), \quad \text{mit } \frac{\partial \sigma_n^2}{\partial \theta} = (1, \sigma_{n-1}^2, Y_{n-1}^2)^T.$$

Falls die  $\epsilon_n$  nicht standardnormalverteilt sind, sondern eine andere bekannte Verteilung besitzen, so kann diese analog verwendet werden. Meistens ist über die Verteilung jedoch überhaupt nichts bekannt. Verwendet man in diesem Fall trotzdem eine bestimmte Dichte (meist Normalverteilung), so spricht man von der QML-Methode.

Weiss [46] untersucht das asymptotische Verhalten des QML-Schätzers. Falls  $Y_n$  beschränktes viertes Moment besitzt, ist der Schätzer konsistent und asymptotisch normalverteilt. Lee und Hansen [32] geben abgeschwächte Bedingungen an:

**Annahme 4.12.** (1)  $\epsilon_n$  ist strikt stationär und ergodisch.

(2)  $\epsilon_n^2$  ist nicht degeneriert, d.h.  $\text{Var}(\epsilon_n) > 0$ .

(3) Für ein  $\alpha > 0$  existiert ein  $S_\alpha < \infty$ , so dass  $E(\epsilon_n^{2+\alpha} | \mathcal{F}_{n-1}) \leq S_\alpha < \infty$  f.s.

(4)  $\sup_n E(\log(\delta + \lambda \epsilon_n^2) | \mathcal{F}_{n-1}) < 0$  f.s.

**Satz 4.13.** (Lee und Hansen [32], Theorem 2) *Unter Annahme 4.12 und  $\lambda + \delta < 1$  gilt*

$$\hat{\theta}_N = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log L(Y_1, \dots, Y_N | Y_0, \theta) \xrightarrow{P} \theta \quad \text{für } N \rightarrow \infty,$$

mit  $\Theta = \{\theta : 0 < \beta_l \leq \beta \leq \beta_u, 0 < \delta_l \leq \delta \leq \delta_u < 1, 0 < \lambda_l \leq \lambda \leq \lambda_u\}$ ,  $\beta_l, \beta_u, \delta_l, \delta_u, \lambda_l, \lambda_u \in \mathbb{R}^+$ .

**Annahme 4.14.** (1) *Es existiert ein  $S < \infty$ , so dass  $E(\epsilon_n^4 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq S < \infty$  f.s.*

(2)  $\theta$  liegt im Inneren von  $\Theta$ .

**Satz 4.15.** (Lee und Hansen [32], Theorem 3) *Unter den Annahmen 4.12 und 4.14 ist*

$$\tilde{\theta}_N = \arg \max_{\theta \in \Theta_2} \log L(Y_1, \dots, Y_N | Y_0, \theta)$$

asymptotisch normalverteilt. Dabei ist  $\Theta_2 = \{\theta \in \Theta : \delta_{l'} \leq \delta \leq \delta_{u'}\}$  mit geeigneten Schranken  $\delta_{l'}$  und  $\delta_{u'}$ . Eine genaue Bestimmung der Schranken ist im Originalartikel von Lee und Hansen [32] zu finden.

### 4.2.2 Voraussetzungen

Im Folgenden wird ein QML-Verfahren für das COGARCH-Modell erläutert. Dazu werden wieder Voraussetzungen getroffen, die bereits bei der Momentenmethode verwendet wurden. Sie lauten:

- (1) Es liegen Beobachtung gleicher Schrittweite  $(G_t)_{t=0,\dots,T}$  vor.
- (2)  $L$  ist zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c < \infty$ .
- (3) Die Sprünge haben stetige Verteilung  $F_X$  mit  $E(X) = 0$ .
- (4) Die Parameter  $\xi \in \Xi$  der Sprungverteilung sind eine Funktion von  $E(X^2)$ , d.h. es existiert ein  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Xi$  mit  $\xi = g(E(X^2))$ .
- (5)  $\text{Var}(L_1) = 1$ , d.h.  $cE(X^2) = 1$ .

### 4.2.3 Vorgehen im stetigen Fall

Zunächst soll daran erinnert werden, dass mit dem Verfahren aus Abschnitt 4.1 die Rate  $c$  und damit auch  $\xi$  geschätzt werden kann. Die folgenden Überlegungen bauen auf bereits geschätztem  $c$  und  $\xi$  auf.

Leider lässt sich der Ansatz für diskrete GARCH-Modelle nicht ohne weiteres auf das COGARCH-Modell übertragen. Im zeitdiskreten Fall liegen bei bekannter Verteilung der  $\epsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die bedingten Verteilungen von  $Y_n | \mathcal{F}_{n-1}, \theta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , vor. Es sei nochmals erwähnt, dass  $\sigma_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar ist. Beim COGARCH hingegen lässt sich, falls die Sprungverteilung  $F_X$  bekannt ist, nur die Verteilung  $\Delta G_t | \sigma_t$ ,  $t > 0$ , angeben.

Da die Vorgabe für eine realitätsnahe Schätzung der Parameter lautet, dass nur eine endliche Anzahl von Werten  $(G_t)_{t=0,\dots,T}$  gleichen Abstands als Beobachtungen vorliegt, ergibt sich folgendes Problem: Es ist nun nicht mehr möglich, den Likelihood aufzustellen, da weder die einzelnen Sprünge  $\Delta G_t$  noch die Volatilität  $\sigma$  bekannt ist. Zwar kann die Differenz  $G_t^{(1)} = G_{t+1} - G_t$  aufeinander folgender Beobachtungen bestimmt werden, jedoch nicht, wie oft und wann  $L$  und damit auch  $G$  in dem entsprechenden Intervall gesprungen ist. Da nach (3.4) und (3.5) zur Berechnung von  $\sigma_t$  ebenfalls die einzelnen Sprünge von  $L$  benötigt werden, ist  $\sigma$  nicht einmal zu den festen Beobachtungszeiten  $t = 1, \dots, T$  berechenbar.

Als Lösungsvorschlag wird hier ein approximativer Likelihood aufgestellt, der durch den zeitdiskreten Fall motiviert ist. Aus  $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + (\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2)$  erhält man durch Einsetzen von (3.8)

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 + \beta + \log \delta \int_{t-1}^t \sigma_s^2 ds + \frac{\lambda}{\delta} \sum_{t-1 \leq s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2. \quad (4.22)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich  $\sigma$  zu ganzzahligen Zeitpunkten bestimmen. Im diskreten Modell war dies gerade durch (4.19) gegeben. Die Idee ist nun, das Vorgehen im diskreten Fall zu übernehmen, d.h.  $\sigma_t$  rekursiv zu berechnen und eine Verteilung für  $G_t^{(1)}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , festzulegen.

Da  $\sigma_s$  und  $\Delta L_s$  nicht beobachtbar sind, müssen gewisse Vereinfachungen getroffen werden. Gesucht ist zunächst eine Approximation für das Integral. Nach Lemma 5.1 fällt  $\sigma^2$  zwischen zwei Sprüngen von  $L$  exponentiell ab und springt zu denselben Sprungzeiten wie  $L$  nach oben. Diese Erkenntnis lässt sich jedoch nicht für die Berechnung des Integrals verwenden, da Sprungzeiten und Sprunghöhen nicht vorliegen. Jedoch wird  $\sigma^2$  als stationär mit  $\sigma_0^2 \stackrel{D}{=} \sigma_\infty^2$  angenommen. Daher erscheint eine einfache Euler-Approximation des Integrals plausibel:

$$\int_{t-1}^t \sigma_s^2 ds \approx \sigma_{t-1}^2. \quad (4.23)$$

(4.22) beinhaltet mit der Summe über die quadrierten Sprünge von  $G$  einen weiteren nicht beobachtbaren Teil. Eine mögliche Approximation hierfür ist

$$\sum_{t-1 \leq s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 \approx (G_t - G_{t-1})^2 = (G_{t-1}^{(1)})^2. \quad (4.24)$$

Diese Annäherung erscheint sehr grob, falls man in Betracht zieht, dass  $L$  zwischen zwei Beobachtungen mehrmals springen kann. Andererseits beinhalten die Beobachtungen  $(G_t)_{t=0, \dots, T}$  nicht mehr Information. Der Schätzer für  $\sigma_t^2$  ergibt sich somit zu

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \beta + \log \delta \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{\lambda}{\delta} (G_{t-1}^{(1)})^2, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.25)$$

Die Hoffnung ist nun, dass die geschätzten  $\sigma_t$  nahe genug an den wahren Werten liegen. Kapitel 5 beschäftigt sich etwas genauer mit der Güte der verwendeten Approximationen.

Das zweite Problem besteht darin, eine Verteilung für  $G_t^{(1)}$  festzulegen. Die erste Annahme, die hierfür getroffen wird, ist konstantes  $\hat{\sigma}_t$  auf jedem Intervall, d.h.  $\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}_t$ ,  $t \leq s < t + 1$ . Daher ist es nun nicht mehr wichtig, wann die Sprünge im Intervall stattfinden. Während die Überlegungen bis hier hin noch für jeden zulässigen Lévy-Prozess gelten, wird nun wieder angenommen, dass  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Somit besitzen nun auch die Sprünge von  $G$  auf dem Intervall  $[t, t + 1)$  gleiche Verteilung. Wäre die Anzahl der Sprünge bekannt, so könnte die bedingte Verteilung von  $G_t^{(1)} | \hat{\sigma}_t$  als Faltung der unabhängigen Sprünge dargestellt werden.

Zwar ist die Anzahl der Sprünge weiterhin unbekannt, jedoch können Aussagen über deren Wahrscheinlichkeit getroffen werden. Nach den getroffenen Annahmen ist  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c$ . Damit ist die Anzahl der Sprünge auf einem Intervall der Länge 1 Poisson-verteilt mit Rate  $c$ . Es wird angenommen, dass  $G_t^{(1)}$  mit Wahrscheinlichkeit  $P(N_c = k)$  aus der Summe von  $k$  Sprüngen entstanden ist.  $N_c$  ist dabei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Rate  $c$  unabhängig von  $L$ . Die Idee ist nun, die Verteilung von  $G_t^{(1)} | \hat{\sigma}_t$  als gewichtetes Mittel von Faltungen darzustellen, wobei die Gewichte gerade die Wahrscheinlichkeiten der Anzahl an Sprüngen sind. Falls  $G_t^{(1)} = 0$  für ein  $t \in \mathbb{N}$  beobachtet werden sollte, so wird angenommen, dass auf dem Intervall kein Sprung stattgefunden hat und die Beobachtung wird nicht in den Likelihood mit aufgenommen. Daher wird die Dichte von  $G_t^{(1)}$ , bedingt auf  $\hat{\sigma}_t$  (nach

Annahme konstant auf  $[t, t + 1)$ ) und  $\theta$  definiert als

$$f(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left( P(N_c = k) g^{k*}(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t) \right) & \text{falls } G_t^{(1)} \neq 0 \\ 1 & \text{falls } G_t^{(1)} = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N},$$

wobei  $g(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t)$  die Dichte von  $\Delta G_t = \hat{\sigma}_t \Delta L_t$  ist. Folgende Zerlegung der gemeinsamen Dichte von  $G_0^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}$  verwendet die Definition der bedingten Dichte:

$$\begin{aligned} f(G_0^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}|\hat{\sigma}_0, \theta) &= f(G_1^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}|\hat{\sigma}_1, \theta) f(G_0^{(1)}|\hat{\sigma}_0, \theta) \\ &= f(G_2^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}|\hat{\sigma}_2, \theta) f(G_1^{(1)}|\hat{\sigma}_1, \theta) f(G_0^{(1)}|\hat{\sigma}_0, \theta) \\ &= f(G_3^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}|\hat{\sigma}_3, \theta) f(G_2^{(1)}|\hat{\sigma}_2, \theta) f(G_1^{(1)}|\hat{\sigma}_1, \theta) f(G_0^{(1)}|\hat{\sigma}_0, \theta) \\ &= \dots \\ &= \prod_{t=0}^T f(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t). \end{aligned}$$

Weiterhin wird benützt, dass  $\hat{\sigma}_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , nach (4.25) durch  $\hat{\sigma}_{t-1}$  und  $G_{t-1}^{(1)}$  berechnet werden kann. Somit erhält der Likelihood die Form

$$\begin{aligned} L(G_0^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}|\hat{\sigma}_0, \theta) &= \prod_{t=0}^T f(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t) \\ &= \prod_{\substack{t=0, \dots, T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( P(N_c = k) f^{k*}(G_t^{(1)}|\hat{\sigma}_t) \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ob die Approximationen ausreichend genau sind, um sinnvolle Parameterschätzer zu bekommen, wird im nächsten Abschnitt überprüft.

#### 4.2.4 Ergebnisse

Auch dieser Ansatz soll mit den simulierten Prozessrealisierungen getestet werden. Zunächst wird der Likelihood unter der Annahme, dass die Anzahl der Sprünge von  $G$  in jedem Intervall entweder 0 oder 1 beträgt, berechnet. Hier gilt, falls die Sprünge

von  $L$  unabhängig identisch  $N(0, v^2)$ -verteilt sind,

$$\begin{aligned}
\arg \max_{\beta, \delta, \lambda} L(G_0^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}) &= \arg \max_{\beta, \delta, \lambda} \prod_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi v \sigma_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{v^2 \sigma_t^2}\right) \\
&= \arg \max_{\beta, \delta, \lambda} \sum_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} -\log(\sqrt{2\pi v \sigma_t}) - \frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{v^2 \sigma_t^2} \\
&= \arg \min_{\beta, \delta, \lambda} \sum_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \log(v \sigma_t) + \frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{v^2 \sigma_t^2} \\
&= \arg \min_{\beta, \delta, \lambda} \sum_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \log(v^2 \sigma_t^2) + \frac{(G_t^{(1)})^2}{v^2 \sigma_t^2}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Tabelle 4.4 gibt Aufschluss über die zugehörigen Schätzwerte, jeweils mit Angabe des Bias, des mittleren absoluten Fehlers, des mittleren quadratischen Fehlers und der Standardabweichung. Leider sind diese recht schlecht. Es ist sofort zu sehen, dass mit steigender Rate die Schätzer immer schlechter werden. Dies ist nicht verwunderlich, da der Likelihood (4.27) von maximal einem Sprung je Intervall ausgeht. Wie in Abbildung 4.3 zu sehen, führen nur für  $c = 0.5$  alle Schätzwerte zu einem  $\widehat{\Psi}(1) < 0$ , d.h. zu einem endlichen Erwartungswert von  $\sigma^2$ . Daher ist es sinnvoll, den vorgestellten Ansatz mit den gewichteten Faltungen auszuprobieren.

Zunächst wird der Likelihood (4.26) explizit ausgerechnet. Die Simulationen beruhen auf einem zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Rate  $c$  und  $N(0, v^2)$ -verteilten Sprüngen. Die Faltung von  $k$  unabhängigen Sprüngen ergibt somit eine  $N(0, kv^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Daher kann (4.26) geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\arg \max_{\beta, \delta, \lambda} L(G_0^{(1)}, \dots, G_T^{(1)}) &= \\
&= \arg \max_{\beta, \delta, \lambda} \prod_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( P(N_c = k) \frac{1}{\sqrt{2\pi k v \sigma_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{k v^2 \sigma_t^2}\right) \right) \\
&= \arg \max_{\beta, \delta, \lambda} \sum_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \log \sum_{k=1}^{\infty} \left( e^{-c} \frac{c^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi k v \sigma_t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{k v^2 \sigma_t^2}\right) \right) \\
&= \arg \max_{\beta, \delta, \lambda} \sum_{\substack{t=0 \dots T \\ G_t^{(1)} \neq 0}} \log \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{c^k}{\sqrt{2\pi k v \sigma_t} k!} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(G_t^{(1)})^2}{k v^2 \sigma_t^2} - c\right) \right). \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung mittels Computer wurde die unendliche Summe nach dem kleinsten

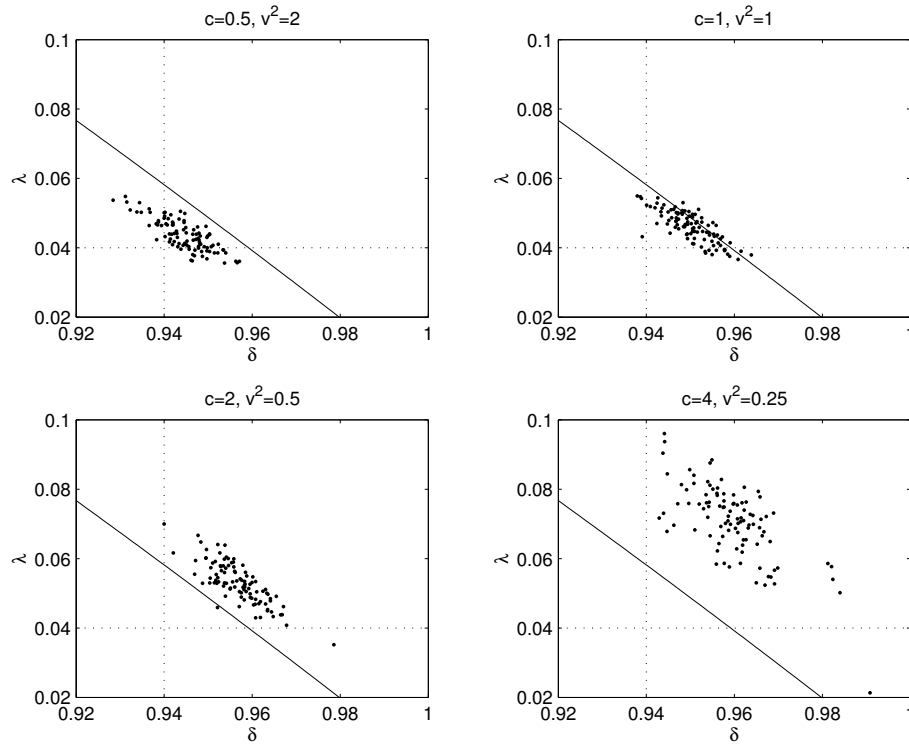


Abbildung 4.3: Die einzelnen Schätzwerte  $\hat{\delta}$ ,  $\hat{\lambda}$  für normalverteilte Sprünge unter Verwendung von Likelihood (4.27). Die gepunkteten Linien geben die wahren Parameterwerte an. Die Niveaulinie  $\Psi(1) = 0$  ist durchgezogen dargestellt.

$k$  abgebrochen, für welches  $P(N_c > k) < 0.01$  gilt. Für die betrachteten Raten ist

$$\begin{aligned} P(N_{0.5} > 3) &= 1.8 \cdot 10^{-3}, \\ P(N_1 > 4) &= 3.7 \cdot 10^{-3}, \\ P(N_2 > 6) &= 4.5 \cdot 10^{-3}, \\ P(N_4 > 9) &= 8.1 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Tabelle 4.4 listet die Schätzwerte für den Likelihood (4.28) auf. Sämtliche Schätzwerte erfüllen  $\Psi(1) < 0$ , wie in Abbildung 4.4 zu sehen. Weiterhin gilt sogar  $\Psi(2) < 0$  für alle geschätzten Parameter. Sie liefern zwar akzeptable Werte, sind jedoch deutlich schlechter als die Werte der Momentenschätzer.

Als nächstes wird wieder der Fall betrachtet, dass die Sprünge von  $L$  Laplace-verteilt sind. QML-Schätzung für zeitdiskrete GARCH-Modelle bedeutet, dass die wahre Verteilung der Zufallsvariablen  $\epsilon_n$  nicht bekannt ist, aber als normalverteilt angenommen wird. Dies wird nun auch für den COGARCH versucht. Die Parameter werden unter Verwendung der Realisierungen mit Laplace-verteilt Sprünge geschätzt, wobei der Likelihood (4.28) benützt wird. Die Ergebnisse sind Tabelle 4.5 zu entnehmen. Interessanterweise sind die Werte besser als für die normalverteilten Daten. Es liegt nahe, dass sich hier der zusätzliche Fehler bei der Verteilungsannahme entgegen den vorangegangenen Approximationen wirkt.



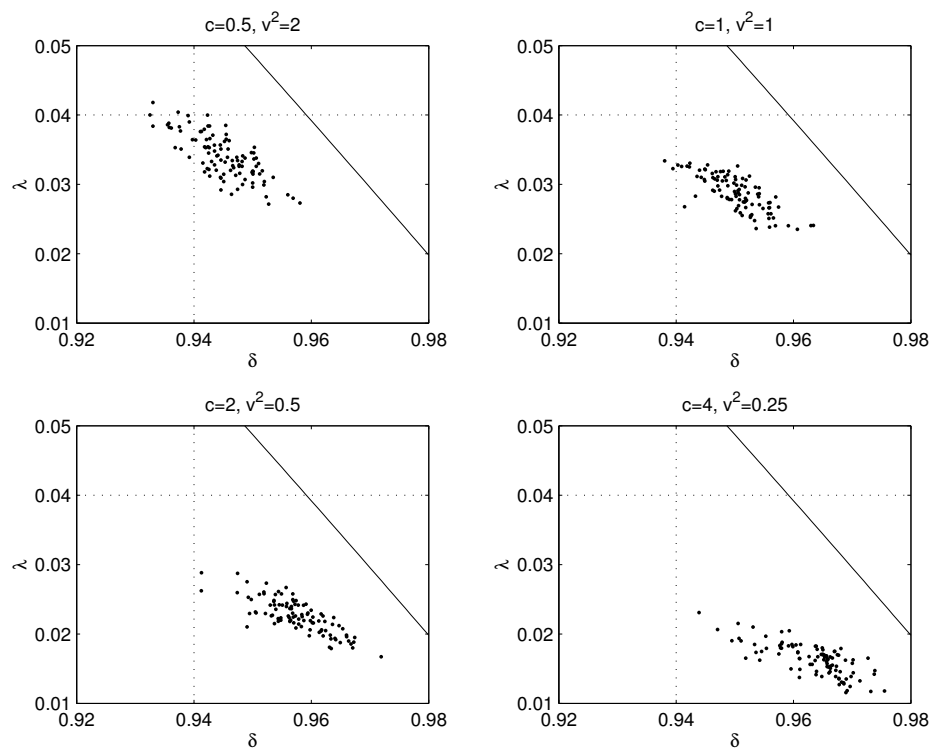


Abbildung 4.4: Die einzelnen Schätzwerte  $\hat{\delta}, \hat{\lambda}$  für normalverteilte Sprünge unter Verwendung von Likelihood (4.28). Die gepunkteten Linien geben die wahren Parameterwerte an. Die Niveaulinie  $\Psi(1) = 0$  ist durchgezogen dargestellt.

Einfacher Likelihood (4.27)				
	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
$\hat{\beta}$	1.3672	1.6770	2.4209	4.9087
Bias( $\hat{\beta}$ )	0.3672	0.6770	1.4209	3.9087
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.3715	0.6771	1.4248	3.9193
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.1854	0.5297	2.2590	17.4756
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.2259	0.2668	0.4923	1.4897
$\hat{\delta}$	0.9446	0.9501	0.9568	0.9595
Bias( $\hat{\delta}$ )	0.0046	0.0101	0.0168	0.0195
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0060	0.0102	0.0168	0.0195
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0001	0.0001	0.0003	0.0005
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0057	0.0054	0.0058	0.0087
$\hat{\lambda}$	0.0437	0.0461	0.0530	0.0708
Bias( $\hat{\lambda}$ )	0.0037	0.0061	0.0130	0.0308
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0046	0.0064	0.0131	0.0311
MSE( $\hat{\lambda}$ )	$3.3780 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0002	0.0011
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0045	0.0045	0.0060	0.0107
Likelihood (4.28) mit gewichteten Faltungen				
	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
$\hat{\beta}$	1.0617	1.0460	1.0220	1.0618
Bias( $\hat{\beta}$ )	0.0617	0.0460	0.0220	0.0618
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.1377	0.1278	0.1569	0.1791
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.0306	0.0259	0.0414	0.0623
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.1645	0.1550	0.2032	0.2431
$\hat{\delta}$	0.9450	0.9502	0.9576	0.9634
Bias( $\hat{\delta}$ )	0.0050	0.0102	0.0176	0.0234
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0061	0.0103	0.0176	0.0234
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0001	0.0001	0.0003	0.0006
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0052	0.0049	0.0055	0.0062
$\hat{\lambda}$	0.0340	0.0287	0.0226	0.0164
Bias( $\hat{\lambda}$ )	-0.0060	-0.0113	-0.0174	-0.0236
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0060	0.0113	0.0174	0.0236
MSE( $\hat{\lambda}$ )	$4.6334 \cdot 10^{-5}$	0.0001	0.0003	0.0006
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0032	0.0026	0.0025	0.0023

Tabelle 4.4: Schätzwerte mit QML-Verfahren für normalverteilte Sprünge. Die wahren Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$  und  $c$ ,  $v^2$  wie angegeben.

	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
$\hat{\beta}$	0.9246	0.9579	0.9840	1.0226
Bias( $\hat{\beta}$ )	-0.0754	-0.0421	-0.0160	0.0226
MAE( $\hat{\beta}$ )	0.1410	0.1224	0.1362	0.1454
MSE( $\hat{\beta}$ )	0.0292	0.0226	0.0296	0.0361
Std.Abw. ( $\hat{\beta}$ )	0.1540	0.1450	0.1721	0.1899
$\hat{\delta}$	0.9438	0.9459	0.9512	0.9573
Bias( $\hat{\delta}$ )	0.0038	0.0059	0.0112	0.0173
MAE( $\hat{\delta}$ )	0.0058	0.0064	0.0113	0.0173
MSE( $\hat{\delta}$ )	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
Std.Abw. ( $\hat{\delta}$ )	0.0061	0.0049	0.0052	0.0051
$\hat{\lambda}$	0.0326	0.0295	0.0263	0.0219
Bias( $\hat{\lambda}$ )	-0.0074	-0.0105	-0.0137	-0.0181
MAE( $\hat{\lambda}$ )	0.0074	0.0105	0.0137	0.0181
MSE( $\hat{\lambda}$ )	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
Std.Abw. ( $\hat{\lambda}$ )	0.0033	0.0028	0.0023	0.0023

Tabelle 4.5: Schätzwerte mit QML-Verfahren für Laplace-verteilte Sprünge unter Verwendung des Likelihoods (4.28). Die wahren Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$  und  $c$ ,  $\alpha^2$  wie angegeben.

# Kapitel 5

## Volatilitätsschätzer

Händler in Banken agieren fast ausschließlich aufgrund von Volatilität. Dies zeigt bereits, dass es außerordentlich wichtig ist, die stochastische Volatilität in Finanzzeitreihen zu schätzen.

Es gibt eine Reihe von Verfahren, die es ermöglichen, nicht beobachtete Volatilität in SV-Modellen zu schätzen. Danilov und Mandal [12] stellen die Methode des erweiterten Kalman-Filters, eine Methode basierend auf Kitagawa [29] sowie die Methode der bedingten Momente vor und vergleichen sie miteinander. Die Gründe, warum diese Verfahren nicht auf das COGARCH-Modell übertragen werden können, sind vielseitig. Das Hauptproblem ist jedoch, dass man kein zeitdiskretes lineares Zustandsraummodell ableiten kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine weitere Möglichkeit gefunden, die Volatilität zu schätzen: Das Quasi-Maximum-Likelihood Verfahren aus Abschnitt 4.2 verwendet die Schätzfunktion

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \beta + \log \delta \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{\lambda}{\delta} (G_t - G_{t-1})^2,$$

um eine Approximation von  $\sigma_s^2$  auf dem Intervall  $[t, t + 1)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , zu erhalten. Eine interessante Frage ist, wie gut die Schätzung  $\hat{\sigma}_t$  das wahre  $\sigma_t$  approximiert.

In die rekursive Berechnung von  $\hat{\sigma}_t$  gehen die Parameter  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  ein. Da diese in der Regel unbekannt sind, gliedert sich die Untersuchung des Volatilitätsschätzers in zwei Abschnitte: Zunächst wird sein Verhalten für bekannte Parameter betrachtet, anschließend für unbekannte Parameter. Es sei noch erwähnt, dass bei der Berechnung des Volatilitätsschätzers der treibende Lévy-Prozess nicht bekannt sein muss.

### 5.1 Bekannte Parameter

Abbildung 5.1 zeigt einen Vergleich des geschätzten  $\sigma_t$  mit der wahren Volatilität für die Prozessrealisierung aus Beispiel 3.26. Es wird bereits deutlich, dass die Schätzfunktion sehr gut ist. Zwar entstehen hin und wieder Abweichungen, doch nähert sich trotz rekursiver Berechnung die geschätzte Funktion immer wieder dem wahren  $\sigma$  an. Im Folgenden werden nun die Gründe für die Abweichungen, als auch für die wiederkehrende Annäherung untersucht. Abweichungen der Schätzfunktion können aus beiden

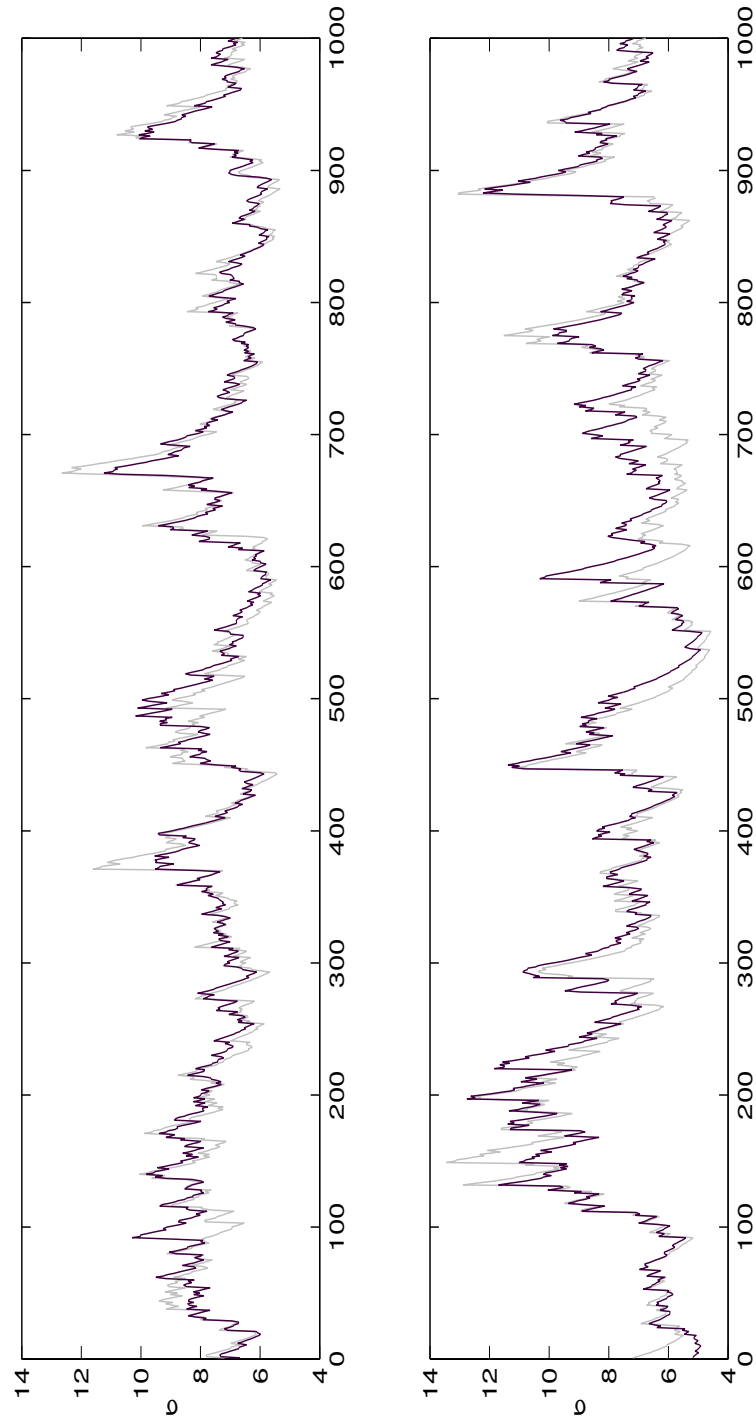


Abbildung 5.1: Wahres  $\sigma$  (schwarze Linie) und geschätzte Volatilität  $\hat{\sigma}$  (graue Linie) für eine Prozessrealisierung erzeugt durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit standardnormalverteilten Sprüngen und Parametern  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$ . Darunter für eine Realisierung mit gleichen Parametern jedoch Laplace-verteilten Sprüngen mit Parameter  $\alpha = 2$ . Dabei wurde  $\hat{\sigma}$  rekursiv mittels (4.25) unter Verwendung der wahren Parameter berechnet.

Vereinfachungen (4.23) und (4.24) entstehen. Die Approximation (4.24) lautet

$$\begin{aligned} \sum_{t-1 \leq s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 &\approx (G_{t-1}^{(1)})^2 = \left( \sum_{t-1 \leq s < t} \sigma_s (\Delta L_s) \right)^2 \\ &= \sum_{t-1 \leq s < t} \sigma_s^2 (\Delta L_s)^2 + \sum_{\substack{t-1 \leq s, s' < t \\ s' \neq s}} \sigma_s (\Delta L_s) \sigma_{s'} (\Delta L_{s'}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Es stellt sich heraus, dass der Approximationsfehler in den meisten Fällen für Ausreißer der geschätzten Volatilität verantwortlich ist. Denn treten mehrere Sprünge von  $L$  gleichen Vorzeichens innerhalb des Intervalls  $[t-1, t)$  auf, so ist auch der zweite Summand der rechten Seite von (5.1) positiv und die Veränderung von  $\sigma^2$  wird überschätzt. Dabei ist die Abweichung umso größer, je mehr Sprünge gleichen Vorzeichens stattfinden und je größer die Sprünge sind. Somit entstehen positive Ausreißer meist während eines starken Anstiegs von  $\sigma^2$ . Abbildung 5.1 bestätigt dies. Beispielsweise ist die Abweichung im Intervall (369, 370) durch Sprünge von  $L$  der Höhe -1.14, -2.34 und -1.84 entstanden. Dabei ist

$$(-1.14)^2 + (-2.34)^2 + (-1.84)^2 = 10.2 \ll 28.3 = (-1.14 - 2.34 - 1.84)^2.$$

Summieren sich hingegen die Sprünge von  $L$  innerhalb eines Intervalls zu Null auf, so ist  $(G_{t+1} - G_t)^2 \approx 0$  und die Veränderung von  $\sigma^2$  wird unterschätzt. Auch hier ist die Abweichung umso größer, je mehr Sprünge auftreten und je größer die Sprünge sind. Somit entstehen auch negative Ausreißer meist während eines starken Anstiegs von  $\sigma^2$ . In Abbildung 5.1 entsteht der Ausreißer im Intervall (89, 93) durch Sprünge von  $L$  der Höhe -2.18, -0.56, 1.44, 0.47, -0.05, 1.57, -2.44, 0.90 und -0.62. Hier ist

$$\sum_{89 \leq s < 93} (\Delta L_s)^2 = 16.97 \gg 2.16 = \left( \sum_{89 \leq s < 93} \Delta L_s \right)^2.$$

Abbildung 5.1 verdeutlicht jedoch auch, dass nach einer größeren Abweichung die Volatilität und ihr Schätzwert tendenziell wieder zusammenlaufen. Folgendes Lemma soll über dieses Verhalten Aufschluss geben.

**Lemma 5.1.** *Sei  $(\sigma_t^2)_{t \geq 0}$  der strikt stationäre Volatilitätsprozess mit  $\sigma_\infty^2 \stackrel{D}{=} \sigma_0^2$  und  $\hat{\sigma}_t^2$  der Volatilitätsschätzer aus (4.25), d.h.*

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\sigma}_t^2 + \beta + \log \delta \hat{\sigma}_t^2 + \frac{\lambda}{\delta} (G_{t+1} - G_t)^2, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin gelte  $\sigma_0^2, \hat{\sigma}_0^2 > \frac{\beta}{-\log \delta}$ . Die erste Sprungzeit sei mit  $t_1$  bezeichnet. Dann gilt:

(a)

$$\sigma_t^2 = \frac{\beta}{-\log \delta} + \left( \sigma_0^2 - \frac{\beta}{-\log \delta} \right) e^{t \log \delta}, \quad t \in [0, t_1), \quad (5.2)$$

d.h.  $\sigma_t^2$  fällt exponentiell gegen die untere Schranke  $\frac{\beta}{-\log \delta}$ .

(b)

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\beta}{-\log \delta} + \left( \hat{\sigma}_0^2 - \frac{\beta}{-\log \delta} \right) (\log \delta + 1)^t, \quad t = 0, 1, \dots, [t_1], \quad (5.3)$$

d.h.  $\hat{\sigma}_t^2$  fällt geometrisch gegen die untere Schranke  $\frac{\beta}{-\log \delta}$ .

*Beweis.* zu (a): Nach (3.4) erfüllt  $X_t = -t \log \delta$ ,  $t \in [0, t_1)$ . Damit gilt mit (3.5)

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \left( \beta \int_0^t e^{-s \log \delta} ds + \sigma_0^2 \right) e^{t \log \delta} = \left( \frac{\beta}{-\log \delta} (e^{-t \log \delta} - 1) + \sigma_0^2 \right) e^{t \log \delta} \\ &= \frac{\beta}{-\log \delta} + \left( \sigma_0^2 - \frac{\beta}{-\log \delta} \right) e^{t \log \delta}, \quad t \in [0, t_1). \end{aligned}$$

zu (b): Da  $G_t^{(1)} = 0$ ,  $t = 0, 1, \dots, [t_1]$ , ergibt sich rekursiv

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t^2 &= \sum_{i=0}^{t-1} \beta (\log \delta + 1)^i + \hat{\sigma}_0^2 (\log \delta + 1)^t = \beta \frac{1 - (\log \delta + 1)^t}{1 - \log \delta - 1} + \hat{\sigma}_0^2 (\log \delta + 1)^t \\ &= \frac{\beta}{-\log \delta} - \frac{\beta (\log \delta + 1)^t}{-\log \delta} + \hat{\sigma}_0^2 (\log \delta + 1)^t \\ &= \frac{\beta}{-\log \delta} + \left( \hat{\sigma}_0^2 - \frac{\beta}{-\log \delta} \right) (\log \delta + 1)^t, \quad t = 0, 1, \dots, [t_1]. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.2.** Das Lemma setzt  $\sigma_0^2$ ,  $\hat{\sigma}_0^2 > \frac{\beta}{-\log \delta}$  voraus. Dies ist eine plausible Annahme. Beispielsweise gilt für einen zusammengesetzten Poisson-Prozess  $L$  nach Satz 3.10 und (3.22), dass  $E(\sigma_\infty^2) > \frac{\beta}{\log \delta}$ . Falls die Bedingung für  $t_0 > 0$  erfüllt ist, gilt sie auch für alle  $t \geq t_0$ , da  $\sigma_0^2$  und  $\hat{\sigma}_0^2$  nur positive Sprünge aufweisen.

Selbst wenn  $\sigma_0^2$  oder  $\hat{\sigma}_0^2 < \frac{\beta}{-\log \delta}$  gewählt werden sollte, gelten die Ergebnisse des Lemmas. In diesem Fall steigen die Volatilität und ihr Schätzer gegen die angegebene Schranke. Nach erstmaligen Überspringen der Schranke bleiben sie dann darüber.

Damit ist einleuchtend, dass die Volatilität und ihr Schätzer zwischen Sprungzeiten tendenziell zusammenlaufen. In Abbildung 5.2 ist dies nochmals verdeutlicht. Dies ist eine Erklärung für das Rückkehren der Schätzfunktion  $\hat{\sigma}_t$  nach einem Ausreißer, allerdings noch kein Beweis, dass dies immer der Fall sein muss.

Nachdem Gründe für Abweichung und Annäherung erörtert wurden, folgen noch Daten, welche die Anpassungsgüte der Volatilitätsschätzers verdeutlichen sollen. Für sämtliche Realisierungen der verschiedenen Raten und Sprungverteilungen wurde der Volatilitätsschätzer mit den richtigen Parametern  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$  berechnet, wobei  $\sigma_0 = E(\sigma_\infty)$  gewählt wurde. Damit wurde jeweils der Mittelwert der Differenzen  $\hat{\sigma}_t - \sigma_t$ ,  $t = 1, \dots, 20000$ , berechnet und zusätzlich über die 100 Realisierungen gemittelt. Der Bias hat somit die Form

$$Bias = \frac{1}{2 \cdot 10^6} \sum_{i=1}^{100} \sum_{t=1}^{20000} (\sigma_t^{(i)} - \hat{\sigma}_t^{(i)}),$$

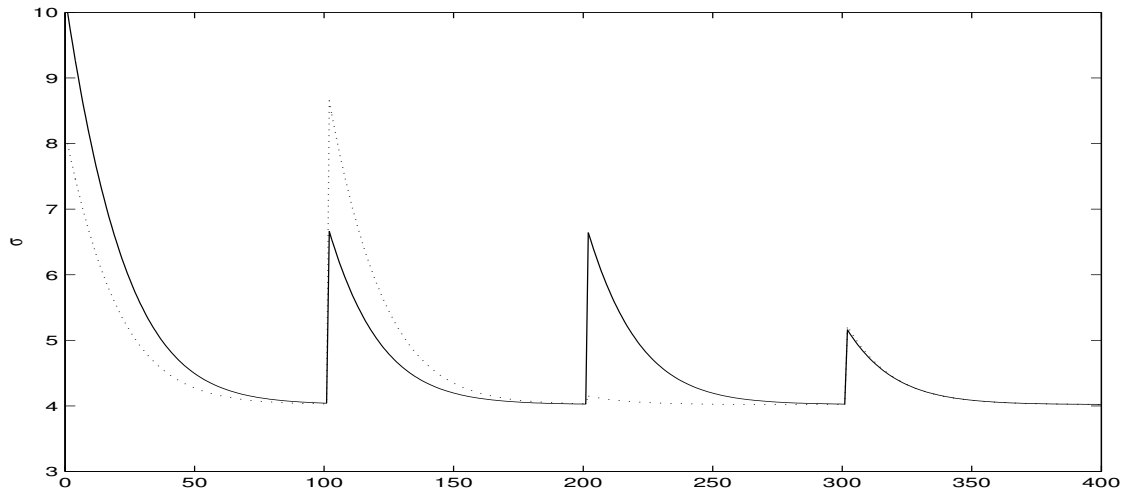


Abbildung 5.2: Wahres  $\sigma$  (durchgezogene Linie) und geschätzte Volatilität (gepunktete Linie). Die Parameter sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$ . Im Intervall  $[100, 101)$  finden zwei Sprünge von  $L$  der Höhe 2 statt. Im Intervall  $[200, 201)$  springt  $L$  mit 2 und -2, während in  $[300, 301)$  nur ein Sprung der Höhe 2 stattfindet.

wobei  $\sigma^{(i)}$  die Volatilität der  $i$ -ten Prozessrealisierung ist. Analog gilt

$$MAE = \frac{1}{2 \cdot 10^6} \sum_{i=1}^{100} \sum_{t=1}^{20000} |\sigma_t^{(i)} - \hat{\sigma}_t^{(i)}|,$$

$$MSE = \frac{1}{2 \cdot 10^6} \sum_{i=1}^{100} \sum_{t=1}^{20000} (\sigma_t^{(i)} - \hat{\sigma}_t^{(i)})^2.$$

Die Ergebnisse hierfür sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Zieht man in Betracht, dass  $E(\sigma_\infty) = 7.1940$ , so sind die Abweichungen sehr gering. Dies bestätigt, dass der Volatilitätsschätzer sehr gut ist, was bereits in Abbildung 5.1 zu vermuten ist. Die Werte des Bias deuten darauf hin, dass der Schätzer die wahre Volatilität systematisch, wenn auch nur sehr gering, unterschätzt. Diese Verzerrung muss aus Approximation (4.23) resultieren, da (4.23) korrekten Erwartungswert besitzt.

## 5.2 Unbekannte Parameter

Der Volatilitätsschätzer 4.25 hängt von den Parametern  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  ab. Abbildung 5.3 verdeutlicht dies nochmals. Es ist das wahre  $\sigma$  (schwarze Linie) und die geschätzte Volatilität  $\hat{\sigma}$  (graue Linie) für eine Prozessrealisierung, erzeugt durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit standardnormalverteilten Sprüngen und Parametern  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$ , dargestellt. Im ersten Plot wurden für den Volatilitätsschätzer die Momentenschätzer für  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  verwendet. Im zweiten Plot wurden die Momentenschätzer minus einer Standardabweichung verwendet. Im dritten Plot wurde zu den Momentenschätzer eine Standardabweichung hinzu addiert. Da in



Normalverteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
Bias	-0.0216	-0.0252	-0.0292	-0.0280
MAE	0.3759	0.4345	0.4641	0.4783
MSE	0.3530	0.3645	0.3721	0.3765
Laplace-verteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
Bias	-0.0218	-0.0222	-0.0263	-0.0239
MAE	0.3196	0.3943	0.4399	0.4632
MSE	0.3413	0.3542	0.3655	0.3717

Tabelle 5.1: Volatilitätsschätzer unter Verwendung der richtigen Parameterwerte  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$ .

der Praxis die Parameter erst geschätzt werden müssen, sollte man genauer prüfen, ob  $\hat{\sigma}$  auch für geschätztes  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\lambda$  noch brauchbar ist. Dafür wurden, wie auch in Abbildung 5.3, die Momentenschätzer aus Abschnitt 4.1 verwendet. Tabelle 5.2 gibt den zugehörigen Bias, MAE und MSE an, die analog zum Fall mit bekannten Parametern berechnet wurden.

Es fällt sofort auf, dass der Volatilitätsschätzer weiterhin sehr gut ist. MAE und MSE sind nur geringfügig höher als bei bekannten Parametern. Dies stimmt äußerst zuversichtlich, das Vorgehen zur Schätzung der Volatilität auch in der Praxis anwenden zu können.

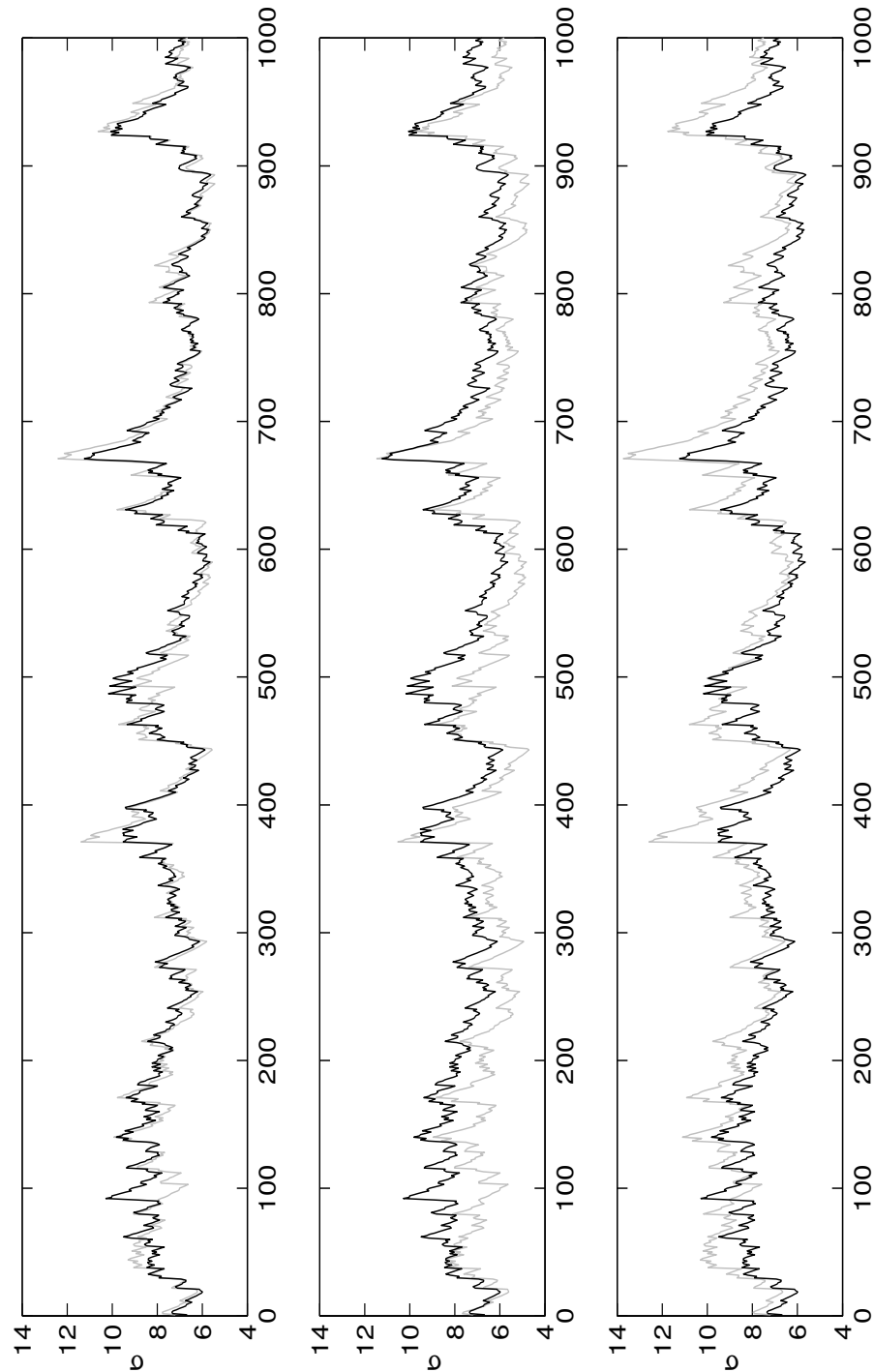


Abbildung 5.3: Wahres  $\sigma$  (schwarze Linie) und geschätzte Volatilität  $\hat{\sigma}$  (graue Linie) für eine Prozessrealisierung erzeugt durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit standardnormalverteilten Sprüngen und Parametern  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$  und  $\lambda = 0.04$ . Der obere Volatilitätsschätzer wurde mit den Momentenschätzern  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$  aus Tabelle 4.1 erzeugt. Für den mittleren (unteren) Volatilitätsschätzer wurden die Momentenschätzer minus (plus) einer Standardabweichung verwendet.

Normalverteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
Bias	-0.0079	-0.0279	-0.0326	-0.0313
MAE	0.4008	0.4364	0.4677	0.4821
MSE	0.3818	0.3676	0.3794	0.3852
Laplace-verteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
Bias	-0.0091	-0.0156	-0.0243	-0.0221
MAE	0.3950	0.4080	0.4452	0.4717
MSE	0.4041	0.3682	0.3768	0.3882

Tabelle 5.2: Volatilitätsschätzer unter Verwendung der Momentenschätzer  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\lambda}$ .

# Kapitel 6

## Residuenanalyse und Beschreibungsgüte

### 6.1 Residuenanalyse

In Kapitel 4 wurden Verfahren vorgestellt, die unter gewissen Annahmen die Parameter des COGARCH-Modells schätzen. Allerdings wurde dabei angenommen, dass  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate  $c$  und Sprungverteilung  $F_X$  mit  $E(X) = 0$  ist. Im Folgenden soll nun untersucht werden, ob die Modellwahl gerechtfertigt ist. Dazu wird der Volatilitätsschätzer aus Kapitel 5 verwendet. Falls eine gute Modellwahl getroffen worden ist und die Parameter korrekt geschätzt worden sind, sollten die geschätzten Residuen  $G_t^{(1)}/\hat{\sigma}_t$  eine Reihe von Eigenschaften erfüllen. Falls die Sprungverteilung  $F_X$  symmetrisch ist, sollten sie symmetrisch um Null streuen, ansonsten zumindest einen Mittelwert nahe bei Null besitzen. Darüber hinaus sollten die normierten Sprünge unkorreliert sein.

In Tabelle 6.1 sind für die bereits mehrmals betrachteten simulierten Prozessrealisierungen Mittelwert, Standardabweichung und Schiefe der normierten Residuen angegeben. Alle Werte sind jeweils über die 100 Realisierungen gemittelt. In der Tat ist der Mittelwert und die Schiefe fast Null. Auch ist die Standardabweichung nahe 1, was eine richtige Normierung bestätigt.

Das Histogramm und die Autokorrelationsfunktion für zwei Prozessrealisierungen, die durch einem zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Rate  $c = 1$  erzeugt wurden, sind in Abbildung 6.1 zu sehen. Es ist sofort zu erkennen, dass die normierten Residuen in der Tat unkorreliert sind.

### 6.2 Wiedergabe von Charakteristika

In der Einführung wurden bereits einige Eigenschaften von Finanzzeitreihen erwähnt. Es wird nun untersucht, inwiefern der COGARCH-Prozess in der Lage ist, Volatilitätscluster und Leptokurtosis zu beschreiben.

*Volatilitätscluster:* Existenz von Volatilitätsclustern wurde bereits in Abbildung 3.2 deutlich. Satz 3.13 besagt, dass die Autokorrelationsfunktion der  $G_t^{(r)}$  positiv ist und

Normalverteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $v^2 = 2$	$c = 1$ $v^2 = 1$	$c = 2$ $v^2 = 0.5$	$c = 4$ $v^2 = 0.25$
Mittelwert	-0.0008	-0.0007	0.0012	-0.0006
Std.Abw.	1.0091	1.0122	1.0136	1.0141
Schiefe	-0.0025	-0.0022	-0.0024	0.0046
Laplace-verteilte Sprünge				
	$c = 0.5$ $\alpha^2 = 1$	$c = 1$ $\alpha^2 = 2$	$c = 2$ $\alpha^2 = 4$	$c = 4$ $\alpha^2 = 8$
Mittelwert	-0.0007	-0.0001	-0.0004	0.0004
Std.Abw.	1.0023	1.0088	1.0125	1.0143
Schiefe	0.0314	-0.0169	-0.0039	0.0028

Tabelle 6.1: Analyse der geschätzten Residuen  $G_t^{(1)}/\hat{\sigma}_t$ .

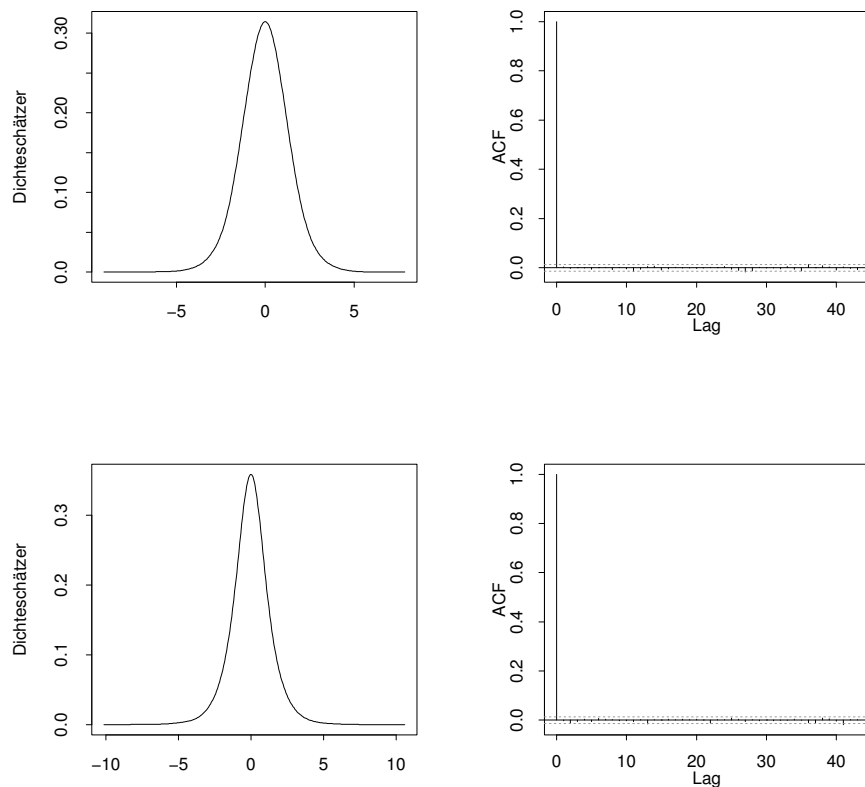


Abbildung 6.1: Dichteschätzer und Autokorrelationsfunktion für die geschätzten Residuen  $G_t^{(1)}/\hat{\sigma}_t$  zweier Prozessrealisierungen.

exponentiell mit Rate  $\Psi(1)$  abfällt. Daher ist es wahrscheinlich, dass Volatilitätscluster umso ausgeprägter sind, je näher  $\Psi(1)$  an der Null liegt, d.h. je näher das Modell an der Nichtstationarität ist. In Abbildung 6.2 ist dies nochmals für Prozesse mit verschiedenen Parametern dargestellt.

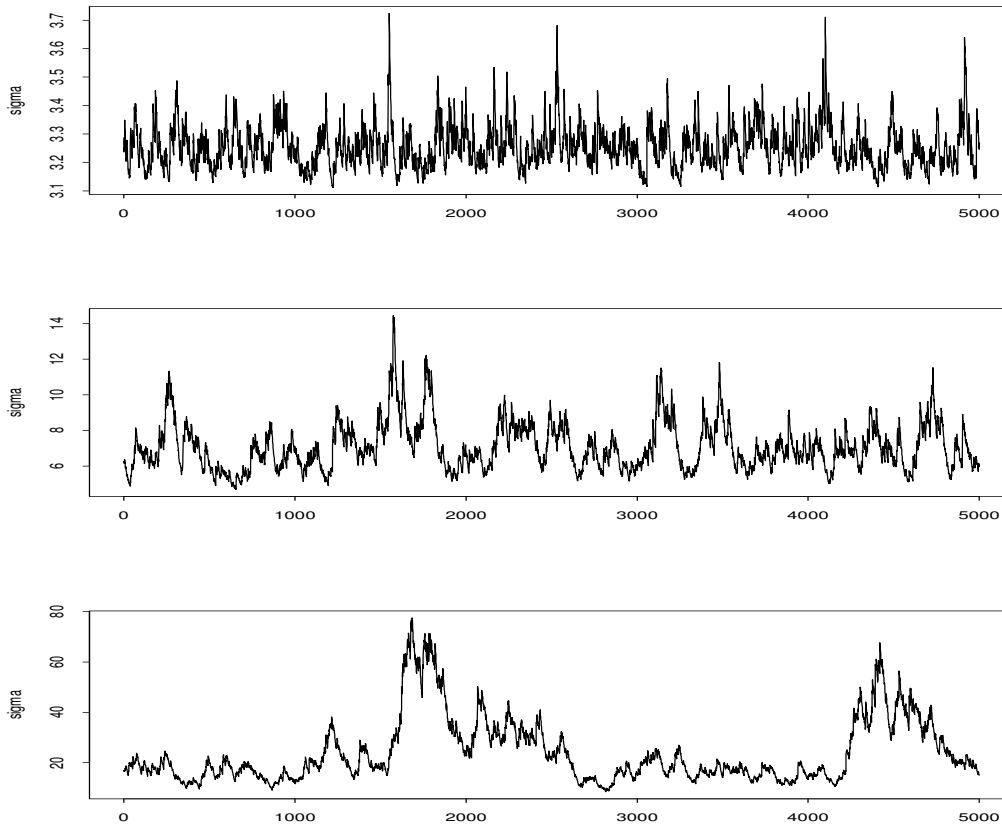


Abbildung 6.2: Realisierungen des Volatilitätsprozesses für verschiedene Parameter. Dabei ist  $L$  zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Rate 1 und  $N(0,1)$ -verteilten Sprüngen. Die Parameter und das zugehörige  $\Psi(1)$  für den oberen Prozess sind  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.90$ ,  $\lambda = 0.01$ ,  $\Psi(1) = -0.0942$  für den mittleren  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.94$ ,  $\lambda = 0.04$ ,  $\Psi(1) = -0.0193$  und für den unteren  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.95$ ,  $\lambda = 0.048$ ,  $\Psi(1) = -7.6698 \cdot 10^{-4}$ .

*Leptokurtosis:* Betrachtet man Intervalle, auf denen  $G$  gesprungen ist, d.h. für die gilt  $G_t^{(r)} \neq 0$ , so sollte die empirische Verteilungsfunktion der  $G_t^{(r)}$  heavy tails und viele Werte nahe der Null aufweisen. Um dies zu testen, werden die Zuwächse von  $G$  mit ihrer Standardabweichung normiert und ein Quantil-Quantil-Plot (QQ-Plot) betrachtet. Abbildung 6.3 zeigt deutliche Leptokurtosis für den Prozess aus Beispiel 3.26.

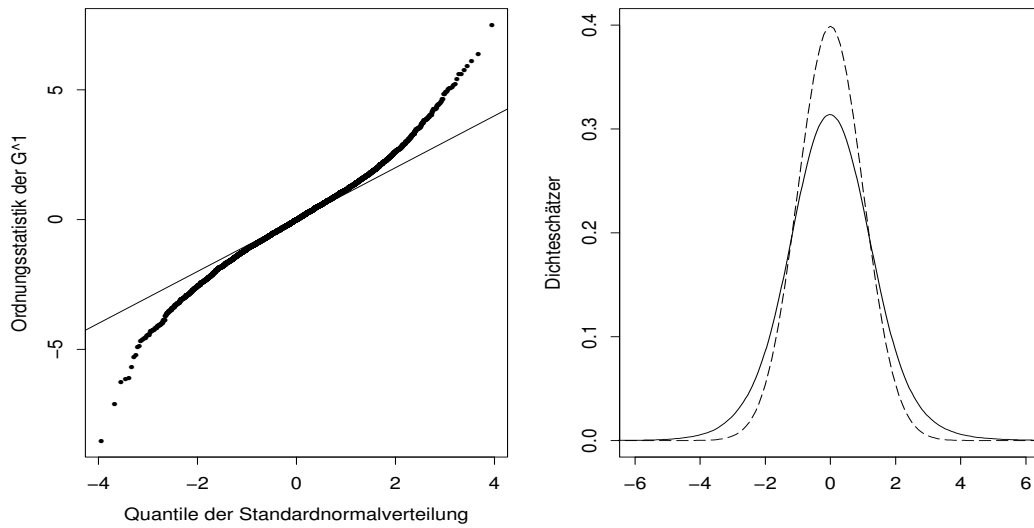


Abbildung 6.3: QQ-Plot der standardisierten Sprünge von  $G$  für den Prozess aus Beispiel 3.26. Daneben die geschätzte Dichte (durchgezogene Linie) im Vergleich mit der Dichte der Standardnormalverteilung (gestrichelte Linie).

### 6.3 Der Smile-Effekt

Es soll nun überprüft werden, ob das COGARCH-Modell in der Lage ist, den in Abschnitt 1.2 erwähnten Smile-Effekt zu erklären. Dazu müssen implizite Volatilitäten berechnet werden. Zunächst werden mit dem COGARCH-Prozess Optionspreise simuliert. Der Preis einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt  $t$  mit Fälligkeit  $T$  und Ausübungspreis  $X$  beträgt

$$Call_t = e^{r(T-t)} E_t^Q \max\{S_T - X, 0\},$$

wobei  $r$  der risikolose Zinssatz und  $S_T$  der Aktienkurs zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ist. Der Erwartungswert wird bezüglich des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  genommen. Eine ausführliche Behandlung risikoneutraler Bewertung von Derivaten findet man z.B. in Bingham und Kiesel [6]. Es ist also zu klären, durch welche Beziehung der COGARCH den Aktienkurs  $S_t$  beschreiben soll und wie der risikoneutrale Erwartungswert bestimmt werden kann.

Es gibt bereits einige Ansätze zur Optionspreisbewertung in GARCH-Modellen, die sich mit diesen Fragen beschäftigen. Duan [14] beschreibt die logarithmierten Renditen durch

$$\log \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \chi \sigma_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 + Y_t. \quad (6.1)$$

Dabei ist  $Y_t$  ein GARCH-Prozess der Form (2.2) und (2.3) mit standardnormalverteilten Innovationen  $\epsilon_t$  und  $\chi$  die Einheitsrisikoprämie, welche den Einfluss von Volatilität

auf die erwartete Rendite beschreibt. Unter gewissen Bedingungen, der lokal risikoneutralen Bewertungsbeziehung (*locally risk-neutral valuation relationship*, LRNVR), ist es möglich, die logarithmierten Renditen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  anzugeben. Die LRNVR kann beispielsweise durch Anforderungen an die Nutzenfunktion eines repräsentativen Anlegers gesichert werden. Allerdings verlangt dies einen diskreten GARCH-Prozess mit normalverteilten Innovationen, so dass dieser Ansatz nicht für den COGARCH übernommen werden kann.

Einen anderen Weg gehen Kallsen und Taqqu [28]. Zwar beschreiben auch sie die logarithmierten Renditen durch eine Gleichung der Form (6.1) doch bestreiten sie keine risikoneutrale Bewertung, sondern berufen sich auf Arbitrageargumente. Dies ist möglich, indem sie die diskreten Werte im GARCH-Prozess durch eine Interpolation mittels geometrischer Brownscher Bewegung verstetigen und zeigen, dass das Modell dann vollständig ist. Damit ergibt sich die gleiche Optionspreisformel wie bei Duan [14]. Leider hat diese stetige Version des GARCH-Prozesses nicht die Form des COGARCH, so dass auch dieses Vorgehen nicht kopiert werden kann.

Es wäre sicher interessant, eine Optionspreistheorie für das COGARCH-Modell von Klüppelberg, Lindner und Maller [30] auszuarbeiten. In dieser Arbeit werden jedoch Vereinfachungen getroffen, wie sie in Engle und Mustafa [19] beschrieben sind. Deren Modell hat die Form

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1 + r + Y_t. \quad (6.2)$$

Dabei ist  $Y_t$  wieder ein GARCH-Prozess der Form (2.2) und (2.3) mit standardnormalverteilten Noise-Variablen  $\epsilon_t$ .

Unter bestimmten Bedingungen entspricht der risikoneutrale Erwartungswert gerade dem unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß. Solche Bedingungen sind erfüllt, falls der Preisprozess perfekt mit der stochastischen Varianz korreliert ist oder die stochastische Varianz unkorreliert mit der aggregierten Nachfrage ist. Beide Voraussetzungen treffen im Allgemeinen nicht zu, jedoch verwenden Engle und Mustafa trotzdem das ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsmaß.

Das Vorgehen wird übernommen, allerdings wird  $Y_t$  durch den COGARCH  $G_t^{(1)}$  ersetzt. Der Aktienkurs kann damit rekursiv berechnet werden:

$$S_t = S_{t-1}(1 + r + G_t^{(1)}). \quad (6.3)$$

Der simulierte Optionspreis hat dann die Form

$$Call_t = e^{r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max\{S_T^{(i)} - X, 0\},$$

wobei  $N$  die Anzahl der Simulationen,  $X$  der Ausübungspreis und  $S_T^{(i)}$  der Kurs der  $i$ -ten Simulation zum Zeitpunkt  $T$  ist. Hat man den simulierten Optionspreis  $Call_t$  gefunden, so wird die implizite Volatilität gesucht, d.h. dasjenige  $\sigma_{impl}$ , welches eingesetzt in die Optionspreisformel von Black und Scholes gerade den Wert  $Call_t$  ergibt. Es muss also gelten

$$Call_t = S_t N(d_1) - X e^{r(T-t)} N(d_2),$$



wobei

$$d_1 = \frac{\log(S_t/X) + (r + \sigma_{impl}/2)(T-t)}{\sigma_{impl}\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{impl}\sqrt{T-t},$$

und  $N(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Die implizite Volatilität ist zwar nicht analytisch darstellbar, aber numerisch sehr leicht zu berechnen.

Das Ganze wurde mit 2000 Realisierungen des Prozesses aus Beispiel 3.26 für Laufzeiten  $T = 30$  und  $T = 90$  durchgeführt. Dabei wurden bei einem Startwert des Kurses von  $S_0 = 100$  Ausübungspreise  $X \in [80, 120]$  betrachtet. Abbildung 6.4 zeigt den simulierten Preis der Call-Option und die impliziten Volatilitäten in Abhängigkeit des Ausübungspreises. Man erkennt deutlich den U-förmigen Verlauf von  $\sigma_{impl}$ . Das COGARCH-Modell ist folglich in der Lage, den Smile-Effekt zu erklären.

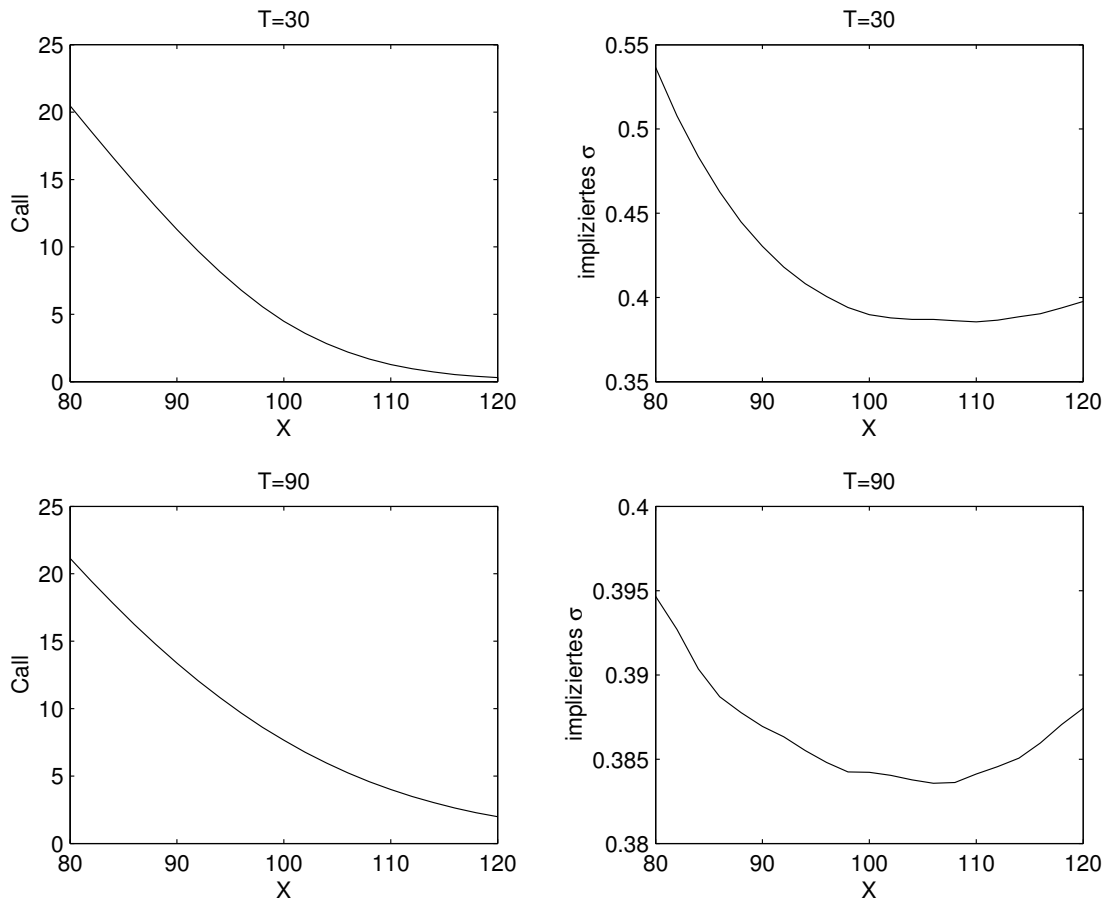


Abbildung 6.4: Einfluss des Ausübungspreises  $X$  auf den Preis einer europäischen Call-Option, sowie auf das implizierte  $\sigma$ , für Laufzeiten  $T = 30$  und  $T = 90$ .

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, Schätzverfahren für das COGARCH-Modell von Klüppelberg, Lindner und Maller [30] zu finden. Wie zu Beginn von Kapitel 4 erwähnt, wird schnell ersichtlich, dass die bekannten Methoden für zeitdiskrete GARCH-Prozesse und SV-Modelle nicht ohne weiteres übernommen werden können, so dass neue Verfahren entwickelt werden mussten. Vorausgesetzt wurde dabei stets, dass der integrierte COGARCH an einer endlichen Anzahl von Zeitpunkten gleicher Schrittweite vorliegt und der treibende Lévy-Prozess ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist.

In Abschnitt 4.1 wird ein Momentenschätzer behandelt, der den Erwartungswert und die Autokovarianzfunktion von  $(G_t^{(1)})^2$  verwendet. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an den treibenden Lévy-Prozess konnte die Identifizierbarkeit der Parameter gezeigt werden. Weiterhin konnte die Konsistenz des Schätzers bewiesen werden und es stellt sich heraus, dass die zugehörigen Schätzwerte ausgesprochen gut sind.

Das QML-Verfahren aus Abschnitt 4.2 ist durch die gängige Schätzmethode in zeitdiskreten GARCH-Modellen motiviert. Es sind jedoch eine Reihe von zusätzlichen Approximationen erforderlich, so dass die Schätzwerte nicht so hervorragend wie bei der Momentenmethode sind. Dennoch sind sie, falls das ein Likelihood mit gewichteten Faltungen verwendet wird, durchaus akzeptabel.

Direkt aus dem QML-Verfahren erhält man einen Volatilitätsschätzer, dessen Eigenschaften in Kapitel 5 behandelt werden. Kombiniert mit den Ergebnissen aus der Momentenmethode liefert auch dieser sehr gute Ergebnisse.

Zuletzt wird gezeigt, dass das COGARCH-Modell in der Lage ist, Volatilitätscluster, Leptokurtosis und den Smile-Effekt zu erklären.

Es ist durchaus möglich, die vorgestellten Verfahren weiter zu verbessern. Wie bereits erwähnt, könnten simulierte Momente weiterhelfen. Weitaus hilfreicher wäre jedoch die Kenntnis weiterer Momente von  $G_t^{(1)}$ . Damit könnte die Momentenmethode ergänzt werden und eventuell auf einige der getroffenen Voraussetzungen verzichtet werden. Auch wäre es mit dem vierten Moment möglich, einen Spektraldichteschätzer zu berechnen.

# Anhang A

## Lévy-Prozesse

Dieser Abschnitt enthält einige Grundlagen zu Lévy-Prozessen. Die meisten Aussagen sind Sato [42] entnommen. Dort sind auch die entsprechenden Beweise und ausführliche Darstellungen zu finden. Soweit nicht anders erwähnt, nehmen alle Zufallsvariablen Werte in  $\mathbb{R}$  an, ebenso sind sämtliche Verteilungen auf  $\mathbb{R}$  definiert.

### A.1 Definition

**Definition A.1 (Lévy-Prozess).** *Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  heißt Lévy-Prozess, falls er die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- (i)  $X_0 = 0$  f.s.
- (ii) *Unabhängige Zuwächse: Für beliebige Wahl von  $n \geq 1$  und  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind die Zufallsvariablen  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  unabhängig.*
- (iii) *Stationäre Zuwächse: Die Verteilung von  $X_{t+h} - X_t$  hängt nicht von  $t$  ab.*
- (iv)  $(X_t)_{t \geq 0}$  ist stochastisch stetig, d.h.  $\forall \epsilon > 0 : P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .
- (v) Als Funktion von  $t$  ist  $X_t(\omega)$  f.s. càdlàg auf  $t > 0$ .

Ein stochastischer Prozess heißt

- Lévy-Prozess in Verteilung, falls er (i)-(iv) erfüllt,
- additiver Prozess, falls er (i), (ii), (iv) und (v) erfüllt,
- additiver Prozess in Verteilung, falls er (i), (ii) und (iv) erfüllt.

**Satz A.2.** (Sato [42], Theorem 11.5) *Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy- oder additiver Prozess in Verteilung. Dann besitzt er eine Modifikation, die ein Lévy oder additiver Prozess ist.*

Die wichtigsten Beispiele für Lévy-Prozesse sind die Brownsche Bewegung, der Poisson-Prozess sowie der zusammengesetzte Poisson-Prozess.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Approximation eines Prozesses durch eine Folge von zusammengesetzter Poisson-Prozesse.

**Satz A.3.** (Sato [42], Lemma 45.12) Sei  $(X_t)$  ein Prozess mit Verteilung  $F_X \neq \delta_0$  und  $(Z_t)$  ein Poisson-Prozess mit Parameter 1, unabhängig von  $(X_t)$ . Dann existiert eine Folge von zusammengesetzter Poisson-Prozesse  $(X_t^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , so dass

$$P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq u} |X_t - X_t^n| = 0, \forall u \geq 0 \right) = 1.$$

## A.2 Unendlich teilbare Verteilungen

In Abschnitt 3.4.2 wurde bereits die charakteristische Funktion einer Verteilung eingeführt. Allgemeiner ist folgende Definition.

**Definition A.4 (Charakteristische Funktion).** Die charakteristische Funktion  $\varphi_\mu(z)$  eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  ist definiert durch

$$\varphi_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \mu(dx), \quad z \in \mathbb{R}.$$

**Definition A.5 (Unendliche Teilbarkeit).** Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  ist unendlich teilbar, falls für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_n$  existiert, so dass  $\mu = \mu_n^n$ . Äquivalent dazu ist:  $\mu$  ist unendlich teilbar genau dann, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine  $n$ -te Wurzel der charakteristischen Funktion  $\varphi_\mu(z)$  gewählt werden kann, so dass diese die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  ist, d.h.

$$\varphi_\mu(z) = [(\varphi_\mu)_n(z)]^n.$$

Beispiele für unendlich teilbare Verteilungen sind Normal-, Poisson- und Exponentialverteilung. Hingegen sind Gleichverteilung und Binomialverteilung nicht unendlich teilbar.

Es besteht folgende Beziehung zwischen unendlich teilbaren Verteilungen und Lévy-Prozessen in Verteilung:

**Satz A.6.** (Cont und Tankov [11], Proposition 3.1) Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess. Dann hat  $X_t$  für jedes  $t$  eine unendlich teilbare Verteilung. Ist umgekehrt  $F$  eine unendlich teilbare Verteilung, dann existiert ein Lévy-Prozess  $(X_t)$ , so dass die Verteilung von  $X_1$  durch  $F$  gegeben ist.

Im Folgenden wird eine besondere Darstellungsform der charakteristischen Funktion von unendlich teilbaren Verteilungen beschrieben. Dazu sei  $D := \{x : |x| \leq 1\}$  das abgeschlossene Einheitsintervall. Der folgende Satz gibt eine Darstellung der charakteristischen Funktion von unendlich teilbaren Verteilungen, bezeichnet als die Lévy-Khintchine Darstellung oder Lévy-Khintchine Formel.

**Satz A.7.** (Sato [42], Theorem 8.1)

(a) Falls  $\mu$  eine unendlich teilbare Verteilung ist, dann ist

$$\varphi_\mu(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2}Az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx1_D(x))\nu(dx) \right], \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

wobei  $A > 0$ ,  $\nu$  ein Maß mit

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ und } \int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty \quad (\text{A.2})$$

und  $\gamma \in \mathbb{R}$  ist.

(b) Die Darstellung von  $\varphi_\mu(z)$  durch  $A$ ,  $\nu$  und  $\gamma$  ist eindeutig.

(c) Falls umgekehrt  $A > 0$ ,  $\nu$  ein Maß, das (A.2) erfüllt, und  $\gamma \in \mathbb{R}$ , dann existiert eine unendlich teilbare Verteilung  $\mu$ , deren charakteristische Funktion durch (A.1) gegeben ist.

**Definition A.8 (Charakteristisches Tripel).**  $(A, \nu, \gamma)$  wird als das charakteristische Tripel von  $\mu$  bezeichnet. Die Matrix  $A$  heißt Gaußsche Varianz und das Maß  $\nu$  heißt das Lévy-Maß von  $\mu$ .

Hingegen hat  $\gamma$  keine wesentliche Aussagekraft, da sein Wert als Term, der die  $\nu$ -Integrierbarkeit sicherstellt, von der Wahl von  $i\langle z, x \rangle 1_D(x)$  im Integranden von (A.1) abhängt.

Falls  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$  gilt, kann (A.1) umgeschrieben werden als

$$\varphi_\mu(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} A z^2 + i \gamma_0 z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1) \nu(dx) \right], z \in \mathbb{R},$$

für ein  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ . Dieses  $\gamma_0$  wird als *Drift* bezeichnet.

Falls  $\int_{|x| > 1} |x| \nu(dx) < \infty$  gilt, kann (A.1) umgeschrieben werden als

$$\varphi_\mu(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} A z^2 + i \gamma_1 z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx) \nu(dx) \right], z \in \mathbb{R},$$

für ein  $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ , bezeichnet als *Center*.

$\int_{|x| > 1} |x| \nu(dx) < \infty$  ist äquivalent zu  $\int_{|x| > 1} |x| \mu(dx) < \infty$  und man kann zeigen, dass

$$\gamma_1 = \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx).$$

Daher ist  $\gamma_1$  der Erwartungswert von  $\mu$ .

**Satz A.9.** (Sato [42], Korollar 8.3) Falls  $\mu$  das charakteristische Tripel  $(A, \nu, \gamma)$  besitzt, dann hat  $\mu^t$  das charakteristische Tripel  $(tA, t\nu, t\gamma)$ .

**Bemerkung A.10.** Da für jeden Lévy-Prozess in Verteilung  $F_{X_t} = \mu^t$  gilt und er einen Lévy-Prozess als Modifikation besitzt, hat der zu  $\mu$  korrespondierende Lévy-Prozess die charakteristische Funktion

$$E(e^{izX_t}) = \exp \left[ t \left( -\frac{1}{2} A z^2 + i \gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izx 1_D(x)) \nu(dx) \right) \right], z \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel A.11.** •  $\nu = 0$  genau dann, wenn  $\mu$  normalverteilt ist.

- Die Brownsche Bewegung ist ein Lévy-Prozess mit  $A = I, \nu = 0$  und  $\gamma = 0$ .
- Der Poisson-Prozess mit Rate  $c > 0$  ist ein Lévy-Prozess mit  $A = 0, \nu = c\delta_1$  und  $\gamma_0 = 0$ .
- Die zusammengesetzte Poisson-Prozess ist ein Lévy-Prozess mit  $A = 0, \nu = cF_X$  und  $\gamma_0 = 0$ , wobei  $F_X$  die Sprungverteilung und  $c$  die Rate ist.

**Definition A.12.** Sei  $(X_t)$  ein Lévy-Prozess mit charakteristische Tripel  $(A, \nu, \gamma)$ . Dieser ist von

- Typ A, falls  $A = 0$  und  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ ,
- Typ B, falls  $A = 0, \nu(\mathbb{R}) = \infty$  und  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ ,
- Typ C, falls  $A \neq 0$  oder  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) = \infty$ .

**Bemerkung A.13.** • Pfade von  $(X_t)$  sind f.s. stetig genau dann, wenn  $\nu = 0$ .

- Pfade von  $(X_t)$  sind f.s. stückweise konstant genau dann, wenn  $(X_t)$  von Typ A ist und  $\gamma_0 = 0$ .
- Falls  $(X_t)$  von Typ A ist, dann hat  $X_t(\omega)$  eine endliche Anzahl von Sprüngen in jedem endlichen Zeitintervall und ist in der Tat ein zusammengesetzten Poisson-Prozess mit addierter Driftkomponente  $t\gamma$ .
- Falls  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ , dann ist die Menge der Sprungzeiten  $D(\omega) := \{s > 0 : X_s(\omega) - X_{s-}(\omega) \neq 0\}$  eine abzählbare Menge dicht in  $[0, \infty)$ .
- Falls  $(X_t)$  von Typ A oder B ist, dann sind die Pfade von beschränkter Variation in jedem endlichen Zeitintervall.
- Falls  $(X_t)$  von Typ C ist, dann sind die Pfade von unbeschränkter Variation in jedem Zeitintervall.

# Anhang B

## Programmcodes

Im Folgenden sind die wichtigsten Programme dargestellt, die für diese Arbeit verwendet wurden. Alle Programmcodes sind für MATLAB geschrieben.

### B.1 Momentenschätzer

Für die Momentenschätzer wird das Hauptprogramm `moment.m`, sowie die drei Unterprogramme `moment2.m`, `expdist.m` und `acf.m` benützt.

```
function parameter=moment(G1,lagmax,real,type)

% Berechnet die Momentenschätzer.
% Eingabe: G1 = Sprünge von G,
% lagmax = Länge der Autokovarianzfunktion,
% real = wahre Parameter [c,v^2,beta,delta,lambda,Psi(1)]
% zur Berechnung von Bias, MAE, MSE.
% Ausgabe: Matrix mit den Spalten c,v^2,beta,delta,lambda,Psi(1),
% angehängt sind Mittelwert, Bias, MAE, MSE, Standardabweichung.

n=size(G1,2); %Anzahl an Realisationen
T=size(G1,1); %Länge der Realisationen
parameter=zeros((n+5),7);
s=[1:lagmax]';
missed=0;
if type==1 %normalverteilte Sprünge
    a=3;
elseif type==2 %exponentialverteilte Sprünge
    a=6;
else error(sprintf('Ungültige Typangabe'))
end

for j=1:n
    c=-log(sum(G1(:,j)==0)/T);
    Macf=acf((G1(:,j)).^2,lagmax);
    par = fminsearch(@expdist,[500,0.001],optimset('MaxFunEvals',100000, ...
        'MaxIter',100000),Macf);
    beta=-mean((G1(:,j)).^2)*par(2);
    [x,fval,exitflag] = fsolve(@moment2,[0.9;0.02],optimset('MaxFunEvals', ...
        100000,'MaxIter',100000),c,beta,par(2),par(1),a);
    if exitflag>0
        parameter(j,1)=c; %c
        parameter(j,2)=1/c; %E(X^2)
        if type==1 %normalverteilte Sprünge
            parameter(j,3)=1/c;%v^2
        elseif type==2 %exponentialverteilte Sprünge
```

```

        parameter(j,3)=2*c;%alpha^2
    end
    parameter(j,4)=beta;    %beta
    parameter(j,5)=x(1);    %delta
    parameter(j,6)=x(2);    %lambda
    parameter(j,7)=par(2); %Psi(1)
    else missed=missed+1;
    end
end

parameter(n+1,:)=mean(parameter(parameter(1:n)~=0,:)); %Mittelwert
if nargin < 4 %Falls wahre Werte unbekannt, wird Mittelwert verwendet.
    real=parameter(n+1,:);
end
parameter(n+2,:)=mean(parameter(parameter(1:n)~=0,:)-ones(n-missed,1)*real); %Bias
parameter(n+3,:)=mean(abs(parameter(parameter(1:n)~=0,:)-ones(n-missed,1)*real)); %MAE
parameter(n+4,:)=mean((parameter(parameter(1:n)~=0,:)-ones(n-missed,1)*real).^2); %MSE
parameter(n+5,:)=std(parameter(parameter(1:n)~=0,:)); %Standardabweichung

```

---

```

function F=moment2(x,c,beta,psi1,factor,a)

```

```

% Stellt das Gleichungssystem aus Schritt 6 auf:

```

```

% [Psi(1)-psi1;

```

```

% k-factor]

```

```

F=[log(x(1))+x(2)/x(1)-psi1;
    ((exp(-psi1)-1)/(-psi1))*x(1)/x(2)*beta*beta*(2/(psi1* ...
    (2*log(x(1))+x(2)/x(1))*(2+a*x(2)/(x(1)*c))))-1/(psi1*psi1)) ...
    *(1-exp(psi1)-log(x(1))*((1-exp(psi1))/(-psi1))-factor)];

```

---

```

function distance=expdist(par,Macf)

```

```

% Berechnet den Abstand von der empirischen

```

```

% Autokovarianzfunktion zur exponentiellen

```

```

% Kurve f(s)=par(1)*exp(par(2)*s).

```

```

m=size(Macf,1);

```

```

s=[1:m]';

```

```

distance=sum((Macf-par(1)*exp(par(2).*s)).^2);

```

---

```

function out=acf(G1squared,lagmax)

```

```

% Berechnet die empirische Autokovarianzfunktion von

```

```

% G1squared bis zum Abstand lagmax.

```

```

T=size(G1squared,1); %Länge der Realisation

```

```

out=zeros(lagmax,1);

```

```

x=mean(G1squared);

```

```

for h=1:lagmax

```

```

    out(h)=1/T .* sum((G1squared([h+1:T])-ones(T-h,1).*x) ...
        .*(G1squared([1:T-h])-ones(T-h,1).*x));

```

```

end

```



## B.2 QML-Schätzer

Die QML-Schätzer verwenden das Hauptprogramm `qml.m`, sowie, je nach Likelihood, eines der beiden Unterprogramme `loglike1.m` oder `loglike2.m`.

```
function parameter=qml(G1squared,real,kmax)

% Berechnet den QML-Schätzer (4.27) oder (4.28)
% Eingabe: G1squared=quadrierte Sprünge von G
% real = wahre Parameter [c,v^2,beta,delta,lambda]
% zur Berechnung von Bias, MAE, MSE.
% kmax=Anzahl der Faltungen
% Ausgabe: Matrix mit den Spalten c,v^2,beta,delta,lambda,
% angehängt sind Mittelwert, Bias, MAE, MSE, Standardabweichung.

n=size(G1squared,2); %Anzahl an Realisationen
T=size(G1squared,1); %Länge der Realisationen
parameter=zeros((n+5),5);
for j=1:n
    c=-log(sum(G1squared(:,j))==0)/T;
    x=fminsearch(@loglikeX,[0.9;0.9;0.02],optimset('MaxFunEvals', ...
    50000,'MaxIter',50000,'Display','final'),G1squared(:,j),c,kmax);
    parameter(j,1)=c; %c
    parameter(j,2)=1/c; %E(X^2)
    parameter(j,3)=x(1); %beta
    parameter(j,4)=x(2); %delta
    parameter(j,5)=x(3); %lambda
end

parameter(n+1,:)=mean(parameter(1:n,:)); %Mittelwert
if nargin < 2 %Falls wahre Werte unbekannt, wird Mittelwert verwendet.
    real=parameter(n+1,:);
end
parameter(n+2,:)=mean(parameter(1:n,:)-ones(n,1)*real); %Bias
parameter(n+3,:)=mean(abs(parameter(1:n,:)-ones(n,1)*real)); %MAE
parameter(n+4,:)=mean((parameter(1:n,:)-ones(n,1)*real).^2); %MSE
parameter(n+5,:)=std(parameter(1:n,:)); %Standardabweichung
```

---

```
function L=loglike1(x,G1squared,c,kmax)

% Berechnnet den einfachen Loglikelihood (4.27)
% Eingabe: x=[beta,delta,lambda]
% G1squared=quadrierte Sprünge von G
% c=Rate des Poisson-Prozess
% kmax=Anzahl der Faltungen

v2=1/c;
sigmasquared=zeros(length(G1squared),1);
sigmasquared(1)=50;
L=log(v2*sigmasquared(1))+G1squared(1)/(v2*sigmasquared(1));
for i=2:length(G1squared)
    sigmasquared(i)=sigmasquared(i-1)+x(1)+log(x(2))*sigmasquared(i-1)+x(3)/x(2)*G1squared(i-1);
    if G1squared(i)~=0
        L=L+log(v2*sigmasquared(i))+G1squared(i)/(v2*sigmasquared(i));
    end
end
```

---

```
function L=loglike2(x,G1squared,c,kmax)

% Berechnnet den einfachen Loglikelihood (4.28)
% Eingabe: x=[beta,delta,lambda]
% G1squared=quadrierte Sprünge von G
```

```

% c=Rate des Poisson-Prozess
% kmax=Anzahl der Faltungen

v2=1/c;
sigmasquared=zeros(length(G1squared),1);
sigmasquared(1)=50;
temp=0;
for k=1:kmax
    temp=temp+c^k/(sqrt(2*pi*k*v2*sigmasquared(1))*factorial(k)) ...
        *exp(-G1squared(1)/(2*k*v2*sigmasquared(1))-c);
end
L=-log(temp);
for i=2:length(G1squared)
    sigmasquared(i)=sigmasquared(i-1)+x(1)+log(x(2))*sigmasquared(i-1)+x(3)/x(2)*G1squared(i-1);
    if G1squared(i)~=0
        temp=0;
        for k=1:kmax
            temp=temp+c^k/(sqrt(2*pi*k*v2*sigmasquared(i))*factorial(k)) ...
                *exp(-G1squared(i)/(2*k*v2*sigmasquared(i))-c);
        end
        L=L-log(temp);
    end
end
end

```

## B.3 Smile-Effekt

In Kapitel 6 wird das Verhalten impliziter Volatilität untersucht. Dazu dienen die Programme `smile.m`, `optionprice.m` und `blackscholes.m`.

```

function [c,impliedvola]=smile(S0,X,r,T,G1)

% Berechnet die implizierten Volatilitäten
% und plottet den Volatility Smile.
% Input:
% S0=aktueller Aktienkurs
% X=Vektor mit verschiedenen Ausübungspreisen
% r=risikofreier Zinssatz
% T=Laufzeit
% G1=Sprünge von G
% Output:
% c=Vektor mit Call-Preisen
% impliedvola=Vektor mit implizierten Volatilitäten

m=length(X);
c=zeros(m,1);
impliedvola=zeros(m,1);
for i=1:m
    %Liefert die simulierten Optionpreise
    c(i)=optionprice(S0,X(i),r/360,T,G1/360);
    %löst die Black-Scholes-Formel nach implizierter Volatilität
    impliedvola(i) = fsolve(@blackscholes,0.5,optimset('MaxFunEvals',50000, ...
        'MaxIter',50000),S0,X(i),r,T/360,c(i));
end
plot(X,impliedvola);

```

---

```

function P=optionprice(S0,X,r,T,G1)

% Berechnet den Wert einer europäischen Calloption
% nach der Methode von Engle und Mustafa.

```

```
n=size(G1,2); %Anzahl an Realisierungen
ST=zeros(n,1);
for j=1:n
    ST(j)=S0;
    for i=1:T
        ST(j)=ST(j)*(1+r+G1(i,j));
    end
end
P=exp(-r*T)*mean(max(ST-X,0));
```

---

```
function F = blackscholes(sig,S0,X,r,T,c)

% Berechnet den Wert einer europäischen Calloption
% nach der Black-Scholes-Optionspreisformel.

if nargin < 6
    error(sprintf('sig, S0, X, r, T oder c fehlt.'))
end

F = S0.*normcdf((log(S0./X)+(r+sig.^2/2).*T)./(sig.*sqrt(T)))-X.*(exp(-r.*T) ...
    .*normcdf((log(S0./X)+(r+sig.^2/2).*T)./(sig.*sqrt(T))-(sig.*sqrt(T)))-c;
```

# Literaturverzeichnis

- [1] ASH, R. B., UND GARDNER, M. F. *Topics in Stochastic Processes*, Vol. 27 von *Probability and Mathematical Statistics*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] BARNDORFF-NIELSEN, O., UND SHEPHARD, N. Modelling by Lévy processes for financial econometrics. In *Lévy Processes, Theory and Applications*, O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, und S. Renick, Hrsg. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [3] BARNDORFF-NIELSEN, O., UND SHEPHARD, N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial econometrics (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **63** (2001), 167–241.
- [4] BAUER, H. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl. de Gruyter, Berlin, 1991.
- [5] BIBBY, B. M., JACOBSEN, M., UND SØRENSEN, M. Estimating functions for discretely sampled diffusion-type models, 2003. Preprint. Erhältlich unter <http://www.math.ku.dk/~michael/>.
- [6] BINGHAM, N. H., UND KIESEL, R. *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, 3. Aufl. Springer Finance, Berlin, 2000.
- [7] BLACK, F., UND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81** (1973), 637–654.
- [8] BLYTH, C. R., UND STILL, H. A. Binomial confidence intervals. *Journal of the American Statistical Association* **78** (1983), 108–116.
- [9] BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* **31** (1986), 307–327.
- [10] BOUGEROL, P., UND PICARD, N. Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics* **52** (1992), 115–127.
- [11] CONT, R., UND TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC Press, London, 2004.
- [12] DANILOV, D., UND MANDAL, P. K. Estimation of the volatility component in two-factor stochastic volatility short rate models. Report 2000-040, EURANDOM, 2000.

- [13] DING, Z., UND GRANGER, C. W. J. Modeling volatility persistence of speculative returns: A new approach. *Journal of Econometrics* **73** (1996), 185–215.
- [14] DUAN, J. C. The GARCH option pricing model. *Mathematical Finance* **5** (1995), 13–32.
- [15] DUFFIE, D., UND SINGLETON, K. J. Simulated moments estimation of Markov models of asset prices. *Econometrica* **61** (1993), 929–952.
- [16] ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* **50** (1982), 987–1007.
- [17] ENGLE, R. F., UND BOLLERSLEV, T. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews* **5** (1986), 1–50.
- [18] ENGLE, R. F., LILIEN, D. M., UND ROBINS, R. P. Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica* **55** (1987), 391–407.
- [19] ENGLE, R. F., UND MUSTAFA, C. Implied ARCH models from option prices. *Journal of Econometrics* **52** (1992), 289–311.
- [20] ENGLE, R. F., NG, V. K., UND ROTHSCILD, M. Asset pricing with a factor ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills. *Journal of Econometrics* **45** (1990), 213–237.
- [21] GALLANT, A. R., UND TAUCHEN, G. Which moments to match. *Econometric Theory* **12** (1996), 657–681.
- [22] GHYSELS, E., HARVEY, A., UND RENAULT, E. Stochastic volatility. In *Handbook of Statistics Vol. 14, Statistical Methods in Finance*, G. Madala, Hrsg. North Holland, Amsterdam, 1996.
- [23] GOURIÉROUX, C., MONFORT, A., UND RENAULT, E. Indirect inference. *Journal of Applied Econometrics* **8** (1993), S85–S118.
- [24] HANSEN, L. P., UND SCHEINKMAN, J. A. Back to the future: Generating moment implications for continuous-time Markov processes. *Econometrica* **63** (1995), 767–804.
- [25] HARVEY, A. C., RUIZ, E., UND SHEPHARD, N. Multivariate stochastic variance models. *Review of Economic Studies* **61** (1994), 247–264.
- [26] HOBSON, D. G., UND ROGERS, L. C. G. Complete models with stochastic volatility. *Mathematical Finance* **8** (1998), 27–48.
- [27] HULL, J., UND WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance* **42** (1987), 281–299.

- [28] KALLSEN, J., UND TAQQU, M. S. Option pricing in ARCH-type models. *Mathematical Finance* **8** (1998), 13–26.
- [29] KITAGAWA, G. Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series. *Journal of the American Statistical Association* **82** (1987), 1032–1041.
- [30] KLÜPPELBERG, C., LINDNER, A., UND MALLER, R. A continuous time GARCH process driven by a Lévy process: Stationarity and second order behaviour. *Journal of Applied Probability* **41** (2004), 601–622.
- [31] KLÜPPELBERG, C., LINDNER, A., UND MALLER, R. Continuous time volatility modelling: COGARCH versus Ornstein-Uhlenbeck models, 2004. Preprint. Erhältlich unter <http://www-m4.ma.tum.de/m4/Papers/>.
- [32] LEE, S.-W., UND HANSEN, B. E. Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator. *Econometric Theory* **10** (1994), 29–52.
- [33] MADAN, D., UND SENETA, E. The variance gamma (VG) model for share market returns. *Journal of Business* **63** (1990), 511–524.
- [34] MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business* **36** (1963), 394–419.
- [35] MELINO, A., UND TURNBULL, M. Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics* **45** (1990), 239–265.
- [36] NELSON, D. B. *Time Series Behavior of Stock Market Volatility and Returns*. PhD thesis, MIT, 1988.
- [37] NELSON, D. B. ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics* **45** (1990), 7–38.
- [38] NELSON, D. B. Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory* **6** (1990), 318–334.
- [39] NELSON, D. B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica* **59** (1991), 347–370.
- [40] ROSS, S. M. *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1983.
- [41] SAMORODNITSKY, G., UND TAQQU, M. S. *Stable Non-Gaussian Processes*. Chapman and Hall, London, 1994.
- [42] SATO, K.-I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [43] SCHOUTENS, W., UND TEUGELS, J. L. Lévy processes, polynomials and martingales. *Communications in Statistics - Stochastic Models* **14** (1998), 335–349.
- [44] SØRENSEN, M. Prediction-based estimating functions. *Econometrics Journal* **3** (2000), 123–147.

- [45] TAYLOR, S. J. *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York, 1986.
- [46] WEISS, A. A. Asymptotic theory for ARCH models: estimation and testing. *Econometric Theory* **2** (1986), 107–131.