Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Optionen

in

Lebensversicherungsverträgen

Diplomarbeit

von

Johannes Haas

Themenstellerin:	Prof. Dr. Claudia Klüppelberg
Betreuer:	Stephan Reulein
Abgabetermin:	30. Juni 2005

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München,

Danksagung

Zuerst möchte ich mich herzlich bei Frau Professorin Klüppelberg bedanken, die mir diese Arbeit, die in Kooperation mit der Münchener Rückversicherung entstanden ist, ermöglicht hat. Ihre Geduld und ihre Hilfsbereitschaft haben mich bei meiner Arbeit sehr unterstützt.

Die meisten Ideen dieser Arbeit sind in Diskussionen mit meinem Betreuer Herrn Reulein entstanden. Bei ihm möchte ich mich vor allem für Einblicke in das Thema bedanken, die ich sonst wohl nirgendwo gefunden hätte.

Mein Dank gilt auch der Abteilung LK2.5 für die angenehme Arbeitsatmosphäre und der Münchener Rückversicherung für die finanzielle Unterstützung.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei meiner Familie bedanken, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt hat und auch diese Diplomarbeit Korrektur gelesen hat.

Vorkenntnisse

In dieser Arbeit werden vorausgesetzt:

1. Kenntnisse der Stochastik 2, wie diese zum Beispiel in dem Skript Stochastik 2 von Klüppelberg [16] zu finden sind.

2. Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik, diese werden zum Beispiel in Gerber [11] oder Koller [17] erklärt.

3. Grundlagen der Finanzmathematik, wie sie zum Beispiel in Bingham und Kiesel [3] oder Föllmer und Schied [7] aufgeschrieben sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In der Literatur über Lebensversicherungsmathematik wie zum Beispiel in Gerber [11] werden Lebensversicherungsverträge (in dieser Arbeit kurz *Verträge* genannt) nach dem *Äquivalenzprinzip* bewertet. Die Nettoprämien werden so berechnet, dass deren erwarteter Barwert gleich dem erwarteten Barwert der Versicherungsleistungen ist. Dabei wird angenommen, die Versicherungsleistungen bei Tod beziehungsweise bei Erleben und die Prämienzahlungen seien zu Vertragsbeginn festgelegt.

Nicht berücksichtigt sind dabei Vertragsvereinbarungen wie zum Beispiel das *Rückkaufsrecht*, das *Recht auf Beitragsfreistellung* oder das *Kapitalwahlrecht* bei aufgeschobenen Rentenversicherungsverträgen, die dem Versicherungsnehmer nach Vertragsabschluss das Recht geben, die Versicherungsleistungen und die Prämienzahlungen nachträglich zu ändern.

Diese Vertragsvereinbarungen sind zum Teil gesetzlich vorgeschrieben, zum Teil können sie zur Steigerung der Attraktivität der Lebensversicherungsprodukte in die Verträge aufgenommen werden. Sie werden als *Optionen in Lebensversicherungsverträgen* (*embedded Options*, *embedded Derivatives*) bezeichnet. Eine Übersicht über in Deutschland und England vorkommende Optionen in Lebensversicherungsverträgen findet sich in Held [13].

Der *Wert* einer solchen Option kann nicht isoliert von dem Vertrag betrachtet werden, in den die Option eingebettet ist. Der Wert des Kapitalwahlrechts hängt von der Höhe der Rente sowie von der Höhe der Einmalauszahlung ab. Im Folgenden wird deshalb von *Verträgen* (= Verträge ohne Option) beziehungsweise von *Verträgen mit Option* gesprochen. Es wird der Wert eines Vertrages mit Option verglichen mit dem Wert der zugehörigen Verträge ohne Option. Beispielsweise wird der Wert eines Rentenversicherungsvertrages mit Kapitalwahlrecht verglichen mit dem Wert eines Rentenversicherungsvertrages ohne Kapitalwahlrecht und dem Wert eines Erlebensfall-Vertrages mit Einmalauszahlung.

Der Wert eines Vertrages mit Option aus Sicht des Versicherungsnehmers ist nicht notwendigerweise das Negative des Wertes des Vertrages aus Sicht des Versicherungsunternehmens. In dieser Arbeit wird der Wert aus Sicht des Versicherungsunternehmens untersucht.

Auch Vertragsvereinbarungen wie der *Garantiezins* oder die *Rentenumwandlungsgarantie* bleiben bei der Prämienberechnung nach dem Äquivalenzprinzip unberücksichtigt. Diese werden als *Garantien* bezeichnet.

Dem Versicherungsunternehmen bieten sich ebenfalls Wahlmöglichkeiten. Es kann beispielsweise die Höhe der *Überschussbeteiligung* in gewissen Grenzen festlegen und es kann bei klassischen Verträgen entscheiden, in welche Kapitalanlagen das Geld der Versicherungsnehmer investiert wird. Diese Entscheidungen beeinflussen direkt den Wert des Garantiezinses und der Überschussbeteiligung.

1.1 Bewertung von Lebensversicherungsverträgen nach dem Äquivalenzprinzip

In der Literatur über Lebensversicherungsmathematik erfolgt die Bestimmung der Nettoprämien für Lebensversicherungsverträge über das sogenannte *Äquivalenzprinzip*. Wir erläutern dieses Prinzip nach Gerber [11] Kapitel 5.1:

Ein Lebensversicherungsvertrag legt Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen fest. Gerber definiert als Gesamtverlust der Versicherung L die Differenz zwischen dem Barwert der Versicherungsleistungen und dem Barwert der Prämienzahlungen.

Eine Prämie heißt nach Gerber (siehe Gleichung (5.1.1)) Nettoprämie, falls sie die Gleichung $\mathbb{E}(L) = 0$ erfüllt. Die Nettoprämie wird also so gewählt, dass der erwartete Gesamtverlust gleich Null ist. Dabei muss noch geklärt werden, mit welchem Wahrscheinlichkeitsmaß dieser Erwartungswert und mit welchen Zinssätzen die Barwerte berechnet werden sollen.

Das zur Prämienberechnung verwendete Wahrscheinlichkeitsmaß und der zur Prämienberechnung verwendete Zins werden *vorsichtig gewählt*. Dabei bedeutet *vorsichtig gewählt* so gewählt, dass die Versicherungsleistungen tendenziell überschätzt sind. Die Gewinne, die dem Versicherungsunternehmen durch die vorsichtige Schätzung entstehen, müssen teilweise an die Versicherungsnehmer in Form von Überschussbeteiligungen weitergegeben werden.

Zum verwendeten Maß:

Wir beschränken uns zunächst auf Versicherungsverträge, deren Versicherungsleistungen allein davon abhängig sind, ob der Versicherungsnehmer zu einem bestimmten Zeitpunkt noch lebt oder nicht. Dies schließt beispielsweise Invaliditätsversicherungen und fondsgebundene Versicherungsverträge aus. Damit ist die Restlebensdauer des Versicherungsnehmers die einzige zufällige Größe in diesem Modell.

Wir bezeichnen die Restlebensdauer eines x-jährigen Versicherungsnehmers mit Γ und modellieren sie wie Gerber als Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Gerber definiert ihre Verteilung als:

$G(t) := P(\Gamma \leq t)$ für $t \geq 0$, siehe Gerber [11] Kapitel 2.1.

Für ein gegebenes $x \in \mathbb{N}$ werden dann über die Verteilungsfunktion G die bedingten

Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_tp_{x+s}$ und ${}_tq_{x+s}$ eingeführt. Für $s, t > 0$ definiert man:

${}_tp_{x+s} := P(\Gamma > s+t | \Gamma > s) = \frac{1-G(s+t)}{1-G(s)}$

${}_tp_{x+s}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, bei Erleben des Alters $x+s$ weitere t Jahre zu überleben.

${}_tq_{x+s} := P(\Gamma \leq s+t | \Gamma > s) = \frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)}$

${}_tq_{x+s}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, bei Erleben des Alters $x+s$ in den dann folgenden t Jahren zu sterben.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten ${}_1q_x$ werden typischerweise für $x \in \{0, \ldots, 120\}$ aus historischen Daten geschätzt und in sogenannten Sterbetafeln aufgeführt. Dabei gibt es in Deutschland unterschiedliche Sterbetafeln für Frauen und für Männern so wie für Todesfall- und Erlebensfallverträge. Bei Todesfallverträgen sind vorsichtig geschätzte ${}_1q_x$ tendenziell überschätzt, bei Erlebensfallverträgen tendenziell unterschätzt.

Da sich die Sterblichkeit im Laufe der Zeit verändert (in den letzten Jahrzehnten hat sich die erwartete Lebensdauer erhöht (= *verbessert*)), ist zusätzlich noch eine sogenannte *Sterblichkeitsverbesserung* geschätzt.

Zum Zinssatz:

Der zur Prämienkalkulation verwendete Zinssatz wird niedrig und konstant gewählt. Aufgrund der langen Laufzeit der Verträge (oft über 30 Jahre) wird auf eine stochastische Modellierung von Zinsen verzichtet. Gerber argumentiert, dass auf so lange Sicht keine verlässliche Aussage über die Entwicklung der Zinsen getroffen werden kann, siehe Gerber, Kapitel 5.7.

Es wird ein niedriger und konstanter Zinssatz gewählt, von dem man glaubt, ihn immer erwirtschaften zu können. Erwirtschaftet das Lebensversicherungsunternehmen eine höhere Rendite, so partizipieren die Versicherungsnehmer durch die Überschussbeteiligung daran.

Die Bruttoprämie ergibt sich aus der Nettoprämie durch Addition von Kostenzuschlägen.

Beispiel 1.1 *Der reine Erlebensfall-Versicherungsvertrag mit Laufzeit t und Versicherungssumme 1.*

Überlebt der bei Vertragsabschluss x-jährige Versicherungsnehmer weitere t Jahre, erlebt er also das Alter $x+t$, so erhält er eine Geldeinheit, für $x, t \in \mathbb{N}$. Bei einem Rechnungszins von $100i\%$ ist der Barwert der Versicherungsleistung $(1+i)^{-t}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Versicherungsleistung ausgezahlt wird, ist ${}_tp_x$. Damit ist die Netto-Einmalprämie gleich ${}_tp_x(1+i)^{-t}$.

Bei der in diesem Abschnitt vorgestellten klassischen Modellierung ist zu beachten:

Die Versicherungsleistungen und die Prämienzahlungen abhängig von der Lebensdauer des Versicherungsnehmers sind bei Vertragsabschluss festgelegt. Optionen in Lebensversicherungsverträgen, also mögliche nachträgliche Änderungen der Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen, sind dabei nicht berücksichtigt.

Wir lösen uns im Folgenden von dieser Modellierung. In dieser Diplomarbeit wird ein Modell eingeführt, das die Berücksichtigung von Optionen in Lebensversicherungsverträgen erlaubt und die Annahme deterministischer Zinsen nicht benötigt. Die Restlebensdauern der Versicherungsnehmer werden nicht notwendigerweise identisch verteilt sein.

1.2 Der Aufbau dieser Arbeit und die Ergebnisse

Ziel dieser Arbeit ist es, die Bewertung komplexer Verträge mit Option auf die Bewertung möglichst einfacher Verträge ohne Option (genannt *Standardverträge*) zu reduzieren.

Diese Standardverträge sind reine Erlebensfall-Versicherungsverträge mit Versicherungssumme Eins, wie im Beispiel 1.1 vorgestellt. Es wird angenommen, diese könnten mit beliebiger ganzzahliger Laufzeit auf einem Markt gehandelt werden. Die Überlegung ist nun: Wenn die Marktpreise dieser Standardverträge gegeben sind, zu welchem Preis müsste dann ein komplexerer Vertrag gehandelt werden, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen? Führt diese Überlegung zu einem eindeutigen Preis, so heißt dieser Preis *No-Arbitrage Preis*. Die Bewertung komplexerer Verträge ist dann in diesem Sinne reduziert worden auf die Bewertung der am Markt gehandelten Verträge. Die Bewertung der am Markt gehandelten Verträge übernimmt der Markt, unter ihrem Wert wird ihr Marktwert verstanden.

Die so gewonnenen No-Arbitrage Preise werden nicht in Geldeinheiten ausgedrückt werden, sondern sind abhängig von den Marktwerten der am Markt gehandelten Verträge. Sie werden Linearkombinationen dieser Marktwerte sein. Wir sagen dann: Der No-Arbitrage Preis des komplexeren Vertrages wird in Einheiten der Preise der am Markt gehandelten Verträge ausgedrückt.

Die Aussage ist damit: Könnten die Standardverträge auf einem Markt gehandelt werden, so müsste ein komplexerer Vertrag zu dem in dieser Arbeit angegebenen No-Arbitrage Preis gehandelt werden, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Im *zweiten Kapitel* werden klassische und fondsgebundene Verträge sowie der Standardvertrag definiert. Unter der Annahme deterministischer Zinsen wird der No-Arbitrage Preis des allgemeinen klassischen Vertrages in Korollar 2.21 in Einheiten der Marktpreise von Standardverträgen angegeben. Überlegungen zum Preisprozess des Standardvertrages folgen.

Im *dritten Kapitel* wird der technisch schwierigere Fall stochastischer Zinsen behandelt. Während im zweiten Kapitel ein statischer Hedge zur Replikation des allgemeinen klassischen Vertrages ausreicht, muss zur Replikation bei stochastischem Zins zeitkontinuierlich gehandelt werden.

In Kapitel 3.2 wird eine replizierende Strategie für den allgemeinen fondsgebundenen Vertrag bei stochastischem Zins hergeleitet, und in Satz 3.39 wird der No-Arbitrage Preis des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages in Einheiten der Marktpreise von Fonds-Anteilen, Bonds und Standardverträgen angegeben.

In Kapitel 3.3 wird analog eine replizierende Strategie für den allgemeinen klassischen Vertrag bei stochastischem Zins hergeleitet, und in Satz 3.47 wird der No-Arbitrage Preis des allgemeinen klassischen Vertrages in Einheiten der Marktpreise von Bonds und Standardverträgen angegeben.

Im *vierten Kapitel* werden *Verträge mit Option* definiert. Diese Verträge mit Option können in unserem Modell nicht vollständig repliziert werden.

Im *fünften Kapitel* wird der *risikominimierende Hedge* für Verträge mit Option im Einperiodenmodell in einem Modell für die Entscheidung der Versicherungsnehmer hergeleitet. Die zufällige Differenz aus dem Marktwert des optimalen Hedges und dem Marktwert des Vertrages mit Option zu einem geeigneten Zeitpunkt wird als *Rest* bezeichnet.

Dieser Rest ist in gewissem Sinne unkorreliert zu allen am Markt gehandelten Wertpapieren. Die Bewertung des Rests kann beispielsweise nach versicherungsmathematischen Bewertungsprinzipien erfolgen. Wird er nach dem klassischen Varianzprinzip bewertet, so führt uns dieses Vorgehen auf den Preis für einen Vertrag mit Option nach dem von Schweizer in [33] eingeführten *financial variance principle*. Ist dem Rest ein Preis zugeordnet, so ist der Preis des Vertrages mit Option der Preis des optimalen Hedges plus dem Preis des Rests.

Mit dieser Methode kann ein Intervall angegeben werden, das von den Marktwerten von Bonds, Standardverträgen und Fonds-Anteilen abhängt und in dem der Preise des Vertrages mit Option in unserem Modell liegen muss, um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen. Dieses Intervall wird für das Beispiel *Kapitalwahlrecht* unter Annahmen an Zins und Sterblichkeit berechnet und ist von brauchbarer Breite. Ein Programm zur Berechnung dieses Intervalls für allgemeinere Verträge mit Option findet sich in Anhang A.

1.3 Das stochastische Modell dieser Arbeit

Nach Stachowiak (siehe Wikipedia [37]) ist “Ein Modell ... immer ein Abbild von etwas, eine Repräsentation natürlicher oder künstlicher Originale. ... . Ein Modell erfasst nicht alle Attribute des Originals, sondern nur diejenigen, die dem Modellschaffer bzw. Modellnutzer relevant erscheinen. Ein Modell ist einem Original nicht von sich aus zugeordnet. Die Zuordnung wird durch die Fragen Für wen?, Warum? und Wozu? relativiert. Ein Modell wird vom Modellschaffer bzw. Modellnutzer innerhalb einer bestimmten Zeitspanne und zu einem bestimmten Zweck für ein Original eingesetzt. Das Modell wird somit interpretiert.”

In dieser Arbeit sind die Originale die Versicherungsnehmer, das Versicherungsunternehmen und Bonds sowie ein Fonds im Falle fondsgebundener Lebensversicherungsverträge.

Als relevante Attribute erscheinen hier:

1. Die Lebensdauern der Versicherungsnehmer und deren Entscheidungen im Falle von Verträgen mit Wahlrecht.

2. Die Marktpreise der Bonds und der Fonds-Anteile in einem gewissen Zeitintervall.

3. Die Entscheidung des Versicherungsunternehmens, falls es eine Wahlmöglichkeit hat.

Alle weiteren Attribute werden ausgeblendet.

Der Zweck des Modells ist die Bestimmung von absichernden Handelsstrategien und No-Arbitrage Preisen in Einheiten der Marktpreise von Bonds, Standardverträgen und Fonds-Anteilen für Verträge und Verträge mit Option in diesem Modell.

Wie in der Lebensversicherungsmathematik üblich werden in dieser Arbeit die Lebensdauern der Versicherungsnehmer als Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum modelliert. Dieser Wahrscheinlichkeitsraum wird in geeigneter Weise erweitert, so dass Marktpreise von Bonds und Fonds-Anteilen als stochastische Prozesse darauf modelliert werden können, wie dies in der Finanzmathematik üblich ist.

Ein Modell für die Entscheidung des Versicherungsnehmers folgt in Kapitel 5.2, Entscheidungsmöglichkeiten des Versicherungsunternehmens werden in dieser Arbeit nicht mehr behandelt.

1.3.1 Die Versicherungsnehmer

Wir definieren jetzt ein Modell für die Restlebensdauer der Versicherungsnehmer. Dabei bezeichnet $\mathcal{I} := \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der Versicherungsnehmer. Die Einbeziehung vieler Versicherungsnehmer erlaubt uns später, das Gesetz der großen Zahlen anzuwenden. Zur Zeit $t = 0$ sind sie alle $x \in \mathbb{N}_0$ Jahre alt und schließen alle den selben Vertrag ab. Weiter wird das Modell im Hinblick auf das zeitkontinuierliche Handeln des Standardvertrages in Kapitel 3 zeitkontinuierlich definiert.

Die Lebensdauer eines jeden Versicherungsnehmers $i \in \mathcal{I}$ wird als Zufallsexperiment auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}^i_t)_{t\in(0,\infty)}, P^i)$ modelliert. Dabei ist $\Omega^i := (0, \infty)$ die Menge der möglichen Ergebnisse. Ein Element aus Ω^i wird mit ω^i bezeichnet, $\omega^i = t$ mit $t \in (0, \infty)$ steht für das Ergebnis: *Der Versicherungsnehmer i stirbt zur Zeit t, also im Alter von $x + t$.* Beispielsweise wird $\omega^i = 20.28$ interpretiert als: *Der Versicherungsnehmer i stirbt 20 Jahre und 100 Tage nach Vertragsabschluss, also im Alter von $x + 20$ Jahren und 100 Tagen.*

$\mathcal{F}^i := \mathcal{B}(\Omega^i)$ ist die Borel-σ-Algebra auf Ω^i, als Filtration wird
$\mathcal{F}^i_t := \mathcal{B}((0, t])$ gewählt, also $\mathcal{F}^i$ eingeschränkt auf $(0, t]$ und
$P^i : \mathcal{F}^i \to [0, 1]$ ist die Sterbeverteilung des Versicherungsnehmers i.

Der Produktraum $(\Omega^{\mathcal{I}}, \mathcal{F}^{\mathcal{I}}, (\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_t)_{t\in[0,\infty)}, P^{\mathcal{I}}) := \bigotimes_{i\in\mathcal{I}}(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}^i_t)_{t\in[0,\infty)}, P^i)$ ist wiederum ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.
Ein Element $\omega^{\mathcal{I}} \in \Omega^{\mathcal{I}}$ kann geschrieben werden als $\omega^{\mathcal{I}} = (\omega^1, \omega^2, \ldots)$.

$\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_t$ enthält die Information über die Todeszeitpunkte aller vor dem Zeitpunkt t gestorbenen Versicherungsnehmer.

Definition 1.2 *Folgende Zufallsvariablen auf $(\Omega^{\mathcal{I}}, \mathcal{F}^{\mathcal{I}})$ werden verwendet:*

1. $K^i((\omega^1, \omega^2, \ldots)) := \lfloor \omega^i \rfloor$
   $K^i = k \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn der Versicherungsnehmer i im $k + 1$. Jahr nach Vertragsabschluss stirbt, also im Alter von $x + k$ Jahren.

   Für eine Menge von Versicherungsnehmern $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$ werden definiert:

2. $d^{\mathcal{M}}(k) := \sum_{i\in\mathcal{M}} 1_{\{K^i=k\}}$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$
   $d^{\mathcal{M}}(k)$ *ist die Anzahl der Versicherungsnehmer aus der Menge* $\mathcal{M}$*, die im* $k+1$*. Jahr nach Vertragsabschluss, also im Alter von* $x+k$ *Jahren, sterben.*

3. $l^{\mathcal{M}}(t) := \sum_{i\in\mathcal{M}} 1_{\{\omega^i>t\}}$ *für* $t \in [0,\infty)$
   $l^{\mathcal{M}}(t)$ *ist die Anzahl der Versicherungsnehmer aus der Menge* $\mathcal{M}$*, die den Zeitpunkt* t*, also das Alter* $x+t$*, erleben. Dabei sind hier auch nicht-ganzzahlige* t *zugelassen.*

Nach Konstruktion ist die Menge $\{K^i, i \in \mathcal{I}\}$ eine Menge von unter $P^{\mathcal{I}}$ unabhängigen, nicht aber identisch verteilten Zufallsvariablen. Damit gibt es nicht eine für alle Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ gleichermaßen gültige Wahrscheinlichkeit, das Alter $x+t$ zu erleben.

Was das Versicherungsunternehmen eigentlich interessiert, ist der Anteil derer, die das Alter $x+t$ erleben. Dazu definieren wir eine Folge von relativen Häufigkeiten:

$$\left(\frac{l^{\{1,\dots,I\}}(t)}{I}\right)_{I\in\mathbb{N}}$$

Für diese Folge gilt das Gesetz der Großen Zahlen, siehe Lemma 1.4 Punkt 1 und den Beweis dazu. Also konvergiert $\frac{l^{\{1,\dots,I\}}(t)}{I}$ fast sicher gegen eine reelle Zahl in $[0,1]$ für $I \to \infty$. Diese reelle Zahl nennen wir ${}_tp_x^{\mathcal{I}}$.

Nun definieren wir die Größe ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}}$ etwas allgemeiner für eine Folge von Mengen von Versicherungsnehmern $(\mathcal{M}(I))_{I\in\mathbb{N}}$ mit $|\mathcal{M}(I)| \to \infty$ für $I \to \infty$, $\mathcal{M} := \bigcup_{I\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(I)$.

Dies ermöglicht es uns, beispielsweise für zwei verschiedene Teilmengen von $\mathcal{I}$, bezeichnet mit $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, unterschiedliche Größen ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}_1}$ und ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}_2}$ anzugeben. Es könnte $\mathcal{M}_1$ die Menge der Versicherungsnehmer sein, die sich bei einer aufgeschobenen Rentenversicherung für die Rente entscheiden, $\mathcal{M}_2$ könnte die Menge der Versicherungsnehmer sein, die sich für die Einmalauszahlung entscheidet. Unter den Versicherungsnehmern, die sich für die Rente entscheiden, könnte der Anteil, der ein gewisses Alter erreicht, größer sein als unter den Versicherungsnehmern aus $\mathcal{M}_2$. Dieser Effekt wird als *Antiselektion* bezeichnet.

Definition 1.3 *Für eine aufsteigende Folge von Mengen von Versicherungsnehmern* $\mathcal{M}(I) \subseteq \mathcal{M}(I+1) \subseteq \mathcal{I}$*,* $I \in \mathbb{N}$ *mit* $|\mathcal{M}(I)| \to \infty$ *für* $I \to \infty$ *und* $\omega^i > s$ *für alle* $i \in \mathcal{M}$ *definieren wir:*

$${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}} := \lim_{I\to\infty} \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(s+T)}{|\mathcal{M}(I)|}$$

Dabei steht $x \in \mathbb{N}$ *für das Alter der Versicherungsnehmer zur Zeit* $t=0$*,* $s \in \mathbb{R}^+$ *für einen Zeitpunkt, an dem alle Versicherungsnehmer aus* $\mathcal{M}$ *noch leben und* $T \in \mathbb{R}^+$ *für eine Zeitdauer.* ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}}$ *steht für den Anteil der Versicherungsnehmer aus der Menge* $\mathcal{M}$*, der den Zeitpunkt* $t=T$*, also das Alter* $x+T$ *erlebt.*

Dabei ist $\mathcal{M} := \{i \in \mathcal{I}$ *mit* $i \in \mathcal{M}(I)$ *für ein* $I \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{I\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(I)$

Ist die Anzahl der Versicherungsnehmer nur groß genug, so liegt der Anteil der Versicherungsnehmer, der das Alter $x+T$ erlebt, beliebig nahe an ${}_Tp_x^{\mathcal{M}}$. Damit ist ${}_Tp_x^{\mathcal{M}}$ nicht die Wahrscheinlichkeit eines Versicherungsnehmers, das Alter $x+T$ zu erleben, da jeder Versicherungsnehmer eine individuelle Überlebenswahrscheinlichkeit besitzt. Die Bedeutung von ${}_Tp_x^{\mathcal{M}}$ wird in Lemma 1.4 veranschaulicht.

Lemma 1.4 *Für eine aufsteigende Folge von Mengen von Versicherungsnehmern $\mathcal{M}(I) \subseteq \mathcal{M}(I+1) \subseteq \mathcal{I}$ mit $|\mathcal{M}(I)| \to \infty$ für $I \in \mathbb{N}$, $I \to \infty$ und $\omega^i > s$ für alle $i \in \mathcal{M}$ gilt fast sicher:*

1. ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}} = \lim\limits_{I\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} P^i(\omega^i > s+T) \in [0,1]$

   ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}}$ *ist eine Zufallsvariable, die $P^{\mathcal{I}}$-fast sicher gleich einer reellen Zahl in $[0,1]$ ist.*

2. *Ist $U(I)$ eine unter $P^{\mathcal{I}}$ uniform-verteilte Zufallsvariable auf $\mathcal{M}(I)$ und ist $\{U(I)=i\}$ unabhängig von $\{\omega^i > s+T\}$ für alle $i \in \mathcal{I}$, so gilt:* ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}} = \lim\limits_{I\to\infty} P^{\mathcal{I}}(l^{\{U(I)\}}(s+T)=1)$

   Wir schalten zwei unabhängige Zufallsexperimente hintereinander: Zuerst wird uniform-verteilt ein Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$ ausgewählt, danach wird das Zufallsexperiment Lebensdauer des ausgewählten Versicherungsnehmers *gestartet. Die Wahrscheinlichkeit vor Auswählen des Versicherungsnehmers für das Ereignis* der ausgewählte Versicherungsnehmer erlebt das Alter $x+s+T$ *konvergiert gegen* ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}}$.

3. *Sind die Lebensdauern der Versicherungsnehmer identisch verteilt, $P^i = P^j$ für alle $i,j \in \mathcal{I}$, so gilt:* ${}_Tp_{x+s}^{\mathcal{M}} = P^i(\omega^i > s+T|\omega^i > s) \in [0,1]$ *für alle $i \in \mathcal{I}$.*

   Sind die Lebensdauern der Versicherungsnehmer identisch verteilt, $P^i = P^j$ wie bei Gerber [11] angenommen, so entspricht das hier definierte ${}_Tp_x^{\mathcal{M}}$ der in Gerber gleich bezeichneten Überlebenswahrscheinlichkeit.

Beweis:

1. $\left(\frac{l^{\mathcal{M}(I)}(s+T)}{|\mathcal{M}(I)|}\right)_{I\in\mathbb{N}}$ ist für alle $\omega^{\mathcal{I}} \in \Omega^{\mathcal{I}}$ eine Cauchy-Folge und konvergiert damit für jedes $\omega^{\mathcal{I}}$. Der Limes $\lim\limits_{I\to\infty} \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(s+T)}{|\mathcal{M}(I)|}$ existiert und ist eine Zufallsvariable.

   Mit dem Gesetz der Großen Zahlen, siehe zum Beispiel im Skript Stochastik 2 [16] Korollar 7.1.7, gilt fast sicher: $\lim\limits_{I\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} (1_{\{\omega^i>s+T\}} - P^i(\omega^i > s+T)) = 0$

   Damit gilt fast sicher:
   ${}_Tp_{s+x}^{\mathcal{M}} = \lim\limits_{I\to\infty} \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(s+T)}{|\mathcal{M}(I)|} = \lim\limits_{I\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} 1_{\{\omega^i>s+T\}}$
   $\overset{f.s.}{=} \lim\limits_{I\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} P^i(\omega^i > s+T) \in [0,1]$
   Der Limes ist mit Wahrscheinlichkeit 1 eine reelle Zahl aus $[0,1]$.

2. $P^{\mathcal{I}}(l^{\{U(I)\}}(s+T)=1) = \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} P^{\mathcal{I}}(U(I)=i)P^{\mathcal{I}}(l^{\{U(I)\}}(s+T)=1|U(I)=i)$
   $= \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} P^{\mathcal{I}}(l^{\{i\}}(s+T)=1) = \frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i\in\mathcal{M}(I)} P^{\mathcal{I}}(\omega^i > s+T)$.

3. folgt aus 1.

□

Die Restlebensdauern sind in unserem Modell nicht identisch verteilt, nur weiß das Versicherungsunternehmen bei Vertragsabschluss nicht, welche Versicherungsnehmer eher länger leben und welche eher kürzer. Wüsste es dies, würde es nicht allen den gleichen Vertrag zur gleichen Prämie verkaufen.

Definition 1.5 *Eine Menge von Versicherungsnehmern heißt* ***zur Zeit t ununterscheidbar****, falls dem Versicherungsunternehmen zur Zeit t keine unterschiedlichen Informationen über deren Sterbeverteilungen vorliegen.*

Frauen und Männer sind beispielsweise unterscheidbar (= nicht ununterscheidbar). Es ist bekannt, dass Frauen durchschnittlich länger leben als Männer. Sie zahlen auch andere Prämien für die selben Verträge. Bei Vertragsabschluss weiß das Versicherungsunternehmen, ob der Versicherungsnehmer männlich oder weiblich ist.

Annahme 1.6 *Die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{I}$ sind zur Zeit $t = 0$ ununterscheidbar.*

Damit sind in unserer Arbeit die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{I}$ entweder alle weiblich oder alle männlich. Später wird angenommen, dass Preise von Standardverträgen ununterscheidbarer Versicherungsnehmer gleich hoch sind. Stirbt ein Versicherungsnehmer, so ist dies dem Versicherungsunternehmen bekannt, und er ist von den noch lebenden Versicherungsnehmern unterscheidbar. In Verträgen mit Option haben Versicherungsnehmer Entscheidungsmöglichkeiten. Nach einer Entscheidung lassen sich die Mengen von Versicherungsnehmern unterscheiden, die jeweils gleich entschieden haben.

1.3.2 Der Finanzmarkt

Das Versicherungsunternehmen handelt am Finanzmarkt Bonds und im Falle fondsgebundener Verträge auch Fonds-Anteile des im Vertrag vereinbarten Fonds.

Definition 1.7 *Es bezeichnet:*

1. *B_T mit $T \in \mathbb{N}_0$ einen defaultfreien Zero-Coupon-Bond (kurz: Bond), der zur Zeit T eine Geldeinheit auszahlt.*
   $B_T(t)$ bezeichnet seinen Marktpreis zur Zeit $t \in [0, T]$.

2. *X einen Fonds-Anteil, das heißt einen Anteil an einem Portfolio von Wertpapieren, das von einer Investmentgesellschaft verwaltet wird.*
   X_t bezeichnet seinen Marktpreis zur Zeit $t \in \mathbb{R}^+$.

In unserem Modell sollen nun die $(B_T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ mit $T \in \mathbb{N}_0$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ als stochastische Prozesse auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum dargestellt werden. In dem Modell können damit die Bonds und die Fonds-Anteile zeitkontinuierlich gehandelt werden.

Dafür muss $(\Omega^{\mathcal{I}}, \mathcal{F}^{\mathcal{I}}, (\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_t)_{t\in[0,\infty)}, P^{\mathcal{I}})$ aus dem vorherigen Kapitel geeignet erweitert werden, da dieser Wahrscheinlichkeitsraum ausschließlich die Information über die Lebensdauern der Versicherungsnehmer enthält. Wir definieren $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$\Omega := \Omega^{\mathcal{I}} \times \bar{\Omega}$ wobei $\bar{\Omega}$ der Grundraum für den Finanzmarkt ist.
Ein $\omega \in \Omega$ kann geschrieben werden als $\omega = (\omega^{\mathcal{I}}, \bar{\omega})$ wobei $\omega^{\mathcal{I}} \in \Omega^{\mathcal{I}}$ und $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$.

$\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{I}} \otimes \bar{\mathcal{F}}$ wobei $\bar{\mathcal{F}}$ eine geeignete σ - Algebra auf $\bar{\Omega}$ ist.

P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ mit $P(A \times \bar{\Omega}) = P^{\mathcal{I}}(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}}$. P ist nicht notwendigerweise ein Produktmaß der Form $P^{\mathcal{I}} \otimes \bar{P}$. Wir schreiben daher $X_t(\omega)$, $B_T(t)(\omega)$ und nicht $X_t(\bar{\omega})$, $B_T(t)(\bar{\omega})$ für die Preisprozesse von Fonds-Anteilen und Bonds.

Wir definieren $\mathcal{N} := \{A \subseteq \Omega |$ es gibt $G \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq G, P(G) = 0\}$ als die P - Nullmengen und deren Teilmengen und nehmen ohne Einschränkung an, dass $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$. Damit ist dieser Wahrscheinlichkeitsraum vollständig. (Jeder nicht-vollständige Wahrscheinlichkeitsraum lässt sich zu einem vollständigen erweitern, siehe zum Beispiel Applebaum [1], Kapitel 1.1.1.).

Als Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wird $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ verwendet, das die *üblichen Bedingungen* erfüllt, mit $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_t \otimes \{\emptyset, \bar{\Omega}\} \subset \mathcal{F}_t$. Weiter soll die Filtration so gewählt sein, dass alle verwendeten Stochastischen Prozesse an sie adaptiert sind.

Die Eigenschaften der Vollständigkeit und die *üblichen Bedingungen* werden in den Kapiteln 3.1.2, 3.2.2 und 3.3.2 benötigt, dort werden die Preisprozesse als zeitkontinuierliche stochastische Prozesse modelliert.

Kapitel 2

Lebensversicherungsverträge

In diesem Kapitel werden:

1. *Lebensversicherungsverträge* und der *Standardvertrag* definiert.

2. Der Handel von *Standardverträgen* auf einem hier eingeführten virtuellen Markt modelliert.

3. Rechenregeln für Lebensversicherungsverträge aufgestellt und der No-Arbitrage Preis des allgemeinen klassischen Vertrages bei deterministischem Zins gefunden.

4. Eigenschaften des Preisprozesses des Standardvertrages hergeleitet.

2.1 Definition Lebensversicherungsvertrag

Ein Lebensversicherungsvertrag ist ein Vertrag zwischen einem Versicherungsunternehmen (einer Versicherung) und einem Versicherungsnehmer (einem Versicherten), der Prämienzahlungen und Versicherungsleistungen abhängig von dem *Zustand* des Versicherungsnehmers beziehungsweise abhängig von den Zuständen, zwischen denen der Versicherungsnehmer wechselt, definiert. Siehe Persson [29], Seite 1 oder Lenz [19], Kapitel 2.1. Mögliche Zustände sind dabei *lebend*, *tot*, *invalide*, ... In Koller [17], Lenz [19] werden dabei Zahlungen nur zu diskreten Zeitpunkten zugelassen, in Persson [29], Møller [24] auch zu kontinuierlichen.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Zustände *lebend* und *tot*, Zahlungen erfolgen zu diskreten Zeitpunkten und Zahlungen im Zustand *tot* werden ausgeschlossen. Somit erfolgen Zahlungen im Zustand *lebend* oder bei Übergang von dem Zustand *lebend* in den Zustand *tot*.

Es werden nun klassische und fondsgebundene Verträge über ihre Auszahlungen im Erlebensfall und im Todesfall definiert. Dabei steht $T \in \mathbb{N} \cup \infty$ für die Laufzeit des Vertrages, für Rentenverträge, die lebenslange Renten zahlen, wird $T = \infty$ als Laufzeit zugelassen.

$i \in \mathcal{I}$ steht für den Versicherungsnehmer, der den Vertrag abschließt und $x \in \mathbb{N}_0$ für dessen Alter bei Vertragsabschluss, also für dessen Alter zur Zeit $t = 0$.

Auszahlungen können jährlich stattfinden, die erste zur Zeit des Vertragsabschlusses $t = 0$, die zweite ein Jahr später zur Zeit $t = 1$ und so weiter.

Definition 2.1 *Der* ***allgemeine klassische Lebensversicherungsvertrag*** *mit Laufzeit T für den Versicherten i, der bei Vertragsabschluss zur Zeit $t = 0$ genau x Jahre alt ist, ist festgelegt durch*

$$V^i_{x,T} := \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T} \qquad e_t, d_t \in \mathbb{R} \text{ für } t \in \{0, \dots, T\}$$

wobei e_t die Auszahlung zur Zeit t bezeichnet, falls der Versicherte den Zeitpunkt t erlebt und d_t die Auszahlung zur Zeit t, falls der Versicherte im Jahr $(t-1, t]$ stirbt.

e_0 ist eine sichere Auszahlung zur Zeit Null, also bei Vertragsabschluss, da $1_{\{\omega^i \in (0,\infty)\}} = 1$ für alle $\omega \in \Omega$. In den hier erwähnten Beispielen ist e_0 eine Abschlussgebühr oder ein Einmalbeitrag.

Solche Verträge existieren in Deutschland nur in den Lehrbüchern der Lebensversicherungsmathematik, nicht aber am Markt. Da Unternehmen gesetzlich verpflichtet sind, Teile ihrer Überschüsse an die Versicherungsnehmer weiterzugeben, erhöhen sich die Auszahlungen e_t und d_t um einen zufälligen Betrag. In England gibt es solche Verträge, diese werden *non-profit* Verträge genannt.

Fondsgebundene Lebensversicherungsverträge (*unit-linked*, *equity-linked* oder *variable life insurance contracts*) sind Versicherungsverträge, bei denen die Höhe der Auszahlungen vom Marktwert eines im Vertrag definierten Portfolios (typischerweise eines Investmentfonds) abhängt, siehe Persson [29].

Definition 2.2 *Der* ***allgemeine fondsgebundene Lebensversicherungsvertrag*** *mit Laufzeit T für den Versicherten i, der bei Vertragsabschluss zur Zeit $t = 0$ genau x Jahre alt ist, ist festgelegt durch*

$$V^i_{x,T,Fonds} := \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}_X \qquad e_t, d_t \in \mathbb{R} \text{ für } t \in \{0, \dots, T\}$$

wobei e_t und d_t die Anzahl der Anteile eines (und immer des selben) Fonds bezeichnen, die bei Erleben des Zeitpunktes t beziehungsweise bei Tod im Zeitintervall $(t-1, t]$ ausgezahlt werden.

Jetzt wird der *Standardvertrag* definiert, auf dessen Marktwert im Weiteren die Bewertung allgemeiner Verträge zurückgeführt wird. Der Standardvertrag ist ein reiner Erlebensfall-Vertrag mit Versicherungssumme 1 und Laufzeit $T \in \mathbb{N}$.

Definition 2.3 *Der **Standardvertrag** $E^i_{x,T}$ ist ein klassischer Vertrag mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$ für den bei Vertragsabschluss x-jährigen Versicherten i, der zur Zeit T eine Geldeinheit auszahlt, falls der Versicherte i dann noch lebt.*

$$E^i_{x,T} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Dieser Vertrag wird auch von Persson [29] und Møller [25] verwendet und dort als *pure endowment contract* bezeichnet.

Der No-Arbitrage Preis eines fondsgebundenen Vertrages wird in einem Zwischenschritt zuerst in Einheiten des Preises des unten definierten fondsgebundenen Standardvertrages ausgedrückt. In Kapitel 3.2 wird dann der fondsgebundene Standardvertrag repliziert durch ein Portfolio von Bonds, Standardverträgen und Fonds-Anteilen. Die Bewertung des fondsgebundenen Standardvertrages wird so zurückgeführt auf die Bewertung von Fonds-Anteil, Standardvertrag und Bond.

Definition 2.4 *Der **fondsgebundene Standardvertrag** $E^i_{x,T,Fonds}$ mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$ ist ein fondsgebundener Vertrag mit Laufzeit T für den bei Vertragsabschluss x-jährigen Versicherten i, der den zufälligen Wert eines Fonds-Anteils $X_T(\omega)$ zur Zeit T auszahlt, falls der Versicherte dann noch lebt.*

$$E^i_{x,T,Fonds} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

Wir definieren noch einen Vertrag, der genau dann eine Geldeinheit beziehungsweise einen Fonds-Anteil auszahlt, wenn der Versicherte im Jahr $(T-1,T]$ stirbt:

Definition 2.5

a) *Der **reine klassische Risiko-Vertrag** $D^i_{x,T}$ **für das Jahr** $(T-1,T]$ ist ein Vertrag für den bei Vertragsabschluss x-jährigen Versicherten i, der zur Zeit T eine Geldeinheit auszahlt, falls der Versicherte i im Jahr (T-1,T] stirbt.*

$$D^i_{x,T} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

b) *Der **reine fondsgebundene Risiko-Vertrag** $D^i_{x,T,Fonds}$ **für das Jahr** $(T-1,T]$ ist ein Vertrag für den bei Vertragsabschluss x-jährigen Versicherten i, der zur Zeit T einen Fonds-Anteil auszahlt, falls der Versicherte i im Jahr (T-1,T] stirbt.*

$$D^i_{x,T,Fonds} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

2.2 Der Markt für Lebensversicherungsverträge

Wir definieren jetzt den *Markt für klassische Verträge mit Laufzeit* $\leq T$ und den *Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit* $\leq T$.

Wir nehmen an, dass auf diesen Märkten der Standardvertrag zeitkontinuierlich gehandelt werden kann, für alle Versicherungsnehmer und jede ganzzahlige Laufzeit kleiner oder gleich $T \in \mathbb{N}$. Zusätzlich können noch Bonds mit ganzzahliger Laufzeit kleiner oder gleich T und auf dem *Markt für fondsgebundene Verträge* auch noch Fonds-Anteile gehandelt werden.

Es wird in Kapitel 3 bewiesen, dass unter der Annahme 3.37 beziehungsweise Annahme 3.44 jeder fondsgebundene Vertrag mit Laufzeit $\leq T$ beziehungsweise jeder klassische Vertrag mit Laufzeit $\leq T$ auf dem *Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit* $\leq T$ beziehungsweise auf dem *Markt für klassische Verträge mit Laufzeit* $\leq T$ vollständig replizierbar ist.

Weiter nehmen wir an, auf diesen Märkten gäbe es keine Arbitragemöglichkeit.

Damit ist durch den Wert der replizierenden Strategie der No-Arbitrage Preis eines klassischen beziehungsweise fondsgebundenen Vertrages zur Zeit s eindeutig festgelegt durch die Preise der Standardverträge und des Bonds sowie durch den Preis eines Fonds-Anteils im Falle fondsgebundener Verträge zur Zeit s.

Diese No-Arbitrage Preise werden in den Sätzen 3.39 und 3.47 angegeben.

Definition 2.6

a) *Auf dem* ***Markt für klassische Verträge mit Laufzeit*** $\leq T$ *werden*

   die Standardverträge $\{E^i_{x,t}\}_{i\in\mathcal{I},t\in\{0,\ldots,T\}}$ *und*
   die Bonds $\{B_t\}_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ *mit Laufzeiten aus* $\{0,\ldots,T\}$ *gehandelt.*

   Der Marktpreis von B_t *beziehungsweise von* $E^i_{x,t}$ *zur Zeit* $s \in [0,t]$ *wird mit* $B_t(s)$ *beziehungsweise mit* $E^i_{x,t}(s)$ *bezeichnet.*

b) *Auf dem* ***Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit*** $\leq T$ *werden zusätzlich noch Fonds-Anteile* X *gehandelt.*

   Der Marktpreis eines Fonds-Anteils zur Zeit $s \in [0,T]$ *wird mit* X_s *bezeichnet.*

Die auf dem Markt gehandelten Wertpapiere, d.h. im Fall a) die Standardverträge und die Bonds und im Fall b) zusätzlich noch die Fonds-Anteile werden als primary assets *bezeichnet.*

Nun nehmen wir an, dass die Preise von Standardverträgen von zur Zeit s ununterscheidbaren Versicherungsnehmern zur Zeit s gleich sind:

Annahme 2.7 *Die Preise der Standardverträge der Mitglieder einer Menge* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$ *von zur Zeit* $s \in [0,T]$ *ununterscheidbaren Versicherungsnehmern sind zur Zeit* s *gleich.*

$$E^i_{x,t}(s) = E^j_{x,t}(s) \textit{ für } i, j \in \mathcal{M}$$

Dabei enthält $\mathcal{M}$ entweder nur lebende oder nur tote Versicherungsnehmer, da lebende und tote Versicherungsnehmer immer unterscheidbar sind. Unter der No-Arbitrage Annahme sind Preise $E^i_{x,t}(s)$ gleich Null, wenn ein Versicherungsnehmer vor t stirbt. Damit gibt es zu einem Zeitpunkt höchstens so viele unterschiedliche Preise für Standardverträge, wie unterscheidbare Mengen von noch lebenden Versicherungsnehmern.

Für eine Menge von ununterscheidbaren Versicherungsnehmern $\mathcal{M}$ bezeichnen wir mit $E^{\mathcal{M}}_{x,t}(s)$ den Preis des Standardvertrages mit Laufzeit T zur Zeit s für einen Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{M}$, also: $E^{\mathcal{M}}_{x,t}(s) = E^i_{x,t}(s)$ für alle $i \in \mathcal{M}$.

Nun wollen wir, wie in der Finanzmathematik üblich, annehmen, dass auf den hier definierten Märkten keine Arbitragemöglichkeiten existieren. Die übliche Argumentation ist: Gäbe es eine Arbitragemöglichkeit, so würden Arbitrageure diese Möglichkeit so lange ausnützen, bis die Marktpreise darauf reagierten und die Arbitragemöglichkeit nicht mehr existiert.

Annahme 2.8 *Auf dem Markt für klassische Verträge und auf dem Markt für fondsgebundene Verträge existiert keine Arbitragemöglichkeit.*

Die Marktpreise der *primary assets* sind am Markt ablesbar. Eine Aufgabe der Finanzmathematik ist es, Preise oder Intervalle für Preise anzugeben, in denen die Preise von nicht am Markt gehandelten Wertpapieren liegen müssen, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden. Dafür werden die folgenden zwei Begriffe wie in Föllmer und Schied [7] Definition 5.20 eingeführt:

Definition 2.9 *Eine nicht-negative Zufallsvariable H auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt (europäischer)* ***Contingent Claim****.*

Ein Contingent Claim H heißt ***Derivat*** *der Underlyings $S^0, \ldots, S^d$, falls H messbar ist bezüglich der von den Preisprozessen $(S^j_t)_{t\in[0,T]}$ $j \in \{0, \ldots, d\}$ der Underlyings aufgespannten σ-Algebra.*

Wir benötigen in dieser Arbeit ausschließlich europäische Claims, deshalb lassen wir das Adjektiv *europäisch* weg.

Beispiel 2.10

a) *Der Vertrag* $D^i_{x,T} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$ *ist ein Derivat bezüglich $E^i_{x,T-1}$ und $E^i_{x,T}$ auf dem Markt für klassische Verträge. Sein Wert zur Zeit T ist:* $1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}} = E^i_{x,T-1}(T-1) - E^i_{x,T}(T) = 1_{\{\omega^i\in(T-1,\infty)\}} - 1_{\{\omega^i\in(T,\infty)\}}$.

b) *Der fondsgebundene Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ ist ein Derivat bezüglich X und $E^i_{x,T}$ auf dem Markt für fondsgebundene Verträge, falls $X_T(\omega) < \infty$ fast sicher. Sein Wert zur Zeit T ist $X_T(\omega)1_{\{\omega^i\in(T,\infty)\}} = X_T(\omega)E^i_{x,T}(T)$.*

2.3 Rechenregeln für Lebensversicherungsverträge

In diesem Abschnitt werden Rechenregeln für Verträge aufgestellt. Zwei Verträge werden als äquivalent bezeichnet, falls sie die gleiche Anzahl (nicht unbedingt zu den gleichen Zeitpunkten) von Bonds oder Fonds-Anteilen bei Tod beziehungsweise Erleben auszahlen. Ein No-Arbitrage Argument zeigt, dass äquivalente Verträge den selben No-Arbitrage Preis haben.

Dann wird gezeigt, dass im Fall deterministischer Zinsen ein klassischer Vertrag, der ausschließlich im Todesfall zahlt, äquivalent ist zu einem bestimmten klassischen Vertrag, der ausschließlich im Erlebensfall zahlt.

Mit dieser Methode und dem genannten No-Arbitrage Argument wird der Wert von klassischen Verträgen bei deterministischem Zins auf die Werte von Standardverträgen reduziert und der Wert von fondsgebundenen Verträgen auf die Werte von fondsgebundenen Standardverträgen.

Ein analoges Resultat für klassische Verträge bei stochastischem Zinsen wird in Kapitel 3.3.2 hergeleitet.

Der No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages lässt sich ausdrücken durch den Marktpreis des zugehörigen Standardvertrages, den Marktpreis eines Bonds mit gleicher Laufzeit und den Marktpreis eines Fonds-Anteils. Dieser Ausdruck und die Herleitung finden sich in Kapitel 3.2.2.

Definition 2.11 *Für den allgemeinen klassischen Vertrag $V^i_{x,T}$*

$$V^i_{x,T} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

definieren wir für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ***das Vielfache des Vertrages*** *$V^i_{x,T}$ als*

$$\lambda V^i_{x,T} := \begin{bmatrix} \lambda e_0 & \lambda e_1 & \dots & \lambda e_T \\ - & \lambda d_1 & \dots & \lambda d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Für zwei klassische Verträge $V^i_{x,T_1,1}$ und $V^i_{x,T_2,2}$ für den selben Versicherungsnehmer i und mit Laufzeiten $T_1 \leq T_2$, die beide zur selben Zeit $t = 0$ abgeschlossen werden

$$V^i_{x,T_j,j} = \begin{bmatrix} e^j_0 & e^j_1 & \dots & e^j_{T_j} \\ - & d^j_1 & \dots & d^j_{T_j} \end{bmatrix}^{i,x,T_j} \qquad j = 1,2$$

definieren wir die ***Summe zweier Verträge*** *als*

$$V^i_{x,T_1,1} + V^i_{x,T_2,2} := \begin{bmatrix} e^1_0 + e^2_0 & e^1_1 + e^2_1 & \dots & e^1_{T_1} + e^2_{T_1} & e^2_{T_1+1} & \dots & e^2_{T_2} \\ - & d^1_1 + d^2_1 & \dots & d^1_{T_1} + d^2_{T_1} & d^2_{T_1+1} & \dots & d^2_{T_2} \end{bmatrix}^{i,x,T_2}$$

Genauso wird das Vielfache eines fondsgebundenen Vertrages und die Summe von zwei fondsgebundenen Verträgen definiert.

Bemerkung 2.12 *Damit ist die Summe von zwei zur selben Zeit abgeschlossenen klassischen (fondsgebundenen) Verträgen wieder ein klassischer (fondsgebundener) Vertrag. Das Vielfache eines klassischen (fondsgebundenen) Vertrages ist wieder ein klassischer (fondsgebundener) Vertrag. Damit bildet die Menge aller zur selben Zeit abgeschlossenen Verträge für den Versicherungsnehmer i mit der oben definierten Addition und der oben definierten Skalarmultiplikation einen Vektorraum.*

Die folgenden Überlegungen gelten für einen festen Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$, der bei Vertragsabschluss x Jahre alt ist.

Asset wird abkürzend für *Fonds-Anteil* oder *Bond mit Laufzeit T* benutzt.

Definition 2.13 *Eine **Null-Handelsstrategie** H ist ein Vektor*
$H(\omega) := \left[\begin{array}{ccc} h_0(\omega) & \dots & h_T(\omega) \end{array} \right]_{Asset}^T$ *mit* h_t *ist* $\mathcal{F}_t$*-messbar für* $t \in \{0, \dots, T\}$ *und*
$\sum\limits_{t=0}^{T} h_t(\omega) = 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$.

h_t gibt an, wie viele Einheiten des Assets zur Zeit t ge- beziehungsweise verkauft werden.

Wir definieren nun die Auszahlung eines Vertrages und einer Null-Handelsstrategie so wie die Auszahlung der Summe von beiden als Zufallsvektoren auf $(\Omega, \mathcal{F})$:

Definition 2.14

a) *Die **Auszahlung** des allgemeinen klassischen Vertrages* $V_{x,T}^i$ *ist definiert als:*
   $Auszahlung(V_{x,T}^i)_t(\omega^i) = e_t 1_{\{\omega^i \in (t,\infty)\}} + d_t 1_{\{\omega^i \in (t-1,t]\}}$ *für* $t \in \{0, \dots, T\}$.

b) *Die **Auszahlung** des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages* $V_{x,T,Fonds}^i$ *ist definiert als:*
   $Auszahlung(V_{x,T,Fonds}^i)_t(\omega) = e_t X_t(\omega) 1_{\{\omega^i \in (t,\infty))\}} + d_t X_t(\omega) 1_{\{\omega^i \in (t-1,t]\}}$ *für* $t \in \{0, \dots, T\}$.

c) *Die **Auszahlung** einer Null-Handelsstrategie H ist definiert als:*
   $Auszahlung(H)_t(\omega) := h_t(\omega) Asset(t)(\omega)$

d) $Auszahlung(H + V_{x,T}^i) := Auszahlung(H) + Auszahlung(V_{x,T}^i)$.

Dabei steht $X_t(\omega)$ für den Wert eines Fonds-Anteils zur Zeit t, $Asset(t)(\omega)$ bezeichnet den Wert des Assets zur Zeit t wenn ω eintritt.

Definition 2.15 *Zwei Verträge* $V_{x,T,1}^i$ *und* $V_{x,T,2}^i$ *heißen **äquivalent**,* $V_{x,T,1}^i \sim V_{x,T,2}^i$*, falls es eine Null-Handelsstrategie H gibt so, dass gilt:* $Auszahlung(V_{x,T,1}^i + H) = Auszahlung(V_{x,T,2}^i)$.

Äquivalente Verträge zahlen die gleiche *Anzahl* von Assets aus, nur zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Falls das Unternehmen die Assets zum Zeitwert auszahlt, spielt der Auszahlungszeitpunkt für das Unternehmen keine Rolle, falls die Assets geeignet gehandelt werden.

Lemma 2.16 *In einem Markt mit deterministischem Zins sind die beiden klassischen Verträge*

$$D^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

und

$$B_T(T-1)E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & B_T(T-1) & -1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

äquivalent.

Im Markt mit deterministischem Zins ist $B_T(T-1)$ zur Zeit $t=0$ bekannt.

Beweis:

Der Vertrag $D^i_{x,T}$ zahlt zur Zeit T eine Geldeinheit, falls der Versicherungsnehmer i im Zeitintervall $(T-1, T]$ stirbt.

Der Vertrag $B_T(T-1)E^i_{x,T-1}$ zahlt $B_T(T-1)$ Geldeinheiten zur Zeit $T-1$, falls der Versicherungsnehmer i den Zeitpunkt $T-1$ erlebt. Erlebt der Versicherungsnehmer auch noch den Zeitpunkt T, so muss er wegen dem Vertrag $-E^i_{x,T}$ das erhaltene Geld verzinst wieder zurückzahlen. Stirbt er zwischen $T-1$ und T, so muss er das Geld nicht zurückzahlen. Er erhält also zur Zeit T genau dann eine Geldeinheit, wenn er zwischen $T-1$ und T stirbt.

Formal:

Wir definieren eine Null-Handelsstrategie H:

$H(\omega) := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1_{\{\omega^i \in (T-1,\infty)\}} & 1_{\{\omega^i \in (T-1,\infty)\}} \end{bmatrix}^T_{B_T}$

Mit dieser Null-Handelsstrategie gilt:

$Auszahlung(B_T(T-1)E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T} + H)_t = Auszahlung(D^i_{x,T})_t = 0$

für $t \in \{0, \dots, T-2\}$ und alle ω.

$Auszahlung(B_T(T-1)E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T} + H)_{T-1}$
$= B_T(T-1)1_{\omega^i \in (T-1,\infty)} - B_T(T-1)1_{\omega^i \in (T-1,\infty)}$
$= Auszahlung(D^i_{x,T})_{T-1} = 0$

für alle ω.

$Auszahlung(B_T(T-1)E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T} + H)_T = -1_{\omega^i \in (T,\infty)} + 1_{\omega^i \in (T-1,\infty)} \underbrace{B_T(T)}_{=1}$

$= 1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}} = Auszahlung(D^i_{x,T})_T$ □

Bemerkung 2.17 *Im Markt mit stochastischem Zins gilt die Aussage von Lemma 2.16 nicht, da dann $B_T(T-1)$ zur Zeit $t=0$ unbekannt ist. Zufällige Eintragungen sind in klassischen Lebensversicherungsverträgen nicht zugelassen: $B_T(T-1)E^i_{x,T-1}$ ist kein klassischer Lebensversicherungsvertrag mehr, wenn $B_T(T-1)$ zufällig ist. Eine $\mathcal{F}_0$-messbare Schätzung für $B_T(T-1)$ ist $\frac{B_T(0)}{B_{T-1}(0)}$. Kapitel 3.3.2 zeigt, dass bei zeitkontinuierlichem Handeln die beiden Verträge $D^i_{x,T}$ und $\frac{B_T(0)}{B_{T-1}(0)}E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T}$ den selben No-Arbitrage Preis haben müssen, unter der zusätzlichen Annahme 3.44.*

Lemma 2.18 *Die beiden fondsgebundenen Verträge mit Fonds X*

$$D^i_{x,T,Fonds} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

und

$$E^i_{x,T-1,Fonds} - E^i_{x,T,Fonds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

sind äquivalent.

Der **Beweis** verläuft analog zum klassischen Fall:

$H := \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1_{\{\omega^i \in (T-1,\infty)\}} & 1_{\{\omega^i \in (T-1,\infty)\}} \end{bmatrix}^T_X$

Dann gilt wie oben:

$Auszahlung(E^i_{x,T-1,Fonds} - E^i_{x,T,Fonds} + H)_t = Auszahlung(D^i_{x,T,Fonds})_t = 0$

für alle $t \in \{0,\dots,T-2\}$ und alle ω.

$Auszahlung(E^i_{x,T-1,Fonds} - E^i_{x,T,Fonds} + H)_{T-1} = Auszahlung(D^i_{x,T,Fonds})_{T-1} = 0$

für alle ω.

$Auszahlung(E^i_{x,T-1,Fonds} - E^i_{x,T,Fonds} + H)_T = Auszahlung(D^i_{x,T,Fonds})_T$
$= X_T(\omega)1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}}$

□

Lemma 2.19 *Äquivalente Verträge haben den selben Preis, sonst ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit.*

Beweis:

Sei $V^i_{x,T,1} \sim V^i_{x,T,2}$ und H eine Null-Handelsstrategie mit $Auszahlung(V^i_{x,T,1} + H) = Auszahlung(V^i_{x,T,2})$. Diese existiert nach Definition 2.15.

Ist Preis($V^i_{x,T,1}$) > (<) Preis($V^i_{x,T,2}$), dann ergibt sich folgende Arbitragemöglichkeit:

(Ver-) Kaufe $V^i_{x,T,2}$, verkaufe (kaufe) $V^i_{x,T,1}$ und handle Assets nach der Null-Handelsstrategie. Zur Zeit Null entsteht ein sicherer Gewinn in Höhe von Preis($V^i_{x,T,1}$)− Preis($V^i_{x,T,2}$) (Preis($V^i_{x,T,2}$)− Preis($V^i_{x,T,1}$)), zu allen späteren Zeitpunkten entsteht weder Gewinn noch Verlust. □

Satz 2.20 *Im Fall deterministischer Zinsen ist der allgemeine klassische Vertrag*

$$V_{x,T}^i = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T} \qquad e_t, d_t \in \mathbb{R} \textit{ für } t \in \{0, \dots, T\}$$

äquivalent zu der Linearkombination

$$(e_0 + d_1 B_1(0))E_{x,0}^i + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1}B_{t+1}(t) - d_t)E_{x,t}^i + (e_T - d_T)E_{x,T}^i$$

von Standardverträgen mit Laufzeiten aus $\{0, \dots, T\}$.

Beweis: Wir verwenden in der 2. Zeile das Lemma 2.16.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T} &= \sum_{t=0}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & e_t \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,t} + \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & d_t \end{bmatrix}^{i,x,t} \\
&\sim \sum_{t=0}^{T} e_t E_{x,t}^i + \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_t B_t(t-1) & -d_t \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,t} \\
&= \sum_{t=0}^{T} e_t E_{x,t}^i + \sum_{t=1}^{T} d_t B_t(t-1) E_{x,t-1}^i + \sum_{t=1}^{T} -d_t E_{x,t}^i \\
&= (e_0 + d_1 B_1(0))E_{x,0}^i + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1}B_{t+1}(t) - d_t)E_{x,t}^i \\
&\quad +(e_T - d_T)E_{x,T}^i \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.21 *Im Fall deterministischer Zinsen lässt sich die Bewertung des allgemeinen klassischen Vertrages reduzieren auf die Bewertung von Standardverträgen.*
Es ist

$$(e_0 + B_1(0)d_1)E_{x,0}^i(0) + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + B_{t+1}(t)d_{t+1} - d_t)E_{x,t}^i(0) + (e_T - d_T)E_{x,T}^i(0)$$

der No-Arbitrage Preis des allgemeinen klassischen Vertrages $V_{x,T}^i$ *im Markt mit deterministischen Zinsen zur Zeit* $t = 0$.

Beweis: Die äquivalenten Verträge aus Satz 2.20 haben mit Lemma 2.19 den selben Preis.
□

Satz 2.22 *Der allgemeine fondsgebundene Vertrag ist äquivalent zu der Linearkombination*

$$(e_0 + d_1)E^i_{x,0,Fonds} + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1} - d_t)E^i_{x,t,Fonds} + (e_T - d_T)E^i_{x,T,Fonds}$$

von fondsgebundenen Standardverträgen mit Laufzeiten aus $\{0, \ldots, T\}$.

Der **Beweis** verläuft analog zu dem Beweis von Satz 2.20. Er verwendet das Lemma 2.18 anstelle des Lemmas 2.16.

□

Korollar 2.23 *Die Bewertung von fondsgebundenen Verträgen lässt sich reduzieren auf die Bewertung von fondsgebundenen Standardverträgen.*

Bezeichnet $E^i_{x,t,Fonds}(0)$ *den Preis des fondsgebundenen Standardvertrages* $E^i_{x,t,Fonds}$ *mit Laufzeit* $t \in \{0, \ldots, T\}$ *zur Zeit* $t = 0$, *dann ist*

$$(e_0 + d_1)E^i_{x,0,Fonds}(0) + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1} - d_t)E^i_{x,t,Fonds}(0) + (e_T - d_T)E^i_{x,T,Fonds}(0)$$

der No-Arbitrage Preis des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages zur Zeit $t = 0$.

Beweis: Die äquivalenten Verträge aus Satz 2.22 haben mit Lemma 2.19 den selben Preis.

□

2.4 Der Preisprozess des Standardvertrages

In diesem Kapitel werden Überlegungen zu dem Preisprozess des Standardvertrages angestellt. Wie würde der Preisprozess aussehen, wenn der Standardvertrag auf einem Markt gehandelt würde?

Unter zwei unterschiedlichen Annahmen wird in Lemma 2.26 und Lemma 2.28 der Preis des Standardvertrages hergeleitet.

Zuerst werden ein paar einfache Eigenschaften des Preisprozesses aufgeführt, die unter der No-Arbitrage Annahme gelten:

Lemma 2.24 *Es bezeichne* $i \in \mathcal{I}$ *einen Versicherungsnehmer,* $t, t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ *Laufzeiten von Verträgen und* $s \in [0, t]$ *einen Zeitpunkt.*

Der Preisprozess des Standardvertrages hat dann auf den in Abschnitt 2.2 definierten Märkten unter der No-Arbitrage Annahme und bei nicht-negativem Zins folgende einfache Eigenschaften:

1. *$E^i_{x,t}(s) = 0$ für $\omega^i \leq s \leq t$, $s \in [0,t]$.*
   Der Preis des Standardvertrages zur Zeit $s \leq t$ ist Null, falls der Versicherungsnehmer vor s stirbt.

2. *$E^i_{x,t_1}(s) \geq E^i_{x,t_2}(s)$ für $t_2 > t_1$, $s \in [0,t_1], t_1 \in \{0,\ldots,t_2-1\}$*
   Je später die Auszahlung, desto billiger der Standardvertrag.

3. *$E^i_{x,t}(s) \in [0,1]$ für $s \in [0,t]$*
   Der Preis des Standardvertrages liegt zwischen Null und Eins.

4. *$E^i_{x,t}(t) = 1_{\{\omega^i > t\}}$.*
   Wenn zum Ablaufzeitpunkt des Standardvertrages der Versicherte nicht mehr lebt, ist dessen Wert Null, sonst Eins.

Beweis:

1. Gilt $E^i_{x,t}(s) > (<) 0$ für $\omega^i \leq s \leq t$ so ist: *Verkaufe (kaufe) diesen Standardvertrag* eine Arbitragemöglichkeit, da dieser Vertrag in Zukunft zu keiner Auszahlung führen wird.

2. Wenn nicht, dann ist *kaufe E^i_{x,t_1} und verkaufe E^i_{x,t_2} und lege die Auszahlung $E^i_{x,t_1}(t_1)$ zwischen t_1 und t_2 zu einem nicht-negativen Zins an, um damit E^i_{x,t_2} auszahlen zu können, falls der Versicherungsnehmer noch bis t_2 lebt* eine Arbitragemöglichkeit.

3. Gilt $E^i_{x,t}(t) < 0$ ($E^i_{x,t}(t) > 1$), so ist *kaufe (verkaufe) diesen Standardvertrag* eine Arbitragemöglichkeit bei nicht-negativem Zins, da die Auszahlung nie höher als Eins oder niedriger als Null sein kann.

4. Gilt $E^i_{x,t}(t) > (<) 1_{\{\omega^i > t\}}$ dann ist *verkaufe (kaufe) $E^i_{x,t}$* zur Zeit t eine Arbitragemöglichkeit.

□

Wir treffen nun eine Aussage über den Preis des Standardvertrages unter der Annahme, dass ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$ bekannt ist. Diese Annahme könnte für kurze Laufzeiten $t-s$ akzeptiert werden, wenn die aus den Sterbetafeln berechneten Werte für ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$ hinreichend genau sind.

Annahme 2.25 *Für ein $t \in \mathbb{N}$ und für Mengen $\mathcal{M}(I)$ von zur Zeit $s \in [0,t]$ lebenden und ununterscheidbaren Versicherungsnehmern mit $|\mathcal{M}(I)| \to \infty$ für $I \to \infty$ gilt:*

${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$ ist zur Zeit $s \in [0,t]$ bekannt.

Lemma 2.26 *Unter den Annahmen 2.25, 2.7 und der No-Arbitrage Annahme gilt für alle $i \in \mathcal{M}$:*

$$E^i_{x,t}(s) = B_t(s)_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s} \text{ für } s \in [0,t].$$

Der Preis des Standardvertrages zur Zeit s für einen Versicherungsnehmer i aus $\mathcal{M}$ ist die diskontierte Auszahlung multipliziert mit ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$.

Beweis:

Angenommen, (*) $E^i_{x,t}(s) \neq B_t(s)_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$ für ein $s \in [0,t]$ und ein $i \in \mathcal{M}$.
Damit gilt (*) nach Annahme 2.7 für alle Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{M}$ mit $\omega^i > s$, da diese ununterscheidbar sind und die Preise von Verträgen ununterscheidbarer Versicherungsnehmer nach Annahme gleich sind.

Dann können zur Zeit s zwei Portfolios konstruiert werden, die zur Zeit t für $I \to \infty$ beide fast sicher die Auszahlung ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}$ haben:

1. ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}B_t$
2. $\frac{1}{|\mathcal{M}(I)|} \sum\limits_{i \in \mathcal{M}(I)} E^i_{x,t}$

Haben die beiden Portfolios zu einer Zeit $s \leq t$ nicht den gleichen Preis, so ist *verkaufe das teurere und kaufe das billigere* eine Arbitragemöglichkeit.

Also haben beide Portfolios zur Zeit s den selben Preis ${}_{t-s}p^{\mathcal{M}}_{x+s}B_t(s)$. Dieser ist nach Annahme 2.25 zur Zeit s bekannt.

□

In der Vergangenheit konnten die ${}_tp_x$ für kleine t sehr genau geschätzt werden. Für große Mengen von vergleichbaren Versicherungsnehmern ändert sich der Anteil derer, die in einem Jahr sterben, nur wenig von Jahr zu Jahr.

Prognosen über die Sterblichkeit in entfernter Zukunft (ab 10 Jahre) waren allerdings selten genau, so dass man für große t nicht annehmen möchte, dass die ${}_tp_x$ bekannt seien. Trotzdem werden Prognosen über die Sterblichkeit in weiter entfernter Zukunft benötigt, wenn zum Beispiel Rentenverträge an heute 30 jährige Versicherungsnehmer verkauft werden. Für Standardverträge mit langer Laufzeit ist damit der Preis aus Lemma 2.26 ungeeignet.

Nun treffen wir eine Aussage über den Preis des Standardvertrages unter der für lange Laufzeiten realistischeren Annahme, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten unbekannt und geschätzt sind. Die Idee dabei ist folgende: Wir bezeichnen mit $\hat{P}$ ein geschätztes Maß für die Restlebensdauern. Dann können nicht sowohl die Standardverträge $E^i_{x,t}$ als auch die reinen Todesfallverträge $D^i_{x,t}$ mit $t \in \{0,\ldots,T\}$ für ein $T \in \mathbb{N}$ einen Preis haben, der höher als die diskontierte erwartete Auszahlung ist, wenn der Erwartungswert mit $\hat{P}$ berechnet wird. Nimmt man an, dass ihre Preise nicht niedriger sind als die erwartete diskontierte Auszahlung, so müssen sie gleich der erwarteten diskontierten Auszahlung sein. Diese Annahme klingt plausibel, da sicherlich niemand bereit ist, einen Vertrag zu einem Preis zu verkaufen, der niedriger ist die diskontierte erwarte Auszahlung. Ein Problem daran könnte allerdings sein, dass deutlich mehr Erlebensfall-Verträge mit langer Laufzeit (Rentenverträge) verkauft werden, als Todesfallverträge mit langer Laufzeit.

Annahme 2.27 *Sei $T \in \mathbb{N}$ die Laufzeit eines Vertrages und $t \in [0,T]$. Dann gilt:*

a) Es wird für jedes T mindestens ein Vertrag $D^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ - & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$ am Markt *gehandelt.*

b) *Es existiert ein Maß* $\hat{P}^i$*, das* P^i *schätzt, d.h.* $\hat{P}^i(\omega^i \leq t)$ *ist eine Schätzung für* $P^i(\omega^i \leq t)$*, mit den Eigenschaften:*

i) $D^i_{x,T}(t) \geq B_T(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}}|\mathcal{F}_t)$

ii) $E^i_{x,T}(t) \geq B_T(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i \in (T,\infty)]\}}|\mathcal{F}_t)$

Die Preise der Verträge $E^i_{x,T}$ *und* $D^i_{x,T}$ *sind mindestens so hoch wie die mit* $\hat{P}$ *geschätzten, diskontierten Auszahlungen.*

Dabei bezeichnet $\mathbb{E}_{\hat{P}^i}$ den Erwartungswert bezüglich $\hat{P}^i$.

Lemma 2.28 *Unter der Annahme 2.27 und der No-Arbitrage-Annahme ist der Preis des Standardvertrages bei deterministischem Zins zur Zeit* $t \leq T$

$$E^i_{x,T}(t) = B_T(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i \in (T,\infty)\}}|\mathcal{F}_t)$$

die diskontierte, mit $\hat{P}$ *erwartete Auszahlung.*

Die selbe Aussage gilt bei stochastischem Zins unter der zusätzlichen Annahme 3.44.

Beweis:

Zuerst betrachten wir den Fall, dass der Versicherungsnehmer i schon vor t gestorben ist:

Auf $\{\omega^i \leq t\}$ gilt:
$E^i_{x,T}(t) = 0$ nach 1. in Lemma 2.24 und daraus folgt nach Annahme 2.27 b) ii):
$\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i \in (T,\infty)\}}|\mathcal{F}_t) = 0$
So dass auf $\{\omega^i \leq t\}$ die Aussage des Lemmas erfüllt ist.

Sei nun $\omega^i > t$, das heißt der Versicherungsnehmer i lebt zum Zeitpunkt t noch.

Bei deterministischem Zins gilt:

$$(*)\ D^i_{x,T}(t) = \begin{cases} \frac{B_T(t)}{B_{T-1}(t)} E^i_{x,T-1}(t) - E^i_{x,T}(t) & \text{für } t \leq T-1 \\ B_T(t) - E^i_{x,T}(t) & \text{für } t \in (T-1,T] \end{cases}$$

nach Lemma 2.16 in Kapitel 2.3, da bei deterministischem Zins gilt: $\frac{B_T(t)}{B_{T-1}(t)} = B_T(T-1)$.

Bei stochastischem Zins gilt (*) nach Lemma 3.45 in Kapitel 3.3.2.

Unter der Annahme 2.27 kann nicht in *i)* oder in *ii)* *echt größer* stehen, wegen (*).
Diese Aussage folgt durch Induktion über T.

Sei $T = 1$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{array}{rcl} & & B_1(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(0,1]\}}|\mathcal{F}_t) \\ \text{nach Annahme 2.27, b) i)} & \leq & D^i_{x,1}(t) \\ \text{nach (*)} & = & \begin{cases} \frac{B_1(t)}{B_0(t)}E^i_{x,0}(t) - E^i_{x,1}(t) & \text{für } t=0 \\ B_1(t) - E^i_{x,1}(t) & \text{für } t\in(0,1] \end{cases} \\ (B_0(0)=1, E^i_{x,0}(0)=1) & = & B_1(t) - E^i_{x,1}(t) \\ \text{nach Annahme 2.27, b)} & \leq & B_1(t) - B_1(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(1,\infty)\}}|\mathcal{F}_t) \\ & = & B_1(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\omega^i\in(0,1]}|\mathcal{F}_t) \end{array}$$

Also gilt überall Gleichheit und damit: $E^i_{x,1}(t) = B_1(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(1,\infty)\}}|\mathcal{F}_t)$ für $t\in[0,1]$.
Gelte nun die Induktionsvoraussetzung:
$E^i_{x,k-1}(t) = B_{k-1}(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k-1,\infty)\}}|\mathcal{F}_t)$ für $t\in[0,k-1]$. Dann gilt für $T=k$:

$$\begin{array}{rcl} & & B_k(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k-1,k]\}}|\mathcal{F}_t) \\ \text{nach Annahme 2.27, b) i)} & \leq & D^i_{x,k}(t) \\ \text{nach (*)} & = & \begin{cases} \frac{B_k(t)}{B_{k-1}(t)}E^i_{x,k-1}(t) - E^i_{x,k}(t) & \text{für } t\leq k-1 \\ B_T(t) - E^i_{x,k}(t) & \text{für } t\in(k-1,k] \end{cases} \\ \text{nach Induktionsvoraussetzung:} & = & \begin{cases} \frac{B_k(t)}{B_{k-1}(t)}B_{k-1}(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(x+k-1,\infty)\}}|\mathcal{F}_t) - E^i_{x,k}(t) \\ \text{für } t\leq k-1 \\ B_T(t) - E^i_{x,k}(t) \\ \text{für } t\in(k-1,k] \end{cases} \\ \text{nach Annahme 2.27, b)} & \leq & B_k(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k-1,\infty)\}}|\mathcal{F}_t) - B_k(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k,\infty)\}}|\mathcal{F}_t) \\ & = & B_k(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k-1,k]\}}|\mathcal{F}_t) \end{array}$$

$$\Rightarrow E^i_{x,k}(t) = B_k(t)\mathbb{E}_{\hat{P}^i}(1_{\{\omega^i\in(k,\infty)\}}|\mathcal{F}_t)$$

□

Kapitel 3

Hedgen und Bewerten von Lebensversicherungsverträgen

In diesem Kapitel wird:

1. *Risikominimierendes Hedgen*, wie von Föllmer und Sondermann [9] und Schweizer [34] eingeführt, erklärt.
2. Diese Theorie angewendet auf den fondsgebundenen Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ aus Kapitel 2.1.
3. Diese Theorie angewendet auf den reinen Todesfallvertrag $D^i_{x,T}$ für das Jahr $(T-1, T]$ aus Kapitel 2.1.

In diesem Kapitel werden die No-Arbitrage Preise für den allgemeinen fondsgebundenen und den allgemeinen klassischen Vertrag hergeleitet. Dabei wird mit dem fondsgebundenen Vertrag begonnen, da dessen Behandlung eher einfacher ist, als die des klassischen Vertrages. Das Anlagerisiko wird beim fondsgebundenen Vertrag auf den Versicherungsnehmer übertragen, beim klassischen Vertrag liegt es bei dem Versicherungsunternehmen.

Diese No-Arbitrage Preise werden Linearkombinationen der Marktpreise der am Markt gehandelten Wertpapiere sein. Wir nennen dies: *Den No-Arbitrage Preis der allgemeinen Verträge in Einheiten der Preise der am Markt gehandelten Wertpapiere ausdrücken.*

Die No-Arbitrage Preise werden damit nicht in Geldeinheiten ausgedrückt. Die Bewertung der am Markt gehandelten Wertpapiere, d.h. der Fonds-Anteile, der Bonds und der Standardverträge, übernimmt der Markt. Unter ihrem Wert wird ihr Marktwert verstanden.

In Kapitel 2.3 Korollar 2.23 wurde der No-Arbitrage Preis des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages in Einheiten der Preise von fondsgebundenen Standardverträgen angegeben. Dieser fondsgebundene Standardvertrag wird in Abschnitt 3.2.2 durch Bonds, Fonds-Anteile und Standardverträge repliziert. Mit diesem Ergebnis und Korollar 2.23 wird dann unter Annahme 3.37 der No-Arbitrage Preis des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages in Satz 3.39 angegeben.

In Kapitel 3.3.2 wird der reine Todesfallvertrages $D^i_{x,T}$ für das Jahr $(T-1,T]$ durch Bonds und Standardverträge repliziert. Mit diesem Ergebnis wird dann unter der Annahme 3.44 in Satz 3.47 der No-Arbitrage Preis des allgemeinen klassischen Vertrages angegeben.

Könnten Standardverträge, Bonds und Fonds-Anteile ohne Transaktionskosten und zeitkontinuierlich gehandelt werden, dann müssten unter der Annahme 3.37 beziehungsweise 3.44 fondsgebundene beziehungsweise klassische Verträge zu den hier angegebenen No-Arbitrage Preisen gehandelt werden, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden.

3.1 Risikominimierendes Hedgen

Ein Unternehmen verkauft einen Claim mit Auszahlung H im Sinne von Definition 2.9.

Hedgen (oder Absichern) bezeichnet den Vorgang des Handelns von Wertpapieren in einer Weise, die die zufälligen *Ergebnisse* (= Gewinne beziehungsweise Verluste) aus dem Verkauf des Claims in gewissem Sinne reduziert.

Bewerten bezeichnet das Zuweisen eines Preises, für den das Unternehmen bereit ist, den Claim zu verkaufen. (Nach Schweizer [34], Seite 542).

Ist der Claim H replizierbar durch die am Markt gehandelten Wertpapiere, d.h. gibt es eine Möglichkeit, die am Markt gehandelten Wertpapiere selbstfinanzierend so zu handeln, dass sie zur Zeit T genau die selbe Auszahlung wie der Claim liefern, dann muss der Preis des Claims gleich dem Preis der replizierenden Strategie sein, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden. Der Preis des Claims kann dann durch die Preise der am Markt gehandelten Wertpapiere ausgedrückt werden. In diesem Fall ist allerdings der Claim, mit den Worten von Hakansson [12], "*perfectly redundant*". Der Claim wird nicht gebraucht, da bereits die auf dem Markt gehandelten Wertpapiere die selbe Auszahlung liefern können.

Ist H nicht replizierbar, so bleibt, egal wie gehandelt wird, ein inhärentes Risiko (*intrinsic risk*). Welches inhärente Risiko (also welche zufälligen Ergebnisse) minimal oder optimal ist, ist nicht objektiv beschreibbar. Subjektiv wird ein Risiko gemessen mit einem Risikomaß oder einer Nutzenfunktion. Optimal bezüglich eines bestimmten Risikomaßes oder einer bestimmten Nutzenfunktion ist dann ein Hedge, der das Risiko gemessen mit dem Risikomaß minimiert beziehungsweise den Nutzen gemessen mit der Nutzenfunktion maximiert.

Föllmer und Sondermann schlagen in [9] vor, in gewissem Sinne varianzminimal zu hedgen und nennen solche Hedgingstrategien *risikominimierend* (*risk-minimizing*). Diese Theorie wurde von Schweizer weiterentwickelt und in [34] erklärt. Die folgenden Kapitel orientieren sich an Föllmer und Schied [7] Kapitel 10, dort wird lokal risikominimierendes Hedgen im Diskreten erklärt, an Föllmer und Schweizer [8], dort wird risikominimierendes Hedgen im Diskreten erklärt, und an Schweizer [34], dort wird risikominimierendes und lokal risikominimierendes Hedgen im Zeitkontinuierlichen erklärt.

3.1.1 Zeitdiskretes Hedgen

Ein Markt heißt *vollständig* genau dann, wenn es für jedes Derivat im Sinne von Definition 2.9 eine selbstfinanzierende Handelsstrategie gibt, die die selbe Auszahlung wie das Derivat liefert. So eine Strategie heißt dann *replizierend*. Ist das gewählte Marktmodell unvollständig, so gibt es Derivate, für die sich kein Hedge finden lässt, der sowohl selbstfinanzierend ist als auch die selbe Auszahlung wie das Derivat liefert.

Eine *risikominimierende Strategie* für ein Derivat ist eine Handelsstrategie, die zwar die selbe Auszahlung wie das Derivat liefert, nicht aber selbstfinanzierend ist. Im Gegensatz dazu wird als *varianzoptimaler Hedge* eine Handelsstrategie bezeichnet, die selbstfinanzierend ist, nicht aber die selbe Auszahlung liefert. Dabei soll die Varianz der Differenz zwischen Auszahlung des Hedges und Auszahlung des Derivates minimiert werden, siehe Föllmer und Schied [7] Kapitel 10.3.

Wir erläutern nun risikominimierendes Hedgen, wie es in dem Abschnitt 3.2.1 angewendet wird, um einen in diesem Sinne optimalen Hedge für den fondsgebundenen Standardvertrag zu finden.

Die im Folgenden verwendeten Handelsstrategien sind nicht selbstfinanzierend. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erfolgt eine Anfangsinvestition, zu allen weiteren Handelszeitpunkten kann weiteres Geld in den Hedge investiert werden oder aus dem Hedge entnommen werden. Damit kann zum Zeitpunkt $t = T$ genau so viel Geld in den Hedge investiert werden, dass der Hedge genau so viel wert ist, wie das Derivat auszahlt.

Wir führen nun einen Hilfsmarkt ein, anhand dessen das risikominimierende Hedgen im Diskreten erläutert wird. Die Assets dieses Hilfsmarktes werden als diskrete stochastische Prozesse auf einem Hilfs-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, (\mathcal{F}_t^+)_{t\in\{0,\ldots,T\}}, P^+)$ modelliert. Das $+$ wird zur Unterscheidung von dem in Kapitel 1 eingeführten Wahrscheinlichkeitsraum verwendet.

Dieser Markt wird in den folgenden Kapiteln durch die dann passenden Märkte ersetzt.

Definition 3.1 *Auf dem in diesem Kapitel verwendeten* ***diskreten Hilfsmarkt*** *werden d+1 Asset $X^0, X^1, \ldots, X^d$ zu den Handelszeitpunkten $t \in \{0, \ldots, T\}$ gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $X_t^0, \ldots, X_t^d$, die mit X^0 diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $\hat{X}_t^0 = \frac{X_t^0}{X_t^0} = 1$, $\hat{X}_t^1 = \frac{X_t^1}{X_t^0}, \ldots, \hat{X}_t^d = \frac{X_t^d}{X_t^0}$ für $t \in \{0, \ldots, T\}$ bezeichnet.

Die Preisprozesse werden als adaptierte diskrete stochastische Prozesse auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, (\mathcal{F}_t^+)_{t\in\{0,\ldots,T\}}, P^+)$ modelliert.

X^0 mit $X_t^0 > 0$ für alle $t \in \{0, \ldots, T\}$ wird als Numeraire bezeichnet.

Abkürzend bezeichnet $\hat{X}_t := \begin{pmatrix} \hat{X}_t^1 \\ \vdots \\ \hat{X}_t^d \end{pmatrix}$ für $t \in \{0, \ldots, T\}$.

Die folgende Definition entstammt dem Buch von Föllmer und Schied [7], Kapitel 10. Im Anschluss an die Definition wird deren Interpretation angegeben.

Definition 3.2

a) *Eine* ***verallgemeinerte Handelsstrategie*** *ist ein Paar von zwei stochastischen Prozessen* (η, ξ) *mit den Eigenschaften:*

   i) $\eta = (\eta_t)_{t \in \{0,\dots,T\}}$ *ist ein 1-dimensionaler adaptierter und*

   ii) $\xi = (\xi_t)_{t \in \{1,\dots,T\}}$ *ist ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess.*

b) *Der diskontierte* ***Wertprozess*** $\hat{V}$ *von* (η, ξ) *ist definiert als* $\hat{V}_0(\eta, \xi) := \eta_0$ *und* $\hat{V}_t(\eta, \xi) := \eta_t + \xi_t' \hat{X}_t$*. Dabei steht* ξ' *für* ξ*-transponiert.*

c) *Der diskontierte* ***Gewinnprozess*** $\hat{G}$ *einer verallgemeinerten Handelsstrategie* (η, ξ) *ist gegeben durch:* $\hat{G}_0(\eta, \xi) := 0$ *und* $\hat{G}_t(\eta, \xi) := \sum\limits_{k=1}^{t} \xi_k'(\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1})$ *für* $t \in \{1, \dots, T\}$

d) *Der diskontierte* ***Kostenprozess*** $\hat{C}$ *der verallgemeinerten Handelsstrategie* (η, ξ) *ist definiert als:* $\hat{C}_t(\eta, \xi) := \hat{V}_t(\eta, \xi) - \hat{G}_t(\eta, \xi)$

Die nicht-diskontierten Größen werden ohne *Hut* geschrieben:
$V_t := \hat{V}_t X_t^0$, $G_t := \hat{G}_t X_t^0$, $C_t := \hat{C}_t X_t^0$.

η_t beschreibt die Anzahl der im Intervall $[t, t+1)$ gehaltenen Numeraires X^0. Die Anzahl der zur Zeit t gehaltenen Numeraires muss zur Zeit t festgelegt werden. Damit kann die Anzahl der zur Zeit T gehaltenen Numeraires η_T genau so festgelegt werden, dass der Wert der verallgemeinerten Handelsstrategie zur Zeit T gleich der Auszahlung des Claims H ist. Damit gibt es immer eine Handelsstrategie, die zur Zeit T den gleichen Wert hat wie der Claim.

ξ_t^j beschreibt die Anzahl der im Intervall $(t-1, t]$ gehaltenen Assets X^j mit $j \in \{1, \dots, d\}$, $t \in \{1, \dots, T\}$. Damit muss die Anzahl der zur Zeit t gehaltenen Assets ξ_t^j bereits zur Zeit $t-1$ festgelegt werden. Zur Zeit $t = 0$ werden außer dem Numeraire keine weiteren Assets gehalten.

$\hat{V}_t$ gibt den Marktwert der verallgemeinerten Strategie (η, ξ) in Einheiten von Numeraires X^0 an. Würde das durch (η_t, ξ_t) angegebene Portfolio von Wertpapieren zur Zeit t zu Marktpreisen ge- oder verkauft werden, so wäre der Preis gleich $\hat{V}_t X_t^0$, es müssten dafür $\hat{V}_t$ Numeraires bezahlt werden.

$\hat{G}_t$ beschreibt die bis zum Zeitpunkt t durch die verallgemeinerte Strategie (η, ξ) erwirtschafteten Ergebnisse in Einheiten von Numeraires. Die Ergebnisse aus dem Zeitintervall $(t-1, t]$, die durch die Anlage X^j entstehen, sind: $\xi_t^j(\hat{X}_t^j - \hat{X}_{t-1}^j)$. Werden am Anfang der Periode ξ^j Anlagen X^j gekauft, so müssen dafür $\hat{X}_{t-1}^j$ Numeraires X^0 beziehungsweise $\hat{X}_{t-1}^j X_{t-1}^0$ Geldeinheiten gezahlt werden. Werden diese Anlagen am Ende der Periode wieder verkauft, so erhält man dafür $\hat{X}_t^j$ Numeraires X^0 beziehungsweise $\hat{X}_t^j X_t^0$ Geldeinheiten. Der Gewinn in Einheiten von Numeraires X^0 ist damit in dieser Periode $\xi_t^j(\hat{X}_t^j - \hat{X}_{t-1}^j)$. Verfolgt man die Handelsstrategie (η, ξ) vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = T$, so verfügt man zur Zeit $t = T$ über $\hat{G}_T$ Anlagen X^0 beziehungsweise

G_T Geldeinheiten mehr, als zur Zeit $t = 0$. Ist G_T negativ, so verfügt man freilich über weniger Anlagen X^0 als zur Zeit $t = 0$.

Ist der Wert der verallgemeinerte Strategie (η, ξ) stets ihr Wert zur Zeit Null plus den erwirtschafteten Gewinnen, $V_t = V_0 + G_t$, so nennt man die Strategie *selbstfinanzierend*. Es bedarf dann keiner Investitionen in den Hedge nach dem Zeitpunkt Null und es kann auch kein Geld aus dem Hedge entnommen werden. Die hier verwendeten Strategien sind im Allgemeinen nicht selbstfinanzierend.

Da die hier verwendeten Strategien im Allgemeinen nicht selbstfinanzierend sind, entstehen zu den Handelszeitpunkten Kosten von zufälliger Höhe. Diese Kosten werden durch den Kostenprozess C_t beschrieben:

C_t ist die Summe der bis zu dem Zeitpunkt t angefallenen Kosten. Ist $C_t < C_0$, so konnte zwischen den Zeitpunkten 0 und t mehr Geld aus dem Hedge entnommen werden, als zusätzlich zu C_0 investiert werden musste. Eine Strategie ist selbstfinanzierend, genau dann, wenn $C_t = C_0$ für alle $t \in \{1, \ldots, T\}$ fast sicher gilt.

□

Für die weiteren Überlegungen wird angenommen, alle vorkommenden Zufallsvariablen seien quadratintegrierbar:

Annahme 3.3

a) $\hat{H} \in \mathcal{L}^2(P^+)$,

b) $\hat{X}_t^j \in \mathcal{L}^2(P^+)$ *für* $j \in \{1, \ldots, d\}$ *und* $t \in \{0, \ldots, T\}$

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller quadratintegrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Diese Menge ist mit der üblichen Skalarmultiplikation und der üblichen Addition ein reeller Vektorraum. Das Null-Element ist $U(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Für zwei Zufallsvariablen U und V aus $\mathcal{C}$ wird nun die Abbildung: $< U, V >:= E(UV)$ definiert.

Diese Abbildung erfüllt alle Eigenschaften eines Skalarprodukts, bis auf: $< U, U >= 0$ genau dann, wenn $U = 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Es gilt: $< U, U >= 0$ genau dann, wenn $U = 0$ fast sicher.

Nun definiert man zwei Zufallsvariablen U und V als äquivalent, falls $P(U = V) = 1$. Damit zerfällt $\mathcal{C}$ in Äquivalenzklassen. Die Äquivalenzklasse, in der $U \in \mathcal{C}$ liegt, wird abkürzend wieder mit U bezeichnet und wieder Zufallsvariable genannt.

Es lässt sich zeigen, dass die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathcal{C}$ mit dem oben definierten Skalarprodukt ein Hilbertraum ist, siehe Brockwell und Davis [4] Kapitel 2, Beispiel 2.2.2.

Er wird mit $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) =: \mathcal{L}^2(P)$ bezeichnet. Durch das Skalarprodukt wird die Norm $\|.\|^2 := \mathbb{E}((.)^2)$ erzeugt.

□

Auf dem Hilfsmarkt wird nun ein neues Produkt eingeführt: Ein Unternehmen verkauft nun einen *Claim mit Auszahlung* H (kurz: H), der bisher nicht auf dem Markt gehandelt wurde. Im Folgenden suchen wird den risikominimierenden Hedge für H.

Eine risikominimierende Strategie wird nun definiert als eine Strategie, die die Norm der zum Zeitpunkt t noch ausstehenden Kosten $\hat{C}_T - \hat{C}_t$ zu jedem Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$ minimiert unter allen $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategien, gegeben die Information bis zum Zeitpunkt t. So eine Strategie existiert nicht in jedem Modell.

Definition 3.4

a) Eine verallgemeinerte Handelsstrategie (η, ξ) *heißt* ***$\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie für H****, falls sie die Eigenschaften*

i) $\hat{V}_T(\eta, \xi) = \hat{H}$ P^+*-fast sicher,*

ii) $\hat{V}_t(\eta, \xi) \in \mathcal{L}^2(P^+)$ *für alle* t *und*

iii) $\hat{G}_t(\eta, \xi) \in \mathcal{L}^2(P^+)$

erfüllt.

b) Der ***Risikoprozess*** *einer* $\mathcal{L}^2$*-zulässigen Strategie für H ist definiert als* $R_t(\xi, \eta) := \mathbb{E}((\hat{C}_T(\xi, \eta) - \hat{C}_t(\xi, \eta))^2 | \mathcal{F}_t^+)$ *für* $t \in \{0, \dots, T\}$.

c) Eine $\mathcal{L}^2$*-zulässige Strategie* (η^*, ξ^*) *für H heißt* ***risikominimierend****, falls für jede andere* $\mathcal{L}^2$*-zulässige Strategie* (η, ξ) *für H gilt:* $R_t(\eta^*, \xi^*) \leq R_t(\eta, \xi)$ *fast sicher für alle* $t \in \{0, \dots, T\}$.

Bemerkung 3.5 *Die Definitionen für den Risikoprozess und die risikominimierenden Strategien stammen aus dem Artikel* A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches *von Schweizer [34] Kapitel 2.*

Dort sind sie für ein zeitkontinuierliches Modell angegeben. Diese Definitionen werden zum Beispiel im Beweis von Proposition 3.1 in [34] auch in einem zeitdiskreten Modell verwendet, ohne dafür eine eigene Definition einzuführen.

Risikominimierende Strategien im Diskreten werden auch in dem Artikel von Föllmer und Schweizer [8] verwendet, allerdings ohne explizite Definitionen anzugeben. Auch in dem Buch von Föllmer und Schied gibt es keine Definition für risikominimierende Handelsstrategien. Deshalb wird hier die zeitkontinuierliche Definition aus Schweizer [34] in das Diskrete übertragen.

Die folgenden Lemmata 3.6 und 3.9 sind ebenfalls aus [34] vom Zeitkontinuierlichen ins Diskrete übertragen. Die Beweise sind ebenfalls die aus [34] in den einfacheren diskreten Fall übertragenen.

Eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie für H ist damit eine Handelsstrategie, deren Marktwert zur Zeit T der Auszahlung des Claims H entspricht. Diese Eigenschaft wurde schon in der Einleitung erwähnt. Die hier verwendeten Strategien sind im Allgemeinen nicht selbstfinanzierend, dafür zahlen sie zum Zeitpunkt T genau so viel aus, wie das Derivat.

Weiter soll diese Strategie noch so beschaffen sein, dass sowohl der diskontierte Wertprozess als auch der diskontierte Gewinnprozess quadratintegrierbar sind. Dies sind technische Eigenschaften, die beispielsweise dafür benötigt werden, dass der Risikoprozess fast sicher $< \infty$ ist.

Der Risikoprozess beschreibt den Erwartungswert von $(\hat{C}_T(\xi,\eta) - \hat{C}_t(\xi,\eta))^2$, gegeben die Preisprozesse bis zum Zeitpunkt t. Für risikominimierende Strategien (η^*,ξ^*) zeigt Lemma 3.6, dass $\hat{C}_t(\eta^*,\xi^*) = \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)|\mathcal{F}_t^+)$ gilt, so dass der Risikoprozess risikominimierender Strategien die Varianz der noch ausstehenden Kosten beschreibt. Wir bezeichnen $R_0(\eta^*,\xi^*)$ als *inhärentes Risiko*. Ist das inhärente Risiko gleich Null, dann ist der Kostenprozess fast sicher konstant und der Claim replizierbar.

Eine risikominimierende Strategie ist eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie, die $R_t(\xi,\eta)$ *gleichzeitig* für alle $t \in \{0,\ldots,T\}$ minimiert. Dass so eine Strategie existiert, ist nur unter relativ starken Voraussetzungen gewährleistet. Lokal risikominimierende Strategien, wie sie weiter unten eingeführt werden, existieren unter schwächeren Voraussetzungen.

Über den Kostenprozess einer risikominimierenden Strategie lässt sich folgende Aussage treffen, siehe Schweizer [34] Lemma 2.3.

Lemma 3.6 *Der diskontierte Kostenprozess jeder risikominimierenden Strategie ist ein Martingal.*

Beweis: Sei (η^*,ξ^*) eine risikominimierende Strategie. Für ein $t_0 \in \{0,\ldots,T\}$ definieren wir eine weitere Strategie (η,ξ) durch:

$$\begin{array}{lcl}
\xi & := & \xi^*, \\
\eta_t & := & \eta_t^* \text{ für } t \in \{0,\ldots,t_0-1\} \text{ und} \\
\hat{V}_t(\eta,\xi) & := & \mathbb{E}(\hat{H} - \sum\limits_{j=t+1}^{T} \xi_j \Delta\hat{X}_j | \mathcal{F}_t) \text{ für } t \in \{t_0,\ldots,T\}.
\end{array}$$

Die letzte Gleichung definiert implizit die η_t für $t \in \{t_0,\ldots,T\}$.

Diese so definierte Strategie ist $\mathcal{L}^2$-zulässig:

i) $\hat{V}_T(\eta,\xi) = \mathbb{E}(\hat{H} - \sum\limits_{j=T+1}^{T} \xi_j \Delta\hat{X}_j | \mathcal{F}_T^+) = \hat{H}$

ii), iii) $\hat{V}_t(\eta,\xi)$ und $\hat{G}_t(\eta,\xi) \in \mathcal{L}^2$ da $\hat{H}$ und $\hat{X} \in \mathcal{L}^2$

Es ist

$$\begin{array}{lcl}
\hat{C}_T(\eta,\xi) & = & \hat{V}_T(\eta,\xi) - \hat{G}_T(\eta,\xi) \\
& = & \hat{V}_T(\eta^*,\xi^*) - \hat{G}_T(\eta^*,\xi^*) \\
& = & \hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)
\end{array}$$

da $V_T(\eta,\xi) = H = V_T(\eta^*,\xi^*)$ ist, weil beide Strategien $\mathcal{L}^2$-zulässig für H sind und da die Gewinne allein von $\xi = \xi^*$ abhängen.

Für die Kosten bis zum Zeitpunkt t_0 von (η,ξ) lässt sich folgende Aussage treffen:

$$\begin{array}{lcl}
\hat{C}_{t_0}(\eta,\xi) & = & \hat{V}_{t_0}(\eta,\xi) - \hat{G}_{t_0}(\eta,\xi) \\
& = & \mathbb{E}(\hat{H} - \sum\limits_{j=t_0+1}^{T} \xi_j \Delta\hat{X}_j | \mathcal{F}_{t_0}^+) - \sum\limits_{j=0}^{t_0} \xi_j \Delta\hat{X}_j \\
& = & \mathbb{E}(\hat{H} - \sum\limits_{j=0}^{T} \xi_j \Delta\hat{X}_j | \mathcal{F}_{t_0}^+) \\
& = & \mathbb{E}(\hat{V}_T(\eta,\xi) - \hat{G}_T(\eta,\xi) | \mathcal{F}_{t_0}^+) \\
& = & \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta,\xi) | \mathcal{F}_{t_0}^+)
\end{array}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Summe in den Erwartungswert hineingezogen.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*) &= \hat{C}_T(\eta,\xi) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*) \\ &= \hat{C}_T(\eta,\xi) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*) + \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta,\xi)|\mathcal{F}^+_{t_0}) - \hat{C}_{t_0}(\eta,\xi)\end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta,\xi)|\mathcal{F}^+_{t_0}) - \hat{C}_{t_0}(\eta,\xi) = 0$ ist.

Schließlich folgt:

$$\begin{aligned}R_{t_0}(\eta^*,\xi^*) &:= \mathbb{E}((\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*))^2|\mathcal{F}^+_{t_0}) \\ &= \mathbb{E}((\hat{C}_T(\eta,\xi) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*) + \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)|\mathcal{F}^+_{t_0}) - \hat{C}_{t_0}(\eta,\xi))^2|\mathcal{F}^+_{t_0}) \\ &= R_{t_0}(\eta,\xi) + \left(\mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)|\mathcal{F}^+_{t_0}) - \hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*)\right)^2\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $\hat{C}_{t_0}(\eta^*,\xi^*) = \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)|\mathcal{F}^+_{t_0})$ fast sicher gelten muss, sonst wäre $R_{t_0}(\eta^*,\xi^*) > R_{t_0}(\eta,\xi)$ was im Widerspruch dazu stünde, dass (η^*,ξ^*) risikominimierend ist.

Also gilt für alle $t \in \{0,\dots,T\}$:
$\hat{C}_t(\eta^*,\xi^*) = \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta^*,\xi^*)|\mathcal{F}^+_t)$ und damit ist $(\hat{C}_t(\eta^*,\xi^*))_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein Martingal.

□

Der Wert der risikominimierenden Strategie wird zu jedem Handelszeitpunkt t durch die Wahl von η_t festgelegt. Bei risikominimierenden Strategien wird η_t so gewählt, dass die erwarteten zukünftigen Kosten gleich Null sind.

Bei der Suche nach (lokal) risikominimierenden Strategien wird das Konzept *stark orthogonaler* stochastischer Prozesse benötigt. In dem oben eingeführten Hilbertraum sind zwei quadratintegrierbare Zufallsvariablen U und V orthogonal, falls $\mathbb{E}(UV) = 0$ ist. Zwei stochastische Prozesse heißen stark orthogonal, falls die Kovarianzen ihrer Zuwächse $U_{t+1} - U_t$ und $V_{t+1} - V_t$ gegeben $\mathcal{F}^+_t$ gleich Null sind für alle t. Oft ist einer der beiden stochastischen Prozesse ein Martingal, dann sind die beiden stochastischen Prozesse genau dann stark orthogonal, falls der Erwartungswert $\mathbb{E}((U_{t+1} - U_t)(V_{t+1} - V_t)|\mathcal{F}^+_t)$ gleich Null ist für alle t, d.h. wenn ihre Zuwächse gegeben $\mathcal{F}^+_t$ orthogonal sind:

Definition 3.7

Zwei adaptierte stochastische Prozesse U und V heißen ***stark orthogonal*** *bezüglich P^+, falls*

i) $cov(\Delta U_{t+1}, \Delta V_{t+1}|\mathcal{F}^+_t)$ *wohldefiniert ist und*
ii) $cov(\Delta U_{t+1}, \Delta V_{t+1}|\mathcal{F}^+_t) = 0$ *für alle* $t \in \{0,\dots,T-1\}$.

Dabei bezeichnet $\Delta U_{t+1} := U_{t+1} - U_t$.

Für zwei stark orthogonale Martingale $(U_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ und $(V)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ gilt, dass ihr Produkt $(U_tV_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ wieder ein Martingal ist:

$$\mathbb{E}(U_{t+1}V_{t+1}|\mathcal{F}^+_t) = \mathbb{E}((U_t + \Delta U_{t+1})(V_t + \Delta U_{t+1})|\mathcal{F}^+_t) = U_tV_t + \mathbb{E}(\Delta U_{t+1}\Delta V_{t+1}|\mathcal{F}^+_t) = U_tV_t$$

□

Falls die diskontierten Preisprozesse Martingale sind und der Claim quadratintegrierbar ist, lässt sich mit Hilfe der diskreten *Kunita-Watanabe Zerlegung* immer eine risikominimierende Strategie angeben.

Das folgende Lemma ist das Theorem 10.18 aus dem Buch von Föllmer und Schied [7], und stammt ursprünglich nicht aus der Finanzmathematik. Die zeitkontinuierliche Version findet sich in Kunita und Watanabe [18].

Gegeben ein quadratintegrierbares d-dimensionales Martingal $\hat{X}$, dann lässt sich jedes weitere quadratintegrierbare Martingal M zerlegen in die Summe aus einem stochastischen Integral bezüglich $\hat{X}$ und einem zu $\hat{X}$ stark orthogonalen Martingal $\hat{L}$:

Lemma 3.8 (Kunita-Watanabe Zerlegung) *Ist $(\hat{X}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein quadratintegrierbares Martingal unter P^+, dann lässt sich jedes weitere quadratintegrierbare P^+-Martingal $(M_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ schreiben als:*

$$M_t = M_0 + \sum_{s=1}^{t} \xi_s'(\hat{X}_s - \hat{X}_{s-1}) + \hat{L}_t$$

wobei

i) ξ ein d-dimensionaler vorhersehbarer Prozess ist mit $\xi_t'(\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1}) \in \mathcal{L}^2(P^+)$ für alle t und

ii) $(\hat{L}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein quadratintegrierbares Integral ist, das stark orthogonal zu $\hat{X}$ ist mit $\hat{L}_0 = 0$.

Dabei ist $\hat{L}$ durch diese Zerlegung eindeutig bestimmt, nicht unbedingt aber ξ.

Interpretiert man dieses Ergebnis geeignet, dann liefert es eine risikominimierende Strategie für jeden quadratintegrierbaren Claim H, falls die diskontierten Preisprozesse quadratintegrierbare Martingale sind. Das Martingal M, das oben zerlegt wurde, wird interpretiert als der Wertprozess der risikominimierenden Strategie mit $M_T = \hat{H}$ und $M_t = \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_t^+)$.

Satz 3.9 *Ist $\hat{X}$ ein quadratintegrierbares P^+-Martingal, dann existiert für jeden Contingent Claim $\hat{H} \in \mathcal{L}^2(P^+)$ eine risikominimierende Strategie (η^*, ξ^*).*
Wird $\hat{H}$ geschrieben als

$$\hat{H} = \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) + \sum_{s=1}^{T} \xi_s'(\hat{X}_s - \hat{X}_{s-1}) + \hat{L}_T$$

mit ξ und $\hat{L}$ wie in Lemma 3.8, dann ist die risikominimierende Strategie (η^*, ξ^*) für H gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0^* = \eta_0^* &= \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) \\
\xi^* &= \xi \\
\eta_t^* &= \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) + \sum_{s=1}^{t} \xi_s'(X_s - X_{s-1}) + \hat{L}_t - \xi_t' X_t \textit{ für } t \in \{1, \ldots, T\}
\end{aligned}$$

Damit ist:

$\hat{V}_t(\eta^*, \xi^*) = \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_t^+) = \hat{V}_0^* + \sum_{j=1}^{t} (\xi_j^*)' \Delta \hat{X}_j + \hat{L}_t$

$\hat{C}_t(\eta^*, \xi^*) = \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) + \hat{L}_t$

Beweis:

1. Die oben angegebene Strategie ist $\mathcal{L}^2$-zulässig nach Lemma 3.8.

2. Wir zeigen, dass für jedes $t \in \{0, \ldots, T\}$ für die oben angegebene Strategie (η^*, ξ^*) gilt: $R_t(\eta^*, \xi^*) \leq R_t(\eta, \xi)$ für jede andere $\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie (η, ξ). Dabei wählen wir ohne Einschränkung η so, dass der Kostenprozess von (η, ξ) ein Martingal ist.

Dazu schreiben wir:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_T(\eta, \xi) &= \hat{V}_T(\eta, \xi) - \hat{G}_T(\eta, \xi) &&= \hat{H} - \sum_{j=1}^{T} \xi_j' \Delta \hat{X}_j \\
\hat{C}_t(\eta, \xi) &= \hat{V}_t(\eta, \xi) - \hat{G}_t(\eta, \xi) &&= \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_t^+) - \sum_{j=1}^{t} \xi_j' \Delta \hat{X}_j
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\hat{C}_T(\eta, \xi) - \hat{C}_t(\eta, \xi) = \hat{H} - \sum_{j=t+1}^{T} \xi_j' \Delta \hat{X}_j - \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_t^+)$$

Mit Lemma 3.8 gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) + \sum_{s=1}^{T} (\xi_s^*)'(\hat{X}_s - \hat{X}_{s-1}) + \hat{L}_T \text{ und} \\
\mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_t^+) &= \mathbb{E}(\hat{H}|\mathcal{F}_0^+) + \sum_{s=1}^{t} (\xi_s^*)'(\hat{X}_s - \hat{X}_{s-1}) + \hat{L}_t
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\hat{C}_T(\eta, \xi) - \hat{C}_t(\eta, \xi) = \hat{L}_T - \hat{L}_t + \sum_{j=t+1}^{T} (\xi_j^* - \xi_j)' \Delta \hat{X}_j$$

Und schließlich:

$$\begin{aligned}
R_t(\eta,\xi) &:= \mathbb{E}((\hat{C}_T(\eta,\xi)-\hat{C}_t(\eta,\xi))^2|\mathcal{F}_t^+)\\
&= \mathbb{E}\left(\left(\hat{L}_T-\hat{L}_t+\sum_{j=t+1}^{T}(\xi_j^*-\xi_j)'\Delta\hat{X}_j\right)^2|\mathcal{F}_t^+\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\left(\hat{L}_T-\hat{L}_t\right)^2|\mathcal{F}_t^+\right)+\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=t+1}^{T}(\xi_j^*-\xi_j)'\Delta\hat{X}_j\right)^2|\mathcal{F}_t^+\right)\\
&= R_t(\eta^*,\xi^*)+\mathbb{E}((\sum_{j=t+1}^{T}(\xi_j^*-\xi_j)'\Delta\hat{X}_j)^2|\mathcal{F}_t^+)\geq R_t(\eta^*,\xi^*)
\end{aligned}$$

da $\hat{L}$ stark orthogonal zu $\hat{X}$ ist.

□

Wenn $\hat{X}$ kein Martingal ist, gibt es im Allgemeinen keine risikominimierende Strategie. Schweizer gibt in [34] Proposition 3.1 ein Beispiel für ein Zweiperioden Modell an, in dem keine risikominimierende Strategie existiert. Es wird dann auf das Konzept der lokal risikominimierenden Strategien zurückgegriffen. Dieses wird im Folgenden erläutert.

Definition 3.10

a) *Der **lokale Risikoprozess** einer $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategie (η,ξ) für H ist definiert als:*
$R_t^{loc}(\eta,\xi) := \mathbb{E}((\hat{C}_{t+1}(\eta,\xi)-\hat{C}_t(\eta,\xi))^2|\mathcal{F}_t^+)$ *für* $t\in\{0,\dots,T-1\}$.

b) *Eine $\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie (η^*,ξ^*) heißt **lokal risikominimierende Strategie**, falls für alle t gilt:*
$R_t^{loc}(\eta^*,\xi^*)\leq R_t^{loc}(\eta,\xi)$ *P-fast sicher für alle $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategien (η,ξ), deren Wertprozesse die Gleichheit $V_{t+1}(\eta^*,\xi^*)=V_{t+1}(\eta,\xi)$ erfüllen.*

Der lokale Risikoprozess zur Zeit t beschreibt das Risiko der Periode $(t,t+1]$ gemessen durch $\mathbb{E}((\hat{C}_{t+1}(\eta,\xi)-\hat{C}_t(\eta,\xi))^2|\mathcal{F}_t^+)$, während der Risikoprozess aus Definition 3.4 das Risiko der gesamten Restlaufzeit $(t,T]$ gemessen durch $\mathbb{E}((\hat{C}_T(\eta,\xi)-\hat{C}_t(\eta,\xi))^2|\mathcal{F}_t^+)$ beschreibt.

Eine lokal risikominimierende Strategie ist eine, die für alle t dieses lokale Risiko R_t^{loc} minimiert unter allen $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategien, die zur Zeit $t+1$ den selben Wert haben. Dabei ist zu beachten, dass alle $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategien zur Zeit T den Wert H haben müssen. Damit muss eine lokal risikominimierende Strategie rückwärts rekursiv aufgebaut werden: Zuerst wird unter allen $\mathcal{L}^2$-zulässigen Strategien diejenige gesucht, die $R_{T-1}^{loc}(\eta,\xi)$ minimiert unter $V_T(\eta,\xi)=H$. Damit ist der Wert einer jeden lokal risikominimierenden Strategie $V_{T-1}(\eta^*,\xi^*)$ zum Zeitpunkt $T-1$ festgelegt. Jetzt wird diejenige $\mathcal{L}^2$-zulässige Strategie mit $V_{T-1}(\eta,\xi)=V_{T-1}(\eta^*,\xi^*)$ gesucht, die $R_{T-2}^{loc}(\eta,\xi)$ minimiert und so weiter.

Dieses Vorgehen führt auf eine Rekursionsformel, die in Föllmer und Schied [7] in Proposition 10.10 angegeben ist. Diese wird in dieser Arbeit nicht benötigt. Wir verwenden zur Bestimmung lokal risikominimierender Strategien eine Zerlegung, die der von Kunita und Watanabe ähnelt.

Der folgend Satz stammt aus Föllmer und Schied [7], Korollar 10.14:

Satz 3.11 *Für den Contingent Claim H existiert genau dann eine lokal risikominimierende Strategie, wenn H sich schreiben lässt als:*

$$\hat{H} = c + \sum_{t=1}^{T} \xi_t'(\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1}) + \hat{L}_T \text{ fast sicher}$$

wobei

i) c *eine Konstante,*

ii) ξ *ein d-dimensionaler, vorhersehbarer Prozess ist mit* $\xi_t'(\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1}) \in \mathcal{L}^2$ *für alle t,*

iii) $(\hat{L}_t)_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ *ein quadratintegrierbares* P^+*-Martingal, das stark orthogonal zu* $(\hat{X})_{t\in\{0,\ldots,T\}}$ *ist mit* $\hat{L}_0 = 0$.

Die lokal risikominimierende Strategie (η^*, ξ^*) *ist dann gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
\eta_0^* &= c \\
\xi^* &= \xi \\
\eta_t^* &= c + \sum_{s=1}^{t} \xi_s'(\hat{X}_s - \hat{X}_{s-1}) + \hat{L}_t - \xi_t'\hat{X}_t \text{ für } t \in \{1, \ldots, T\}
\end{aligned}$$

Für den Beweis verweisen wir auf Föllmer und Schied, Korollar 10.14. Eine Strategie ist genau dann lokal risikominimierend, wenn ihr Kostenprozess ein Martingal ist, das stark orthogonal zu $\hat{X}$ ist. (Theorem 10.9). Diese Eigenschaft ist von der obigen Zerlegung erfüllt.

Bemerkung 3.12

1) *Jede risikominimierende Strategie ist auch lokal risikominimierend.*
2) *Im Einperiodenmodell ist auch jede lokal risikominimierende Strategie risikominimierend.*

3.1.2 Zeitkontinuierliches Hedgen

Die zeitkontinuierliche Theorie risikominimierender Hedges ist technisch anspruchsvoll und wird in dieser Arbeit nicht benötigt. Für eine Einführung sei auf Schweizer [34] verwiesen.

Die in Kapitel 3.2.1 im Diskreten gefundene, (lokal) risikominimierende Strategie führt uns beim Übergang zum Zeitkontinuierlichen unter einer zusätzlichen Annahme an die Preisprozesse (siehe Annahme 3.37 beziehungsweise Annahme 3.44) zu einer replizierenden Strategie. Diese ist damit freilich auch risikominimierend.

Im Folgenden werden Definitionen, die für das zeitkontinuierliche Hedgen benötigt werden, angegeben. Die Bezeichnungen sind analog zum zeitdiskreten Fall gewählt. Aus dem Zusammenhang wird stets ersichtlich sein, ob die zeitdiskrete oder die zeitkontinuierliche Definition gemeint ist.

Definition 3.13 *Auf dem in diesem Kapitel verwendeten **kontinuierlichen Hilfsmarkt** werden d+1 Asset* $X^0, X^1, \ldots, X^d$ *zu den Handelszeitpunkten* $t \in [0,T]$ *gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $0 < X_t^0, X_t^1, \ldots, X_t^d$*, die mit* X^0 *diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit* $\hat{X}_t^0 = \frac{X_t^0}{X_t^0} = 1$*,* $\hat{X}_t^1 = \frac{X_t^1}{X_t^0}, \ldots, \hat{X}_t^d = \frac{X_t^d}{X_t^0}$ *für* $t \in [0,T]$ *bezeichnet.*

Die Preisprozesse werden als adaptierte stochastische Prozesse auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, (\mathcal{F}_t^+)_{t\in[0,T]}, P^+)$ *modelliert, der die üblichen Bedingungen erfüllt.*

Dabei bezeichnet $T \in \mathbb{R}^+$ einen festen Zeithorizont, beispielsweise den Auszahlungszeitpunkt des Derivates, das gehedgt werden soll.

Wie in Schweizer [35] nehmen wir nun an, der Preisprozess sei ein Semimartingal:

Annahme 3.14 *Der Preisprozess* $\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{X}^1 \\ \vdots \\ \hat{X}^d \end{pmatrix}$ *ist ein Semimartingal unter P.*

Diese Annahme ist in folgendem Sinne *natürlich*:

Nimmt man an, auf einem Markt gäbe es keine Arbitragemöglichkeiten, dann folgt daraus die Existenz eines zu P äquivalenten Maßes, unter dem der Preisprozess ein Martingal ist. Gibt es ein zu P äquivalentes Maß, unter dem $\hat{X}$ ein Martingal ist, dann ist $\hat{X}$ unter P ein Semimartingal. Damit folgt aus der No-Arbitrage Annahme, dass der Preisprozess unter P ein Semimartingal ist.

Wir verwenden die Zerlegung des Semimartingals $\hat{X}$:

$$\hat{X} = \hat{X}_0 + \hat{M} + \hat{A} \tag{3.4}$$

mit

i) $\hat{M} = (\hat{M}_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein quadratintegrierbares Martingal mit $\hat{M}_0 = 0$ und

ii) $\hat{A} = (\hat{A}_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein vorhersehbarer Prozess mit endlicher Variation $|\hat{A}|$ mit $\hat{A}_0 = 0$.

Mit $< \hat{M} >$ wird der Varianzprozess von $\hat{M}$ bezüglich P bezeichnet.

Die folgenden Definitionen sind dem Artikel *Option Hedging for Semimartingales* von Schweizer [35], Kapitel 1 entnommen. Sie unterscheiden sich beispielsweise zu den in Bingham und Kiesel angegebenen dadurch, dass die zum Numeraire gehörige Komponente der Handelsstrategie lediglich adaptiert, nicht aber vorhersehbar sein muss, wie schon im Diskreten.

Bei Bingham und Kiesel wird nicht von vorne herein ein Asset als Numeraire ausgezeichnet. Dadurch entsteht die Möglichkeit, das Numeraire zu wechseln. Aus diesem Grund werden allerdings alle Komponenten der Handelsstrategie als vorhersehbar definiert.

Wir benötigen in dieser Arbeit keinen Wechsel des Numeraires. Wir zeichnen von vorne herein ein Asset als Numeraire aus. Dies erlaubt es uns, von der zum Numeraire gehörenden Komponente der Handelsstrategie lediglich zu fordern, dass sie adaptiert und nicht unbedingt vorhersehbar ist. Dies wird in Lemma 3.38 tatsächlich benötigt. Die zum Numeraire gehörige Komponente der dort angegebene Hedgingstrategie für den fondsgebundenen Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ ist tatsächlich nur adaptiert und nicht vorhersehbar.

Definition 3.15

a) *Eine **Handelsstrategie** ist ein Paar von Prozessen* $\eta = (\eta_t)_{t\in[0,T]}$ *und* $\xi = (\xi_t)_{t\in[0,T]}$, *die die folgenden Bedingungen erfüllen:*
   i) η *ist 1-dimensional und adaptiert und*
   ii) ξ *ist d-dimensional und vorhersehbar mit*
   $$\mathbb{E}\left(\int_0^T \xi_u^2 \quad d<\hat{M}>_u + \left(\int_0^T |\xi_u| \quad d|\hat{A}|_u\right)^2\right) < \infty$$

b) *Der diskontierte **Wert** der Handelsstrategie* (η,ξ) *zur Zeit* t, *ist gegeben durch:*
   $\hat{V}_t(\phi) := \eta_t + \sum_{i=1}^{d} \xi_t^i \hat{X}_t^i$ *für* $t \in [0,T]$
   Der Wertprozess ist rechtsstetig und erfüllt $\hat{V}_t(\eta,\xi) \in \mathcal{L}^2(P^+)$ *für* $t \in [0,T]$.

c) *Der diskontierte **Kostenprozess*** $\hat{C}_t(\eta,\xi)$ *ist definiert als*
   $\hat{C}_t(\eta,\xi) := \hat{V}_t(\eta,\xi) - \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \xi_u^i d\hat{X}_u^i$

Eine Handelsstrategie, deren Wertprozess und deren Kostenprozess sind analog zum diskreten Fall definiert.

Bemerkung 3.16 *Die Bedingung* $\mathbb{E}\left(\int_0^T \xi_u^2 \quad d<\hat{M}>_u + \left(\int_0^T |\xi_u| \quad d|\hat{A}|_u\right)^2\right) < \infty$ *ist eine technische Bedingung, die von Schweizer für das lokal risikominimierende Hedgen benötigt wird. Wir hedgen im Zeitkontinuierlichen nicht lokal risikominimierend und benötigen damit diese Bedingung nicht. Auch in Bingham und Kiesel [3] wird diese Bedingung nicht verlangt.*

Definition 3.17

a) *Eine Handelsstrategie* (η,ξ) *heißt **H-zulässig**, falls* $V_T(\eta,\xi) = H$ *fast sicher.*

b) *Eine Handelsstrategie* (η,ξ) *heißt **selbstfinanzierend**, falls* $\hat{C}_t(\eta,\xi)$ *konstant ist.*

H-zulässig ist eine Handelsstrategie, falls sie zum Zeitpunkt T genau so viel auszahlt, wie der Claim H, den sie hedgen soll. Selbstfinanzierend heißt sie, wieder analog zum diskreten Fall, falls nach dem Zeitpunkt $t = 0$ weder Geld in den Hedge investiert noch aus dem Hedge entnommen wird.

Definition 3.18

a) *Ein Claim H heißt* ***erreichbar****, falls er sich schreiben lässt als:*

$\hat{H} = \hat{H}_0 + \int_0^T \xi_u d\hat{X}_u$ *fast sicher*

mit einer Konstanten $\hat{H}_0$ *und einem vorhersehbaren Prozess* ξ *wie in Definition 3.15 a) ii).*

b) $\hat{H}_0$ *heißt dann* ***No-Arbitrage*** *Preis von H.*

Ein Claim heißt erreichbar, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (η, ξ) gibt, die zur Zeit $t = T$ fast sicher genau so viel wert ist, wie der Claim auszahlt. Diese Strategie heißt dann *replizierend*. Der No-Arbitrage Preis von H ist definiert als der Wert der replizierenden Handelsstrategie $V_0(\eta, \xi)$ zur Zeit $t = 0$. Wäre der Preis höher (niedriger) als $V_0(\eta, \xi)$, so würde sich folgende Arbitragemöglichkeit ergeben: *verkaufe (kaufe) zur Zeit* $t = 0$ *den Claim und kaufe (verkaufe) zur Zeit* $t = 0$ *die Handelsstrategie.*

3.2 Fondsgebundene Lebensversicherungsverträge

In diesem Kapitel wenden wir die Theorie aus dem Kapitel 3.1 an auf den fondsgebundenen Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ für einen festen Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ mit Laufzeit $T \in \mathbb{N}$. Der fondsgebundene Standardvertrag mit Laufzeit T ist ein Derivat auf dem Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit $\leq T$, siehe Beispiel 2.10 b) im Anschluss an die Definition 2.9 für Derivat.

Wir möchten nun einen Hedge konstruieren, der ausschließlich Fonds-Anteile, Standardverträge für den Versicherungsnehmer i mit Laufzeit T und Bonds mit Laufzeit T verwendet. Der Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit $\leq T$ wird dahin gehend eingeschränkt.

Der Bond mit Laufzeit T wird als Numeraire verwendet. Die folgende Tabelle gibt in der linken Spalte die Bezeichnungen aus dem Abschnitt 3.1 an, in der rechten die entsprechenden Größen im folgenden Abschnitt:

Assets	Preise der Assets und Abkürzungen	Komponente der Strategie
$X^0 \rightarrow B_T$	$\hat{X}^0_t \rightarrow \frac{B_T(t)}{B_T(t)} = 1$	η
$X^1 \rightarrow X$	$\hat{X}^1_t \rightarrow \frac{X_t}{B_T(t)} =: \hat{X}_t$	ξ^1
$X^2 \rightarrow E^i_{x,T}$	$\hat{X}^2_t \rightarrow \frac{E^i_{x,T}(t)}{B_T(t)} =: \hat{E}_t$	ξ^2

Die Handelszeitpunkte aus Kapitel 3.1 werden ebenfalls umbenannt. Der Zeitpunkt T ist stets der Auszahlungszeitpunkt des gehedgten Claims, $N \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Handelszeitpunkte zwischen $t = 0$ und $t = T$.

Damit wird im Einperiodenmodell, das in Kapitel 3.1 als $\{0, 1\}$ geschrieben worden wäre, $\{0, T\}$ verwendet: $\{0, 1\} \rightarrow \{0, T\}$.

Im Mehrperiodenmodell werden statt der Handelszeitpunkte $\{0, 1, \ldots, T\}$ aus Kapitel 3.1 die Handelszeitpunkte $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_N = T\}$ verwendet. Dies ermöglicht uns, bei festem

T die Anzahl der Handelszeitpunkte N gegen Unendlich gehen zu lassen.

$\{0, 1, \ldots, T\} \to \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T\}$

Weiter bezeichnen wir mit:

$\hat{X} := \hat{X}_T$ den Wert eines Fonds-Anteils zu Vertragsende und mit

$\hat{E} := \hat{E}^i_{x,T}(T)$ den Wert des Standardvertrages zu Vertragsende.

Die Auszahlung des fondsgebundenen Standardvertrages ist: $\hat{E}^i_{x,T,Fonds} = \hat{X}\hat{E}$.
Sie ist gleich $\hat{X}$, falls der Versicherungsnehmer noch lebt, also wenn $\hat{E} = 1$, und Null, falls der Versicherungsnehmer gestorben ist, also falls $\hat{E} = 0$.

3.2.1 Zeitdiskretes Hedgen

In diesem Abschnitt wird angegeben:

1. Die risikominimierende Strategie im Einperiodenmodell,
2. Die risikominimierende Strategie im Mehrperiodenmodell, falls $\hat{X}_t$ und $\hat{E}_t$ stark orthogonale Martingale sind,
3. Die lokal risikominimierende Strategie im Mehrperiodenmodell unter einer schwächeren Annahme an $\hat{X}_t$ und $\hat{E}_t$.

Im Einperiodenmodell bauen wir den risikominimierenden Hedge in drei Schritten auf:

1. Es können Bonds B_T gehandelt werden. $(\xi^1_T = \xi^2_T = 0)$

2. Es können Bonds B_T und Fonds-Anteile X gehandelt werden. $(\xi^2_T = 0)$

3. Es können Bonds B_T, Fonds-Anteile X und Standardverträge $E^i_{x,T}$ gehandelt werden.

Im Folgenden wird genau ein Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ betrachtet. Der Versicherte ist bei Vertragsabschluss x Jahre alt.

Zum Hedgen des fondsgebundenen Standardvertrages $E^i_{x,T,Fonds}$ für den Versicherungsnehmer i verwenden wir ausschließlich den Bond B_T mit selber Laufzeit, den Standardvertrag $E^i_{x,T}$ für den Versicherungsnehmer i mit selber Laufzeit und Fonds-Anteile X. Dies ist eine Teilmenge der am Markt für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit $\leq T$ gehandelten Assets. Zur Übersichtlichkeit definieren wir hier einen Teilmarkt des Marktes für fondsgebundene Verträge mit Laufzeit $\leq T$.

Definition 3.19 *Im **Einperiodenmodell** werden Bonds B_T, Fonds-Anteile X und Standardverträge $E^i_{x,T}$ ausschließlich zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = T$ und für einen festen Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $B_T(t) > 0, X_t$ und $E^i_{x,T}(t)$, die mit B_T diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $\hat{B}_T(t) = \frac{B_T(t)}{B_T(t)} = 1, \hat{X}_t = \frac{X_t}{B_T(t)}$ und $\hat{E}_t = \frac{E^i_{x,T}(t)}{B_T(t)}$ für $t \in \{0, T\}$ bezeichnet.

Eine Handelsstrategie besteht aus den Komponenten: η_0, η_T, ξ_T^1 *und* ξ_T^2.

$\hat{X}$ *und* $\hat{E}$ *werden als Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *aus Kapitel 1 modelliert.*

Wie im Kapitel 3.1 benötigen wir, dass die vorkommenden Zufallsvariablen quadratintegrierbar sind. $\hat{E} = 1_{\{\omega^i > x+T\}}$ und $\hat{B}_T = 1$ sind durch Null und Eins beschränkt, so dass diese beiden Zufallsvariablen unter jedem Maß quadratintegrierbar sind. Von dem Kurs des Fonds-Anteils zur Zeit T müssen wir dies annehmen:

Annahme 3.20 $\mathbb{E}(\hat{X}_T^2) < \infty$. $\hat{X}$ *ist quadratintegrierbar.*

Nun geben wir die risikominimierende Strategie für den fondsgebundenen Vertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ an, unter der Nebenbedingung, dass keine Fonds-Anteile und keine Standardverträge gehandelt werden. An diesem einfachen Beispiel lässt sich das Prinzip der risikominimierenden Hedges im Einperiodenmodell erkennen.

Lemma 3.21 *Werden ausschließlich Bonds* B_T *gehandelt, d.h.* $\xi_T^1 = \xi_T^2 = 0$, *dann ist im Einperiodenmodell unter der Annahme 3.20 folgende Strategie risikominimierend für den fondsgebundenen Standardvertrag* $E^i_{x,T,Fonds}$:

$$\begin{aligned} \hat{V}_0^* = \eta_0^* &= \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) \\ \eta_1^* &= \hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) \end{aligned}$$

Das inhärente Risiko ist damit:
$R_0(\eta^*, \xi^*) = Var(\hat{E}\hat{X})$

Beweis:

Wird nur der Bond B_T gehandelt, so entstehen im mit B_T diskontierten Markt keine Gewinne, $\hat{G}_T(\eta, \xi) = 0$. η_1 wird so gewählt, dass der Wert der Strategie zur Zeit $t = T$ gleich der Auszahlung des Derivats ist, $V_T(\eta, \xi) = E^i_{x,T,Fonds}(T) = XE$. Damit gilt:

$\hat{C}_0(\eta, \xi) = \hat{V}_0(\eta, \xi) = \eta_0$,
$\hat{C}_T(\eta, \xi) = \hat{V}_T(\eta, \xi) = \hat{E}^i_{x,T,Fonds}(T) = \hat{X}\hat{E}$ da $B_T(T) = 1$.

Die zu lösende Minimierungsaufgabe ist damit:

$$R_0(\eta, \xi) = \mathbb{E}\left((\hat{C}_T(\eta, \xi) - \hat{C}_0(\eta, \xi))^2\right) = \mathbb{E}\left((\hat{X}\hat{E} - \eta_0)^2\right) = \|\hat{X}\hat{E} - \eta_0\|^2 \to \min_{\eta_0}$$

Seine Lösung ist die Projektion von $\hat{X}\hat{E}$ auf die 1:
$\eta_0^* = < \hat{X}\hat{E}, 1 > = \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E})$.

Da keine Gewinne entstehen, sind die verbleibenden Kosten:
$\eta_T^* = C_T(\eta, \xi) - C_0(\eta, \xi) = \hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E})$

Das inhärente Risiko ist:
$R_0(\eta^*, \xi^*) = \|\hat{X}\hat{E} - \eta_0^*\|^2 = \|\hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E})\|^2 = Var(\hat{X}\hat{E})$

□

Können nur Bonds gehandelt werden, so ist es risikominimierend, genau so viele Bonds zu kaufen, dass diese zum Zeitpunkt $t = T$ die erwartete Auszahlung des Derivats auszahlen. Damit ist $\mathbb{E}(\hat{X}\hat{E})$ der Preis des risikominimierenden Hedges zur Zeit $t = 0$. Dies besagt nicht, dass $\mathbb{E}(\hat{X}\hat{E})$ ein fairer Preis für den fondsgebundenen Standardvertrag ist. Ein risikoaverser Verkäufer verlangt einen höheren Preis.

Nun nehmen wir für die nächsten zwei Lemmata an, die Auszahlung des Fonds-Anteils und die des Standardvertrages zur Zeit $t = T$ seien unabhängige Zufallsvariablen. Das heißt: ob der Versicherungsnehmer stirbt oder nicht hängt in diesem Modell nicht von der Kursentwicklung des Fonds-Anteils ab.

Annahme 3.22 *Die Zufallsvariablen $\hat{X}$ und $\hat{E}$ sind auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ unabhängig.*

Dies ist genau dann der Fall, wenn X und E unabhängig sind, da $B_T(T) = 1$ deterministisch ist.

Lemma 3.23 *Werden ausschließlich Bonds B_T und Fonds-Anteile X gehandelt, d.h. $\xi_T^2 = 0$, dann ist im Einperiodenmodell unter der Annahme 3.22 folgende Strategie risikominimierend für den fondsgebundenen Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$:*

$$\begin{aligned} \hat{V}_0^* = \eta_0^* &= \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X}_0 \\ \eta_T^* &= \hat{E}\hat{X} - \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X} \\ \xi_T^{1*} &= \mathbb{E}(\hat{E}) \end{aligned}$$

Das inhärente Risiko ist damit:
$R_0(\eta^*, \xi^*) = Var(\hat{E}\hat{X}) - \mathbb{E}(\hat{E})^2 Var(\Delta\hat{X})$.

Steigt der Kurs des Fonds-Anteils, dann steigt auch der Wert der Auszahlung, falls die versicherte Person überlebt. Also wird eine positive Anzahl von Fonds-Anteilen gekauft. Das inhärente Risiko wird durch das Handeln der Fonds-Anteile von $Var(\hat{X}\hat{E})$ auf $Var(\hat{X}\hat{E}) - \mathbb{E}(\hat{E})^2 Var(\Delta\hat{X})$ reduziert.

Beweis:

Nun werden neben dem Bond noch Fonds-Anteile gehandelt. Gewinne oder Verluste entstehen durch Kursänderung der Fonds-Anteile: $\hat{G}_T(\eta, \xi) = \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0)$. η_T wird wieder so gewählt, dass $V_T(\eta, \xi) = E^i_{x,T,Fonds}(T)$ gilt.

$\hat{C}_0(\eta, \xi) = \eta_0$
$\hat{C}_T(\eta, \xi) = \hat{X}\hat{E} - \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0)$

Das zu lösende Minimierungsproblem ist damit:

$$\begin{aligned} R_0(\eta, \xi) &= \mathbb{E}\left((\hat{C}_T(\eta, \xi) - \hat{C}_0(\eta, \xi))^2\right) = \|\hat{X}\hat{E} - \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0) - \eta_0\|^2 \\ &= \|\hat{X}\hat{E} - \xi_T^1\Delta\hat{X} - \eta_0\|^2 \\ &= \|\hat{X}\hat{E} \underbrace{-\eta_0 - \xi_T^1\mathbb{E}(\Delta\hat{X})}_{=:-a \text{ deterministisch}} - \xi_T^1(\underbrace{\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})}_{\perp 1})\|^2 \to \min_{\eta_0, \xi_T^1} \end{aligned}$$

Die beiden Elemente 1 und $\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})$ sind in $\mathcal{L}^2$ senkrecht zueinander und nach Annahme 3.22 gilt auch $\hat{E} \perp \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})$. Damit ist die Lösung für a die Projektion von $\hat{X}\hat{E}$ auf die 1, das optimale ξ_1^1 ist die Projektion von $\hat{X}\hat{E}$ auf $\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})$:

$$\begin{aligned}
a^* &= \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) \\
\xi_T^{1*} &= \frac{< \hat{X}\hat{E}, \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}) >}{< \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}), \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}) >} \\
&= \frac{< \hat{E}(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})), \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}) >}{< \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}), \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}) >} \\
&= \mathbb{E}(\hat{E})
\end{aligned}$$

Von der zweiten auf die dritte Zeile:
$\mathbb{E}\left(\hat{E}(-\hat{X}_0 - \mathbb{E}(\Delta X))(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))\right) = (-\hat{X}_0 - \mathbb{E}(\Delta X))\mathbb{E}(\hat{E})\mathbb{E}(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})) = 0$
Von der dritten auf die vierte Zeile:
$= \mathbb{E}(\hat{E})\frac{<(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})), \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})>}{<\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}), \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})>} = \mathbb{E}(\hat{E})$
Daraus berechnen sich die weiteren Größen:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0^* = \eta_0^* &= a^* - \xi_T^{1*}\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) \\
&= \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) - \mathbb{E}(\hat{E})\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) \\
&= \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X}_0
\end{aligned}$$

Für das inhärente Risiko gilt:

$$\begin{aligned}
R_0(\eta^*, \xi^*) &= \|\hat{X}\hat{E} - a^* - \xi_T^{1*}(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))\|^2 \\
&= \|\hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{E}\hat{X}) - \xi_T^{1*}(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))\|^2 \\
&= \|\hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{E}\hat{X})\|^2 - \|\xi_T^{1*}(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))\|^2 \\
&= Var(\hat{X}\hat{E}) - \mathbb{E}(\hat{E})^2 Var(\Delta\hat{X})
\end{aligned}$$

nach dem Satz des Pythagoras. □

Es werden $\mathbb{E}(\hat{E})$ Fonds-Anteile gekauft. Der Preis des Hedges $\hat{V}_0^*$ ist der Preis von $\mathbb{E}(\hat{E})$ Fonds-Anteilen.

Lemma 3.24 *Werden Bonds B_T, Fonds-Anteile X und Standardverträge $E_{x,T}^i$ gehandelt, dann ist im Einperiodenmodell unter der Annahme 3.22 folgende Strategie risikominimierend für den fondsgebundenen Standardvertrag $E_{x,T,Fonds}^i$:*

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0^* = \eta_0^* &= -\mathbb{E}(\hat{E})\mathbb{E}(\hat{X}) + \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X}_0 + \mathbb{E}(\hat{X})\hat{E}_0 \\
\eta_T^* &= \hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X} - \mathbb{E}(\hat{X})\hat{E} + \mathbb{E}(\hat{X})\mathbb{E}(\hat{E}) \\
\xi_T^{1*} &= \mathbb{E}(\hat{E}) \\
\xi_T^{2*} &= \mathbb{E}(\hat{X})
\end{aligned}$$

Das inhärente Risiko ist damit:
$R_0(\eta^*, \xi^*) = Var(\hat{H}) - \mathbb{E}(\hat{E})^2 Var(\Delta\hat{X}) - \mathbb{E}(\hat{X})^2 Var(\Delta\hat{E})$

Mit dem Preis des Standardvertrages steigt der Wert der Auszahlung. Es wird eine positive Anzahl von Standardverträgen gekauft. Das inhärente Risiko wird durch das Handeln des Standardvertrages um $\mathbb{E}(\hat{X})^2 Var(\Delta\hat{E})$ reduziert im Vergleich zu Lemma 3.23.

Beweis:

Es werden Bonds, Fonds-Anteile und Standardverträge gehandelt. Gewinne entstehen im mit B_T diskontierten Markt durch Kursänderungen der Standardverträge und der Fonds-Anteile: $\hat{G}_T(\eta, \xi) = \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0) + \xi_T^2(\hat{E}_T - \hat{E}_0)$. Damit gilt:

$\hat{C}_0(\eta, \xi) = \eta_0$
$\hat{C}_T(\eta, \xi) = \hat{X}\hat{E} - \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0) - \xi_T^2(\hat{E}_T - \hat{E}_0)$

Zu lösen ist damit folgende Minimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned} R_0(\eta, \xi) &= \mathbb{E}(\hat{C}_T(\eta, \xi) - \hat{C}_0(\eta, \xi)) = \|\hat{X}\hat{E} - \eta_0 - \xi_T^1(\hat{X}_T - \hat{X}_0) - \xi_T^2(\hat{E}_T - \hat{E}_0)\|^2 \\ &= \|\hat{X}\hat{E} \underbrace{-\eta_0 + -\xi_T^1\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) - \xi_T^2\mathbb{E}(\Delta\hat{E})}_{=:-a \text{ deterministisch}} -\xi_T^1 \underbrace{(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))}_{\perp 1} - \xi_T^2 \underbrace{(\Delta\hat{E} - \mathbb{E}(\Delta\hat{E}))}_{\perp 1, \perp \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})}\|^2 \\ &\to \min_{a,\xi} \end{aligned}$$

Die Lösung der Minimierungsaufgabe ist wie oben, da $\Delta\hat{E} - \mathbb{E}(\Delta\hat{E}) \perp \Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})$ und $\Delta\hat{E} - \mathbb{E}(\Delta\hat{E}) \perp 1$:

$$\begin{aligned} a^* &= \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) \\ \xi_T^{1*} &= \mathbb{E}(\hat{E}) \\ \xi_T^{2*} &= \mathbb{E}(\hat{X}) \\ \eta_0^* = \hat{V}_0^* &= a^* - \xi_T^{1*}\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) - \xi_T^{2*}\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) \\ &= \mathbb{E}(\hat{X}\hat{E}) - \mathbb{E}(\hat{E})\mathbb{E}(\Delta\hat{X}) - \mathbb{E}(\hat{X})\mathbb{E}(\Delta\hat{E}) \\ &= -\mathbb{E}(\hat{E})\mathbb{E}(\hat{X}) + \mathbb{E}(\hat{E})\hat{X}_0 + \mathbb{E}(\hat{X})\hat{E}_0 \end{aligned}$$

Für das Restrisiko gilt:

$$\begin{aligned} R_0(\eta^*, \xi^*) &= \|\hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{E}\hat{X}) - \xi_T^1(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X})) - \xi_T^2(\Delta\hat{E} - \mathbb{E}(\Delta\hat{E}))\|^2 \\ &= \|\hat{X}\hat{E} - \mathbb{E}(\hat{E}\hat{X})\|^2 - \|\xi_T^1(\Delta\hat{X} - \mathbb{E}(\Delta\hat{X}))\|^2 - \|\xi_T^2(\Delta\hat{E} - \mathbb{E}(\Delta\hat{E}))\|^2 \\ &= Var(\hat{X}\hat{E}) - \mathbb{E}(\hat{E})^2 Var(\Delta\hat{X}) - \mathbb{E}(X)^2 Var(\Delta\hat{E}) \end{aligned}$$

Wieder nach dem Satz von Pythagoras.

□

Es werden zwei Portfolios gekauft, $\mathbb{E}(\hat{E})$ Fonds-Anteile und $\mathbb{E}(\hat{X})$ Standardverträge. Die Auszahlungen der beiden Portfolios sind unabhängig und im Erwartungswert gleich dem Wert des fondsgebundenen Standardvertrages.

In dem in Kapitel 2.2 definierten Markt für den fondsgebundenen Vertrag wäre es noch möglich, Standardverträge für andere Versicherungsnehmer, $E^j_{x,T}$ mit $j \neq i$, als Hedge für den fondsgebundenen Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ zu kaufen. Da deren Werte aber zur Zeit T nach Annahme unabhängig von $E^i_{x,T}$ sind, wird bei einem risikominimierenden Hedge kein solcher Vertrag gekauft.

Definition 3.25 *Im* ***Mehrperiodenmodell*** *werden Bonds B_T, Fonds-Anteile X und Standardverträge $E^i_{x,T}$ ausschließlich zu den Zeitpunkten $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T$ gehandelt. Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $B_T(t_k) > 0, X_{t_k}$ und $E^i_{x,T}(t_k)$, die mit B_T diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $\hat{B}_T(t_k) = \frac{B_T(t_k)}{B_T(t_k)} = 1, \hat{X}_{t_k} = \frac{X_{t_k}}{B_T(t_k)}$ und $\hat{E}_{t_k} = \frac{E^i_{x,T}(t_k)}{B_T(t_k)}$ für $k \in \{0, \dots, N\}$bezeichnet.*

Eine Handelsstrategie besteht aus den Komponenten: $(\eta_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}, (\xi^1_{t_k})_{k\in\{1,\dots,N\}}$ und $(\xi^2_{t_k})_{k\in\{1,\dots,N\}}$.

$\hat{X}_{t_k}$ und $\hat{E}_{t_k}$ werden als an $(\mathcal{F}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ adaptierte diskrete stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aus Kapitel 1 modelliert.

Dabei ist T die Laufzeit des fondsgebundenen Standardvertrages, also ein fester Zeitpunkt. Die Anzahl der Handelszeitpunkte ist $N+1$. Die Notation ist so gewählt, dass im Abschnitt 3.2.2 die Anzahl der Handelszeitpunkte $N+1$ bei festem T gegen Unendlich gehen kann.

Zuerst nehmen wir an, die Preisprozesse seinen stark orthogonale Martingale.

Annahme 3.26 *$(\hat{E}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ und $(\hat{X}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ sind stark orthogonale Martingale mit $\mathbb{E}\left((\hat{E}_{t_k})^2\right) < \infty$ und $\mathbb{E}\left((\hat{X}_{t_k})^2\right) < \infty$ für $k \in \{0, \dots, N\}$.*

Unter dieser Annahme lässt sich mit Satz 3.9 die risikominimierende Strategie angeben.

Lemma 3.27 *Unter der Annahme 3.26 ist die folgende Strategie risikominimierend im Mehrperiodenmodell:*

$$
\begin{aligned}
V_0^* = \eta^*_{t_0} &= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} \\
\eta^*_{t_{k+1}} &= \hat{X}_{t_{k+1}}\hat{E}_{t_{k+1}} - \hat{E}_{t_k}\hat{X}_{t_{k+1}} - \hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_{k+1}} \\
\xi^{1*}_{t_{k+1}} &= \hat{E}_{t_k} \\
\xi^{2*}_{t_{k+1}} &= \hat{X}_{t_k}
\end{aligned}
$$

für $k \in \{0, \dots, N-1\}$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{t_k}(\eta^*, \xi^*) &= \hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_k} \\
R_0(\eta^*, \xi^*) &= Var\left(\sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k}\right)
\end{aligned}
$$

Beweis:

Wir beweisen dieses Lemma, indem wir die diskrete Kunita-Watanabe Zerlegung von $(\hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ wie in Lemma 3.8 angeben. $(\hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ ist nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung ein quadratintegrierbares Martingal:
$\mathbb{E}\left((\hat{E}_{t_k}\hat{X}_{t_k})^2\right) = |<\hat{E}_{t_k}^2, \hat{X}_{t_k}^2>| \leq \sqrt{<\hat{E}_{t_k}, \hat{E}_{t_k}><\hat{X}_{t_k}, \hat{X}_{t_k}>} < \infty.$
Die Kunita-Watanabe Zerlegung ist in unserem Fall eindeutig. Damit ergibt sich nach Satz 3.9 die risikominimierende Strategie. In unserem Fall ist der Preisprozess zweidimensional, d aus Abschnitt 3.1 ist hier gleich zwei.

Wir setzen $\Delta\hat{X}_{t_0} = \hat{X}_{t_0}$, $\Delta\hat{E}_{t_0} = \hat{E}_{t_0}$.
$\hat{X}\hat{E}$ lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned}
\hat{X}\hat{E} &= (\Delta\hat{X}_{t_0} + \ldots + \Delta\hat{X}_{t_N})(\Delta\hat{E}_{t_0} + \ldots + \Delta\hat{E}_{t_N}) \\
&= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_j} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=j+1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{i=0}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i} \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{i-1} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{i=0}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i} \\
&= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} + \sum_{k=1}^{N} \hat{X}_{t_{k-1}}\Delta\hat{E}_{t_k} + \sum_{k=1}^{N} \hat{E}_{t_{k-1}}\Delta\hat{X}_{t_k} + \sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Lemma 3.8:

$$\begin{aligned}
M_0 &:= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0}, \\
\xi_{t_k} &:= \begin{pmatrix} \hat{X}_{t_{k-1}} \\ \hat{E}_{t_{k-1}} \end{pmatrix} \text{ ist vorhersehbar,} \\
\hat{L}^*_{t_k} &:= \sum_{i=1}^{k} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i}
\end{aligned}$$

ist dies die Kunita-Watanabe Zerlegung von $(M_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}} := (\hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$, da $(\hat{L}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ stark orthogonal zu $(\hat{X}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ und zu $(\hat{E}_{t_k})_{k\in\{0,\dots,N\}}$ ist:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}((\Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k})\Delta\hat{X}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ \mathbb{E}((\Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k})\Delta\hat{E}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\Delta\hat{X}_{t_k}^2|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\mathbb{E}(\Delta\hat{E}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ \mathbb{E}(\Delta\hat{X}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\mathbb{E}(\Delta\hat{E}_{t_k}^2|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also ist (3.5) die diskrete Kunita-Watanabe Zerlegung von $\hat{X}\hat{E}$.

Nach Satz 3.9 ist damit die risikominimierende Strategie gegeben durch:

$\eta_0 = \hat{V}_0(\eta, \xi) = \hat{X}_0\hat{E}_0$

$\xi_{t_k}^{1*} = \hat{E}_{t_{k-1}}$

$\xi_{t_k}^{2*} = \hat{X}_{t_{k-1}}$

$\hat{V}_{t_k} = \hat{X}_0\hat{E}_0 + \sum_{j=1}^{k}\hat{X}_{t_{j-1}}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{i=1}^{k}\hat{E}_{t_{i-1}}\Delta\hat{X}_{t_i} + \sum_{i=1}^{k}\Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i} = \hat{X}_{t_k}\hat{E}_{t_k}$

mit

$\hat{V}_{t_N} = \hat{X}\hat{E}$ und $V_{t_N} = XE$ da $B_T = 1$.

Zur Eindeutigkeit:

$\{\Delta\hat{X}_{t_j}, \Delta\hat{E}_{t_j}$ mit $j \in \{0,\dots,N\}\}$ ist eine Menge von in $\mathcal{L}^2$ orthogonalen Elementen. $\xi_{t_j}^1$ ist die Projektion von $\hat{X}\hat{E}$ auf $\Delta\hat{X}_{t_j}$, $\xi_{t_j}^2$ die Projektion von $\hat{X}\hat{E}$ auf $\Delta\hat{E}_{t_j}$, und damit eindeutig.

□

Die Annahme, dass der Kurs eines Fonds-Anteiles ein Martingal ist, ist auch im diskontierten Markt sehr stark und wenig realistisch, da sich Marktteilnehmer risikoavers verhalten und somit nur risikobehaftete Geldanlagen kaufen, deren erwartete Rendite höher ist als die der risikolosen Geldanlagen.

Wir lassen diese Annahme fallen.

Die Formel (3.5) bleibt gültig, nur ist L^* im Allgemeinen nicht mehr stark orthogonal zu den Preisprozessen.

In unserem Modell sind $\hat{X}$ und $\hat{E}$ diskrete adaptierte stochastische Prozesse und lassen sich damit zerlegen in:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t_k} &= \hat{X}_{t_0} + \hat{M}_{t_k}^1 + \hat{A}_{t_k}^1 \\ \hat{E}_{t_k} &= \hat{E}_{t_0} + \hat{M}_{t_k}^2 + \hat{A}_{t_k}^2 \end{aligned}$$

wobei die $\hat{M}_{t_k}$ und $\hat{A}_{t_k}$ definiert sind wie bei der Zerlegung von Doob:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t_k}^1 &:= \mathbb{E}(\hat{X}_{t_k} - \hat{X}_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \text{ vorhersehbar} \\ \hat{M}_{t_k}^1 &:= \hat{X}_{t_k} - \hat{X}_{t_0} - \mathbb{E}(\hat{X}_{t_k} - \hat{X}_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \text{ ein Martingal} \\ \hat{A}_{t_k}^2 &:= \mathbb{E}(\hat{E}_{t_k} - \hat{E}_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \text{ vorhersehbar} \\ \hat{M}_{t_k}^2 &:= \hat{E}_{t_k} - \hat{E}_{t_0} - \mathbb{E}(\hat{E}_{t_k} - \hat{E}_{t_{k-1}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \text{ ein Martingal} \end{aligned}$$

Annahme 3.28 *$\hat{X}$ und $\hat{E}$ sind zwei stark orthogonale adaptierte stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}\left((\hat{E}_{t_k})^4\right) < \infty$ und $\mathbb{E}\left((\hat{X}_{t_k})^4\right) < \infty$ und $\sum_{i=1}^{N}\Delta\hat{A}_{t_i}^1\Delta\hat{A}_{t_i}^2$ ist $\mathcal{F}_0$-messbar.*

Wir nehmen also nur noch an, dass die Zuwächse der Preisprozesse unkorreliert sind und dass die Größe $\sum_{i=1}^{N}\Delta\hat{A}_{t_i}^1\Delta\hat{A}_{t_i}^2$ bereits zur Zeit Null bekannt ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn der Trend als deterministische Funktion modelliert wird.

Lemma 3.29 *Unter Annahme 3.28 ist die folgende Strategie lokal risikominimierend im diskontierten Markt:*

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0^* = \eta_0^* &= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} - \sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{A}_{t_k}^1 \Delta\hat{A}_{t_k}^2 \\
\xi_{t_{k+1}}^{1*} &= \hat{E}_{t_k} + \Delta\hat{A}_{t_{k+1}}^2 \\
\xi_{t_{k+1}}^{2*} &= \hat{X}_{t_k} + \Delta\hat{A}_{t_{k+1}}^1 \\
\hat{V}_{t_k}^* &= \eta_0^* + \sum_{j=1}^{k}(\hat{X}_{t_{j-1}} + \Delta\hat{A}_{t_j}^1)\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{j=1}^{k}(\hat{E}_{t_{j-1}} + \Delta\hat{A}_{t_j}^2)\Delta\hat{X}_{t_j} + \hat{L}_{t_k}^* \\
\hat{L}_k^* &= \sum_{i=1}^{k} \Delta\hat{M}_{t_i}^1 \Delta\hat{M}_{t_i}^2
\end{aligned}$$

Damit ist:

$\eta_{t_{k+1}}^* = \hat{V}_{t_k} - \xi_{t_{k+1}}^{1*}\hat{E}_{t_{k+1}} - \xi_{t_{k+1}}^{2*}\hat{X}_{t_{k+1}}$

$R_0^* = Var(\sum_{i=1}^{N} \Delta\hat{M}_{t_i}^1 \Delta\hat{M}_{t_i}^2)$

Beweis:

Der Prozess $\hat{L}_{t_k}^* = \sum_{j=1}^{k} \Delta\hat{X}_{t_j}\Delta\hat{E}_{t_j}$ aus dem Lemma 3.27 lässt sich weiter zerlegen:

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{X}_{t_j}\Delta\hat{E}_{t_j} &= (\Delta\hat{M}_{t_j}^1 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1)(\Delta\hat{M}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^2) \\
&= \Delta\hat{M}_{t_j}^1\Delta\hat{M}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1\Delta\hat{M}_{t_j}^2 + \Delta\hat{M}_{t_j}^1\Delta\hat{A}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1\Delta\hat{A}_{t_j}^2 \\
&= \Delta\hat{M}_{t_j}^1\Delta\hat{M}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1(\Delta\hat{E}_{t_j} - \Delta\hat{A}_{t_j}^2) + (\Delta\hat{X}_{t_j} - \Delta\hat{A}_{t_j}^1)\Delta\hat{A}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1\Delta\hat{A}_{t_j}^2 \\
&= \Delta\hat{M}_{t_j}^1\Delta\hat{M}_{t_j}^2 + \Delta\hat{A}_{t_j}^1\Delta\hat{E}_{t_j} + \Delta\hat{X}_{t_j}\Delta\hat{A}_{t_j}^2 - \Delta\hat{A}_{t_j}^1\Delta\hat{A}_{t_j}^2
\end{aligned}$$

mit $\Delta\hat{M}_{t_0} := 0$, $\Delta\hat{A}_{t_0} := \hat{X}_0$.

Die beiden mittleren Summanden können noch gehedgt werden, der erste und der letzte nicht. Mit (3.5) und der obigen Darstellung für $\Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{X}\hat{E} &= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} - \sum_{k=1}^{N}\Delta\hat{A}_{t_k}^1\Delta\hat{A}_{t_k}^2 + \sum_{k=1}^{N}(\hat{X}_{t_{k-1}} + \Delta\hat{A}_{t_k}^1)\Delta\hat{E}_{t_k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}(\hat{E}_{t_{k-1}} + \Delta\hat{A}_{t_k}^2)\Delta\hat{X}_{t_k} + \sum_{k=1}^{N}\Delta\hat{M}_{t_k}^1\Delta\hat{M}_{t_k}^2 \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Die Zerlegung von $\hat{X}\hat{E}$ aus Satz 3.11 ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned}
c &:= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} - \sum_{k=1}^{N} \Delta A^1_{t_k}\Delta A^2_{t_k} \text{ ist } \mathcal{F}_0\text{-messbar,} \\
\xi_{t_k} &:= \begin{pmatrix} \hat{X}_{t_{k-1}} + \Delta A^1_{t_k} \\ \hat{E}_{t_{k-1}} + \Delta A^2_{t_k} \end{pmatrix} \text{ ist vorhersehbar,} \\
\hat{L}_{t_k} &:= \sum_{j=1}^{k} \Delta\hat{M}^1_{t_j}\Delta\hat{M}^2_{t_j} \text{ ist stark orthogonal zu } X \text{ und } E\text{:}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}((\Delta\hat{M}^1_{t_k}\Delta\hat{M}^2_{t_k})\Delta\hat{X}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ \mathbb{E}((\Delta\hat{M}^1_{t_k}\Delta\hat{M}^2_{t_k})\Delta\hat{E}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(\Delta\hat{M}^1_{t_k}\Delta\hat{X}_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\mathbb{E}(\Delta\hat{M}^2_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ \mathbb{E}(\Delta\hat{M}^1_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\mathbb{E}(\Delta\hat{E}_{t_k}\Delta\hat{M}^2_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Bemerkung 3.30

1. *Die hier berechneten $V^*_{t_0}$ sind keine Preise für den fondsgebundenen Standardvertrag. Sie sind lediglich die Preise der risikominimierenden Hedges zur Zeit $t = 0$. Ein Preis kann als $V^*_{t_0}$ + Risikoprämie für L^*_N berechnet werden. In der oben benutzten Norm wird L^*_N kleiner mit der Anzahl der gehandelten Produkte im Einperiodenmodell und mit der Anzahl der Handelszeitpunkte im Mehrperiodenmodell, so dass der so berechnete Preis entsprechend fallen würde.*

2. *Konvergiert $\sum_{i=1}^{N} \Delta\hat{A}^1_{t_i}\Delta\hat{A}^2_{t_i} \to 0$ für $N \to \infty$, dann ist die obige Forderung, dass $\sum_{i=1}^{N} \Delta\hat{A}^1_{t_i}\Delta\hat{A}^2_{t_i}$ $\mathcal{F}_0$-messbar sein soll, im Grenzfall stets erfüllt.*

3. *Konvergiert $\Delta\hat{A}^1_{k+1}$ beziehungsweise $\Delta\hat{A}^2_{k+1}$ fast sicher gegen Null für $N \to \infty$, dann sind im Grenzfall die Komponenten ξ^1 und ξ^2 der risikominimierenden Strategien aus Lemma 3.27 und aus Lemma 3.29 identisch.*

4. *Konvergiert $Var(\sum_{i=1}^{N} \Delta\hat{M}^1_{t_i}\Delta\hat{M}^2_{t_i})$ gegen Null, dann konvergiert die (lokal) risikominimierende Strategie gegen eine replizierende Strategie. Das inhärente Risiko ist dann im Grenzfall gleich Null.*

Beispiel 3.31 (Hedgen deterministischer Preisprozesse) *Wir zeigen an einem einfachen Beispiel, in dem die Preisprozesse deterministisch sind, dass die Strategien aus Lemma 3.27 und aus Lemma 3.29 in diesem Beispiel für $N \to \infty$ replizierende Strategien sind. Da die Preisprozesse nicht springen, sind die Strategien aus aus Lemma 3.27 und aus Lemma 3.29 im Grenzfall identisch.*

Wir setzen $t_j = \frac{j}{N}T$ für $j \in \{0, \dots, N\}$ und $\hat{X}_{t_j} := t_j, \hat{E}_{t_j} := t_j$. (Also ein zum Martingalfall sehr unterschiedlicher Fall)

N ist die Anzahl der Handelszeitpunkte.

Dann ist $\Delta\hat{M} = 0$, $\Delta\hat{A} = \Delta\hat{E} = \Delta\hat{X} = \frac{T}{N}$. Der in Lemma 3.27 konstruierter Hedge liefert dann folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_T &= \hat{X}_0\hat{E}_0 + \sum_{j=1}^{N} \hat{X}_{t_{j-1}} \frac{T}{N} + \sum_{i=1}^{N} \hat{E}_{t_{i-1}} \frac{T}{N} \\
&= \sum_{j=1}^{N} t_{j-1} \frac{T}{N} + \sum_{i=1}^{N} t_{i-1} \frac{T}{N} \\
&= \frac{T^2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{T^2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} i \\
&= T^2 - \frac{T^2}{N} \to T^2 \text{ für } N \to \infty
\end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ konvergiert der Wert des Hedges gegen den Wert der Auszahlung mit Rate $\frac{1}{N}$.

Weiter beobachten wir, dass der Hedgefehler $\hat{L}^*$ durch das Produkt der Sprünge der Preisprozesse entsteht. Nun kann man sich einen Markt vorstellen, an dem die Preise täglich einmal festgelegt werden, die Preise für die Fonds-Anteile mittags um 12:00, die für die Standardverträge morgens um 9:00. Zu diesen Preisen werden diese Papiere dann jeweils 24 Stunden gehandelt. Legt man zwei Handelszeitpunkte pro Tag fest, einen zwischen 9:00 und 12:00, den anderen zwischen 12:00 und 24:00, so springt zu jedem Handelszeitpunkt genau einer der beiden Prozesse, der andere bleibt konstant. Es ist entweder $\Delta X_{t_k} = 0$ oder $\Delta E_{t_k} = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$. Der Hedgefehler $\sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k}$ ist damit gleich Null.

Annahme 3.32 *$\Delta\hat{X}_{t_k} = 0$ für k gerade, $\Delta\hat{E}_{t_k} = 0$ für k ungerade.*

Satz 3.33 *Unter der Annahme 3.32 ist der fondsgebundene Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ replizierbar. Die replizierende Strategie ist:*

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0(\eta^*, \xi^*) = \eta_0^* &= \hat{X}_0\hat{E}_0 \\
\xi_{t_k}^{1*} &= \hat{E}_{t_{k-1}} \\
\xi_{t_k}^{2*} &= \hat{X}_{t_{k-1}} \\
\eta_{t_k}^* &= \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} + \sum_{j=1}^{k} \hat{X}_{t_{j-1}}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{j=1}^{k} \hat{E}_{t_{j-1}}\Delta\hat{X}_{t_j} - \xi_{t_k}^{1*}\hat{X}_{t_k} - \xi_{t_k}^{2*}\hat{E}_{t_k}
\end{aligned}$$

Damit ist der No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages zur Zeit $t = 0$ gleich dem Wert der replizierenden Strategie zur Zeit $t = 0$:

$V_0(\eta^*, \xi^*) = \frac{X_0 E_0}{B_T(0)}$ *und*

$$V_T(\eta^*, \xi^*) = \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} + \sum_{j=1}^{k} \hat{X}_{t_{j-1}}\Delta\hat{E}_{t_j} + \sum_{j=1}^{k} \hat{E}_{t_{j-1}}\Delta\hat{X}_{t_j}$$

Beweis:

Wegen $\sum_{k=1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_k}\Delta\hat{E}_{t_k} = 0$ gilt mit (3.5):

$$\hat{X}\hat{E} = \hat{X}_{t_0}\hat{E}_{t_0} + \sum_{k=1}^{N} \hat{X}_{t_{k-1}}\Delta\hat{E}_{t_k} + \sum_{k=1}^{N} \hat{E}_{t_{k-1}}\Delta\hat{X}_{t_k}$$

□

Beispiel 3.34 *Die beiden folgenden Situationen sollen den obigen Satz veranschaulichen. Wir nehmen an, der Preis eines Fonds-Anteils zu einem Zeitpunkt kurz vor t_0 sei gleich $X_{t_0^-}$, der Preis des Standardvertrages gleich $E_{t_0^-}$. Weiter nehmen wir an, wir hätten ein Portfolio, das zur Zeit t_0^- aus $X_{t_0^-}$ Standardverträgen und aus $E_{t_0^-}$ Fonds-Anteilen und $-X_{t_0^-}E_{t_0^-}$ Bonds mit Wert 1 besteht. Damit hat das Portfolio kurz vor t_0 den Wert $X_{t_0^-}E_{t_0^-}$. Die folgenden Situationen zeigen:*

1. *Wenn der Preis des Standardvertrages zur Zeit t_0 springt und der Wert des Fonds-Anteils zur Zeit t_0 nicht, dann ist der Wert des Portfolios nach dem Sprung zur Zeit t_0 immer noch gleich dem Produkt der Preise von Fonds-Anteil und Standardvertrag $X_{t_0}E_{t_0}$.*

   Gleiches gilt, wenn der Preis des Fonds-Anteils zur Zeit t_0 springt und der Preis des Standardvertrages zur Zeit t_0 nicht springt.

2. *Wenn beide Preise zur Zeit t_0 gleichzeitig springen, dann ist der Wert des Portfolios nach dem Sprung nicht mehr gleich dem Produkt der Preise von Fonds-Anteil und Standardvertrag. Springen beide in die selbe Richtung, so erleidet die Versicherung einen Verlust, springen sie in entgegengesetzte Richtungen, so erwirtschaftet sie einen Gewinn.*

Situation 1: Wenn einer der beiden Prozesse springt, der andere nicht, so bleibt der Wert des Hedge-Portfolios vor und nach dem Sprung gleich dem No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages:

Angenommen, der Versicherte stirbt zum Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$. Dann springt der Wert des Standardvertrages auf Null: $E_{t_0-} = e \in (0, 1)$, $E_{t_0} = 0$. Der Wert des Fonds-Anteils springt zum Zeitpunkt t_0 nicht, d.h. $X_{t_0-} = X_{t_0} = x > 0$

Der Wert unseres Portfolios vor dem Sprung beträgt ex, dies ist der No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages zur Zeit t_0^-:

kurz vor t_0:

Portfolio der Versicherung	Wert pro Stück	Wert insgesamt	Wert des Portfolios
x Standardverträge	e	xe	
e Fonds-Anteile	x	xe	
$-xe$ Bonds	1	$-xe$	
			xe

Der Wert unseres Portfolios nach dem Sprung beträgt 0, also wieder gleich dem No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages zur Zeit t_0:

zur Zeit t_0:

Portfolio der Versicherung	Wert pro Stück	Wert insgesamt	Wert des Portfolios
x Standardverträge	0	0	
e Fonds-Anteile	x	xe	
$-xe$ Bonds	1	$-xe$	
			0

Situation 2: Wenn beide Preise gleichzeitig springen, entspricht das der Situation im Einperiodenmodell, und man kann kein Portfolio finden, dessen Wert vor und nach dem Sprung gleich dem No-Arbitrage Preis des fondsgebundenen Standardvertrages ist. Dabei entsteht für die Versicherung mit dieser Strategie ein Gewinn, wenn beide in entgegengesetzte Richtungen springen, ein Verlust, wenn beide in die selbe Richtung springen.

Kurz vor dem Zeitpunkt t_0 ist ein Fonds-Anteil x Wert, der Standardvertrag e.

kurz vor t_0:

Portfolio der Versicherung	Wert pro Stück	Wert insgesamt	Wert des Portfolios
x Standardverträge	e	xe	
e Fonds-Anteile	x	xe	
$-xe$ Bonds	1	$-xe$	
			xe

Zum Zeitpunkt t_0 stirbt der Versicherte, der Preis des Standardvertrages fällt auf Null, der Wert eines Fonds-Anteils springt auf $1.5x$.

zur Zeit t_0

Portfolio der Versicherung	Wert pro Stück	Wert insgesamt	Wert des Portfolios
x Standardverträge	0	0	
e Fonds-Anteile	$1.5x$	$1.5xe$	
$-xe$ Bonds	1	$-xe$	
			$0.5xe$

Hier verbucht die Versicherung einen Gewinn von $0.5xe = -(1.5x-x)(0-e) = -\Delta X \Delta E$.

Springt dagegen der Kurs eines Fonds-Anteils zum Zeitpunkt t_0 nach unten, sagen wir auf $\frac{x}{2}$, dann tritt folgende Situation ein:

zur Zeit t_0

Portfolio der Versicherung	Wert pro Stück	Wert insgesamt	Wert des Portfolios
x Standardverträge	0	0	
e Fonds-Anteile	$\frac{x}{2}$	$\frac{xe}{2}$	
$-xe$ Bonds	1	$-xe$	
			$-\frac{xe}{2}$

Die Versicherung hat einen Verlust in Höhe von $-\frac{xe}{2} = -(x - \frac{x}{2})(0 - e) = -\Delta X \Delta E$ erlitten.

Der Gewinn bzw. Verlust für die Versicherung ist genau der nicht-gehedgte Teil, $-\Delta X \Delta E$

3.2.2 Zeitkontinuierliches Hedgen und ein No-Arbitrage Preis

In diesem Kapitel wird untersucht, was mit dem Hedge aus Abschnitt 3.2.1 passiert, wenn die Anzahl der Handelszeitpunkte $N+1$ zwischen $t=0$ und $t=T$ gegen Unendlich geht. Unter der Annahme 3.37 ist $E^i_{x,T,Fonds}$ dann replizierbar. Der No-Arbitrage Preis wird der selbe sein wie der in Satz 3.33.

Definition 3.35 *Im* ***zeitkontinuierlichen Modell*** *werden Bonds B_T, Fonds-Anteile X und Standardverträge $E^i_{x,T}$ zu den Zeitpunkten $t \in [0,T]$ gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $B_T(t) > 0, X_t$ und $E^i_{x,T}(t)$, die mit B_T diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $\hat{B}_T(t) = \frac{B_T(t)}{B_T(t)} = 1, \hat{X}_t = \frac{X_t}{B_T(t)}$ und $\hat{E}_t = \frac{E^i_{x,T}(t)}{B_T(t)}$ für $t \in [0,T]$ bezeichnet.

Eine Handelsstrategie besteht aus den Komponenten:
$(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Bonds B_T,
$(\xi^1_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Fonds-Anteile X und
$(\xi^2_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Standardverträge $E^i_{x,T}$.

$\hat{X}_{t_j}$ und $\hat{E}_{t_j}$ werden als an $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptierte zeitkontinuierliche stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aus Kapitel 1 modelliert.

Annahme 3.36 *Die Preisprozesse $(\hat{X}_t)_{t\in[0,T]}$ und $(\hat{E}_t)_{t\in[0,T]}$ sind Semimartingale, siehe Kapitel 3.1.2.*

Geht die Anzahl der Handelszeitpunkte $N+1$ so gegen Unendlich, dass $\max\limits_{n\in\{1,\dots,N\}} |t_n - t_{n-1}| \to 0$ geht, dann passiert mit der Darstellung (3.5) folgendes:

$\hat{L}^*_N$ konvergiert gegen die quadratische Kovariation der Prozesse $\hat{X}$ und $\hat{E}$:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta\hat{X}_{t_i}\Delta\hat{E}_{t_i} \to [\hat{X},\hat{E}]_T \text{ für } N \to \infty \tag{3.7}$$

nach Protter [31], Theorem 23.

Und die Summen nach Protter [31], Theorem 21:

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{X}_{t_{j-1}}\Delta\hat{E}_{t_j} \to \int_0^T \hat{X}_{t-}d\hat{E}(t) \text{ für N } \to \infty$$

und

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{E}_{t_{j-1}}\Delta\hat{X}_{t_j} \to \int_0^T \hat{E}_{t-}d\hat{X}(t) \text{ für N } \to \infty$$

gleichmäßig auf dem kompakten Intervall $[0,T]$ in Wahrscheinlichkeit, falls $\hat{X}_t$ und $\hat{E}_t$ lokal beschränkt sind. So dass wir die Formel

$$\hat{X}_T\hat{E}_T = \hat{X}_0\hat{E}_0 + [\hat{X},\hat{E}]_T + \int_0^T \hat{X}_{t-}d\hat{E}(t) + \int_0^T \hat{E}_{t-}d\hat{X}(t) \tag{3.10}$$

erhalten, die nichts anderes als die Produktformel für Semimartingale, siehe zum Beispiel Protter [31], Kapitel II.6 oder Jacod und Shiryaev [14] §4e, oder die *Itô-Formel* für $f(x,e) = xe$ ist.

Ist $[X,E]_T$ $\mathcal{F}_0$-messbar, dann haben wir mit der Interpretation aus Kapitel 3.1.2 eine replizierende Strategie.

Annahme 3.37 *Die diskontierten Preisprozesse $\hat{X}_t$ und $\hat{E}_t$ sind von endlicher Variation auf dem kompakten Intervall [0,T] und springen nicht gleichzeitig (außer bei Null).*

Unter dieser Annahme ist $[\hat{X},\hat{E}]_t = 0$ für alle t, siehe Jacod und Shiryaev [14], Proposition 4.49. Die Summe (3.7) konvergiert dann gegen Null.

Lemma 3.38 *Unter der Annahme 3.37 ist der fondsgebundene Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ mit Laufzeit T im zeitkontinuierlichen Modell mit stochastischem Zins replizierbar. Der Wert der replizierenden Strategie $V_0^T(\eta^*,\xi^*)$ zur Zeit 0 und die replizierende Strategie $(\eta^*,\xi^{1*},\xi^{2*})$ sind:*

$$\begin{aligned}
V_0^T(\eta^*,\xi^*) = \eta_0^* &= \tfrac{B_T(T)}{B_0(T)}X_0E_0\\
\xi_t^{1*} &= \tfrac{B_T(T)}{B_T(t-)}E_{t-}\\
\xi_t^{2*} &= \tfrac{B_T(T)}{B_T(t-)}X_{t-}\\
V_t^T(\eta^*,\xi^*) &= B_T(T)\hat{X}_0\hat{E}_0 + \int_0^t \xi_s^{2*}d\hat{X}_s + \int_0^t \xi_s^{1*}d\hat{E}_s\\
\eta_t^* &= V_t^T(\eta^*,\xi^*) - \xi_t^{1*}\hat{X}_t - \xi_t^{2*}\hat{E}_t
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{B_T(T)}{B_T(0)}X_0E_0$$

der No-Arbitrage Preis für $E^i_{x,T,Fonds}$ zur Zeit $t=0$.

Beweis:

Nach (3.10) gilt unter der Annahme 3.37:

$$\hat{X}_T\hat{E}_T = \hat{X}_0\hat{E}_0 + \int_0^T \hat{X}_{t-}d\hat{E}_t + \int_0^T \hat{E}_{t-}d\hat{X}_t \tag{3.12}$$

Die linke Seite ist hier doppelt diskontiert. Wir multiplizieren mit $B_T(T)(=1)$ durch:

$$\widehat{X_T E_T} = B_T(T)\hat{X}_0\hat{E}_0 + \int\limits_0^T B_T(T)\hat{X}_{t-}d\hat{E}_t + \int\limits_0^T B_T(T)\hat{E}_{t-}d\hat{X}_t \qquad (3.13)$$

Dabei bezeichnet $\widehat{X_T E_T} := \frac{X_T E_T}{B_T(T)}$. Damit ist nach Definition 3.18 der fondsgebundene Standardvertrag $E^i_{x,T,Fonds}$ erreichbar und

$\xi^{1*}_t := \hat{E}_{t-}$

$\xi^{2*}_t := \hat{X}_{t-}$

eine replizierende Strategie. Ihr Wert zur Zeit t ist:

$\hat{V}_t = B_T(T)\hat{X}_0\hat{E}_0 + \int\limits_0^t B_T(T)\hat{X}_{s-}d\hat{E}_s + \int\limits_0^t B_T(T)\hat{E}_{s-}d\hat{X}_s$

Und damit erfüllt die Strategie nach (3.13):

$\hat{V}_T = \widehat{X_T E_T}$ und $V_T = E^i_{x,T,Fonds}$.

□

Satz 3.39 (Der No-Arbitrage Preis des allgemeinen fondsgebundenen Vertrages)
Unter der Annahme 3.37 hat der allgemeine fondsgebundene Vertrag

$$V^i_{x,T,Fonds} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_{T-1} & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_{T-1} & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

nach Kapitel 2.3 Beispiel 2.18 den selben No-Arbitrage Preis wie

$$\begin{bmatrix} e_0 + d_1 & e_1 - d_1 + d_2 & \dots & e_{T-1} - d_{T-1} + d_T & e_T - d_T \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X .$$

Der No-Arbitrage Preis ist:

$$(e_0 + d_1)V^0_0 + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t - d_t + d_{t+1})V^t_0 + (e_T - d_T)V^T_0$$

mit $V^t_0 := \frac{B_T(T)}{B_0(T)}X_0E^i_{x,t}(0)$ *wie in Lemma 3.38.*
Der Hedge zur Zeit t besteht aus der entsprechenden Summe der Hedges aus Lemma 3.38.

Beweis:

$E^i_{x,t,Fonds}(t)$ aus Korollar 2.23 wird durch den No-Arbitrage Preis V^t_0 aus Lemma 3.38 ersetzt. □

Bemerkung 3.40 *Preise von Fonds-Anteilen werden täglich einmal festgelegt. Siehe zum Beispiel www.comdirect.de, Kurs/Suche: DWS Wachstum. Somit ist der Preisprozess eines Fonds-Anteils ein stückweise konstanter Prozess mit einem Sprung pro Tag.*

Der Preisprozess des Standardvertrages wird sich hauptsächlich aufgrund von Zinsschwankungen ändern, Sterbewahrscheinlichkeiten werden seltener als einmal pro Jahre neu geschätzt. Sie werden also ähnlich wie die Preise von sehr gut gerateten Staatsanleihen aussehen, da wir das Kreditrisiko vernachlässigt haben. Die Preise von Bundesanleihen werden je nach Restlaufzeit unterschiedlich oft, aber stets seltener als einmal täglich festgelegt, siehe zum Beispiel www.comdirect.de, Kurs/Suche: Bundesanleihen.

Es ist zu beachten: Wenn der Preisprozess springt, der zum Diskontieren verwendet wird (das Numeraire), so springen beide diskontierten Preisprozesse gleichzeitig.

Eine Annahme von der Art: Die Prozesse steigen beziehungsweise fallen tendenziell "unabhängig voneinander" wird nicht benötigt. Dies ist wichtig, da empirisch die Sterblichkeitsverbesserung und das Wirtschaftswachstum und somit auch die Aktienpreise tendenziell gleichzeitig steigen beziehungsweise fallen. Je reicher das Land, desto länger leben die Einwohner. Wächst die Wirtschaft kräftig und steigen die Aktien, könnte sich die Sterblichkeit schneller verbessern. In Zeiten wirtschaftlicher Depression könnte sich die Lebenserwartung sogar vermindern, wie dies in Russland beobachtet wurde, siehe The Human Mortality Database [36].

3.3 Klassische Lebensversicherungsverträge

3.3.1 Zeitdiskretes Hedgen

Der reine Risikovertrag $D^i_{x,T}$ für das Jahr $(T-1, T]$ ist ein Derivat auf dem Markt für klassische Verträge mit Laufzeit $\leq T$, siehe Beispiel 2.10 a), Kapitel 2.2. Wir suchen jetzt einen Hedge für $D^i_{x,T}$.

Eine erste Idee könnte sein, den Zins der kommenden Jahre zu schätzen und den Hedge aus Kapitel 2.3 als statischen Hedge für $D^i_{x,T}$ zu verwenden. Das Lemma 3.41 gibt den Hedgefehler für diesen Fall an. Am Beispiel 3.42 wird ein Fall gezeigt, in dem dieser statische Hedge ungeeignet scheint.

Analog zu Kapitel 3.2.1 kann ein (lokal) risikominimierender Hedge angegeben werden, unter einer Annahme an die Preisprozesse.

Lemma 3.41 *Wird in einem Markt mit stochastischem Zins der allgemeine klassische Vertrag $V^i_{x,T}$ verkauft und durch die Linearkombination (2.18) von Standardverträgen aus Kapitel 2.3 mit geschätzten $\hat{B}_t(t-1) = (1+\hat{r}_{t-1})^{-1}$ statisch gehedgt, dann entstehen bei tatsächlich realisierten Bondpreisen $B_t(t-1) = (1+r_{t-1})^{-1} = (1+\hat{r}_{t-1}+\delta_{t-1})^{-1}$ folgende, auf den Zeitpunkt Null diskontierte zufällige Kosten 1. Ordnung:*

$$-\sum_{t=2}^{T} d_t \frac{\delta_{t-1}}{(1+r_{t-1})^2} E^i_{x,t}(0)$$

Dabei ist $\hat{r}_{t-1}$ der für das Jahr $(t-1,t]$ geschätzte Zins und $\delta_{t-1} := r_{t-1} - \hat{r}_{t-1}$ der zufällige Schätzfehler.
Dabei sind die d_t in der Formel die Eintragungen aus dem Vertrag $V^i_{x,T}$.

Beweis: Die Differenz zwischen tatsächlicher und geschätzter Auszahlung, diskontiert auf den Zeitpunkt Null, ist nach Korollar 2.21:

$$\begin{aligned}
& (e_0 + d_1 B_1(0))E^i_{x,0}(0) + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1}B_{t+1}(t) - d_t)E^i_{x,t}(0) + (e_T - d_T)E^i_{x,T}(0) \\
- \quad & (e_0 + d_1 B_1(0))E^i_{x,0}(0) + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + d_{t+1}\hat{B}_{t+1}(t) - d_t)E^i_{x,t}(0) + (e_T - d_T)E^i_{x,T}(0) \\
= \quad & \sum_{t=1}^{T-1} d_{t+1}\left(\frac{1}{1+r_t} - \frac{1}{1+\hat{r}_t}\right)E^i_{x,t}(0) \\
\overset{\text{1.Ordnung}}{=} \quad & -\sum_{t=1}^{T-1} d_{t+1}\frac{\delta_{t-1}}{(1+r_t)^2}E^i_{x,t}(0)
\end{aligned}$$

in erster Ordnung, da:

$$\frac{1}{1+\hat{r}_{t-1}+\delta_{t-1}} = \frac{1}{1+\hat{r}_{t-1}} - \frac{\delta_{t-1}}{(1+\hat{r}_{t-1})^2} + \frac{\delta^2_{t-1}}{(1+\hat{r}_{t-1})^3} - \frac{\delta^3_{t-1}}{(1+\hat{r}_{t-1})^4} + \dots$$

$B_1(0)$ ist zur Zeit Null bekannt und muss nicht geschätzt werden.

□

Am stärksten wirkt sich dieser Effekt auf reine Todesfallversicherungen für junge Versicherungsnehmer aus:

Beispiel 3.42 *6-jährige Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme 10 und Prämie P*

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Ist der Zins während der gesamten Laufzeit um 2% niedriger als der geschätzte Zins $\hat{r} = 1.04$, $\delta_t = -0.02$, so ist der Verlust 1. Ordnung gleich $-\sum_{t=2}^{6} 10\frac{-0.02}{(1.04)^2}E_{x,t}(0)$. Für junge Versicherte und kleine t liegt $E_{x,t}(0)$ nahe bei 1, so dass der Verlust nahe bei 1 liegt.

Die geschätzte Wahrscheinlichkeit eines 20-jährigen, in den nächsten 6 Jahren zu sterben, beträgt nach der Sterbetafel DAV 2004 R etwa 0.4%, so dass dieser Vertrag deutlich weniger als eine Geldeinheit kosten sollte, also $P < 1$.

Damit ist der Verlust in diesem Beispiel höher als der Preis des Vertrages.

Durch zeitdiskretes Hedgen analog zu Kapitel 3.2.1 kann dieser Hedgefehler verringert werden:

Gesucht ist eine Handelsstrategie, die zum Zeitpunkt T den Wert $E^i_{x,T-1}(T-1) - E^i_{x,T}(T) = 1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}}$ auszahlt.

Die Strategie: *halte* -1 *Standardverträge* $E^i_{x,T}$ hat zur Zeit T den Wert $-E^i_{x,T}(T)$. Damit ist noch eine Handelsstrategie gesucht, die zum Zeitpunkt T den Wert $E^i_{x,T-1}(T-1)$ auszahlt.

Äquivalent dazu ist: Gesucht ist eine Strategie, die zum Zeitpunkt $T-1$ den Wert $E^i_{x,T-1}(T-1)B_T(T-1)$ auszahlt, denn dieses Geld kann zur Zeit $T-1$ in den Bond B_T investiert werden und hat zum Zeitpunkt T den gewünschten Wert $E^i_{x,T-1}(T-1)$.

Der Wert dieses Hilfs-Claims $E^i_{x,T-1}(T-1)B_T(T-1)$ ist nun wieder das Produkt aus den Marktwerten zweier am Markt gehandelten Wertpapiere, entsprechend zu dem Claim $E^i_{x,T}(T)X(T)$ in Kapitel 3.2. Damit kann dieser Hilfs-Claim wieder mit Hilfe der Produktregel gehedgt werden. Als Numeraire wird B_{T-1} verwendet, da die Auszahlung des Hilfs-Claims zum Zeitpunkt $T-1$ stattfindet.

3.3.2 Zeitkontinuierliches Hedgen und ein No-Arbitrage Preis

Definition 3.43 *Im **zeitkontinuierlichen Modell** werden Bonds B_{T-1}, B_T und Standardverträge $E^i_{x,T-1}$, $E^i_{x,T}$ zu den Zeitpunkten $t \in [0,T]$ gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $B_{T-1}(t) > 0, B_T(t)$ und $E^i_{x,T-1}(t)$, $E^i_{x,T}(t)$ die mit $B_{T-1}(t)$ diskontierten Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $\hat{B}_{T-1}(t) = \frac{B_{T-1}(t)}{B_{T-1}(t)} = 1, \hat{B}_T(t) = \frac{B_T(t)}{B_{T-1}(t)}, \hat{E}^i_{x,T-1}(t) = \frac{E^i_{x,T-1}(t)}{B_{T-1}(t)}$ und $\hat{E}^i_{x,T}(t) = \frac{E^i_{x,T}(t)}{B_{T-1}(t)}$ für $t \in [0,T-1]$ bezeichnet.

Eine Handelsstrategie besteht aus den Komponenten:
$(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Numeraires B_{T-1},
$(\xi^1_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Bonds B_T und
$(\xi^2_t)_{t\in[0,T]}$ die Anzahl der gehaltenen Standardverträge $E^i_{x,T-1}$.
Es wird zur Zeit $t = 0$ genau ein Standardvertrag $E^i_{x,T}$ verkauft. Später wird $E^i_{x,T}$ nicht mehr gehandelt. Dafür wird keine eigene Komponente der Handelsstrategie benötigt.

$\hat{B}_T(t)$ und $\hat{E}^i_{x,T-1}(t)$ werden als an $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T-1]}$ adaptierte zeitkontinuierliche stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aus Kapitel 1 modelliert.

Annahme 3.44 *Die mit B_{T-1} diskontierten Preisprozesse $\hat{E}^i_{x,T-1}(t)$ und $\hat{B}_T(t)$ sind von endlicher Variation auf dem kompakten Intervall [0,T-1] und springen nicht gleichzeitig (außer bei Null).*

Lemma 3.45 *Im Markt mit stochastischem Zins ist unter der Annahme 3.44 zur Zeit $s \in [0, T-1]$*

$$\frac{B_T(s)}{B_{T-1}(s)} E^i_{x_i,T-1}(s) - E^i_{x_i,T}(s) \tag{3.18}$$

der No-Arbitrage Preis für den reinen Risikovertrag $D^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$

Beweis:

Gesucht ist eine Handelsstrategie, die zum Zeitpunkt T den Wert
$E^i_{x,T-1}(T-1) - E^i_{x,T}(T) = 1_{\{\omega^i \in (T-1,T]\}}$ auszahlt.
Die Strategie: *halte* -1 *Standardverträge* $E^i_{x,T}$ hat zur Zeit T den Wert $-E^i_{x,T}(T)$.

Damit ist noch eine Handelsstrategie gesucht, die zum Zeitpunkt T den Wert
$E^i_{x,T-1}(T-1)$ auszahlt.

Äquivalent dazu ist: Gesucht ist eine Strategie, die zum Zeitpunkt $T-1$ den Wert $E^i_{x,T-1}(T-1)B_T(T-1)$ auszahlt, denn dieses Geld kann zur Zeit $T-1$ in den Bond B_T investiert werden und hat zum Zeitpunkt T den gewünschten Wert $E^i_{x,T-1}(T-1)$.

In dem mit B_{T-1} diskontierten Markt gilt: (die quadratische Kovariation ist wieder gleich Null)

$$\begin{aligned}
\hat{B}_T(T-1)\hat{E}^i_{x,T-1}(T-1) &= \hat{B}_T(0)\hat{E}^i_{x,T-1}(0) + \int_0^{T-1} \hat{B}_T(s-)d\hat{E}^i_{x,T-1}(s) \\
&\quad + \int_0^{T-1} \hat{E}^i_{x,T-1}(s-)d\hat{B}_T(s)
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $B_{T-1}(T-1)$:

$$\begin{aligned}
B_T(\widehat{T-1)E^i_{x,T-1}}(T-1) &= B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(0)\hat{E}^i_{x,T-1}(0) \\
&\quad + \int_0^{T-1} B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(s-)d\hat{E}^i_{x,T-1}(s) \\
&\quad + \int_0^{T-1} B_{T-1}(T-1)\hat{E}^i_{x,T-1}(s-)d\hat{B}_T(s)
\end{aligned}$$

Damit ist nach Definition 3.18 der Vertrag $D^i_{x,T}$ erreichbar und die replizierende Strategie ist:

$\hat{V}_0(\eta^*, \xi^*) := B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(0)\hat{E}^i_{x,T-1}(0)$,

$\xi^{1*}_t := B_{T-1}(T-1)\hat{E}^i_{x,T-1}(t-)$ die Anzahl der zur Zeit t gehaltenen Bonds B_T,

$\xi^{2*}_t := B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(t-)$ die Anzahl der zur Zeit t gehaltenen Standardverträge $E^i_{x,T-1}$,

Wir wählen η^*_t so, dass:

$$\begin{aligned}\hat{V}_t(\eta^*,\xi^*) &= B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(0)\hat{E}^i_{x,T-1}(0) + \int_0^t B_{T-1}(T-1)\hat{B}_T(s-)d\hat{E}^i_{x,T-1}(s)\\ &\quad + \int_0^t B_{T-1}(T-1)\hat{E}^i_{x,T-1}(s-)d\hat{B}_T(s)\end{aligned}$$

also:

$\eta^*_t = \hat{V}_t - \xi^1_t\hat{B}_T(t) - \xi^2_t\hat{E}_t.$

Damit ist $\hat{V}_{T-1}(\eta^*,\xi^*) = B_T(T-\widehat{1)E^i_{x,T-1}}(T-1)$.

□

Korollar 3.46 *Die beiden Verträge*

$$D^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

und

$$\frac{B_T(0)}{B_{T-1}(0)}E^i_{x,T-1} - E^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{B_T(0)}{B_{T-1}(0)} & -1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

haben zur Zeit $t = 0$ den selben No-Arbitrage Preis bei stochastischem Zins.

Satz 3.47 *Der No-Arbitrage Preis zur Zeit Null des allgemeinen klassischen Vertrag bei stochastischem Zins ist:*

$$(e_0 + \frac{B_1(0)}{B_0(0)}d_1)E^i_{x,0}(0) + \sum_{t=1}^{T-1}(e_t + \frac{B_{t+1}(0)}{B_t(0)}d_{t+1} - d_t)E^i_{x,t}(0) + (e_T - d_T)E^i_{x,T}(0)$$

Beweis: Mit Korollar 3.46 gilt, dass der allgemeine, klassische Vertrag im Markt mit stochastischen Zinsen den selben No-Arbitrage Preis hat, wie:

$$\sum_{t=0}^{T} e_t E^i_{x,t} + \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & d_t\frac{B_t(0)}{B_{t-1}(0)} & -d_t \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,t}$$

Durch einsetzen der Marktpreise $E^i_{x,t}(0)$ für $E^i_{x,t}$ folgt die Behauptung. □

Kapitel 4

Lebensversicherungsverträge mit Option

In diesem Kapitel wird:

1. Ein Lebensversicherungsvertrag mit Option definiert.

2. Ein virtueller Markt für Lebensversicherungsverträge mit Option eingeführt.

Unter *Optionen in Lebensversicherungsverträgen* (*embedded options*, *embedded derivatives*) werden in der Literatur sehr unterschiedliche Vertragsvereinbarungen subsumiert. Eine ausführliche Zusammenstellung von in Deutschland und England vorkommenden Optionen in Lebensversicherungsverträgen findet sich in Held [13]. Optionen in Lebensversicherungsverträgen werden dort folgendermaßen beschrieben:

"*Optionen* stellen also vertraglich vereinbarte Wahlrechte dar, die es dem Kunden ermöglichen, seinen Vertrag auch nach Abschluss unproblematisch den veränderten Verhältnissen anzupassen, wobei die Bedingungen und Konditionen bei Vertragsabschluss bereits festgelegt werden."

Von den Optionen werden so genannte *Gestaltungsrechte* abgegrenzt:

Gestaltungsrechte ermöglichen Vertragsanpassungen, die zu den jeweils aktuellen Konditionen durchgeführt werden. Über sie schreibt Held: "Der geänderte Teil des Vertrages wird also als Neuvertrag behandelt. Gestaltungsrechte stellen somit für den Versicherer keine unerwarteten zusätzlichen Risiken dar." Sie werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

Bekannte Wahlrechte im Sinne von Held [13] sind das *Kapitalwahlrecht*, das von Dillmann und Ruß [6] untersucht wurde so wie das *Rückkaufsrecht* und die *Beitragsfreistellungsoption*, die in der Diplomarbeit von Lenz [19] behandelt werden.

Es werden oft auch *Garantien* zu den Optionen in Lebensversicherungsverträgen gezählt, hauptsächlich da bei geeigneter Modellierung die Auszahlung der Garantie verglichen werden kann mit der Auszahlung von Put- oder Call-Optionen auf Bonds. Beispiele dafür sind die *Rentenumwandlungsgarantie* (*GAO, guaranteed annuity option*) in Pelsser [27] und Wilkie [38] und der *Garantiezins* zusammen mit der *Überschussbeteiligung* in Miltersen und Persson [23] oder Mahayni und Schlögl [22].

Allen diesen Vertragsvereinbarungen ist gemeinsam, dass sie bei der Bewertung von Verträgen nach dem Äquivalenzprinzip nicht berücksichtigt sind.

4.1 Definition Lebensversicherungsvertrag mit Option

In Anlehnung an Held verstehen wir unter einem *Lebensversicherungsvertrag mit Option* (kurz: *Vertrag mit Option*) einen Vertrag, in dem der Versicherungsnehmer zu bestimmten Zeitpunkten das Recht hat, zwischen unterschiedlichen zukünftigen Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen zu wählen, wobei die Wahlmöglichkeiten bereits bei Vertragsabschluss festgelegt sind.

Wir stellen dieses Wahlrecht dar als das Recht des Versicherungsnehmers, einen Vertrag aus einer Menge von unterschiedlichen Verträgen zu wählen. Dabei kann der Versicherungsnehmer zu mehreren (nicht-zufälligen) Zeitpunkten Entscheidungen $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathbb{N}$ treffen, jede Entscheidung schränkt die Menge derjenigen Verträge ein, aus der der Versicherungsnehmer noch wählen kann. Lebt der Versicherungsnehmer lange genug, so entscheidet er sich letztendlich für genau einen Vertrag. Stirbt er vor der letzten Entscheidung, so verfallen alle zukünftigen Zahlungen und die noch ausstehenden Entscheidungen sind irrelevant.

Die Menge aller Verträge, aus denen der bei Vertragsabschluss x-jährige Versicherungsnehmer im Laufe der Zeit genau einen auswählt, bezeichnen wir mit $\mathcal{V} := \{V_1, \ldots, V_n\}$. Der Vertrag V_j hat die Laufzeit $T_j \in \mathbb{N} \cup \infty$. Es wird hier angenommen, dass diese Menge endlich ist. Die Verträge aus $\mathcal{V}$ werden definiert als:

$$V_j := \begin{bmatrix} e_0^j & e_1^j & \ldots & e_{T_j}^j \\ - & d_1^j & \ldots & d_{T_j}^j \end{bmatrix}^{i,x,T_j} \qquad \text{für } T_j \in \mathbb{N} \cup \infty \text{ und } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Hat der Versicherungsnehmer zu dem festen Zeit $\tau \in \mathbb{N}$ das Recht, zwischen unterschiedlichen Verträgen zu wählen, so müssen diese Verträge bis zum Zeitpunkt $\tau - 1$ die selben Versicherungsleistungen so wie die selben Prämienzahlungen festlegen, da diese nicht rückwirkend geändert werden können. Es ist möglich, dass der Versicherungsnehmer zur Zeit τ zwischen Verträgen wählt, die für den Zeitpunkt τ unterschiedliche Prämienzahlungen und Versicherungsleistungen festlegen.

Definition 4.1 *Verträge $V_1, \ldots, V_n$ heißen **bis zum Zeitpunkt** $\tau \in \mathbb{N}_0$ **gleich**, falls*
$e_t^j = e_t^1$ für $j \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{0, \ldots, \tau\}$ und
$d_t^j = d_t^1$ für $j \in \{1, \ldots, n\}, t \in \{1, \ldots, \tau\}$.

Sie legen bis zum τ. Jahresende die selben Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen fest.

Nun schränkt sich die Menge der Verträge, für die sich der Versicherungsnehmer noch entscheiden kann, mit jedem Entscheidungszeitpunkt weiter ein. Dies wird dargestellt über aufsteigende Partitionen der Menge $\mathcal{V}$.

Definition 4.2 *Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ Partitionen von $\mathcal{V}$.*

Dann nennen wir sie ***aufsteigend*** *und schreiben $\mathcal{P}_1 \subsetneq \mathcal{P}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{P}_k$, falls für alle $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt:*

i) *für alle $\pi \in \mathcal{P}_m$ gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ und $\pi_1, \ldots, \pi_l \in \mathcal{P}_{m+1}$ mit $\pi = \pi_1 \cup \ldots \cup \pi_l$.*
ii) *es gibt ein $\pi \in \mathcal{P}_m$ mit $\pi \notin \mathcal{P}_{m+1}$.*

Die Anzahl der Elemente der $\mathcal{P}_m$ wächst mit m. Elemente aus $\mathcal{P}_{m+1}$ entstehen durch Partitionierung von Elementen aus $\mathcal{P}_m$.

Definition 4.3
Sei $\mathcal{V} := \{V_1, \ldots, V_n\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen Verträgen mit Laufzeiten $T_1, \ldots, T_n$ und seien $\tau_1 < \ldots < \tau_k$ paarweise verschiedene Zeitpunkte aus $\{1, \ldots, T\}$ mit $T := \mathrm{Max}\{T_1, \ldots, T_n\}$ und
seien $\mathcal{V} = \mathcal{P}_0 \subsetneq \mathcal{P}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{P}_k$ aufsteigende Partitionen von $\mathcal{V}$ mit den Eigenschaften:
i) *Verträge aus einem Element von $\mathcal{P}_m$ sind bis zum Zeitpunkt $(\tau_{m+1} - 1)$ gleich, für $m \in \{0, \ldots, k-1\}$*
ii) *alle Elemente von $\mathcal{P}_k$ sind einelementig.*

Dann ist ein ***Vertrag mit k-Option*** *definiert als:*

$$O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$$

Die Interpretation lautet:

Zum Zeitpunkt τ_1 entscheidet sich der Versicherungsnehmer für ein Element $\pi_1 \in \mathcal{P}_1$, zum Zeitpunkt τ_2 für ein Element $\pi_2 \in \mathcal{P}_2$ mit $\pi_2 \subseteq \pi_1$ und so weiter, bis er sich spätestens zum Zeitpunkt τ_k für ein einelementiges Element $\pi_k \in \mathcal{P}_k$ mit $\pi_k \subseteq \pi_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq \pi_1$ entscheidet. Der Vertrag aus π_k ist damit derjenige, für den sich der Versicherte entschieden hat.

Wir definieren einen Vertrag mit 0-Option als Vertrag ohne Option, da $\mathcal{V} = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_k$ einelementig sein muss bei $k = 0$:

$(\{V\}, 0) := V$

Es werden im Folgenden zwei Beispiele für Verträge mit Option angegeben. Zuerst wird ein aufgeschobener Rentenvertrag mit Kapitalwahlrecht als Vertrag mit 1-Option dargestellt, dann wird ein um 3 Jahre aufgeschobener Rentenvertrag mit Beitragsfreistellung und Rückkaufsrecht als Vertrag mit 3-Option dargestellt.

Anhand der Beispiele werden zwei Methoden zur Veranschaulichung von Verträgen mit k-Option vorgestellt.

Beispiel 4.4 (Vertrag mit 1-Option; Kapitalwahlrecht) *Zur Zeit $t = 0$ ist der Versicherungsnehmer i genau x Jahre alt und schließt einen aufgeschobenen Rentenversicherungsvertrag mit Kapitalwahlrecht und Einmalbeitrag E ab. Zur Zeit $t = \tau_1$, also im Alter von $x + \tau_1$ Jahren, kann er wählen zwischen einer Einmalauszahlung der Höhe K und einer jährlichen Rente der Höhe 1, wenn er dann noch lebt.*

Die Menge der Verträge, aus denen er wählen kann, ist damit zweielementig:

$\mathcal{V} := \{V_1, V_2\}$

Der aufgeschobene Rentenvertrag lässt sich in unserer Notation schreiben als:

$$V_1 := \begin{bmatrix} -E & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^{i,x,\infty}$$

Die Einmalauszahlung im Erlebensfall als:

$$V_2 := \begin{bmatrix} -E & 0 & \dots & 0 & K \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,\tau_1}$$

Der Versicherungsnehmer hat zu dem Zeitpunkt τ_1 das Recht, zwischen diesen beiden Verträgen zu wählen. Die Partition $\mathcal{P}_1$ enthält nach Definition ausschließlich einelementige Mengen:

$\mathcal{P}_1 := \{\{V_1\}, \{V_2\}\}$

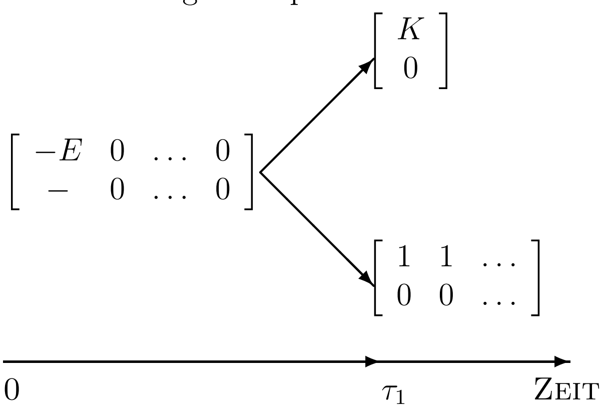
Die Verträge aus $\mathcal{V}$ sind bis zum Zeitpunkt $(\tau_1 - 1)$ gleich.

Der Vertrag mit 1-Option lässt sich damit schreiben als:

$O^1 = ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1))$.

Wir stellen nun zwei Methoden vor, solch einen Vertrag mit Option zu veranschaulichen.

1. Ein Vertrag mit Option kann als Baum dargestellt werden:



Zu dem auf der Zeitachse angegebenen Zeitpunkt τ_1 kann sich der Versicherungsnehmer für einen der beiden Pfeile entscheiden. Der Vertrag, für den er sich entscheidet, ist damit derjenige, der sich durch zusammensetzen der beiden durch diesen Pfeil verbundenen Vertragsteile ergibt.

2. Ein Vertrag mit Option kann durch Angabe der Partitionen veranschaulicht werden:

$\underbrace{V_1}_{1}, \underbrace{V_2}_{1}$

Die Elemente der Partition $\mathcal{P}_1$ sind gekennzeichnet durch die geschweiften Klammern, an deren Spitze die Ziffer 1 geschrieben steht. Bei Verträgen mit k-Option sind dann entsprechend die Elemente der Partition $\mathcal{P}_j$ gekennzeichnet durch die geschweiften Klammern, an deren Spitze die Ziffer j geschrieben steht, für $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Beispiel 4.5 (Vertrag mit 3-Option; Beitragsfreistellung und Rückkaufsrecht) *Hier wird ein Rentenvertrag mit Rentenzahlungen ab dem Zeitpunkt $t = 3$, mit Beitragszahlungen zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ und mit dem Recht auf Beitragsfreistellung und dem Recht auf Rückkauf als Vertrag mit 3-Option dargestellt. Dieser Vertrag umfasst keine Todesfallleistungen.*

Der Versicherungsnehmer hat die Möglichkeit, sich von den Beitragszahlungen zu den Zeitpunkten $t = 1$ und/oder $t = 2$ freistellen zu lassen, oder den Vertrag zu einem der Zeitpunkte $t = 1, 2$ oder 3 zu kündigen.

Damit ergeben sich 11 mögliche Vertragsverläufe, jeder wird als ein Vertrag in $\mathcal{V}$ dargestellt:

$\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_{11}\}$

Die einzelnen Verträge sind:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ldots \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{i,x,\infty} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,3}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \ldots \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{i,x,\infty} \qquad V_4 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 & 10 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,3}$$

$$V_5 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,2} \qquad V_6 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \ldots \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{i,x,\infty}$$

$$V_7 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 0 & 10 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,3} \qquad V_8 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & 1 & 1 & \ldots \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{i,x,\infty}$$

$$V_9 = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & 15 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,3} \qquad V_{10} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 10 \\ - & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,2}$$

$$V_{11} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ - & 0 \end{bmatrix}^{i,x,1}$$

Dabei sind die Verträge V_1 bis V_5 diejenigen, die sich zum Zeitpunkt $t = 1$ beitragsfrei stellen, die Verträge V_6 bis V_{10} diejenigen, die zum Zeitpunkt $t = 1$ Beiträge zahlen, der Vertrag V_{11} ist derjenige, der gewählt wird, wenn der Versicherungsnehmer zur Zeit $t = 1$ kündigt.

Die weiteren Vertragsverläufe lassen sich aus der folgenden Abbildung (1. Veranschaulichung) entnehmen.

Die Entscheidungszeitpunkte sind:

$\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 3.$

Die Partitionen:

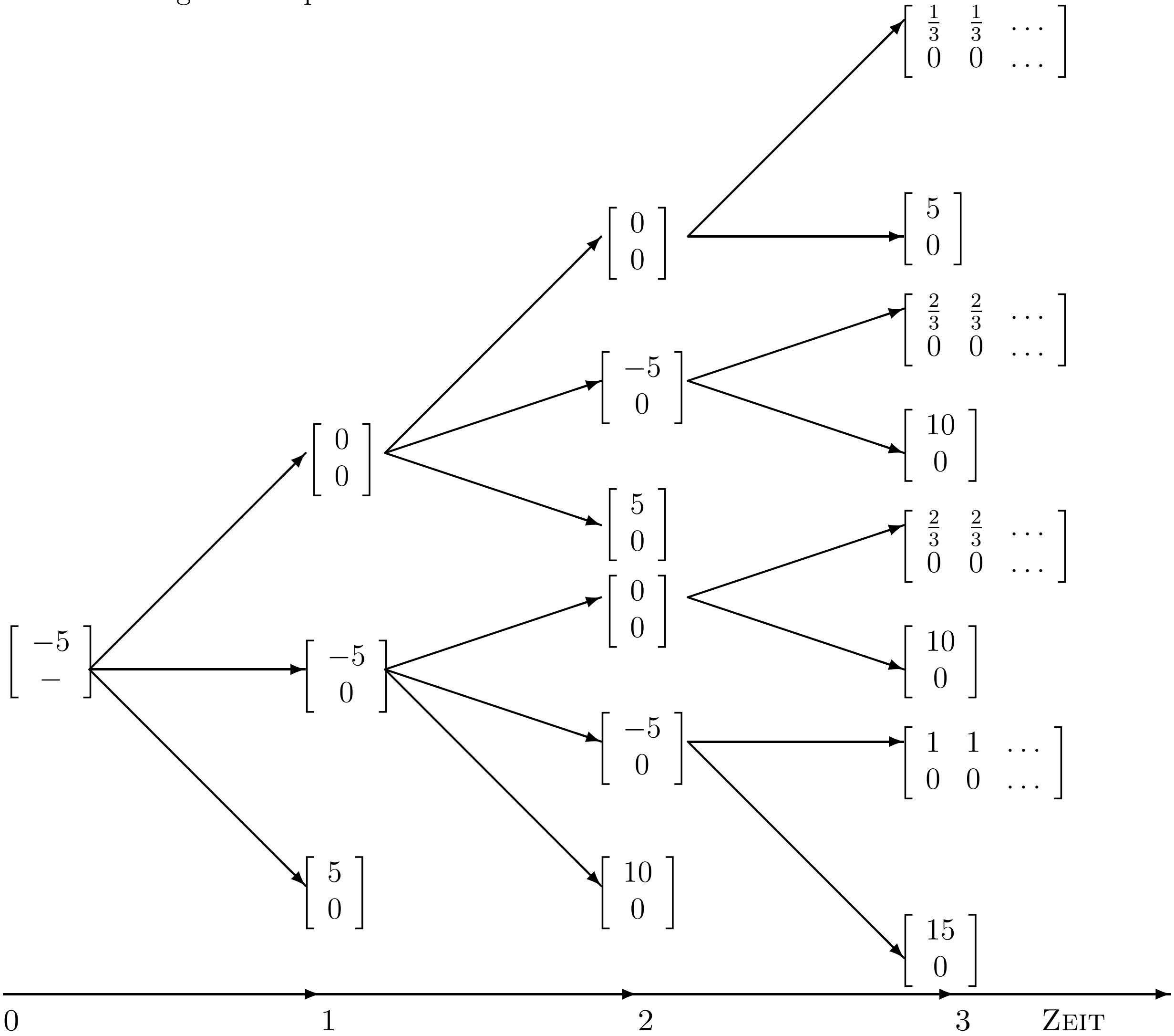
$\mathcal{P}_1 = \{\{V_1, \dots, V_5\}, \{V_6, \dots, V_{10}\}, \{V_{11}\}\}$
$\mathcal{P}_2 = \{\{V_1, V_2\}, \{V_3, V_4\}, \{V_5\}, \{V_6, V_7\}, \{V_8, V_9\}, \{V_{10}\}, \{V_{11}\}\}$
$\mathcal{P}_3 = \{\{V_1\}, \dots, \{V_{11}\}\}.$

Die Verträge aus einem Element von $\mathcal{P}_1$ sind bis zum Zeitpunkt $(\tau_2 - 1) = 1$ gleich, die Verträge aus einem Element von $\mathcal{P}_2$ sind bis zum Zeitpunkt $(\tau_3 - 1) = 2$ gleich.

Somit lässt sich der Vertrag mit 3-Option schreiben als:

$O^3 = ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), (\mathcal{P}_2, \tau_2), (\mathcal{P}_3, \tau_3))$

1. Der Vertrag mit 3-Option wird durch einen Baum veranschaulicht:



Zu den auf der Zeitachse angegebenen Zeitpunkten $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2$ und $\tau_3 = 3$ kann sich der Versicherungsnehmer für jeweils einen der Pfeile so entscheiden, dass die Vereinigung der Pfeile, für die er sich entschieden hat, einen Pfad von der Wurzel des Baumes zu einem Blatt ergibt. Der Vertrag, für den er sich entscheidet, ist damit derjenige, der sich durch zusammensetzen der durch diesen Pfad verbundenen Vertragsteile ergibt.

2. Der Vertrag mit 3-Option wird durch die Angabe der Partitionen veranschaulicht:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_1}_3,\underbrace{V_2}_3}_2,\underbrace{\underbrace{V_3}_3,\underbrace{V_4}_3}_2,\underbrace{\underbrace{V_5}_3}_2}_1,\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_6}_3,\underbrace{V_7}_3}_2,\underbrace{\underbrace{V_8}_3,\underbrace{V_9}_3}_2,\underbrace{\underbrace{V_{10}}_3}_2}_1,\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_{11}}_3}_2}_1$$

Die Elemente der Partition $\mathcal{P}_m$ sind gekennzeichnet durch die geschweiften Klammern, an deren Spitze die Ziffer m geschrieben steht, $m \in \{1, \ldots, 3\}$.

Bemerkung 4.6 *Zur Zeit $t = 0$ hat ein potentieller Versicherungsnehmer die Wahl zwischen* einen Vertrag abschließen *oder* keinen Vertrag abschließen*, also zwischen $\mathcal{V}$ und der leeren Menge $\emptyset$. Ein Vorteil, den Wahlrechte dem Versicherungsunternehmen bringen, ist, dass das Abschließen eines solchen Vertrages für einen potentiellen Versicherungsnehmer attraktiver wird im Vergleich zu einem Vertrag ohne Option. Dies stellt einen Wert für das Versicherungsunternehmen dar. Leider kann in dieser Arbeit dieser Wert nicht weiter untersucht werden.*

Ein Versicherungsnehmer, der zur Zeit $t = 0$ einen Vertrag mit k-Option $((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$ abschließt, und der sich zum Zeitpunkt τ_1 für die Menge $\pi_1 \in \mathcal{P}_1$ entscheidet, verfügt nach seiner ersten Entscheidung über die gleichen Entscheidungsmöglichkeiten als hätte er einen Vertrag mit k'-Option abgeschlossen mit $k' < k$. Diesen Vertrag mit k'-Option definieren wir unten als einen dem Vertrag mit k-Option *untergeordneten* Vertrag.

Bezeichnet n_1 die Anzahl der Elemente der Partition $\mathcal{P}_1$, so gibt es n_1 verschiedene mögliche erste Entscheidungen des Versicherungsnehmers und damit n_1 dem Vertrag mit k-Option untergeordnete Verträge.

Wir geben nun eine Darstellung dieser untergeordneten Verträge an. Hat sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt τ_1 für das Element $\pi_1 \in \mathcal{P}_1$ entschieden, dann kann er im Folgenden nur noch zwischen Elementen aus der Potenzmenge $Pot(\pi_1)$ wählen. Die Partitionen $\mathcal{P}_2 \cap Pot(\pi_1), \ldots, \mathcal{P}_k \cap Pot(\pi_1)$ sind allerdings nicht mehr unbedingt aufsteigend, beispielsweise wenn π_1 selbst einelementig ist und $k > 2$.

Wir definieren nun eine Teilfolge von $\mathcal{P}_2 \cap Pot(\pi_1), \ldots, \mathcal{P}_k \cap Pot(\pi_1)$ so, dass diese aufsteigend ist, indem wir zusätzlich zu $\mathcal{P}_2 \cap Pot(\pi_1)$ alle Partitionen $\mathcal{P}_m \cap Pot(\pi_1)$, $m \in \{3, \ldots, k\}$ wählen, für die gilt: $\mathcal{P}_m \cap Pot(\pi_1) \neq \mathcal{P}_{m-1} \cap Pot(\pi_1)$. Wir wählen also die Partitionen aus $\mathcal{P}_2 \cap Pot(\pi_1), \ldots, \mathcal{P}_k \cap Pot(\pi_1)$, die echt mehr Elemente als deren Vorgänger besitzen.

Die so erhaltene Folge von Partitionen von π_1 bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_1^{\pi_1}, \ldots, \mathcal{P}_{k_1}^{\pi_1}$, die zugehörigen Entscheidungszeitpunkte nennen wir $\tau_1^{\pi_1}, \ldots, \tau_{k_1}^{\pi_1}$.

Definition 4.7 *Wir bezeichnen mit $n_1 := |\mathcal{P}_1|$ und mit $\pi_1, \ldots, \pi_{n_1}$ die Elemente von $\mathcal{P}_1$. Die dem Vertrag mit k-Option $O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$* ***untergeordneten*** *Verträge sind für $j \in \{1, \ldots, n_1\}$:*

$$O_j^{k_j} := ((\pi_j, 0), (\mathcal{P}_1^{\pi_j}, \tau_1^{\pi_j}), \ldots, (\mathcal{P}_{k_j}^{\pi_j}, \tau_{k_j}^{\pi_j}))$$

Mit $k_j < k$ für alle $j \in \{1, \ldots, n_1\}$.

Die einem Vertrag mit 1-Option untergeordneten Verträge sind Verträge ohne Option.

Wir geben nun die den Verträgen aus den obigen Beispielen untergeordneten Verträge an.

Fortsetzung **Beispiel 4.4, Kapitalwahlrecht:**

Die dem Vertrag mit 1-Option untergeordneten Verträge sind Verträge ohne Option:

$n_1 = 2$, $\pi_1 = \{V_1\}$, $\pi_2 = \{V_2\}$

$O_1^0 = (\{V_1\}, 0) = V_1$

$O_2^0 = (\{V_2\}, 0) = V_2$

Fortsetzung **Beispiel 4.5, Beitragsfreistellung und Rückkaufsrecht:** Die dem Vertrag mit 3-Option aus dem obigen Beispiel untergeordneten Verträge.

Der Vertrag mit 3-Option:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_1}_{3},\underbrace{V_2}_{3}}_{2},\underbrace{\underbrace{V_3}_{3},\underbrace{V_4}_{3}}_{2},\underbrace{\underbrace{V_5}_{3}}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_6}_{3},\underbrace{V_7}_{3}}_{2},\underbrace{\underbrace{V_8}_{3},\underbrace{V_9}_{3}}_{2},\underbrace{\underbrace{V_{10}}_{3}}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{\underbrace{V_{11}}_{3}}_{2}}_{1}$$

Der Vertrag mit 3-Option hat 3 untergeordnete Verträge. Zwei davon sind Verträge mit 2-Option, einer ist ein Vertrag ohne Option:

$n_1 = 3, \pi_1 = \{V_1, \ldots, V_5\}, \pi_2 = \{V_6, \ldots, V_{10}\}, \pi_3 = \{V_{11}\}$

Der erste untergeordnete Vertrag ist ein Vertrag mit 2-Option:

$$\underbrace{\underbrace{V_1}_{2},\underbrace{V_2}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{V_3}_{2},\underbrace{V_4}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{V_5}_{2}}_{1}$$

$\tau_1^{\pi_1} = 2, \tau_2^{\pi_1} = 3, \mathcal{P}_1^{\pi_1} = \{\{V_1, V_2\}, \{V_3, V_4\}, \{V_5\}\}, \mathcal{P}_2^{\pi_1} = \{\{V_1\}, \ldots, \{V_5\}\}$

$O_1^2 = ((\pi_1, 0), (\mathcal{P}_1^{\pi_1}, \tau_1^{\pi_1}), (\mathcal{P}_2^{\pi_1}, \tau_2^{\pi_1}))$

Der zweite untergeordnete Vertrag ist ebenfalls ein Vertrag mit 2-Option:

$$\underbrace{\underbrace{V_6}_{2},\underbrace{V_7}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{V_8}_{2},\underbrace{V_9}_{2}}_{1},\underbrace{\underbrace{V_{10}}_{2}}_{1}$$

$\tau_1^{\pi_2} = 2, \tau_2^{\pi_2} = 3, \mathcal{P}_1^{\pi_2} = \{\{V_6, V_7\}, \{V_8, V_9\}, \{V_{10}\}\}, \mathcal{P}_2^{\pi_2} = \{\{V_6\}, \ldots, \{V_{10}\}\}$

$O_2^2 = ((\pi_2, 0), (\mathcal{P}_1^{\pi_2}, \tau_1^{\pi_2}), (\mathcal{P}_2^{\pi_2}, \tau_2^{\pi_2}))$

Der dritte untergeordnete Vertrag ist ein Vertrag ohne Option:

$O_3^0 = ((\pi_3, 0)) = V_{11}$

□

Verkauft ein Versicherungsunternehmen einen Vertrag mit k-Option und kann am Markt die untergeordneten Verträge handeln, so kann es nach der ersten Entscheidung des Versicherungsnehmers den gewählten untergeordneten Vertrag am Markt kaufen, und hat keine weiteren Verpflichtungen mehr.

Nun sind noch die Entscheidungsmöglichkeiten der Versicherungsnehmer zu definieren. Bezeichnet $O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$ einen Vertrag mit k-Option, so hat der Versicherungsnehmer genau $|\mathcal{V}|$ Entscheidungsmöglichkeiten, er kann sich für jeden Vertrag aus $\mathcal{V}$ entscheiden. Uns interessiert besonders die erste Entscheidung:

Definition 4.8 *Schließt der Versicherungsnehmer i den Vertrag mit k-Option* $O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$ *ab, dann entscheidet er sich zur Zeit* τ_1 *für ein Element* $\pi \in \mathcal{P}_1$.

Seine Entscheidung wird mit δ^i *bezeichnet.* $\delta^i = j$ *genau dann, wenn er sich für das Element* $\pi_j \in \mathcal{P}_1$ *entscheidet, mit* $j \in \{1, \ldots, |\mathcal{P}_1|\}$

Das Vorgehen in dieser Arbeit ist es, den Wert von Verträgen mit k-Option zu reduzieren auf die Werte der untergeordneten Verträge. Damit lässt sich rekursiv der Wert eines Vertrages mit k-Option reduzieren auf die Werte von Verträgen ohne Option. Die Werte von Verträgen ohne Option sind in den Kapiteln 2 und 3 untersucht worden.

Bemerkung 4.9 *In einem Vertrag sind die Zahlungen festgelegt durch den Zustand, in dem sich der Versicherungsnehmer befindet, oder durch die Zustände, zwischen denen der Versicherungsnehmer wechselt. Die Übergänge zwischen diesen Zuständen werden üblicherweise als zufällig und als unabhängig vom Kapitalmarkt modelliert. Es ist ein wichtiges Beschäftigungsfeld der Versicherungsmathematik, diese Übergänge zu beschreiben.*

In Verträgen mit Option kann der Versicherungsnehmer die Zahlungen durch seine Entscheidung beeinflussen. Diese Entscheidung kann von persönlichen Umständen abhängen, die dem Versicherungsunternehmen unbekannt sind, sie hängt aber auch von am Kapitalmarkt beobachtbaren Größen wie zum Beispiel dem Zinsniveau ab. Die Behandlung von Verträgen mit Option erfordert damit die Einbeziehung von finanzmathematischen Überlegungen.

Ein Vertrag mit k-Option hätte alternativ auch als Spiel in extensiver Form definiert werden können. Dies wurde nicht getan, da Ein- beziehungsweise Auszahlungen nicht ausschließlich bei Spielende erfolgen, was die spieltheoretische Behandlung schwierig macht. Auch hätten die Kapitalmarktgrößen, die die Entscheidung des Versicherungsnehmers beeinflussen, in dem Spiel mit modelliert werden müssen.

Definition 4.10 *Der* ***allgemeine klassische Vertrag mit 1-Option für den Versicherungsnehmer*** $i \in \mathcal{I}$ *ist definiert als:*

$$O^{1,i} := ((\mathcal{V}^i, 0), (\mathcal{P}_1^i, \tau)) \tag{4.3}$$

$$mit\ \mathcal{V}^i = \{V_1^i, \ldots, V_n^i\}\ und\ V_j^i = \begin{bmatrix} e_0^j & e_1^j & \ldots & e_{T_j}^j \\ - & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T_j} \quad für\ j \in \{1, \ldots, n\}$$

Wobei alle Verträge aus $\mathcal{V}^i$ klassische Verträge sind.

Definition 4.11 *Der **allgemeine fondsgebundene Vertrag mit 1-Option für den Versicherungsnehmer** $i \in \mathcal{I}$ ist definiert als:*

$$O_{Fonds}^{1,i} := ((\mathcal{V}_{Fonds}^i, 0), (\mathcal{P}_{1,Fonds}^i, \tau)) \tag{4.4}$$

$$mit\ \mathcal{V}_{Fonds}^i = \{V_{1,X}^i, \ldots, V_{n,X}^i\}\ und\ V_{j,X}^i = \begin{bmatrix} e_0^j & e_1^j & \ldots & e_{T_j}^j \\ - & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_X^{i,x,T_j} \quad für\ j \in \{1, \ldots, n\}$$

Wobei alle Verträge aus $\mathcal{V}_{Fonds}^i$ fondsgebundene Verträge sind.

4.2 Der Markt für Lebensversicherungsverträge mit Option

Ziel dieser Arbeit ist es, die Bewertung von Verträgen mit k-Option zu reduzieren auf die Bewertung der diesem Vertrag untergeordneten Verträgen. Dieses Vorgehen kann dann rekursiv fortgesetzt werden, bis alle untergeordneten Verträge Verträge ohne Option sind. Die Bewertung von Verträgen ohne Option wurde in den Kapiteln 2 und 3 auf die Bewertung von Standardverträgen und Bonds so wie von Fonds-Anteilen im fondsgebundenen Fall reduziert. Deren Marktpreise sind nach Annahme vom Markt ablesbar.

Zur Reduktion des Wertes eines Vertrages mit k-Option auf die Werte seiner untergeordneten Verträge nehmen wir an, die untergeordneten Verträge würden auf einem Markt gehandelt und hätten damit Marktpreise. Dieser Markt wird in diesem Kapitel definiert. Dann überlegen wir uns in Kapitel 5.2, für welchen Preis unter dieser Annahme der Vertrag mit k-Option verkauft werden könnte, und wie sein risikominimierender Hedge aussieht.

Wir erläutern dieses Vorgehen in Kapitel 5.2 am Beispiel eines Vertrages mit 1-Option. Die untergeordneten Verträge sind dann Verträge ohne Option.

Nun wird der Markt erklärt, auf dem die dem Vertrag mit k-Option untergeordneten Verträge gehandelt werden.

Ein Versicherungsunternehmen verkauft zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Vertrag mit k-Option $O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$ an I Versicherungsnehmer. Es sichert sich zur Zeit $t = 0$ gegen zufällige Gewinne und Verluste aus diesem Verkauf durch das Kaufen eines risikominimierenden Hedges ab. Dieser Hedge besteht aus den dem Vertrag mit k-Option untergeordneten Verträgen und Bonds B_{τ_1} mit Laufzeit τ_1.

Zum ersten Entscheidungszeitpunkt $t = \tau_1$ entscheidet sich jeder der Versicherungsnehmer für einen untergeordneten Vertrag. Diese sind am Markt handelbar. Das Versicherungsunternehmen verkauft den Hedge, kauft die gewählten untergeordneten Verträge und trägt damit ab dem Zeitpunkt τ_1 kein Risiko mehr.

Ein Vertrag mit k-Option ist allerdings nicht replizierbar, da er kein Derivat der untergeordneten Verträge ist, siehe unten, Bemerkung 4.15. Die Auszahlung hängt nicht allein von am Markt beobachtbaren Preisen ab, sondern zusätzlich noch von der Entscheidung der Versicherungsnehmer.

Damit ist das Versicherungsunternehmen, egal wie es hedgt, zufälligen Gewinnen oder Verlusten ausgesetzt. Um diese tragen zu können, benutzt es Eigenkapital der Aktionäre. Zum Zeitpunkt τ_1 kauft das Versicherungsunternehmen die gewählten untergeordneten Verträge und trägt damit kein Risiko mehr und kann das Kapital, das nach Kauf der untergeordneten Verträge noch übrig bleibt, den Aktionären auszahlen.

Dabei wird das Handeln von untergeordneten Verträgen in dieser Arbeit zur Vereinfachung auf die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = \tau_1$ beschränkt. Dies beinhaltet zwei echte Einschränkungen:

1. Es ist den Versicherungsunternehmen nicht erlaubt, Standardverträge in anderer Kombination als durch die untergeordneten Verträge vorgegeben zu handeln.

2. Zwischen 0 und τ_1 darf nicht gehandelt werden.

Mit der Einschränkung 1 erhält man den Wert der Verträge mit Option in Einheiten der Werte der untergeordneten Verträge. Dies scheint uns anschaulicher, als den Wert des Vertrages mit Option in Einheiten von ($T - \tau_1$ vielen) Standardverträgen anzugeben. Löst man die Einschränkung 1 auf, so erhält man Optimierungsaufgaben, die für jeden Standardvertrag eine Variable haben, also $T - \tau_1$ viele anstelle von n_1 vielen. Typischerweise ist $T - \tau_1$ deutlich größer als n_1.

Verzichtet man auf die Einschränkung 2, so benötigt man mehr Annahmen an die verwendeten Preisprozesse als die hier benutzten, um die Preise der untergeordneten Verträge zwischen 0 und τ_1 beschreiben zu können.

Es wird angenommen, dass die Versicherungsnehmer bei Vertragsabschluss ununterscheidbar, also auch gleich alt sind. Wie in Kapitel 2 wird weiter angenommen, dass Verträge mit Option von ununterscheidbaren Versicherungsnehmern zum gleichen Preis gehandelt werden.

Annahme 4.12 *Verträge mit Option von zur Zeit t ununterscheidbaren Versicherungsnehmern werden zur Zeit t zum selben Preis gehandelt.*

Nach der Entscheidung können n_1 Mengen von Versicherungsnehmern unterschieden werden:

Definition 4.13 *Nach der ersten Entscheidung unterscheiden wir folgende Mengen von Versicherungsnehmern:*

$\mathcal{M}_0(I, \omega^{\mathcal{I}}) := \{i \in \{1, \ldots, I\}; K^i(\omega^{\mathcal{I}}) \leq \tau_1\}$
Die Versicherungsnehmer, die vor τ_1 sterben.

$\mathcal{M}_j(I, \omega^{\mathcal{I}}) := \{i \in \{1, \ldots, I\}; \delta^i = j\}$ *mit* $j \in \{1, \ldots, n_1\}$
Die Versicherungsnehmer, die sich für den untergeordneten Vertrag $O_j^{k_j}$ entscheiden.

Es bezeichnet $O^{k,\mathcal{M}_j}(\tau_1)$ den Marktpreis des untergeordneten Vertrages $O^{k,\mathcal{M}_j}$ zur Zeit τ_1 für einen Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}_j$

Definition 4.14 *Auf dem* ***Markt für den Vertrag mit k-Option*** $O^k := ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1), \ldots, (\mathcal{P}_k, \tau_k))$ ***für die Versicherungsnehmer*** $i \in \mathcal{M}$ *mit* $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$ *werden die diesem Vertrag untergeordneten Verträge* $O_j^{k_j,i} := ((\pi_j, 0), (\mathcal{P}_1^{\pi_j}, \tau_1^{\pi_j}), \ldots, (\mathcal{P}_{k_j}^{\pi_j}, \tau_{k_j}^{\pi_j}))$ *mit* $j \in \{1, \ldots, n_1\}$ *und der Bond* B_{τ_1} *ausschließlich zu den Zeitpunkten* $t = 0$ *und* $t = \tau_1$ *und für die Versicherungsnehmer* $i \in \mathcal{M}$ *gehandelt.*

Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten werden mit $O_j^{k_j}(0)$ *und* $B_{\tau_1}(0)$ *beziehungsweise* $O^{k_j,\mathcal{M}_j}(\tau_1)$ *und* $B_{\tau_1}(\tau_1)$ *bezeichnet.*

Bemerkung 4.15 *Der Vertrag mit k-Option ist ein Contingent Claim, nicht aber ein Derivat auf dem Markt für den Vertrag mit k-Option nach Definition 2.9, wenn die Entscheidungsfunktion als $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariable modelliert wird. Der Wert zum Zeitpunkt τ_1 ist:*

$$O^{k,i}(\tau_1) = \sum_{j=1}^{n} O^{k_j,i}(\tau_1) 1_{\{\delta^i = j\}}$$

δ^i ist dabei nicht durch die Preisprozesse festgelegt.

Beispiel 4.16 (Der Markt für Verträge mit 1-Option) *Auf dem Markt für den Vertrag mit 1-Option* $O^1 = ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau_1))$ *mit* $|\mathcal{V}| = n$ *werden zu den Zeitpunkten* $t = 0$ *und* $t = 1$ *die Verträge* $V_j \in \mathcal{V}$ *mit* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *gehandelt.*

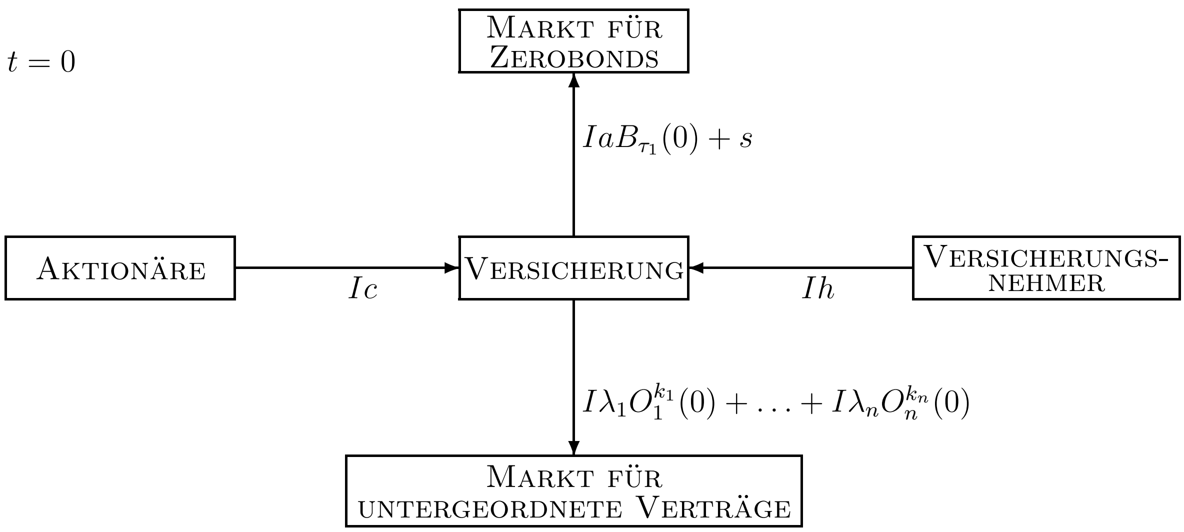


Abbildung 4.1: Zum Zeitpunkt $t = 0$ finden folgende Käufe auf dem Markt für den Vertrag mit k-Option statt:

1. I Versicherungsnehmer kaufen jeweils zum Preis von h Geldeinheiten einen Vertrag mit k-Option.
2. Die Versicherung erhält von den Aktionären Ic Geldeinheiten Eigenkapital.
3. Die Versicherung kauft $I\lambda_j$ untergeordnete Verträge $O_j^{k_j}$, $j = 1 : n$ und Ia Bonds B_{τ_1} jeweils zum Preis von $O_j^{k_j}(0)$ beziehungsweise $B_{\tau_1}(0)$ zur Absicherung gegen zufällige Gewinne und Verluste aus dem Geschäft mit Verträgen mit k-Option.
4. Das übrig bleibende Geld, $s := Ih + Ic - I\lambda_1 O_1^{k_1}(0) - \ldots - I\lambda_n O_n^{k_n}(0) - IaB_{\tau_1}(0)$ wird in Bonds B_{τ_1} angelegt.

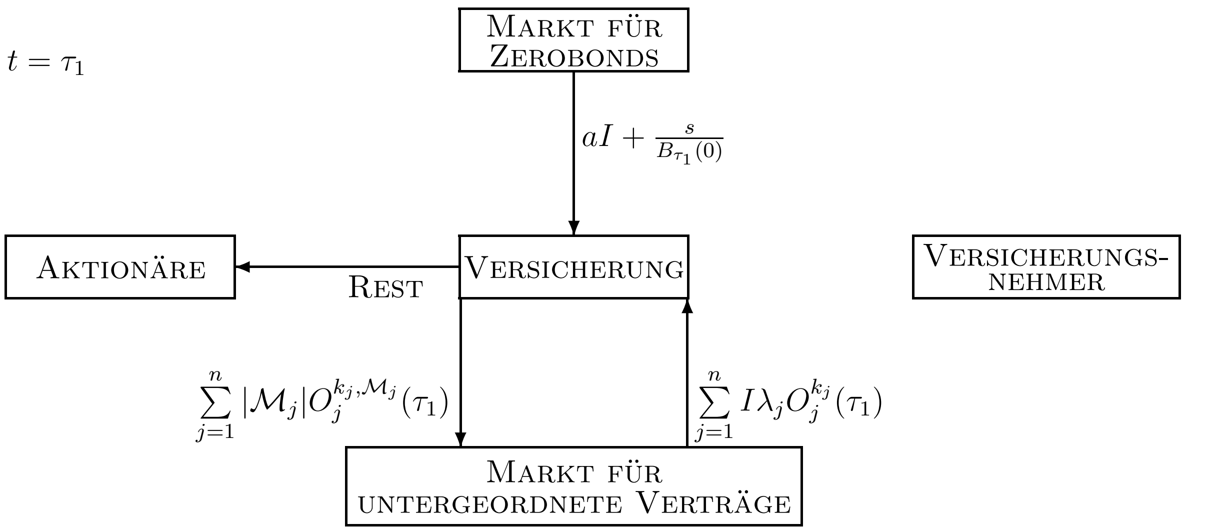


Abbildung 4.2: Zum Zeitpunkt $t = \tau_1$ kann das Versicherungsunternehmen sich aus dem Markt zurückziehen:

1. Die Versicherung verkauft ihren Hedge zum Preis $\sum_{j=1}^{n} I\lambda_j O_j^{k_j}(\tau_1) + aI$
2. Sie kauft die gewählten Verträge zum Preis von $\sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_j| O_j^{k_j,\mathcal{M}_j}(\tau_1)$.
3. Das übrig gebliebene Kapital erhält sie verzinst zurück zum Preis von $\frac{s}{B_{\tau_1}(0)}$. Danach trägt die Versicherung kein Risiko mehr.
4. Die Aktionäre erhalten $\sum_{j=1}^{n} I\lambda_j O_j^{k_j}(\tau_1) + aI - \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{M}_j| O_j^{k_j,\mathcal{M}_j}(\tau_1) + \frac{s}{B_{\tau_1}(0)}$ Geldeinheiten.

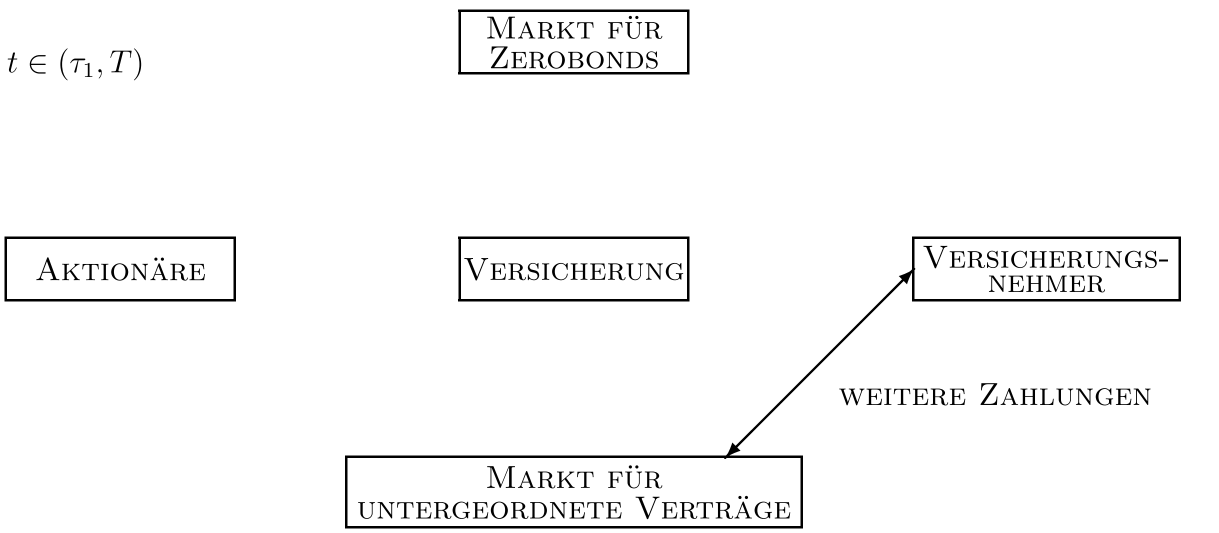


Abbildung 4.3: An allen weiteren Zahlungen ist die Versicherung nicht mehr beteiligt.

Kapitel 5

Hedgen und Bewerten von Lebensversicherungsverträgen mit Option

In diesem Kapitel werden:

1. Methoden zum Bewerten und Hedgen von Claims in unvollständigen Märkten nach Schweizer [33] und Kühn [15] eingeführt und auf deren Anwendbarkeit auf Verträge mit Option geprüft.
2. Der risikominimierende Hedge für Verträge mit Option und ihr Preis nach dem *financial variance principle* aus Schweizer [33] in einem Einperiodenmodell angegeben.

Ein Vertrag mit k-Option ist ein Claim auf dem in Kapitel 4.2 eingeführten Markt für den Vertrag mit k-Option, nicht aber ein Derivat und kann damit in Allgemeinen nicht durch die ihm untergeordneten Verträge repliziert werden. Ist ein Derivat replizierbar, so ist der Wert der replizierenden Strategie in gewissem Sinne ein objektiver Preis. Jeder Akteur, dem *mehr* lieber ist, als *weniger*, wird für einen replizierbaren Claim keinen höheren Preis als den No-Arbitrage Preis bezahlen und keinen niedrigeren Preis als den No-Arbitrage Preis verlangen.

Bei nicht-replizierbaren Claims ist es im Allgemeinen nicht möglich, einen objektiven Preis oder einen objektiv besten Hedge zu bestimmen. Je nach den persönlichen Präferenzen dessen, der das inhärente Risiko trägt, sind unterschiedliche Preise geeignet und unterschiedliche Hedges subjektiv optimal.

5.1 Prämienprinzipien in unvollständigen Märkten

Im Folgenden werden:

1. Nutzenfunktionen eingeführt und mit Methoden von Pratt [30] und Arrow [2] untersucht.
2. Nutzenindifferenz-Prämien nach Schweizer [33] und Kühn [15] eingeführt.
3. Der Markt mit dem nach diesen Methoden bewerteten Claim auf Arbitragemöglichkeiten getestet.
4. Unterschiede zwischen Banken und Versicherungen benannt, die sich in der Prämie niederschlagen könnten.
5. Die von Kühn in [15] beschriebene, ungünstigste Entscheidungsfunktion in unserer Situation betrachtet.

Dieses Kapitel untersucht verschiedene Ergebnisse von Schweizer und Kühn, die im Zusammenhang mit dem Bewerten und Hedgen von Claims in unvollständigen Märkten stehen. Dabei wird versucht herauszufinden, welche Methoden für die Bewertung und das Hedgen von Verträgen mit Option geeignet sind.

In Kapitel 5.2 wird dann eine konkrete Methoden angewendet.

5.1.1 Nutzenfunktionen

Eine Nutzenfunktion u ist eine Abbildung von dem Raum der Zufallsvariablen in die reellen Zahlen. Sie legt eine Präferenzordnung auf dem Raum der Zufallsvariablen fest. Ein Individuum mit Nutzenfunktion u präferiert die zufällige Auszahlung X über die zufällige Auszahlung Y, falls $u(X) > u(Y)$, d.h. falls der Nutzen der zufälligen Auszahlung X größer als der Nutzen der zufälligen Auszahlung Y ist.

Die folgende Definition stammt aus Kühn [15], Definition 4.1.1.

Definition 5.1 *Eine Nutzenfunktion u ist eine Abbildung von der Menge der Zufallsvariablen in die reellen Zahlen, die monoton ist in folgendem Sinne:*
$X \leq Y$ *fast sicher* $\Rightarrow u(X) \leq u(Y)$

Monotonie besagt, dass *mehr* präferiert wird über *weniger*.

Beispiel 5.2 *Gebräuchliche Nutzenfunktionen sind:*

$$\begin{array}{lllllll} u_1(X) & := & \mathbb{E}(\ln(X)) & \text{für } X > 0, & U_1(x) & := & \ln(x) \\ u_2(X) & := & \mathbb{E}(\frac{X^{1-\alpha}}{1-\alpha}) & \text{für } \alpha > 0, \alpha \neq 1, & U_2(x) & := & \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ u_3(X) & := & \mathbb{E}(-e^{-aX}) & \text{mit } a > 0, & U_3(x), & := & -e^{-ax} \end{array}$$

Nutzenfunktionen von der Form: $u(X) = \mathbb{E}(U(X))$ werden als Erwartungsnutzenfunktionen bezeichnet.

Angenommen, es gäbe zwei mögliche zufällige Auszahlungen:

$$X = \begin{cases} 3 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ 4 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases}, \; Y = \begin{cases} 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ 5.2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Welche Auszahlung wird präferiert? Die erwartete Auszahlung von Y ist höher als die von X, dafür ist die Auszahlung Y riskanter. Es ist nicht objektiv beschreibbar, welche Auszahlung präferiert wird.

Werden die Präferenzen durch die Nutzenfunktion u_1 beschrieben, wird X präferiert, werden die Präferenzen durch u_2 oder u_3 beschrieben, so wird Y präferiert. X und Y kann man bezüglich $\geq$ nicht vergleichen.

Neben Nutzenfunktionen werden noch so genannte *Bewertungsprinzipien* (*valuation principles*) verwendet. Bewertungsprinzipien $\tilde{u}$ sind hier Abbildungen von dem Raum der quadratintegrierbaren Zufallsvariablen in die reellen Zahlen. $\tilde{u}(X)$ wird als Wert von X interpretiert. Somit legen auch sie eine Präferenzordnung auf dem Raum der quadratintegrierbaren Zufallsvariablen fest. Es wird die Auszahlung mit dem höheren Wert präferiert. Nur erfüllen sie nicht unbedingt die Eigenschaft der Monotonie. Ein häufig gebrauchtes Bewertungsprinzip ist:

$\tilde{u}_4(X) := \mathbb{E}(X) - AVar(X)$ mit $A > 0$.

Angenommen, es gäbe zwei mögliche, zufällige Auszahlungen:

$X = 0$ fast sicher, $Y \sim U(0, b)$ mit $b > 0$.

Welche Auszahlung wird präferiert?

Der Wert von X nach dem Bewertungsprinzip $\tilde{u}_4$ ist Null, der Wert von Y nach diesem Bewertungsprinzip ist $\frac{b}{2} - A\frac{b^2}{3}$. Ist $b > \frac{3}{2A}$, dann ist der Wert von Y gemessen mit $\tilde{u}_4$ kleiner als Null. Die Auszahlung X wird präferiert, obwohl $Y > X$ fast sicher.

$\square$

Jetzt werden Nutzenfunktionen mit den Methoden aus dem Skript Entscheidungstheorie von Löffler [20], Kapitel 2.1. diskutiert. Nutzenfunktionen werden folgendermaßen klassifiziert:

Definition 5.3 *Sei X eine unsichere Zahlung. Dann heißt ein Investor mit Nutzenfunktion u*

***risikoavers**, falls $\mathbb{E}(u(X)) < u(\mathbb{E}(X))$,*

***risikofreudig**, falls $\mathbb{E}(u(X)) > u(\mathbb{E}(X))$,*

***risikoneutral**, falls $\mathbb{E}(u(X)) = u(\mathbb{E}(X))$.*

Im Allgemeinen wird angenommen, risikoaverse Nutzenfunktionen würden die Präferenzen von Unternehmen am besten beschreiben:

Annahme 5.4 *Das Unternehmen verhält sich risikoavers.*

Ein risikoaverses Unternehmen präferiert eine sichere Zahlung der Höhe μ über eine zufällige Zahlung mit Erwartungswert μ.

Die im Folgenden untersuchten Nutzenfunktionen sind Erwartungsnutzenfunktionen: $u(X) = \mathbb{E}(U(X))$ mit $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkav. Ein Unternehmen mit einer solchen Nutzenfunktion ist risikoavers nach der Jensen'schen Ungleichung. U heißt wieder Nutzenfunktion.

Nutzenfunktionen risikoaverser Individuen werden nach dem Grad der absoluten Risikoaversion unterschieden:

Definition 5.5 *Der Entscheidungsträger besitzt fallende (wachsende, konstante) absolute Risikoaversion, falls*

$$-\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

eine fallende (wachsende, konstante) Funktion in x ist.

Eine Funktion mit konstanter absoluter Risikoaversion erfüllt:

$U''(x) = -aU'(x) \Rightarrow U'(x) = be^{-ax} \Rightarrow U(x) = c - \frac{b}{a}e^{-ax}$ mit $a > 0, b, c \in \mathbb{R}$.

Zwei Nutzenfunktionen U_1 und U_2 heißen *äquivalent*, falls $U_1(x) = d + eU_2(x)$ mit $e > 0$, da sie die gleiche Präferenzordnung festlegen:

$\mathbb{E}(U_1(X)) > \mathbb{E}(U_1(Y)) \Leftrightarrow \mathbb{E}(eU_1(X)) > \mathbb{E}(eU_1(Y)) \Leftrightarrow \mathbb{E}(d + eU_1(X)) > \mathbb{E}(d + eU_1(Y))$.

Bezüglich dieser Äquivalenz lassen sich die Nutzenfunktionen in Äquivalenzklassen einteilen, $U_3(x) = -e^{-ax}$ mit $a > 0$ ist ein Vertreter der einzigen Äquivalenzklasse von Erwartungsnutzenfunktionen mit konstanter, absoluter Risikoaversion, siehe Löffler [20] Satz 2.5.

Beispiel 5.6 (Ein einfaches Portfolioproblem) *Auf einem Markt werden ein Bond B und eine Aktie S zu den zwei Handelszeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ gehandelt. Ihre Preise zu den Handelszeitpunkten sind: $B_0 = 1, B_1 = 1, S_0 = 1, S_1 = X$, wobei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu > 1$ und Varianz > 0 ist.*

Wäre $\mu \leq 1$ so würde nach Definition kein risikoaverser Investor, der seinen Nutzen maximiert, die Aktie kaufen.

Ein Investor mit Nutzenfunktion $u(X) = \mathbb{E}(U(X))$, der w Geldeinheiten investieren möchte und dabei seinen Nutzen maximiert, löst folgende Optimierungsaufgabe:

$$\max_{\xi+\eta=w} \mathbb{E}(U(\eta + \xi X)) \tag{5.2}$$

Die Optimallösung wird mit ξ^*, η^* bezeichnet. ξ steht für die Anzahl der gehaltenen Aktien, η für die Anzahl der gehaltenen Bonds.

Der folgender Satz geht auf Arrow [2] zurück.

Satz 5.7 *Der Investor hat fallende (wachsende, konstante) absolute Risikoaversion genau dann, wenn ξ^* eine wachsende (fallende, konstante) Funktion von w ist.*

Korollar 5.8 *Haben bei dem Investor aus Beispiel 5.6 w Aktionäre je eine Geldeinheit angelegt, so ist der Return eines Aktionärs derselbe als hätte er $\frac{\xi^*}{w}$ Aktien und $\frac{\eta^*}{w}$ Bonds gekauft. Soll sich dieser Return nicht mit der Anzahl der Aktionäre ändern, so muss der Investor eine fallende absolute Risikoaversion besitzen.*

Nutzenfunktionen mit fallender absoluter Risikoaversion werden nach dem Grad der relativen Risikoaversion unterschieden:

Definition 5.9 *Der Entscheidungsträger besitzt fallende (wachsende, konstante) relative Risikoaversion, wenn*

$$-x\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

eine fallende (wachsende, konstante) Funktion in x ist.

Zwei Vertreter der zwei Äquivalenzklassen von Erwartungsnutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion sind, siehe Löffler [20]:

$U_1(x) = \ln(x)$

$U_2(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ mit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

Folgender Satz geht auf Arrow [2] zurück:

Satz 5.10 *Die Nutzenfunktion weist konstante relative Risikoaversion auf, genau dann, wenn beim einfachen Portfolioproblem ξ^* proportional zu w ist.*

Korollar 5.11 *Soll sich der Return des Aktionärs nicht mit der Anzahl der Aktionäre ändern, so muss der Investor nach einer der beiden Nutzenfunktionen U_1 oder U_2 entscheiden.*

Nimmt man an, dass die Präferenzen eines Unternehmens durch eine Erwartungsnutzenfunktion angegeben werden können, und verlangt man, dass im einfachen Portfolioproblem der Anteil des Vermögens, der in Aktien investiert wird, nicht vom Eigenkapital des Unternehmens abhängt, dann bleiben nur noch zwei mögliche Äquivalenzklassen von Erwartungsnutzenfunktionen übrig.

5.1.2 Nutzenindifferenz-Prämien

Nutzenfunktionen können nun verwendet werden, um einem Claim einen Preis zuzuweisen. Ein Unternehmen, das einen Claim verkauft, stellt folgende Überlegung an: Wie hoch muss der Preis für den Claim gewählt werden, so dass der Nutzen des Unternehmens bei Verkauf des Claims gleich dem Nutzen des Unternehmens ohne Verkauf des Claims ist? Man sagt dann: Der Preis ist so gewählt, dass das Unternehmen bei diesem Preis *indifferent* ist zwischen *verkaufen* und *nicht verkaufen*.

Solch ein Nutzenindifferenz-Prinzip wird bereits von Pratt in [30] zur impliziten Bestimmung einer Risikoprämie π durch:

$$U(c + \mathbb{E}(H) - \pi) = \mathbb{E}(U(c + H)) \tag{5.4}$$

verwendet. Ein Entscheider mit Nutzenfunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Anfangskapital c ist indifferent bei der Wahl zwischen der festen Zahlung $\mathbb{E}(H) - \pi$ und der zufälligen Zahlung H. Dabei gilt für strikt konkave U nach der Jensen'schen Ungleichung: $\pi > 0$.

Schweizer erweitert dieses Prinzip, indem er die Möglichkeit des Unternehmens berücksichtigt, am Markt zu handeln, siehe Schweizer [33], Kapitel 4. Dadurch kann es sein Risiko vermindern. Diese Tatsache soll bei der Bestimmung der Preises berücksichtigt werden. Ist beispielsweise der Claim replizierbar und kann das Unternehmen am Markt handeln, so sollte keine Risikoprämie verlangt werden.

Im weiteren sei H ein quadratintegrierbarer Claim.

Definition 5.12 *$h(c, \gamma)$ heißt* ***u-indifference premium*** *für γ Einheiten eines Claims H bei Eigenkapital c, falls*

$$\sup_{\vartheta \in \Theta} u((c + h(c, \gamma))B - \gamma H + \int_0^T \vartheta_t dS_t) = \sup_{\vartheta \in \Theta} u(cB + \int_0^T \vartheta_t dS_t) \tag{5.5}$$

wenn c das Anfangskapital des Verkäufers ist.

Dabei ist B der Wert zur Zeit T einer risikolosen Anlage, deren Preis zur Zeit $t = 0$ gleich Eins ist $B(0) = 1$ und Θ die Menge der zulässigen Handelsstrategien.

Ein Unternehmen, das seinen Nutzen abgesehen von dem Verkauf von H ausschließlich durch Handeln am Markt erhöht, verlangt für den Claim H eine Prämie h so, dass der Nutzen des Unternehmens bei Verkauf von H und Handeln am Markt genau so groß ist, als wenn das Unternehmen ausschließlich am Markt handelt. Ein Unternehmen, das ausschließlich am Markt handelt, wird hier Investor genannt.

Schweizer berechnet h in [33] explizit für den Fall

$$\tilde{u}_4(Y) := E^B(\frac{Y}{B}) - AVar^B(\frac{Y}{B}) \tag{5.6}$$

mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß P^B und einer Konstanten $A \in \mathbb{R}^+$. Weil $\tilde{u}_4$ keine Nutzenfunktion nach Definition 5.1 ist, sondern nur ein Bewertungsprinzip, nennt Schweizer den so berechneten Preis den Preis nach dem *financial variance principle.*

Definition 5.13 *In dem von Schweizer verwendeten Marktmodell lässt sich jeder quadratintegrierbare Claim H darstellen als:*

$$H = c^H B + g^H + N^H \tag{5.7}$$

mit $c^H \in \mathbb{R}$, $g^H = \int\limits_0^T \vartheta_t dS_t$, N^H *ist eine* $\mathcal{F}_T$*-messbare Zufallsvariable und* $N^H \perp \int\limits_0^T \vartheta_t dS_t$ *für alle zulässigen* $\vartheta \in \Theta$*, siehe Korollar 3 in Schweizer [33], und* $J_0 := \mathbb{E}((N^H)^2)$.
Mit dieser Darstellung gilt:

$$h^{fvp}(c, \gamma) = \gamma c^H + A\gamma^2 \frac{J_0}{B} \tag{5.8}$$

h^{fvp} *ist der Preis für den Claim nach dem financial variance principle.*

$h^{fvp}(c, \gamma)$ ist unabhängig vom Eigenkapital, $c^H B + g^H$ kann gleichzeitig als der bezüglich $\tilde{u}_4$ optimale Hedge betrachtet werden.

Der Preis ist die Summe aus den Kosten des optimalen Hedges und einem Sicherheitszuschlag, der ausschließlich auf dem nicht-hedgebaren Anteil von H, N^H, beruht. Dies ist ein Bewertungsprinzip und verlangt nicht, dass tatsächlich optimal gehedgt wird. Tut dies das Unternehmen allerdings nicht und verlangt trotzdem den Preis h^{fvp}, dann hätte *nichts tun* gemessen mit dem Bewertungsprinzip $\tilde{u}_4$ einen höheren Wert, als *den Claim H zum Preis* h^{fvp} *verkaufen.*

□

Kühn erweitert das Prämienprinzip aus Definition 5.12 in seiner Dissertation [15], indem er dem Käufer ein Wahlrecht einräumt. Zur Stoppzeit τ hat der Käufer das Recht, zwischen n verschiedenen Claims $H_1, \ldots, H_n$ zu wählen. Die Wahl wird durch eine Entscheidungsfunktion δ modelliert. δ ist eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable mit Werten in $\{1, \ldots, n\}$. $\delta = j$ genau dann, wenn sich der Käufer für den Claim H_j entscheidet, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Der Claim, für den sich der Käufer entscheidet, lässt sich damit schreiben als: $H^\delta = \sum\limits_{j=1}^{n} H_j 1_{\{\delta=j\}}$.
$\mathcal{D}$ bezeichnet die Menge aller zulässigen Entscheidungsfunktionen, siehe Kühn [15], Kapitel 4.2.

Wie $\mathcal{F}_\tau$ genau aussieht, ist je nach Situation zu modellieren.

In unserer Situation schreiben wir δ^i für die Entscheidungsfunktion des Versicherungsnehmers i. Es entspricht H^{δ^i} einem Vertrag mit 1-Option $O^1 = ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau))$, H_j entspricht dem Vertrag $V_j \in \mathcal{V}$. $\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^I)$.

Definition 5.14 *Wir nennen h eine* ***still fair premium****, falls*

$$\sup_{(\vartheta,{}^1\vartheta,\ldots,{}^n\vartheta)\in\Theta^{n+1}} \inf_{\delta\in\mathcal{D}} u(c+h-H^\delta+\int_0^T \vartheta_t^\delta dS_t) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta_t dS_t) \tag{5.9}$$

wobei

$$\vartheta_t^\delta(\omega) := \begin{cases} \vartheta_t(\omega) & t \le \tau(\omega) \\ {}^i\vartheta_t(\omega) & t > \tau(\omega) \text{ und } \delta(\omega) = i \end{cases}$$

Kühn schlägt die Prämie vor für so genannte *chooser options*, die an Börsen gehandelt werden, und auch für Optionen in Lebensversicherungsverträgen.

Kühns Interpretation lautet: "Die Prämie ist der minimale Betrag, den der Verkäufer zur Zeit Null erhalten muss, so dass der Nutzen des Verkäufers bei Verkauf des Claims mindestens so groß ist, als hätte er den Claim nicht verkauft, unabhängig davon, nach welcher Entscheidungsfunktion der Käufer entscheidet." siehe [15], Seite 67.

Schweizer schlägt im letzten Abschnitt seines Artikels [34] eine Möglichkeit vor, diese Prämien anzuwenden, wenn mehrere Verträge gleichzeitig verkauft werden. Da Versicherungsunternehmen im Allgemeinen sehr viele, gleiche Versicherungsverträge verkaufen, wenden wir diese Erweiterung auf Kühns Prämie an.

Bemerkung 5.15 *Zahlen alle Versicherungsnehmer die gleiche Prämie h, dann ist die Erweiterung von Kühns* still fair premium *nach Schweizer, letzter Abschnitt seines Artikels [34] gegeben durch:*

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{\delta\in\mathcal{D}} u(c+Ih-\sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i} - \int_0^T \vartheta^\delta(t) dS_t) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta(t) dS_t) \tag{5.11}$$

Dies sieht man so:

Die *still fair premium* für den ersten Versicherungsnehmer berechnet sich wie in der ursprünglichen Definition:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{\delta\in D} u(c+h_1-H_1^{\delta_1}+\int_0^T \vartheta^\delta(t) dS_t) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta(t) dS_t)$$

Nun kommt ein zweiter Versicherungsnehmer dazu und zahlt ebenfalls eine Prämie h_2 und verursacht ebenfalls eine mögliche Versicherungsleistung $H_2^{\delta_2}$:

$$\begin{aligned}\sup_{\vartheta\in\Theta}\inf_{\delta\in\mathcal{D}} u((c+h_1)+h_2-\sum_{i=1}^{2} H_i^{\delta_i}+\int_0^T \vartheta^\delta(t)dS_t) &= \sup_{\vartheta\in\Theta}\inf_{\delta\in D} u((c+h_1)-H_1^{\delta_1}+\int_0^T \vartheta^\delta(t)dS_t)\\ \text{(siehe oben)} &= \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta(t)dS_t)\end{aligned}$$

Und so weiter, bis der I. Versicherungsnehmer dazu stößt:

$$\begin{aligned} &\sup_{\vartheta\in\Theta}\inf_{\delta\in\mathcal{D}} u((c+\sum_{i=1}^{I-1} h_i)+h_I-\sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i}+\int_0^T \vartheta^\delta(t)dS_t)\\ &= \sup_{\vartheta\in\Theta}\inf_{\delta\in\mathcal{D}} u((c+\sum_{i=1}^{I-1} h_i)-\sum_{i=1}^{I-1} H_i^{\delta_i}+\int_0^T \vartheta^\delta(t)dS_t)\\ \text{(iteriert)} &= \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta(t)dS_t)\end{aligned}$$

Sind die Prämien für alle Versicherungsnehmer gleich hoch ($h_i = h_1$ für alle $i \in \mathcal{I}$) dann lässt sich das Prämienprinzip so schreiben:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta}\inf_{\delta\in\mathcal{D}} u(c+Ih-\sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i}-\int_0^T \vartheta^\delta(t)dS_t) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c+\int_0^T \vartheta(t)dS_t)$$

□

Bemerkung 5.16 *Fragen, die offen bleiben, sind:*

Welches c soll gewählt werden?

Weshalb soll dieses c unabhängig von I sein?

Das Eigenkapital eines Versicherungsunternehmens dient dazu, seine Ruinwahrscheinlichkeit zu verringern. Das Unternehmen beziehungsweise die Aktionäre unterliegen dem Risiko, bei unerwartet hohen Versicherungsleistungen Teile ihres Kapitals zu verlieren. Das Eigenkapital ist auch notwendig aufgrund gesetzlicher Solvenzvorschriften.

Aktionäre sind nur dann bereit, ihr Kapital einem Versicherungsunternehmen zu leihen, wenn sie dafür eine höhere Rendite erwarten können, als bei risikoarmen Anlagen. Zu viel Eigenkapital ist ineffizient aus Sicht des Aktionärs.

Ein von der Anzahl der abgeschlossenen Verträge unabhängiges Eigenkapital scheint unter diesen Überlegungen ungeeignet. Möglich ist dies, wenn das Unternehmen nicht ausschließlich diese Verträge handelt. Zum Vergleich beschreiben wir hier den Fall, in dem das Eigenkapital proportional zur Anzahl der Verträge ist:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{\delta\in\mathcal{D}} u(Ic + Ih - \sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i} - \int_0^T \vartheta_t^\delta dS_t) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(Ic + \int_0^T \vartheta_t dS_t) \tag{5.14}$$

Wenn J die Anzahl der Aktionäre ist, so ist der Nutzen pro Aktionär:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{\delta\in\mathcal{D}} u_{\text{Aktionär}}(c_0 + \max\{0, c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i} - \frac{1}{J}\int_0^T \vartheta_t^\delta dS_t\}) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c_0 + c + \int_0^T \vartheta_t dS_t)$$

c_0 ist das Eigenkapital des Aktionärs, der Verlust des Aktionärs ist beschränkt durch den Wert der Aktie, c.

Vernachlässigt man die Möglichkeit des Ruins der Versicherung, so vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta} \inf_{\delta\in\mathcal{D}} u_{\text{Aktionär}}(c_0 + c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{J}(\sum_{i=1}^{I} H_i^{\delta_i} - \int_0^T \vartheta_t^\delta dS_t)) = \sup_{\vartheta\in\Theta} u(c_0 + c + \int_0^T \vartheta_t dS_t)$$

Die Zufallsvariablen $H_i^{\delta_i} - \int_0^T \vartheta_t^\delta dS_t$ mit $i \in \mathcal{I}$ sind typischerweise nicht unabhängig.

Es hedgt das Versicherungsunternehmen, während der Aktionär den Schaden und die Profite trägt. Die Interessen sind nicht notwendigerweise die gleichen.

Fortsetzung von **Beispiel 5.6:**

Der Markt aus Beispiel 5.6 wird nun um einen Claim mit Auszahlung H erweitert.

Zur Zeit Eins befindet sich die Welt in einem der vier Zustände $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, die mit Wahrscheinlichkeiten $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$ für alle i eintreten. Die Preise zur Zeit Eins sind:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
B	1	1	1	1
X	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
H	2.6	2	$\frac{1}{2}$	0

Ein Unternehmen mit Eigenkapital 100 und Nutzenfunktion U_1 berechnet jetzt seine Nutzenindifferenz-Prämie nach Gleichung (5.5). Die rechte Seite lautet:

$\mathbb{E}(U_1(c + \vartheta_r(X-1))) \to \max_{\vartheta_r}$

Das optimale ϑ_r ist 50, $\mathbb{E}(U_1(c + 50(X-1))) = 4.66$.

Die Prämie h ergibt sich als Lösung der Aufgabe (linke Seite):

$\sup_{\vartheta_l} \mathbb{E}(U_1(c + h - H + \vartheta_l(X-1))) = 4.66$

In diesem Beispiel: $h = 0.92 < \mathbb{E}(H), \vartheta_l^* = 51.33$.
Die Prämie ist kleiner als die erwartete Auszahlung, da die Aktie und der Claim korreliert sind und beide eine erwartete Auszahlung $> \mu$ haben. Wären sie nicht korreliert, würde das (quadratische) Hedgen keinen Sinn machen.
51.33 Aktien ist nicht das, was man sich unter einem Hedge für H vorstellen würde.

Bemerkung 5.17

a) *Das obige Beispiel zeigt, dass die Größe* $\int_0^T \vartheta_t dS_t$ *(im Beispiel* $\vartheta_l(X-1)$*), die in den Nutzenindifferenz-Prämien auf der linken Seite auftaucht, im Allgemeinen nicht das ist, was man sich unter einem optimalen Hedge vorstellt.*

   Es gibt keinen Hedge, der als u-optimaler Hedge bezeichnet werden könnte.

b) *Die Nutzenindifferenz-Prämie h kann niedriger sein, als die erwartete Auszahlung. Im obigen Beispiel beträgt die erwartete Auszahlung 1.25 und* $h = 0.92$.

Diese beiden Effekte treten bei der Bewertung mit Schweizers *financial variance principle* nicht auf. Dort ist es optimal, in gewissem Sinne varianzoptimal zu hedgen. Auch ist der Preis höher als die mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ erwartete Auszahlung.

Im nächsten Abschnitt wird ein Problem des *financial variance principle* besprochen, das bei Kühns Prinzip ausgeschlossen ist.

5.1.3 Arbitragemöglichkeiten

Lemma 5.18 *Für jeden replizierbaren Claim H ist der No-Arbitrage-Preis* $\tilde{h}$ *ein Nutzenindifferenz-Preis nach Schweizer.*

Beweis:

Ist H replizierbar, so lässt sich H schreiben als $H = \tilde{h}B + \int_0^T \vartheta_t^H dS_t$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sup_{\vartheta\in\Theta} u((c+\tilde{h})B - H + \int_0^T \vartheta_t dS_t) &= \sup_{\vartheta\in\Theta} u((c+\tilde{h})B - \tilde{h}B - \int_0^T \vartheta_t^H dS_t + \int_0^T \vartheta_t dS_t) \\
&= \sup_{\tilde{\vartheta}\in\Theta} u(cB + \int_0^T \tilde{\vartheta}_t dS_t) \\
&= \sup_{\vartheta\in\Theta} u(cB + \int_0^T \vartheta_t dS_t)
\end{aligned}$$

so dass $\tilde{h}$ die Gleichung (5.5) erfüllt.

□

Kühn beweist den folgenden Satz, siehe [15] Theorem 2.7:

Satz 5.19 *Hat die Gleichung (5.9) eine eindeutige Lösung h, und wird dieses h als Preis für H^δ verwendet, dann hat weder der Verkäufer noch der Käufer eine Arbitragemöglichkeit.*

Lemma 5.20 *Ist ein Claim H nicht replizierbar und wird H mit Schweizers Financial Variance Principle mit festem A bewertet und wieder auf dem Markt gehandelt, so kann durch diesen neuen Claim eine Arbitragemöglichkeit entstehen.*

Beweis: Dies ist möglich, wenn die Prämie höher als die maximale Auszahlung ist.

Wir geben ein Beispiel an. $\Theta = \emptyset$, es gibt keinen Markt auf dem gehedgt werden könnte.

Für den Claim $X \sim U(0, b)$ berechnet sich die Prämie nach dem Varianzprinzip durch:

$h = \mathbb{E}X + AVar(X) = \frac{b}{2} + A\frac{b^2}{3} > b$ für $b > \frac{3}{2A}$.

Für $b > \frac{3}{2A}$ ist also die Prämie höher als die maximale Auszahlung, dem Verkäufer bietet sich eine Arbitragemöglichkeit.

□

5.1.4 Unterschiede zwischen Banken und Versicherungen

Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zwischen Banken und Versicherungen. Diese Unterschiede könnten Auswirkungen auf Prämien oder Hedges haben. Kühn schlägt seine *still fair premium* sowohl für Lebensversicherungsverträge mit Option als auch für Chooser Options vor, also für Bank- und Versicherungsprodukte.

Der erste Effekt betrifft die Anzahl der Versicherungsnehmer, der zweite Effekt das Problem der *Antiselektion*. Der Einfluss der beiden Effekte auf die von Kühn beschriebene *ungünstigste Entscheidungsfunktion* wird im Kapitel 5.1.5 veranschaulicht.

1. Die Auszahlung eines Versicherungsunternehmens unterscheidet sich in den beiden Fällen:

   a) I identische Verträge werden an ein und die selbe Person verkauft.

   b) I identische Verträge werden an I verschiedene Personen verkauft.

Der Nutzen des Versicherungsunternehmens ist im Fall b) höher aufgrund des *Ausgleichs im Kollektiv*:

Mit *Ausgleich im Kollektiv* bezeichnet Mack “die Tatsache, dass die Zusammenfassung mehrerer, nicht vollständig positiv korrelierter Risiken zu einer Schadenverteilung und

Prämieneinnahmen führt, die im Allgemeinen gegenüber jedem Einzelrisiko vorteilhaft ist, weil sich im Kollektiv günstige und ungünstige (im Vergleich zum individuellen Erwartungswert) Schadenverläufe der Einzelrisiken ausgleichen können."

Im Gegensatz dazu sind die Werte von I Put-Optionen auf die selbe Aktie immer zu 100 % korreliert, egal, ob sie an genau einen Kunden oder an I verschiedene Kunden verkauft werden. Für eine Bank ist die Auszahlung in beiden Fällen die selbe. Es ist das Geschäft der Versicherung, das kundenspezifische Risiko zu *poolen*.

Damit sollte die Prämie die Anzahl der Versicherungsnehmer berücksichtigen und nicht davon ausgehen, dass genau ein Vertrag verkauft wird. Oft wird davon ausgegangen, dass das Unternehmen *sehr viele* Verträge verkauft.

2. Bei dem Verkauf von Versicherungsverträgen verfügt der Versicherungsnehmer über mehr Information über seinen Gesundheitszustand als das Versicherungsunternehmen. Die entscheidungsrelevanten Informationen sind im Gegensatz zu Banken unsymmetrisch zu Ungunsten des Versicherungsunternehmens verteilt. Dies führt zu dem so genannten Problem der *Antiselektion*. Unter Antiselektion versteht man "das Ansteigen des Versicherungsrisikos durch den Wegfall der guten Risiken", siehe Schweizer Solvenztest [10].

Bemerkung 5.21 *Ein Mischfall stellt das Kreditrisiko dar:*

Sind $i = 1 : I$ Unternehmen (juristische Personen) und ersetzt man Tod durch Konkurs, dann vergibt eine Bank lieber I unabhängig und identisch verteilt in Konkurs gehenden Unternehmen einen Kredit über je einen Euro als einem Unternehmen einen Kredit über I Euro, abgesehen von Transaktionskosten.

In der Kreditrisikotheorie glaubt man allerdings nicht daran, dass verschiedene Unternehmen unabhängig voneinander in Konkurs gehen. Auch bekommt im Allgemeinen die Bank einen zufälligen Teil ihres Kredites bei Konkurs zurück, nur nicht die gesamte Summe.

Wir veranschaulichen den ersten Effekt an einem einfachen Beispiel:

Annahme 5.22

a) H_i $i \in \mathcal{I}$ sind unabhängig und identisch verteilte Schäden.

b) es gibt keinen Markt, auf dem gehedgt werden kann.

Lemma 5.23 *Unter der Annahme 5.22 gilt für die feste Nutzenindifferenz-Prämie h für H_1:*

1. *Der Nutzen einer Versicherung ist höher, wenn sie $H_1, \ldots, H_I$ jeweils zum Preis h an I unterschiedliche Versicherungsnehmer verkauft als wenn sie IH_1 zum Preis Ih an einen Versicherungsnehmer verkauft, wenn ihr Nutzen mit einer konkaven Nutzenfunktion gemessen wird. Der Wert von $Ih - \sum_{i=1}^{I} H_i$ ist höher als der von $Ih - IH_1$, wenn der Wert mit dem Varianzprinzip gemessen wird.*

2. *Wächst das Eigenkapital nicht mit der Anzahl der Versicherungsnehmer, so ist der Nutzen des Versicherungsunternehmens konstant mit der Anzahl der H_i, wenn er mit dem Varianzprinzip gemessen wird. Für konkave u lässt sich im Allgemeinen keine solche Aussage treffen.*

3. *Wächst die Anzahl der Aktionäre J und somit auch das Eigenkapital proportional zur Anzahl der Verträge $J = aI$ mit einem $a > 0$, so wächst der Nutzen des Aktionärs mit der Anzahl der Verträge.*

Beweis:

1. $\mathbb{E}(U(c + Ih - \sum_{i=1}^{I} H_i)) = \mathbb{E}(U(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}(c + Ih - IH_i)))$
   $> \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\mathbb{E}(U(c + Ih - IH_i)) = \mathbb{E}(U(c + Ih - IH_1))$
   $\mathbb{E}(c + Ih - \sum_{i=1}^{I} H_i) - AVar(\sum_{i=1}^{I} H_i) > \mathbb{E}(c + Ih - IH_1) - AVar(IH_1)$

2. Es gilt: $u(c+h-H_1) = u(c)$ also im Fall des Varianzprinzips: $h-\mathbb{E}(H_1)-AVar(H_1) = 0$
   Der Nutzen bei vielen Verträgen:
   $c + Ih - I\mathbb{E}(H_1) - AVar(\sum_{i=1}^{I} H_i) = c + Ih - I\mathbb{E}(H_1) - IAVar(H_1) = c$

3. $\mathbb{E}(U(c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I} H_i)) = \mathbb{E}(U(c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a}H_i)) > \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\mathbb{E}(U(c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{a}H_i)) = \mathbb{E}(U(c + \frac{I}{J}h - \frac{1}{a}H_1))$ für konkave U.

□

Korollar 5.24
Im Fall 2. mit dem Varianzprinzip ist die Prämie unabhängig von der Anzahl der Verträge.

Im Fall 3. sinkt die Nutzenindifferenz-Prämie mit der Anzahl der Verträge.

Möchte man den zweiten Effekt, die Antiselektion, berücksichtigen, dann müssen den Mengen von Versicherungsnehmern, die sich für die unterschiedlichen Entscheidungsmöglichkeiten entscheiden, unterschiedliche Sterbeverteilungen unterstellt werden.

5.1.5 Die ungünstigste Entscheidungsfunktion

Wird in Kühns *still fair premium* δ fest gewählt, das heißt entscheidet der Versicherungsnehmer nach einer fest gegebenen Entscheidungsregel, dann fällt Kühns *still fair premium* zusammen mit Schweizers *utility indifference premium*.

Eine Idee zur Berechnung der *still fair premium* könnte es also sein, für alle möglichen $\delta \in \mathcal{D}$ die entsprechende *utility indifference premium* h_δ zu berechnen und von diesen das Supremum als *still fair premium* zu wählen.

Kühn zeigt in [15] Proposition 4.2.11, dass dieses Vorgehen im Allgemeinen falsch ist. Für jede Erwartungsnutzenfunktion $u(X) = \mathbb{E}(U(X))$ mit $U' > 0$ und $U'' < 0$ gibt es ein Beispiel, in dem die *still fair premium* echt größer als das Supremum über alle h_δ ist. Gibt es eine Entscheidungsfunktion δ^*, die den Nutzen der Versicherung minimiert, egal wie gehedgt wird, dann gilt: $h = h_{\delta^*}$. So eine Entscheidungsfunktion δ^* nennen wir die *ungünstigste Entscheidungsfunktion*. Im Allgemeinen gibt es keine *ungünstigste Entscheidungsfunktion*.

Wir werfen nun einen Blick auf die im letzten Abschnitt vorgestellten Unterschiede zwischen Banken und Versicherungen. Zuerst zeigen wir an einem einfachen Beispiel, dass zwar für einen Versicherungsnehmer gilt, dass die *still fair premium* echt größer ist als das Supremum der h_δ. Geht die Anzahl der Versicherungsnehmer allerdings gegen Unendlich und wächst die Anzahl der Aktionäre proportional zu der Anzahl der Versicherungsnehmer, dann konvergiert $h - \sup\limits_\delta h_\delta$ gegen Null.

Danach zeigen wir kurz in diesem Beispiel, welche Auswirkungen der Effekt *Antiselektion* haben kann.

Diese Resultate sind freilich nicht allgemeingültig, zeigen aber, dass die Anzahl der Versicherungsnehmer und die Antiselektion einen Einfluss auf die Berechnung der *still fair premium* haben können.

Beispiel 5.25 *Die x-jährigen Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ schließen zur Zeit $t = 0$ den Vertrag mit 1-Option $O^1 = ((\mathcal{V}, 0), (\mathcal{P}_1, \tau))$ mit $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$ und*

$$V_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,\tau}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,\tau+T}$$

ab. Für alle Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ gilt:
$P^i(\omega^i > x + \tau | \omega^i > x) = 1$ *und* $P^i(\omega^i > x + \tau + T | \omega^i > x) = \frac{1}{2}$.
Der erste Vertrag zahlt fast sicher einen Euro aus, der zweite Vertrag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zwei Euro.

Beide Verträge können auf dem Markt ausschließlich zum Zeitpunkt $t = 0$ zum Preis $V_1(0) = V_2(0) = 1$ gehandelt werden. Ein Hedge (ξ^1, ξ^2) besteht damit aus zwei Komponenten:

ξ^1 bezeichnet die Anzahl der gekauften Verträge V_1,

ξ^2 bezeichnet die Anzahl der gekauften Verträge V_2.

Jeder Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$ hat zwei mögliche Entscheidungsfunktionen: $\delta_1^i = 1, \delta_2^i = 2$. Die Entscheidungsfunktionen sind konstant, den Versicherungsnehmern steht bei ihrer Entscheidung keine entscheidungsrelevante Information zur Verfügung. Das Eigenkapital des Versicherungsunternehmens wird mit c bezeichnet. Wir nehmen an, c sei *größer als 1.*

$V_1 = 1$ bezeichnet die Auszahlung des ersten Vertrages, V_2 die des zweiten. Die unterschiedlichen Auszahlungszeitpunkte können vernachlässigt werden, da der Zins gleich Null ist. Der Nutzen wird wie bei Kühn mit der Erwartungsnutzenfunktion $u_1(X) = \mathbb{E}(\ln\,(X))$ gemessen.

Lemma 5.26 *Im Beispiel 5.25 gilt: $h > \sup_{\delta} h_\delta$.*

Beweis:

Verwendet der Versicherte 1 die Entscheidungsfunktion δ_1^1, so ist der Nutzen des Unternehmens abhängig von dem Hedge:

$$\begin{aligned} u_1(c+1-\underbrace{V_1}_{=1}+\xi^1(\underbrace{V_1-V_1(0)}_{=0})+\xi^2(V_2-V_2(0)) &= u_1(\xi^2(V_2-1)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\,(c+\xi^2)+\ln\,(c-\xi^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\,(c^2-(\xi^2)^2) \rightarrow \max_{\xi^2} \end{aligned}$$

Also ist der Nutzen maximal für $\xi^2 = 0$, ξ^1 ist beliebig, da der erste Vertrag nicht zufällig ist. $h_{\delta_1} = 1$.

Verwendet der Versicherte 1 die Entscheidungsfunktion δ_2^1:

$$\begin{aligned} u_1(c+1-V_2+\xi^1(V_1-V_1(0))+\xi^2(V_2-V_2(0))) &= u_1(c+1-V_2+\xi^2V_2-\xi^2 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\,(c+(1-\xi^2))+\ln\,(c-(1-\xi^2))\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\,(c^2-(1-\xi^2)^2) \rightarrow \max_{\xi^2} \end{aligned}$$

So ist der Nutzen maximal für $\xi^2 = 1$. Optimal ist es, den Vertrag zu kaufen, für den sich der Versicherungsnehmer entscheidet. Somit ist der optimale Hedge von der Entscheidungsfunktion des Versicherten abhängig. $h_{\delta_2} = 1$ und $h > 1$.

□

Fortsetzung **Beispiel 5.25**:

Nun nehmen wir an, dass das Versicherungsunternehmen I Versicherungsnehmer versichert und dass die Anzahl der Aktionäre gleich der Anzahl der Versicherungsnehmer ist. Jeder Aktionär zahlt ein Eigenkapital von $c > 1$ ein. Der Versicherungsnehmer i entscheidet sich nach der Entscheidungsfunktion δ^i.

Lemma 5.27 *Im Beispiel 5.25 gilt:* $h - \sup_{\delta} h_\delta \to 0$ *falls die Anzahl der Versicherungsnehmer und die Anzahl der Aktionäre proportional dazu gegen Unendlich gehen.*

Der Nutzen eines Aktionärs gemessen mit u_1:

$$
\begin{aligned}
& u_1(c + 1 - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \left((V_{\delta_i}^i - \xi^1(V_1^i - V_1(0)) - \xi^2(V_2^i - V_2(0))) \right)) \\
= \; & u_1(c + 1 - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \left(V_{\delta_i}^i - \xi^2(V_2^i - 1) \right)) \to u_1(c) \text{ für I } \to \infty \text{ fast sicher}
\end{aligned}
$$

Für alle $\xi^2 \in \mathbb{R}, \delta_i \in \mathcal{D}$

Damit gilt für $I \to \infty$: $h \to 1$.

Aus der Sicht des Aktionärs geht $h - \sup_{\delta} h_\delta$ gegen Null.

□

Kann man zur Zeit τ den zweiten Vertrag nach Lemma 2.26 zum Preis 1 handeln, gibt es keine ungünstigere Entscheidung.

Nun kommen wir zu dem Effekt *Antiselektion*. Unter *Antiselektion* verstehen wir, wie oben bemerkt "das Ansteigen des Versicherungsrisikos durch den Wegfall der guten Risiken", siehe [10]. Wir nehmen zur Veranschaulichung den extremsten Fall an:

Lemma 5.28 *Unter der Annahme, dass jeder Versicherungsnehmer in Beispiel 5.25 weiß, ob er den Zeitpunkt* $\tau + T$ *erlebt oder nicht und jeder, der den Zeitpunkt* $\tau + T$ *erlebt, den Vertrag* V_2 *wählt und jeder, der ihn nicht erlebt den Vertrag* V_1 *wählt, ist die still fair premium gleich 1.5 für* $I \to \infty$ *Versicherungsnehmer.*

Beweis:

Im obigen Beispiel haben die Versicherten auf Basis von keiner Information entschieden. Es findet Antiselektion statt, falls die gesunden Versicherten V_2, die kranken Vertrag V_1 wählen.

Im Extremfall, wenn jeder Versicherungsnehmer weiß, ob er noch T Jahre lebt oder nicht, würde gelten:

${}_T p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_1} = 0$
kein Versicherungsnehmer der den Vertrag V_1 wählt, erlebt den Zeitpunkt $\tau + T$.

${}_T p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_2} = 1$
jeder Versicherungsnehmer, der den Vertrag V_2 wählt, erlebt den Zeitpunkt $\tau + T$.

$\Rightarrow \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} V_i^{\delta i} \to 1.5$ für $I \to \infty$ so dass der Preis aus Sicht des Aktionärs 1.5 mal so hoch ist wie im Fall ohne Antiselektion.

Hier entscheiden die Versicherten aufgrund einer Information, die im Allgemeinen dem Versicherungsunternehmen nicht zugänglich ist.

In diesem Fall ist die Entscheidungsfunktion $\delta^i = 2$, falls der Versicherungsnehmer i gesund ist, $\delta^i = 1$, falls er krank ist, diejenige, die die Auszahlung maximiert und somit die *ungünstigste.* $\square$

Kann man zur Zeit τ handeln, so muss sich der Preis des Standardvertrages $E^i_{x,T}$ abhängig von der Entscheidung des Versicherungsnehmers i ändern.

5.2 Hedgen und Bewerten von Lebensversicherungsverträgen mit 1-Option

Im Folgenden wird:

1. Der Wert der von den Versicherungsnehmern gewählten Verträge in Abhängigkeit von der Entscheidungsfunktion der Versicherungsnehmer dargestellt.
2. Die Entscheidungsfunktion modelliert.
3. Bei einem gegebenen Modell für die Entscheidungsfunktion risikominimierend gehedgt und die Abhängigkeit des optimalen Hedges von der Entscheidungsfunktion untersucht.
4. Dem nicht-hedgebaren Teil ein Marktwert zugewiesen. Es wird der Preis nach dem *financial variance principle* aus Schweizer [33] angegeben.

In diesem Kapitel wird der allgemeine klassische Vertrag mit 1-Option risikominimierend gehedgt und nach dem *financial variance principle* bewertet:

$$O^{1,i} := ((\mathcal{V}^i, 0), (\mathcal{P}^i_1, \tau)) \tag{5.17}$$

mit $\mathcal{V}^i = \{V^i_1, \ldots, V^i_n\}$ und $V^i_j = \begin{bmatrix} e^j_0 & e^j_1 & \ldots & e^j_{T_j} \\ - & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T_j}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$

wobei alle Verträge aus $\mathcal{V}^i$ klassische Verträge sind.

Wo es Unterschiede zum allgemeinen fondsgebundenen Vertrag mit 1-Option gibt, wird dies erwähnt:

$$O^{1,i}_{Fonds} := ((\mathcal{V}^i_{Fonds}, 0), (\mathcal{P}^i_{1,Fonds}, \tau)) \tag{5.18}$$

mit $\mathcal{V}^i_{Fonds} = \{V^i_{1,Fonds}, \ldots, V^i_{n,Fonds}\}$ und $V^i_{j,Fonds} = \begin{bmatrix} e^j_0 & e^j_1 & \ldots & e^j_{T_j} \\ - & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T_j}_{Fonds}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$

Es wird ein Modell für die Entscheidung der Versicherungsnehmer vorgeschlagen und unter diesem Modell der risikominimierende Hedge und der Preis nach dem *financial variance* *principle* gefunden, für den Fall, dass das Versicherungsunternehmen *sehr viele* solcher Verträge abgeschlossen hat.

Das Vorgehen wird anhand des Kapitalwahlrechts (Kapitel 4.1, Beispiel 4.4 mit $x = 30$, $\tau_1 = 30$ und $K = 18$) veranschaulicht. Das dazu verwendete *Mathematica*-Programm ist im Anhang A zu finden. Dort werden auch die im Programm getroffenen Annahmen erklärt.

Der Wert jedes Vertrages mit 1-Option zur Zeit $t = 0$ kann ausgedrückt werden durch die Werte der Verträge ohne Option $V_1(0), \ldots, V_n(0)$ plus dem Marktwert des Rests.

Analog kann der Wert jeder k-Option mit der selben Methode ausgedrückt werden durch die Werte der untergeordneten Verträge plus dem Marktwert des Rests. Rekursiv ergibt sich damit der Wert von Verträgen mit k-Option.

5.2.1 Der Wert der gewählten Lebensversicherungsverträge zur Zeit τ

Zur Zeit τ können durch die Entscheidung der Versicherungsnehmer $n + 1$ Mengen von Versicherungsnehmern $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_n$ unterschieden werden:

Definition 5.29 *Zur Zeit τ sind folgende Teilmengen von $\mathcal{M}(I) := \{1, \ldots, I\}$, $I \in \mathbb{N}$ unterscheidbar:*

a) $\mathcal{M}_0(I, \omega) := \{i \in \mathcal{M}(I) \text{ mit } \omega^i \leq \tau\}$
Die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$, die vor τ sterben.

b) $\mathcal{M}_j(I, \omega) := \{i \in \mathcal{M}(I) \text{ mit } \omega^i > \tau, \delta^i(\omega) = j\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$
Die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$, die den Zeitpunkt $t = \tau$ erleben und sich für den Vertrag V_j entscheiden.

c) $\mathcal{M}(I, \tau) := \mathcal{M}(I) \setminus \mathcal{M}_0(I, \omega) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{M}_j(I, \omega)$; $\mathcal{M}(\tau) := \bigcup_{I \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(I, \tau)$
Die Versicherungsnehmer, die zur Zeit τ noch leben.

Annahme 5.30 *Die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}_j(I, \omega)$ sind zur Zeit τ ununterscheidbar. Die Preise von Standardverträgen von ununterscheidbaren Versicherungsnehmern sind zur Zeit τ gleich: $E^i_{x,T}(\tau) = E^{\mathcal{M}_j}_{x,T}(\tau)$ für alle $i \in \mathcal{M}_j$ und $T \in \{\tau, \tau + 1, \ldots\}$*

Die Anteile dieser Mengen von Versicherungsnehmern, die einen bestimmten Zeitpunkt erleben bezeichnen wir wie in Kapitel 1.3.1 eingeführt mit ${}_tp^{\mathcal{M}_j}_{x+\tau}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definition 5.31 *Wir bezeichnen mit:*

$E_{x,T}^{\mathcal{M}_j}(\tau)$	*den Preis zur Zeit τ des Standardvertrages $E_{x,T}^i$ für einen Versicherungsnehmer, der sich für den Vertrag j entschieden hat.*
$V_j^{\mathcal{M}_j}(\tau)$	*den Preis zur Zeit τ des Vertrages V_j für einen Versicherungsnehmer, der sich für den Vertrag j entschieden hat.*
$O^{1,i}(\tau)$	*den Preis zur Zeit τ des Vertrages $O^{1,i}$ mit 1-Option für den Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{I}$.*
$O^{1,\{1,\ldots,I\}}(\tau)$	$:= \sum\limits_{i=1}^{I} O^{1,i}(\tau)$ *den Preis zur Zeit τ der Verträge $O^{1,i}$ für die Versicherungsnehmer aus $\{1,\ldots,I\} \subset \mathcal{I}$.*
$O^1(\tau)$	$:= \lim\limits_{I\to\infty} \frac{1}{I} O^{1,\{1,\ldots,I\}}(\tau)$ *den Preis eines Vertrages mit 1-Option pro Versicherungsnehmer bei vielen Versicherungsnehmern.*

Lemma 5.32 *Für die oben definierten Preise gilt:*

$$\begin{aligned}
V_j^{\mathcal{M}_j}(\tau) &= \sum_{t=\tau}^{T} e_t^j E_{x,t}^{\mathcal{M}_j}(\tau) \\
O^{1,i}(\tau) &= V_1^{\mathcal{M}_1}(\tau) 1_{\{\delta^i=1\}} + \ldots + V_n^{\mathcal{M}_n}(\tau) 1_{\{\delta^i=n\}} \\
O^{1,\{1,\ldots,I\}}(\tau) &= \sum_{i=1}^{I} O^{1,i}(\tau) = V_1^{\mathcal{M}_1}(\tau)|\mathcal{M}_1(I)| + \ldots + V_n^{\mathcal{M}_n}(\tau)|\mathcal{M}_n(I)| \\
O^1(\tau) &= \lim_{I\to\infty} V_1^{\mathcal{M}_1}(\tau)\frac{|\mathcal{M}_1(I)|}{I} + \ldots + V_n^{\mathcal{M}_n}(\tau)\frac{|\mathcal{M}_n(I)|}{I}
\end{aligned}$$

sonst ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit.

Bemerkung 5.33 *Sind die ${}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j}$ bekannt, so gilt nach Lemma 2.26: $E_{x,t}^{\mathcal{M}_j} = {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j} B_t(\tau)$ und damit für den No-Arbitrage Preis eines fondsgebundenen Vertrages aus $\mathcal{V}_{Fonds}^i$ mit Satz 3.39:*

$$V_{j,Fonds}^{\mathcal{M}_j}(\tau) = X(\tau) \sum_{t=\tau}^{T} e_t^j \; {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j} \tag{5.19}$$

wobei e_t^j die Einträge aus dem Vertrag V_j sind.

Der Wert eines fondsgebundenen Vertrages zur Zeit τ hängt von dem Kurs eines Fonds-Anteils und der Sterbeverteilung ab, nicht aber vom Zins.

5.2.2 Die Entscheidung der Versicherungsnehmer

Zum festen Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{N}$ entscheidet sich jeder noch lebende Versicherungsnehmer für einen der Verträge $V_1, \ldots, V_n$. Alternative Investitionsmöglichkeiten, steuerliche Vorteile, Verschuldung beziehungsweise Vermögen der Versicherungsnehmer können deren Entscheidungen beeinflussen.

Aus Sicht des Versicherungsunternehmens interessiert die Gruppenentscheidung, nicht die individuelle Entscheidung jedes einzelnen Versicherungsnehmers.

Kühn wählt die Prämie so, dass es keine Entscheidungsfunktion für den Versicherungsnehmer gibt, die ihm erlaubt, den Nutzen des Versicherungsunternehmens zu mindern. Dies hat den Vorteil, dass die genaue Form der Entscheidungsfunktion nicht modelliert werden muss, allerdings scheint es aufgrund der oben genannten individuellen Einflüsse unrealistisch, dass sich *alle* Versicherungsnehmer zu ungunsten des Versicherungsunternehmens entscheiden.

Wir bereiten nun das Modell für die Entscheidung der Versicherungsnehmer vor. Dazu nehmen wir an, jeder Versicherungsnehmer wüsste zur Zeit τ genau, in welchem Jahr er stirbt. Unter dieser (freilich unrealistischen) Annahme kann er zur Zeit τ denjenigen Vertrag mit dem höchsten Barwert wählen, wobei der Barwert im Falle klassischer Verträge mit dem zur Zeit τ gültigen Zins $r > 0$ berechnet wird, im Falle fondsgebundener Verträge ist der Zins bei dieser Wahl nicht relevant.

Dazu definieren wir die Menge der Zeitpunkte zu denen ein Versicherungsnehmer sterben müsste, damit der Vertrag V_j für ihn den höchsten Barwert hat, als $Z_j(r)$ im klassischen Fall beziehungsweise als Z_j im fondsgebundenen Fall.

Definition 5.34 *Wir definieren folgende Mengen von Zeitpunkten abhängig vom dem zum Zeitpunkt τ gültigen Zins r:*

a) Für den klassischen Fall:

$$\begin{aligned} Z_j(r) &:= \{t \in \{\tau, \tau+1, \ldots\} \setminus \{Z_1 \cup \ldots \cup Z_{j-1}\} \\ &\quad \textit{mit } \sum_{k=\tau}^{t} e_k^j (1+r)^{-(k-\tau)} \geq \max_{l \in \{j+1,\ldots,n\}} \sum_{k=\tau}^{t} e_k^l (1+r)^{-(k-\tau)}\} \\ &\quad \textit{für } j \in \{1, \ldots, n-1\} \textit{ und} \\ Z_n(r) &:= \{t \in \{\tau, \tau+1, \ldots\} \setminus \{Z_1 \cup \ldots \cup Z_{n-1}\}\} \end{aligned}$$

b) Für den fondsgebundenen Fall:

$$\begin{aligned} Z_j &:= \{t \in \{\tau, \tau+1, \ldots\} \setminus \{Z_1 \cup \ldots \cup Z_{j-1}\} \textit{ mit } \sum_{k=\tau}^{t} e_k^j \geq \max_{l \in \{j+1,\ldots,n\}} \sum_{k=\tau}^{t} e_k^l\} \\ &\quad \textit{für } j \in \{1, \ldots, n-1\} \textit{ und} \\ Z_n &:= \{t \in \{\tau, \tau+1, \ldots\} \setminus \{Z_1 \cup \ldots \cup Z_{n-1}\}\} \end{aligned}$$

Die Interpretation ist: Stirbt ein Versicherungsnehmer in Z_j, so hätte der Vertrag V_j zum Zeitpunkt τ bei Zins r für ihn den höchsten Barwert gehabt. Z_j ist im klassischen Fall eine zufällige Menge von Zeitpunkten, da der Zins zur Zeit $t = \tau$ zufällig ist. Im fondsgebundenen Fall sind diese Mengen nicht zufällig.

Nun definieren wir die zur Zeit τ zufälligen Mengen von Versicherungsnehmern $\tilde{\mathcal{M}}_j$ als die Versicherungsnehmer, die an einem der Zeitpunkte aus Z_j sterben.

Definition 5.35

a) $\tilde{\mathcal{M}}_0(I, \omega) := \mathcal{M}_0(I, \omega)$ *mit* $|\tilde{\mathcal{M}}_0(I, \omega)| = \sum_{t=0}^{\tau-1} d^{\{1,\ldots,I\}}(t)$

Die Versicherungsnehmer, die vor τ sterben.

b) $\tilde{\mathcal{M}}_j(I,\omega) := \{i \in \{1,\ldots,I\}; K^i(\omega^{\mathcal{I}}) \in Z_j\}$ *mit* $|\tilde{\mathcal{M}}_j(I,\omega)| = \sum_{t\in Z_j} d^{\mathcal{M}(I)}(t)$

Die Versicherungsnehmer, für die der Vertrag V_j zur Zeit τ den höchsten Barwert hat.

Zur Zeit τ ist nicht bekannt, in welcher dieser Mengen sich welcher Versicherungsnehmer befindet.

Es ist $\tilde{\mathcal{M}}_0(I,\omega)\cup\ldots\cup\tilde{\mathcal{M}}_n(I,\omega) = \mathcal{M}(I)$ für alle ω. Bevor wir das Modell für die Entscheidung angeben, geben wir noch eine Aussage über das Verhältnis der Größen der Mengen zueinander an:

Lemma 5.36 *Sei $j \in \{1,\ldots,n\}$, $t \in \{\tau,\tau+1,\ldots\}$. Dann gilt für $I \to \infty$ gilt fast sicher:*

1.

$$\frac{|\tilde{\mathcal{M}}_j(I)|}{I} = \sum_{t\in Z_j} \frac{d^{\mathcal{M}(I)}(t)}{I} \to \sum_{t\in Z_j} ({}_tp_x^{\mathcal{I}} - {}_{t+1}p_x^{\mathcal{I}}) =: \tilde{m}_j \tag{5.20}$$

$\tilde{m}_j$ ist der Anteil aller Versicherungsnehmer, der den Zeitpunkt τ erlebt und für den der Vertrag V_j den höchsten Barwert hat.

2.

$$\frac{l^{\tilde{\mathcal{M}}_j(I)}(t)}{I} = \sum_{\substack{s\geq t\\ s\in Z_j}} \frac{d^{\mathcal{M}(I)}(s)}{I} \to \sum_{\substack{s\geq t\\ s\in Z_j}} ({}_sp_x^{\mathcal{I}} - {}_{s+1}p_x^{\mathcal{I}}) =: \tilde{l}_{j,t} \tag{5.21}$$

$\tilde{l}_{j,t}$ ist der Anteil aller Versicherungsnehmer, der den Zeitpunkt $t \geq \tau$ erlebt und für den der Vertrag V_j den höchsten Barwert hat.

Es gilt: $\tilde{m}_j = \tilde{l}_{j,\tau}$.

Beweis:

$$\frac{d^{\mathcal{M}(I)}(t)}{I} = \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(t) - l^{\mathcal{M}(I)}(t+1)}{I} \to {}_tp_x^{\mathcal{I}} - {}_{t+1}p_x^{\mathcal{I}} \tag{5.22}$$

für $I \to \infty$ nach Kapitel 1.1., da $\bigcup_{I\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(I) = \mathcal{I}$

□

Nun zu dem Modell für die Entscheidungsfunktion: Wir glauben nicht daran, dass jeder Versicherungsnehmer zur Zeit τ weiß, in welcher Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$ er sich befindet. Das Modell sagt: Die Versicherungsnehmer, die sich in der Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$ befinden, ohne dies allerdings zu wissen, entscheiden sich alle gleich, und zwar mit Wahrscheinlichkeit w_{kj} für den Vertrag V_j.

Auf diese Weise lässt sich modellieren, dass beispielsweise bei zwei Verträgen sich etwas mehr als die Hälfte der Versicherungsnehmer aus der Menge $\tilde{\mathcal{M}}_1$ sich für den Vertrag V_1 entscheiden, etwas weniger als die Hälfte für den Vertrag V_2.

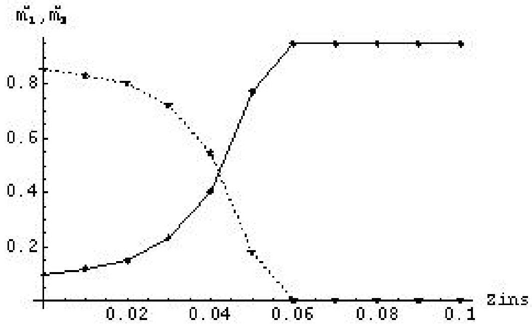


Abbildung 5.1: $\tilde{m}_1$ und $\tilde{m}_2$ abhängig vom Zins. Je höher der Zins, desto größer die Menge von Versicherungsnehmern, für die sich die Einmalauszahlung lohnt. Ab einem Zins von 6 % lohnt sich in diesem Beispiel für alle die Einmalauszahlung. Dieses und alle weiteren Bilder beziehen sich auf das Kapitalwahlrecht, Kapitel 4.1, Beispiel 4.4. Es gilt: $\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 = 1$.

Definition 5.37 *Die Versicherungsnehmer entscheiden sich nach* ***unserem Entscheidungsmodell****, falls für $i \in \mathcal{I}, j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, n\}, t \in Z_k$ fast sicher für $I \to \infty$ gilt:*

$$\frac{1}{I} \sum_{i \in \tilde{\mathcal{M}}_k(I)} 1_{\{\delta^i = j, K^i = t\}} \to w_{kj} \lim_{I \to \infty} \frac{1}{I} \sum_{i \in \tilde{\mathcal{M}}_k(I)} 1_{\{K^i = t\}} = w_{kj} ({}_t p_x^{\mathcal{I}} - {}_{t+1} p_x^{\mathcal{I}}) \tag{5.23}$$

Ein Anteil von w_{kj} der Versicherungsnehmer aus $\tilde{\mathcal{M}}_k$, die im Alter $x + t$ sterben, entscheidet sich für den Vertrag V_j, unabhängig von t.

Dabei sind die w_{kj} unabhängig von den Kapitalmarktgrößen, nicht aber die Größen der Menge $|\tilde{\mathcal{M}}_k(I)|$, diese hängen vom Zins und der Sterblichkeitsverteilung ab.

Dieses Modell beinhaltet folgende Vereinfachungen:

Die Anteile der verschiedenen Mengen $\tilde{\mathcal{M}}_k$, die sich für den Vertrag V_j entscheiden, können unterschiedlich groß sein. Innerhalb einer Menge aber sind, egal in welchem $t \in Z_k$ die Versicherungsnehmer sterben, die Anteile stets gleich groß. Es kann in diesem Modell nicht sein, dass sich unter den Versicherungsnehmern aus der Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$, die eher länger leben, ein größerer Anteil für den Vertrag V_j entscheidet, als unter den Versicherungsnehmern aus der Menge $\tilde{\mathcal{M}}_k$, die eher kürzer leben.

Es könnten auch die w_{kj} vom Kapitalmarkt abhängen.

Lemma 5.38 *Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{\tau, \tau + 1, \ldots\}$. In dem Modell aus Definition 5.37 gilt für $I \to \infty$ fast sicher:*

1.

$$\frac{l^{\mathcal{M}_j(I)}(\tau)}{I} = \frac{|\mathcal{M}_j(I)|}{I} = \frac{1}{I}\Big(\sum_{i \in \tilde{\mathcal{M}}_1(I)} 1_{\{\delta^i = j\}} + \ldots + \sum_{i \in \tilde{\mathcal{M}}_n(I)} 1_{\{\delta^i = j\}} \Big) \to w_{1j} \tilde{m}_1 + \ldots + w_{nj} \tilde{m}_n =: m_j$$

m_j ist der Anteil aller Versicherungsnehmer, der den Zeitpunkt τ erlebt und sich für den Vertrag V_j entscheidet.

2.

$$\begin{aligned}
\frac{l^{\mathcal{M}_j(I)}(t)}{I} &= \frac{1}{I}\Big(\sum_{i\in\tilde{\mathcal{M}}_1(I)} 1_{\{\delta^i=j,K^i\geq t\}} + \ldots + \sum_{i\in\tilde{\mathcal{M}}_n(I)} 1_{\{\delta^i=j,K^i\geq t\}}\Big)\\
&\to w_{1j}\tilde{l}_{1,t} + \ldots + w_{nj}\tilde{l}_{n,t}\\
&=: l_{j,t}
\end{aligned}$$

$l_{j,t}$ ist der Anteil aller Versicherungsnehmer, der den Zeitpunkt $t \geq \tau$ erlebt und sich für den Vertrag V_j entscheidet.

Es gilt: $m_j = l_{j,\tau}$.

Beweis: Unter Verwendung unseres Entscheidungsmodells gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{I}\sum_{i\in\tilde{\mathcal{M}}_j(I)} 1_{\{\delta^i=j,K^i\geq t\}} &= \sum_{\substack{s\in Z_j\\ s\geq t}} \frac{1}{I}\sum_{i\in\tilde{\mathcal{M}}_j(I)} 1_{\{\delta^i=j,K^i=s\}}\\
&\to w_{kj}\sum_{\substack{s\in Z_j\\ s\geq t}} ({}_sp_x^{\mathcal{I}} - {}_{s+1}p_x^{\mathcal{I}})\\
&= w_{kj}\tilde{l}_{j,t}
\end{aligned}$$

□

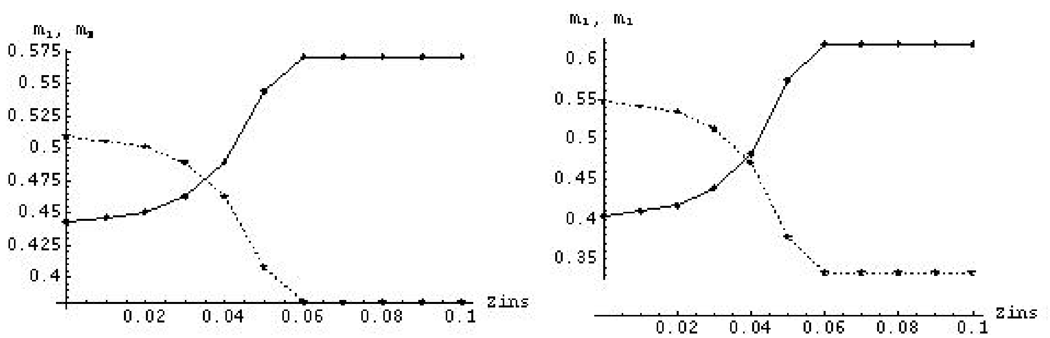


Abbildung 5.2: m_1 und m_2 abhängig vom Zins, links bei $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$, rechts bei $w_{11} = 0.65, w_{22} = 0.6$.

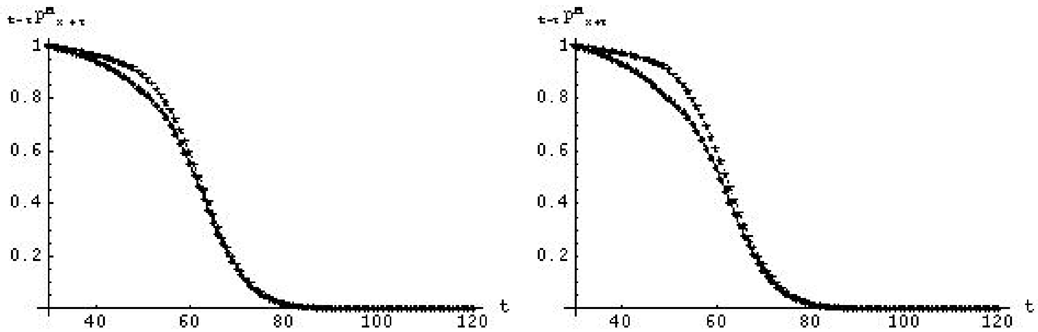


Abbildung 5.3: Der Anteil der Überlebenden ${}_{t-\tau}p_\tau^{\mathcal{M}_1}$ bzw. ${}_{t-\tau}p_\tau^{\mathcal{M}_2}$ für $t \in \{\tau, \ldots, 120\}$ der beiden Mengen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ für $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$ links und für $w_{11} = 0.65, w_{22} = 0.6$ rechts. Dabei gehören jeweils die oberen Werte zur Menge $\mathcal{M}_2$.

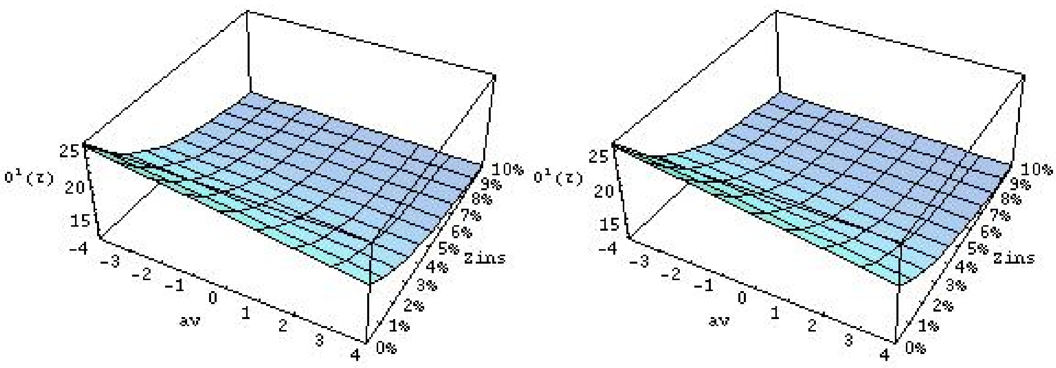


Abbildung 5.4: Die Auszahlung $O^1(\tau)$ in Abhängigkeit von Zins und der Sterblichkeit mit $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$ links und mit $w_{11} = 0.65, w_{22} = 0.6$ rechts.

Korollar 5.39 *Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in \{\tau, \tau + 1, \ldots\}$. In unserem Entscheidungsmodell und unter Annahme 2.25 gilt für $I \to \infty$ fast sicher, falls $m_j > 0$:*

1.

$$ {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j} = \lim_{I\to\infty} \frac{l^{\mathcal{M}_j(I)}(t)}{l^{\mathcal{M}_j(I)}(\tau)} = \frac{l_{j,t}}{m_j} \tag{5.25} $$

2.

$$ E_{x,t}^{\mathcal{M}_j}(\tau) = {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j}(1+r)^{-(t-\tau)} \tag{5.26} $$

3.

$$ O^1(\tau) = V_1^{\mathcal{M}_1}(\tau)m_1 + \ldots + V_n^{\mathcal{M}_n}(\tau)m_n \tag{5.27} $$

Für $m_j = 0$ definieren wir ${}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j} := 0$

Beweis:

Bei Zins r zur Zeit τ gilt: $B_t(\tau) = (1+r)^{-(t-\tau)}$ und nach Lemma 2.26 folgt
$E_t^{\mathcal{M}_j}(\tau) = {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j}(1+r)^{-(t-\tau)}$.

□

5.2.3 Der risikominimierende Hedge

Zur Zeit $t = 0$ schließen die zur Zeit $t = 0$ ununterscheidbaren Versicherungsnehmer $i \in \mathcal{M}(I) := \{1, \ldots, I\}$ den allgemeinen Vertrag mit 1-Option ab. Wir suchen auf dem in Kapitel 4.2 definierten Markt für den Vertrag mit 1-Option für die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$ den für $I \to \infty$ risikominimierenden Hedge. Dabei schränken wir uns ein: Wir hedgen für jeden Versicherungsnehmer im Zeitintervall $[0, \tau]$ gleich. Dies ist nahe liegend, da die noch lebenden Versicherungsnehmer in diesem Intervall ununterscheidbar sind.

Dieser risikominimierende Hedge besteht damit aus den Komponenten:
$\eta_0^*, \eta_\tau^*, \xi_\tau^{1*} =: \xi^{1*}, \xi_\tau^{2*} =: \xi^{2*}$.
Ein Hedge wird also folgende Verträge ohne Option enthalten:

$$\xi^{1*} \sum_{i \in \mathcal{M}(I)} V_1^i + \ldots + \xi^{n*} \sum_{i \in \mathcal{M}(I)} V_n^i$$

Wobei $\xi^{1*}, \ldots, \xi^{n*}, \eta_0^* \in \mathbb{R}$ im Folgenden risikominimierend bestimmt werden, durch diese Wahl ist die Zufallsvariable η_1^* festgelegt.

Der Suche nach dem Hedge schalten wir eine Überlegung vor: Wir haben gesehen, dass sich der Wert eines Vertrages mit der Entscheidung des Versicherungsnehmers ändert. Wir haben nun ein Portfolio, in dem für jeden Versicherungsnehmer ξ^{j*} Verträge V_j enthalten sind, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ändert sich auch der Wert des gesamten Portfolios? Wenn ja, wie? Wäre es besser, das Hedge-Portfolio vor oder nach der Entscheidung zu verkaufen?

Wir werden sehen, dass unter der Annahme, dass die ${}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}(I,\tau)}$ zur Zeit τ bekannt sind, sich der Wert des gesamten Portfolios mit der Entscheidung nicht ändert.

Bis zur Entscheidung sind die noch lebenden Versicherungsnehmer ununterscheidbar, der Wert der Verträge im Hedges wäre zur Zeit τ ohne die Entscheidung:

$$\xi^{1*} l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)} + \ldots + \xi^{n*} l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}$$

und pro noch lebendem Versicherungsnehmer:

$$\xi^{1*} V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) + \ldots + \xi^{n*} V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau)$$

Mit der Entscheidung lassen sich die Versicherungsnehmer in die $n+1$ Mengen $\mathcal{M}_0(I), \mathcal{M}_1(I), \ldots, \mathcal{M}_n(I)$ aufteilen. Die Preise der Standardverträge und damit der Verträge ändern sich. Der Wert der Verträge im Hedge zur Zeit τ ist damit:

$$\sum_{k=1}^n \xi^{k*} \left(|\mathcal{M}_1| V_k^{\mathcal{M}_1(I)}(\tau) + \ldots + |\mathcal{M}_n| V_k^{\mathcal{M}_n(I)}(\tau) \right)$$

und pro lebendem Versicherungsnehmer:

$$\sum_{k=1}^n \xi^{k*} \left(\frac{|\mathcal{M}_1|}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} V_k^{\mathcal{M}_1(I)}(\tau) + \ldots + \frac{|\mathcal{M}_n|}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} V_k^{\mathcal{M}_n(I)}(\tau) \right)$$

für $I \to \infty$:

$\sum_{k=1}^{n} \xi^{k*} \left(\frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} V_k^{\mathcal{M}_1}(\tau) + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} V_k^{\mathcal{M}_n}(\tau) \right)$

Lemma 5.40

Pro noch lebendem Versicherungsnehmer ist der Wert der Verträge im Hedge für $I \to \infty$ nach der Entscheidung zur Zeit τ gegeben durch:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{k*} \left(\frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} V_k^{\mathcal{M}_1}(\tau) + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} V_k^{\mathcal{M}_n}(\tau) \right)$$

Pro noch lebendem Versicherungsnehmer ist der Wert der Verträge im Hedge für $I \to \infty$ ohne Entscheidung zur Zeit τ gegeben durch:

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{k*} V_k^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau)$$

Unter der Annahme, dass zur Zeit τ die ${}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_j}$ bekannt sind für $t \in \{\tau+1, \tau+2, \ldots\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

Diese beiden Werte sind identisch. Damit ändert sich der Wert des Hedges zur Zeit τ nicht mit der Entscheidung der Versicherungsnehmer.

Beweis:

Wir zeigen, dass gilt:

$$V_j^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) = \frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} V_j^{\mathcal{M}_1}(\tau) + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} V_j^{\mathcal{M}_n}(\tau) \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}(\tau)} \\
= \; & \lim_{I\to\infty} \left(\frac{l^{\mathcal{M}(I)}(t)}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} \right) \\
= \; & \lim_{I\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{M}_1(I)} 1_{\{K^i \geq t\}}}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} + \ldots + \frac{\sum\limits_{i\in\mathcal{M}_n(I)} 1_{\{K^i \geq t\}}}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} \right) \\
= \; & \lim_{I\to\infty} \frac{I}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} \left(\frac{|\mathcal{M}_1(I)|}{I} \frac{1}{|\mathcal{M}_1(I)|} \sum_{i\in\mathcal{M}_1(I)} 1_{\{K^i \geq t\}} + \ldots + \frac{|\mathcal{M}_n(I)|}{I} \frac{1}{|\mathcal{M}_n(I)|} \sum_{i\in\mathcal{M}_n(I)} 1_{\{K^i \geq t\}} \right) \\
= \; & \lim_{I\to\infty} \frac{I}{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)} \left(\frac{|\mathcal{M}_1(I)|}{I} \frac{l^{\mathcal{M}_1(I)}(t)}{l^{\mathcal{M}_1(I)}(\tau)} + \ldots + \frac{|\mathcal{M}_n(I)|}{I} \frac{l^{\mathcal{M}_n(I)}(t)}{l^{\mathcal{M}_n(I)}(\tau)} \right) \\
= \; & \frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_1} + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} {}_{t-\tau}p_{x+\tau}^{\mathcal{M}_n}
\end{aligned}$$

Falls $l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) \to \infty$ für $I \to \infty$.

$\frac{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)}{I} \to m_1 + \ldots + m_n$ für $I \to \infty$.

Mit Lemma 2.26 gilt damit:

$E_{x,t}^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) = \frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} E_{x,t}^{\mathcal{M}_1} + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} E_{x,t}^{\mathcal{M}_n}$

und

$V_j^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) = \frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n} V_j^{\mathcal{M}_1}(\tau) + \ldots + \frac{m_n}{m_1+\ldots+m_n} V_j^{\mathcal{M}_n}(\tau)$

□

Zur Zeit τ bezahlt beziehungsweise erhält das Versicherungsunternehmen und damit die Aktionäre die Differenz aus dem Wert des Hedges und dem Wert der gewählten Verträge. Diese Differenz wird bei risikominimierenden Hedges mit η_1^* bezeichnet. Wir nennen η_1^* das *Restrisiko*.

Das Restrisiko trägt der Aktionär. Ein optimaler Hedge ist einer, der aus Sicht des Aktionärs optimal ist. Der Aktionär kann selbst am Markt für die 1-Option investieren. Hier wird die Hypothese aufgestellt, dass es für ihn am besten ist, wenn das Unternehmen so hedgt, dass die Auszahlung an den Aktionär η_1^* unkorreliert zu den Gewinnen am Markt für 1-Optionen ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Versicherung risikominimierend hedgt.

Lemma 5.41 *Der risikominimierende Hedge $\xi^{1*}, \ldots, \xi^{n*}, \eta_0^*$ zur Zeit Null ergibt sich im Markt für den Vertrag mit 1-Option für die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$ für $I \to \infty$ durch Lösen des Gleichungssystems (5.32).*

η_1^* ist dann definiert als die zufällige Differenz zwischen dem Wert des risikominimierenden Hedges und dem Wert der gewählten Verträge zur Zeit τ.

Beweis:

Zu lösen ist lediglich das Minimierungsproblem $R_0(\xi, \eta) \to \min_{\eta,\xi}$, da wir uns im Einperiodenmodell befinden. Zum Diskontieren verwenden wir den Bond B_τ mit $B_\tau(\tau) = 1$. Damit sind zur Zeit $t = \tau$ die diskontierten Größen gleich den nicht-diskontierten.

$R_0(\eta, \xi) = \mathbb{E}((\hat{C}_1(\eta, \xi) - \hat{C}_0(\eta, \xi))^2)$

Da wir für alle Versicherungsnehmer gleich hedgen, sind die Anfangskosten $C_0(\eta, \xi) = I\eta_0$ proportional zu der Anzahl der Versicherungsnehmer. η_0 sind dann die Kosten des risikominimierenden Hedges pro Versicherungsnehmer.

$\hat{C}_1(\eta, \xi) = C_1(\eta, \xi) = V_1(\eta, \xi) - G_1(\eta, \xi) = O^{1,\{1,\ldots,I\}}(\tau) - G_1(\eta, \xi)$.

Dabei ist der Gewinn gleich dem Wert des Hedges zur Zeit $t = \tau$ minus dem Wert des Hedges zur Zeit $t = 0$. Nach Lemma 5.40 können wir dabei für $I \to \infty$ für den Wert des Hedges zur Zeit $t = \tau$ den Wert wählen, den der Hedge hätte, würden die Versicherungsnehmer nicht entscheiden.

Der Gewinn aus dem Handeln des Vertrages V_j ist:

$\xi^j \sum_{i \in \mathcal{M}(I)} (V_j^i(\tau) - V_j^i(0)) = \xi^j \left(l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_j^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - I V_j^{\mathcal{M}(I)}(0) \right)$

Da die Verträge, die auf Versicherungsnehmer abgeschlossen wurden, die den Zeitpunkt τ nicht erleben, zur Zeit τ nichts mehr Wert sind.

Damit gilt für I Versicherungsnehmer:

$$R_0(\eta,\xi) = \|O^{1,\{1,\dots,I\}}(\tau) - \sum_{j=1}^{n} \xi^j \left(l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_j^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - I V_j^{\mathcal{M}(I)}(0) \right) - I\eta_0\|^2$$

Wir schreiben den Ausdruck um, indem wir alle Konstanten zusammenfassen und mit Ia bezeichnen.

$$\|O^{1,\mathcal{M}(I)}(\tau) - \xi^1 l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - \ldots - \xi^n l^{\mathcal{M}(I)}(\tau) V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau)$$
$$- \underbrace{(\eta_0 - IV_1(0) - \ldots - IV_n(0))}_{=:Ia}\|^2$$

Nun können wir $\frac{1}{I^2}R_0(\eta,\xi)$ anstelle von $R_0(\eta,\xi)$ minimieren:

$$\frac{1}{I^2}R_0(\eta,\xi) = \|\frac{O^{1,\mathcal{M}(I)}(\tau)}{I} - \xi^1 \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)}{I} V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - \ldots - \xi^n \frac{l^{\mathcal{M}(I)}(\tau)}{I} V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - a\|^2$$

Für $I \to \infty$

$$\lim_{I\to\infty} \frac{1}{I^2}R_0(\eta,\xi) = \|O^1(\tau) - \underbrace{\xi^1(1-m_0)}_{=:\bar{\xi}^1} V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - \ldots - \underbrace{\xi^n(1-m_0)}_{=:\bar{\xi}^n} V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) - a\|$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} b_0 &:= O^1(\tau) \\ b_1 &:= V_1^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) \\ &\vdots \\ b_n &:= V_n^{\mathcal{M}(I,\tau)}(\tau) \end{aligned}$$

Die Minimierungsaufgabe lautet damit:

$$\lim_{I\to\infty} \frac{1}{I^2}R_0(\eta,\xi) = \|b_0 - \bar{\xi}^1 b_1 - \ldots - \bar{\xi}^n b_n - a\|^2 \to \min_{a,\bar{\xi}^1,\ldots,\bar{\xi}^n} \tag{5.31}$$

Das Minimum ergibt sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems mit den Unbekannten $a, \bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(b_0 - \bar{\xi}^1 b_1 - \ldots - \bar{\xi}^n b_n - a) &= 0 \\
\mathbb{E}((b_0 - \bar{\xi}^1 b_1 - \ldots - \bar{\xi}^n b_n - a) b_1) &= 0 \\
&\vdots \\
\mathbb{E}((b_0 - \bar{\xi}^1 b_1 - \ldots - \bar{\xi}^n b_n - a) b_n) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}\begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n & 1 \\ b_1 b_1 & \ldots & b_n b_1 & b_1 \\ & \vdots & & \\ b_1 b_n & \ldots & b_n b_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \vdots \\ \bar{\xi}^n \\ a \end{pmatrix} = \mathbb{E}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 b_1 \\ \vdots \\ b_0 b_n \end{pmatrix} \tag{5.32}
$$

□

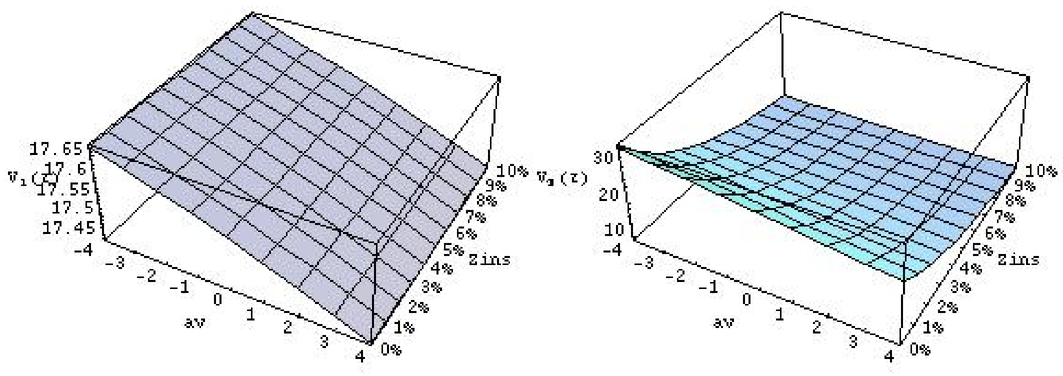


Abbildung 5.5: Die Auszahlung des Vertrages V_1 (links) und des Rentenvertrages V_2 (rechts) in Abhängigkeit von Zins und Sterbeverteilung.

Der optimale Hedge ergibt sich durch lineares Kombinieren der zufälligen Auszahlungen $V_1(\tau), \ldots, V_n(\tau)$ plus einer konstanten Auszahlung des Bonds.

Im Beispiel Kapitalwahlrecht ist unter einer (frei erfundenen) Verteilungsannahme für den Zins und die Altersverschiebung und mit $w_{11} = 0.6$ und $w_{22} = 0.55$ der varianzoptimale Hedge:

$\xi^{1*} = 1.76$
$\xi^{2*} = 0.5$
$a^* = -20.7$

Lemma 5.42 *Der optimale Hedge hängt stetig von den Entscheidungsparametern w_{kj} ab.*

Beweis:

$\xi^{1*}, \ldots, \xi^{n*}, a^*$ berechnen sich als Lösung von (5.32):

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}^{1*} \\ \vdots \\ \bar{\xi}^{n*} \\ a^* \end{pmatrix} = \mathbb{E} \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_n & 1 \\ b_1 b_1 & \ldots & b_n b_1 & b_1 \\ & \vdots & & \\ b_1 b_n & \ldots & b_n b_n & b_n \end{pmatrix}^{-1} \mathbb{E} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 b_1 \\ \vdots \\ b_0 b_n \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

Die Entscheidungsparameter w_{kj} gehen allein in b_0 ein:

$b_0 = m_1 V_1^{\mathcal{M}_1}(\tau) + \ldots + m_n V_n^{\mathcal{M}_n}(\tau)$

$m_1 = w_{1j} m_1 + \ldots + w_{nj} m_n,$

$E_{x,t}^{\mathcal{M}}(\tau) = \frac{m_1}{m_1 + \ldots + m_n} E_{x,t}^{\mathcal{M}_1} + \ldots + \frac{m_n}{m_1 + \ldots + m_n} E_{x,t}^{\mathcal{M}_n}$

Die Parameter w_{kj} gehen stetig in b_0 ein, damit hängen die $\xi^{1*}, \ldots, \xi^{n*}, a^*$ stetig von den w_{kj} ab. □

Dies besagt: Sind die geschätzten $\hat{w}_{kj}$ nahe an den (im Modell) wahren w_{kj}, so ist der mit den geschätzten $\hat{w}_{kj}$ berechnete optimale Hedge $\hat{\xi}^{j*}, \hat{a}^*$ nahe an dem mit den (im Modell) wahren w_{kj} berechneten optimalen Hedge, d.h. es gibt für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|\hat{\xi}^{j*} - \xi^{j*}| < \epsilon$, wenn nur $\max\limits_{j,k=1:n} |\hat{w}_{kj} - w_{kj}| < \delta$.

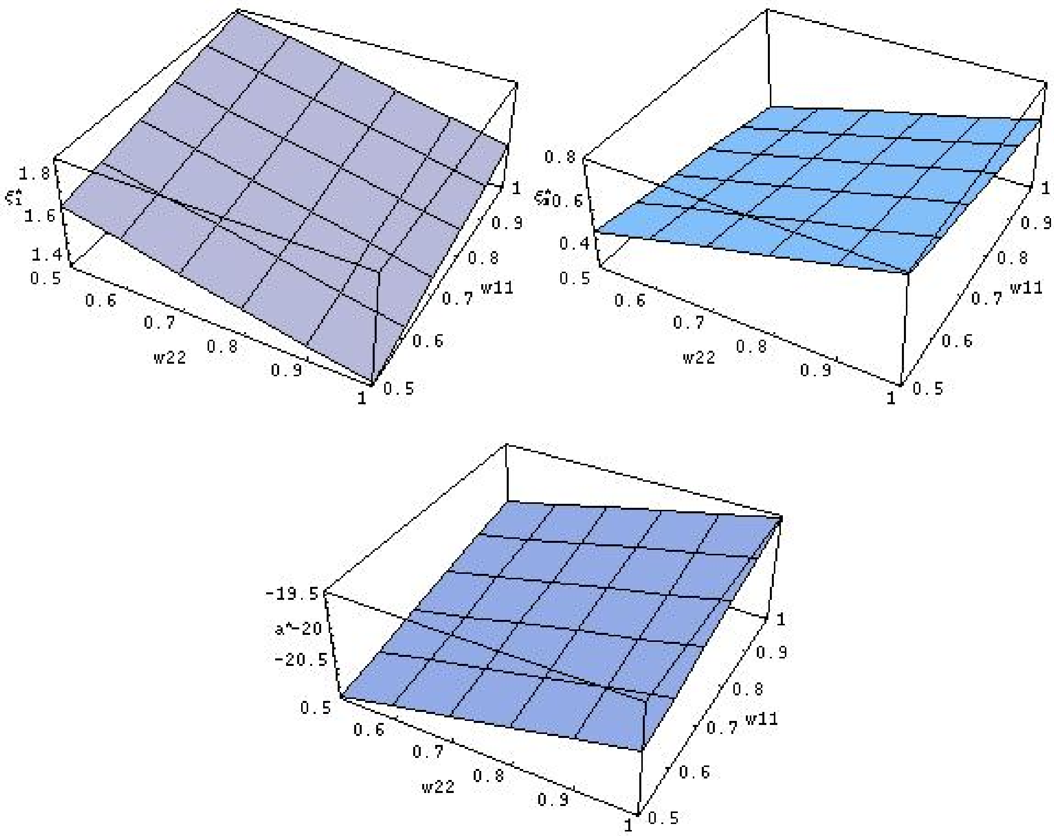


Abbildung 5.6: Diese Abbildung veranschaulicht die Änderung des varianzoptimalen Hedges in Abhängigkeit von den Entscheidungsparametern w_{11}, w_{22} in diesem Beispiel. Die Bilder zeigen von rechts oben nach links unten die optimalen ξ^{1*}, ξ^{2*}, a^* in Abhängigkeit von $w_{11} \in [0.5, 1]$ und $w_{22} \in [0.5, 1]$. Je mehr Versicherungsnehmer sich für den Vertrag V_1 (V_2) entscheiden, d.h. je größer w_{11} und je kleiner w_{22} (d.h. je kleiner w_{11} und je größer w_{22}), desto mehr Verträge V_1 (V_2) werden optimalerweise als Hedge gekauft.

5.2.4 Der Preis nach dem Financial Variance Principle

Zur Zeit τ zahlt beziehungsweise erhält das Versicherungsunternehmen noch die Differenz zwischen der Auszahlung des Hedges und dem Wert der gewählten Verträge.

$N^H = \eta_1^* := b_0 - \xi^{1*}(1 - m_0)b_1 - \ldots - \xi^{n*}(1 - m_0)b_n - a^*$

Nach Konstruktion gilt: $\mathbb{E}(\eta_1^*) = 0$.

Unter einer Verteilungsannahme an den Zins und die Sterblichkeit lässt sich der varianzoptimale Rest im Beispiel Kapitalwahlrecht durch die Abbildung 5.7 veranschaulichen.

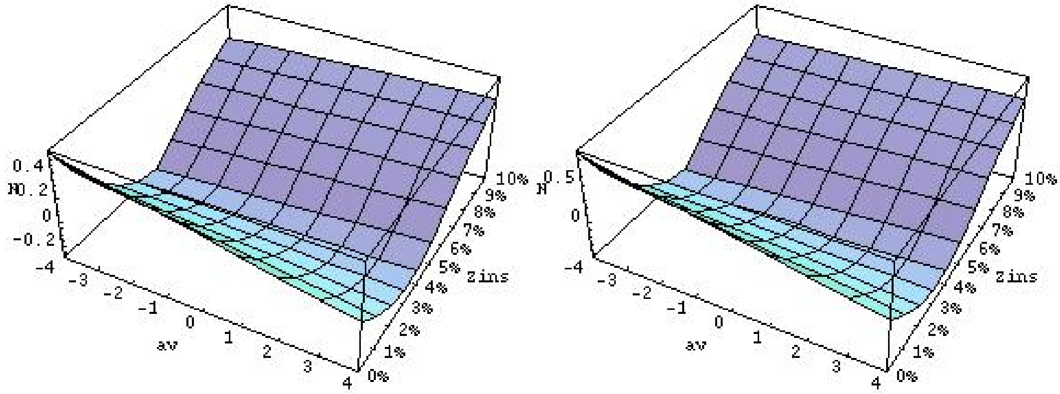


Abbildung 5.7: Der varianzoptimale Rest zur Zeit τ abhängig von Zins und Sterblichkeit, links für $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$, rechts für $w_{11} = 0.65, w_{22} = 0.6$.

Satz 5.43 *Der Preis des Vertrages mit 1-Option nach dem Financial Variance Principle für die Versicherungsnehmer aus $\mathcal{M}(I)$ ist für $I \to \infty$:*

$$\xi^{1*}V_1^{\mathcal{M}}(0) + \ldots + \xi^{n*}V_n^{\mathcal{M}}(0) + a^*B_\tau(0) + AVar(\eta_1^*)B_\tau(0) \tag{5.34}$$

mit $Var(\eta_1^*) = \|b_0 - \xi^{1*}(1-m_0)b_1 - \ldots - \xi^{n*}(1-m_0)b_n - a^*\|^2$

Beweis:

$$\begin{aligned} O^1(\tau) &= \underbrace{\xi^{1*}V_1^{\mathcal{M}}(0) + \ldots + \xi^{n*}V_n^{\mathcal{M}}(0) + a^*B_\tau(0)}_{=:c} \\ &\quad + \underbrace{\xi^{1*}\Delta V_1^{\mathcal{M}} + \ldots + \xi^{n*}\Delta V_n^{\mathcal{M}} + a^*\Delta B_\tau}_{=:g} \\ &\quad + \underbrace{O^1(\tau) - (\xi^{1*}(1-m_0)V_1^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) + \ldots + \xi^{n*}(1-m_0)V_n^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) + a^*B_\tau(\tau))}_{=:\eta_1^*} \end{aligned}$$

mit $\Delta V_j^{\mathcal{M}} := (1-m_0)V_j^{\mathcal{M}(\tau)}(\tau) - V_j^{\mathcal{M}}(0)$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\Delta B_\tau := B_\tau(\tau) - B_\tau(0)$

Der Gewinn aus dem Vertrag V_j ist die Kurssteigerung multipliziert mit dem Anteil der Versicherungsnehmer, der den Zeitpunkt τ erlebt.

Es gilt:

$c \in \mathbb{R}$, $\eta_1^* \perp \Delta V_j^{\mathcal{M}}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\eta_1^* \perp \Delta B_\tau$ nach Wahl der ξ^{j*}, a^*. ΔB_τ ist deterministisch.

$\square$

Im Beispiel mit $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$ ist $Var(\eta_1^*) = 0.04$, der Preis nach dem Financial Variance Principle ist damit:

$1.76V_1(0) + 0.5V_2(0) - 20.7B_\tau(0) + 0.04AB_\tau(0)$

Versichert das Versicherungsunternehmen genau einen Versicherungsnehmer, so ist die Prämie höher.

Bemerkung 5.44 *Der Preis nach dem Financial Variance Principle für einen Vertrag mit Option liegt beliebig nahe an dem im Satz 5.43 genannten, wenn das Versicherungsunternehmen nur genügend viele Versicherungsnehmer versichert.*

Satz 5.45 *Ist* $M := \operatorname*{Max}_{\omega\in\Omega}(\eta_1^*(\omega))$, $m := \operatorname*{Min}_{\omega\in\Omega}(\eta_1^*(\omega))$, *so existiert für jeden Preis, der nicht in dem Intervall* $\xi^{1*}V_1(0) + \ldots + \xi^{n*}V_n(0) + a^*B_\tau(0) + B_\tau(0)[m, M]$ *liegt, eine Arbitragemöglichkeit.*

Beweis:

Ist der Preis höher als
$\xi^{1*}V_1(0) + \ldots + \xi^{n*}V_n(0) + a^*B_\tau(0) + MB_\tau(0)$,
so ist *kaufe das Hedge-Portfolio und* MB_τ *und verkaufe* O^1 eine Arbitragemöglichkeit.

Ist der Preis niedriger als
$\xi^{1*}V_1(0) + \ldots + \xi^{n*}V_n(0) + a^*B_\tau(0) + mB_\tau(0)$,
so ist *verkaufe das Hedge-Portfolio und* mB_τ *und kaufe* O^1 eine Arbitragemöglichkeit.

□

Im Beispiel Kapitalwahlrecht mit $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.55$ gilt etwa: $m = -0.27$, $M = 0.55$.
Für jeden Preis, der nicht in
$1.76V_1(0) + 0.5V_2(0) - 20.7B_\tau(0) + B_\tau(0)[-0.27, 0.55]$ liegt, existiert in diesem Modell eine Arbitragemöglichkeit.

Bemerkung 5.46 *Als Preis für* O^1 *wird hier der Preis des Hedge Portfolios plus einem Preis für den Rest* η_1^* *vorgeschlagen. Der Preis für* η_1^* *sollte in* $[m, M]$ *liegen.*

Anhang A

Programm zum Hedgen und Bewerten von Verträgen mit 1-Option

Im *Mathematica*-Programm wird angenommen, dass der zur Zeit τ gültige zur Zeit Null zufällig ist. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass er für alle Laufzeiten gleich ist.

Für die Sterblichkeit wird angenommen, dass die ${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau}$ zur Zeit Null zufällig, zur Zeit τ aber bekannt sind. Damit gilt: $E^{\mathcal{M}_j}_{x,t}(\tau) = {}_{t-\tau}p^{\mathcal{M}_j}_{x+\tau}(1+r)^{-(t-\tau)}$.

Die Zufälligkeit der ${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau}$ wird folgendermaßen modelliert: Leben die Versicherungsnehmer kürzer (länger) als erwartet, so wird ${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau+av}$ (${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau-av}$) statt ${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau}$ gewählt. Im Beispiel: $av \in \{-4, \ldots, 4\}$. Dies entspricht dem Modell der Altersverschiebung. Einem 60 jährigen wird damit beispielsweise die Restlebensdauer eines 60 + av jährigen zugeordnet. Es kann nicht modelliert werden, dass sich die Sterblichkeit in einem gewissen Alter anders verändert als in einem anderen Alter.

Für ${}_{t-\tau}p^{\mathcal{I}}_{x+\tau}$ können im Programm Werte aus einer Sterbetafel (im Beispiel: DAV 2005 R) geladen werden.

av und r können im Programm endlich viele mögliche Realisationen zugewiesen werden. Diesen möglichen Realisationen können Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.

Hedgen und Bewerten eines Vertrages mit 1−Option

[Berechnung des risikominimierenden Hegdes und des Preises nach dem financial variance principle für einen Vertrag mit 1−Option (V1,V2,τ)], Autor: Johannes Haas, 2005

Eingabe

```
τ = 30;  (*Zeitpunkt, zu dem die Option ausgeuebt werden kann*)
T = 120; (*Laufzeit des Vertrages*)
x = 30;  (*Alter bei Abschluss des Vertrages.*)

(*Definition der beiden Verträge, zwischen denen die
  Versicherten am τ. Jahresende wählen können,
 die j+1. Komponente entspricht e_j *)
vertrag1 = Array[nullfunktion, T + 1]; vertrag1[[τ + 1]] = 18;
vertrag2 = Array[nullfunktion, T + 1];
For[i = τ + 1, i ≤ T + 1, i++, vertrag2[[i]] = 1];

(*Wahrscheinlichkeiten für die Altersverschiebung -4,-3,... 3,4*)
pavVector = {0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1};

(*Wahrscheinlichkeiten für den Zins zur Zeit τ: 0,0.01,... 0.1*)
prVector = {1/15, 1/15, 2/15, 2/15, 2/15, 2/15, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15, 1/15};

(*Wahrscheinlichkeiten für die Entscheidung der Versicherungsnehmer*)
w12 = 1 - w11;
w21 = 1 - w22;
```

Pakete, Importe

```
<< Graphics`FilledPlot`
<< Graphics`MultipleListPlot`

(*Laden einer Sterbetafel (qDat) und der
  geschätzten Sterbeverbesserung (FDat)*)
qDat = Import["...q2.dat"];
(*qDat[i] ist die Wahrscheinlichkeit,
 dass ein Versicherter im Alter i-1 ([i-1,i]) stirbt.
    Er stirbt spaetestens im Alter 121*)

FDat = Import["...F2.dat"];
(*FDat beinhaltet eine geschaetzte Sterblichkeitsverbesserung*)
(*Versicherte sterben spätestens im Alter 121*)
```

Definieren von Funktionen und Listen

```
nullfunktion = Function[{x}, 0];
einsfunktion = Function[{x}, 1];

(* p[x,t,T] ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in t Jahren
   genau x-jähriger noch weitere T Jahre lebt. *)
p = Function[{x, t, T}, If[x + T > 122, 0,
```

$$\prod_{j=0}^{T-1} (1 - qDat[[x + j + 1]]\ Exp[-(t + j)\ FDat[[x + j + 1]]])[[1]]]];$$

```
(* q[x,t,T] ist die Wahrscheinlichkeit,
 dass ein in t Jahren genau x-jähriger in den folgenden
   T Jahren stirbt. *)
q = Function[{x, t, T}, 1 - p[x, t, T]];

lebende = Array[einsfunktion, 131];
(* lebende[[i+1]] enthält den Anteil der Versicherungsnehmer,
 der am i. Jahresende noch leben *)
lebende[[x + 1]] = 1; For[i = x + 1, i <= 130, i++,
 lebende[[i + 1]] = lebende[[i]] p[i - 1, i - 1, 1]];

(* unterschied[x,r] gibt die Differenz der Barwerte des
    Vertrages1 und des Vertrages2 an, gegeben
    der Versicherungsnehmer stirbt im Jahr (x-1,x] und
  gegeben ein Zins r. *)
unterschied = Function[{xx, r},
```

$$\sum_{t=\tau}^{Min[xx,T]} (vertrag2[[t + 1]] - vertrag1[[t + 1]])\ (1 + r)^{-(t-\tau)}];$$

```
(* Die folgenden Listen speichern gleich bei der Berechnung
  alle Daten für die Bilder *)
kk = 1;
V1liste = Array[nullfunktion, 99];
V2liste = Array[nullfunktion, 99];
V0liste = Array[nullfunktion, 99];
m1tildeliste = Array[nullfunktion, 99];
m2tildeliste = Array[nullfunktion, 99];
l1liste = Array[nullfunktion, 99];
l2liste = Array[nullfunktion, 99];
rliste = Array[nullfunktion, 99]; avliste = Array[nullfunktion, 99];
```

prog3.nb

Berechnung der Matrix B und des Vektors b

```
EWW = Function[integrand,
   ∑_{av=-4}^{4} (pavVector[[av + 5]] ∑_{r=0}^{10} (prVector[[r + 1]] integrand[r / 100, av]))
  ];
integrand = Function[{r, av},

   (*Wert des Vertrages V1 bzw. V2 zur Zeit τ ohne Entscheidung*)
   V1 = lebende[[x + τ + 1 + av]]
     ∑_{t=τ}^{T} vertrag1[[t + 1]] p[x + τ + av, τ, t - τ] (1 + r)^(-(t-τ)) ;
   V2 = lebende[[x + τ + 1 + av]]
     ∑_{t=τ}^{T} vertrag2[[t + 1]] p[x + τ + av, τ, t - τ] (1 + r)^(-(t-τ)) ;

   (*Sterbezeitpunkte, bei denen der Vertrag 1
     bzw 2 den höheren Barwert hat.*)
   Z1 = {}; Z2 = {}; For[i = τ, i ≤ 121, i++,
    If[unterschied[i, r] < 0, Z1 = Join[Z1, {i}], Z2 = Join[Z2, {i}]]];

   m1tilde = ∑_{j=1}^{Length[Z1]} p[x + av, 0, Z1[[j]]] q[x + Z1[[j]] + av, Z1[[j]], 1];

   m2tilde = ∑_{j=1}^{Length[Z2]} p[x + av, 0, Z2[[j]]] q[x + Z2[[j]] + av, Z2[[j]], 1];

   l1tilde = Array[nullfunktion, T - τ + 1];
   For[t = τ, t ≤ T, t++, l1tilde[[t - τ + 1]] =
     ∑_{j=1}^{Length[Z1]} If[Z1[[j]] ≥ t, p[x + τ + av, τ, Z1[[j]] - τ]
        q[x + Z1[[j]] + av, Z1[[j]], 1], 0]];
   l2tilde = Array[nullfunktion, T - τ + 1];
   For[t = τ, t ≤ T, t++, l2tilde[[t - τ + 1]] =
     ∑_{j=1}^{Length[Z2]} If[Z2[[j]] ≥ t, p[x + τ + av, τ, Z2[[j]] - τ]
        q[x + Z2[[j]] + av, Z2[[j]], 1], 0]];
   l1 = w11 l1tilde + w21 l2tilde;
   l2 = w12 l1tilde + w22 l2tilde;

   (*Vjj: Wert des Vertrages Vj für einen Versicherungsnehmer,
    der sich für den Vertrag Vj
     entschieden hat*)
```

Untitled−5

$$V11 = \sum_{t=\tau}^{T} \text{vertrag1}[[t+1]]\,(1+r)^{-(t-\tau)}\,\frac{\text{l1}[[t-\tau+1]]}{\text{l1}[[1]]};$$

$$V22 = \sum_{t=\tau}^{T} \text{vertrag2}[[t+1]]\,(1+r)^{-(t-\tau)}\,\frac{\text{l2}[[t-\tau+1]]}{\text{l2}[[1]]};$$

```
V0 = (m1tilde w11 + m2tilde w21) V11 + (m1tilde w12 + m2tilde w22) V22;

(*Die folgenden Listen speichern Daten für die Bilder*)
V1liste[[kk]] = V1; V2liste[[kk]] = V2; V0liste[[kk]] = V0;
m1tildeliste[[kk]] = m1tilde;
m2tildeliste[[kk]] = m2tilde;
```

$$\text{l1liste}[[kk]] = \frac{1}{\text{l1}[[1]]}\,\text{l1};$$

$$\text{l2liste}[[kk]] = \frac{1}{\text{l2}[[1]]}\,\text{l2};$$

```
rliste[[kk]] = r; avliste[[kk]] = av; kk++;

{V1, V2, V1 V1, V1 V2, V2 V2, V0, V0 V1, V0 V2 }
];

{Eb1, Eb2, Eb11, Eb12, Eb22, Eb0, Eb01, Eb02} = EWW[integrand];
```

$$B = \begin{pmatrix} Eb1 & Eb2 & 1 \\ Eb11 & Eb12 & Eb1 \\ Eb12 & Eb22 & Eb2 \end{pmatrix};$$

$$b0 = \begin{pmatrix} Eb0 \\ Eb01 \\ Eb02 \end{pmatrix};$$

```
cc = LinearSolve[B, b0] // N;
varopt = Function[{r, av}, (V0liste[[100 r + 1 + 11 (av + 4)]]
      - cc[[1]][[1]] V1liste[[100 r + 1 + 11 (av + 4)]]
      - cc[[2]][[1]] V2liste[[100 r + 1 + 11 (av + 4)]] - cc[[3]][[1]])^2];
Var = EWW[varopt];

In[37]:= w11 = 0.55; w22 = 0.55;

In[38]:= cc

Out[38]= {{1.67122}, {0.503527}, {-20.7925}}
```

Untitled−6

Ergebnisse

```
(*Optimale Hedge-Parameter bei gegebenen Entscheidungsparametern*)
V0Plot = Function[{x, y}, V0liste[[11 y + x]]];
w11 = 0.7; w22 = 0.7;

Print["Bei Entscheidungsparamtern w11 = ", w11, " und w22 = ", w22, "
sind die optimalen Hedge-Parameter: λ1* = ", cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61],
  ", λ2* = ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61], "und λ3* = ", cc[[3]][[1]] , ",
und die minimal erreichbare Varianz ist Varianz(N) = ", Var];

Print["Der Preis nach dem Financial Variance Principle ist: ",
  cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61], "V1(0) + ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61],
  "V2(0) + ", cc[[3]][[1]], " Bτ(0) + Bτ(0) A ", Var];

Max1 = Max[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
     - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]];
Min1 = Min[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
     - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]];

Print["Ein Preis für den Vertrag mit 1-Option muss in dem Intervall "
  , cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61], "V1(0) + ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61],
  "V2(0) + ", cc[[3]][[1]], " Bτ(0) + [", Min1, ",", Max1 , "]Bτ(0)
liegen, damit keine Arbitragemöglichkeiten entstehen"];

w11 = 0.6; w22 = 0.55;

Print["Bei Entscheidungsparamtern w11 = ", w11, " und w22 = ", w22, "
sind die optimalen Hedge-Parameter: λ1* = ", cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61],
  ", λ2* = ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61], "und λ3* = ", cc[[3]][[1]] , ",
und die minimal erreichbare Varianz: Varianz(N) = ", Var];

Print["Der Preis nach dem Financial Variance Principle ist: ",
  cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61], "V1(0) + ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61],
  "V2(0) + ", cc[[3]][[1]], " Bτ(0) + Bτ(0) A ", Var];

Max2 = Max[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
     - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]];
Min2 = Min[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
     - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]];

Print["Ein Preis muss in dem Intervall ", cc[[1]][[1]] / p[0, 0, 61],
  "V1(0) + ", cc[[2]][[1]] / p[0, 0, 61], "V2(0) + ", cc[[3]][[1]], "
Bτ(0) + [", Min2, ",", Max2 , "]Bτ(0) liegen, damit keine
Arbitragemöglichkeiten entstehen"];
```

Untitled−7

Plots

```
(*Gruppengrößen m tilde in Abhängigkeit vom Zins bei av=0*)
m1Plot = Array[nullfunktion, 11]; For[i = 1, i ≤ 11, i++,
 m1Plot[[i]] = {0.01 (i - 1), m1tildeliste[[44 + i]]}];
m2Plot = Array[nullfunktion, 11]; For[i = 1, i ≤ 11, i++,
 m2Plot[[i]] = {0.01 (i - 1), m2tildeliste[[44 + i]]}];
Plm12 = MultipleListPlot[m1Plot, m2Plot, PlotJoined → True,
   AxesLabel → {"Zins", "m̃1,m̃2"}];

(*Gruppengrößen mtilde in Abhängigkeit vom Zins bei av=0*)
m1tildePlot = Array[nullfunktion, 11]; For[i = 1, i ≤ 11, i++,
 m1tildePlot[[i]] = {0.01 (i - 1),
   w11 m1tildeliste[[44 + i]] + w21 m2tildeliste[[44 + i]]}];
m2tildePlot = Array[nullfunktion, 11]; For[i = 1, i ≤ 11, i++,
 m2tildePlot[[i]] = {0.01 (i - 1),
   w12 m1tildeliste[[44 + i]] + w22 m2tildeliste[[44 + i]]}];

(*Sterbeverteilung der Gruppen bei Zins = und av = 0*)
l1tildePlot = Array[nullfunktion, T - τ + 1];
For[i = 1, i ≤ T - τ + 1, i++, l1tildePlot[[i]] =
   {τ + i - 1, l1liste[[46]][[i]]}];
l2tildePlot = Array[nullfunktion, T - τ + 1];
For[i = 1, i ≤ T - τ + 1, i++, l2tildePlot[[i]] =
   {τ + i - 1, l2liste[[46]][[i]]}];

(*Auszahlung des Vertrages mit 1-Option, des Vertrages1
  und des Vertrages2*)
V0Plot = Function[{x, y}, V0liste[[11 y + x]]];
V1Plot = Function[{x, y}, V1liste[[11 y + x]]];
V2Plot = Function[{x, y}, V2liste[[11 y + x]]];

(*Achsenbeschriftung*)
TicksAv = {{1, "-4"}, {2, "-3"}, {3, "-2"}, {4, "-1"},
   {5, "0"}, {6, "1"}, {7, "2"}, {8, "3"}, {9, "4"}};
TicksZins = {{1, "0%"}, {2, "1%"}, {3, "2%"}, {4, "3%"},
   {5, "4%"}, {6, "5%"}, {7, "6%"}, {8, "7%"}, {9, "8%"},
   {10, "9%"}, {11, "10%"}};
TicksW = {{1, "0.5"}, {2, "0.6"}, {3, "0.7"}, {4, "0.8"},
   {5, "0.9"}, {6, "1"}};

(*Alle Plots bei diesen Entscheidungsparametern:*)
w11 = 0.6; w22 = 0.55;
Plm12tilde1 = MultipleListPlot[m1tildePlot, m2tildePlot,
   PlotJoined → True, AxesLabel → {"Zins", "m1, m2"},
   AxesOrigin → {0, 0.38}];
Pll12tilde1 = MultipleListPlot[l1tildePlot, l2tildePlot,
   PlotJoined → True, AxesLabel → {"t", "t-τpMx+τ"},
   AxesOrigin → {τ, 0}];
PlV01 = ListPlot3D[Table[V0Plot[x, y], {x, 1, 11},
    {y, 0, 8}], AxesLabel → {"av", "Zins", "O1(τ)"},
   Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];
Plrest1 = ListPlot3D[Table[V0Plot[x, y]
      - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y] - cc[[2]] [[1]] V2Plot[x, y]
      - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}],
   AxesLabel → {"av", "Zins", "N"},
   Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];
```

Untitled−8

```
Max[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
   - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]]
Min[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
   - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]]

PlV1 = ListPlot3D[Table[V1Plot[x, y], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}],
   AxesLabel → {"av", "Zins", "V1(τ)"},
   Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];
PlV2 = ListPlot3D[Table[V2Plot[x, y], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}],
   AxesLabel → {"av", "Zins", "V2(τ)"},
   Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];

(*Alle Plots bei diesen Entscheidungsparametern:*)
w11 = 0.65; w22 = 0.6;
Plm12tilde2 = MultipleListPlot[m1tildePlot, m2tildePlot,
   PlotJoined → True, AxesLabel → {"Zins", "m1, m1"},
   AxesOrigin → {0, 0.28}];
Pll12tilde2 = MultipleListPlot[l1tildePlot, l2tildePlot,
   PlotJoined → True, AxesLabel → {"t", "t-τpM x+τ"},
   AxesOrigin → {τ, 0}];
PlV02 = ListPlot3D[Table[V0Plot[x, y], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}],
   AxesLabel → {"av", "Zins", "O1(τ)"},
   Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];
Plrest2 = ListPlot3D[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
     - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}],
   AxesLabel → {"av", "Zins", "N"}, Ticks → {TicksAv, TicksZins, Automatic}];

Max[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y]
   - cc[[2]][[1]] V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]]
Min[Table[V0Plot[x, y] - cc[[1]][[1]] V1Plot[x, y] - cc[[2]][[1]]
    V2Plot[x, y] - cc[[3]][[1]], {x, 1, 11}, {y, 0, 8}]]

(*Abhängigkeit des Hedges von den Entscheidungsparametern w*)
lambdaOpt = Function[{k1, k2, j}, w11 = 0.1 k1; w22 = 0.1 k2;
   ausgabe = cc[[j]][[1]]; Clear[w11, w22]; ausgabe];
VarOpt = Function[{k1, k2}, w11 = 0.1 k1; w22 = 0.1 k2;
   ausgabe = Var; Clear[w11, w22]; ausgabe];

Pllambda1 = ListPlot3D[Table[lambdaOpt[x, y, 1], {x, 5, 10},
    {y, 5, 10}], AxesLabel → {"w22", "w11", "λ1*"},
   Ticks → {TicksW, TicksW, Automatic}];
Pllambda2 = ListPlot3D[Table[lambdaOpt[x, y, 2], {x, 5, 10},
    {y, 5, 10}], AxesLabel → {"w22", "w11", "λ2*"},
   Ticks → {TicksW, TicksW, Automatic}];
Pllambda3 = ListPlot3D[Table[lambdaOpt[x, y, 3], {x, 5, 10},
    {y, 5, 10}], AxesLabel → {"w22", "w11", "a*"},
   Ticks → {TicksW, TicksW, Automatic}];
Plvar = ListPlot3D[Table[VarOpt[x, y, 3], {x, 5, 10},
    {y, 5, 10}], AxesLabel → {"w22", "w11", "Var(N)"},
   Ticks → {TicksW, TicksW, Automatic}];
```

Anhang B

Notation und Abkürzungen

B.1 Notation

$\mathbb{E}$	Ein Erwartungswert.
$\mathcal{I}$	Die Menge aller Versicherungsnehmer i.
$I \in \mathbb{N}$	Eine Anzahl von Versicherungsnehmern.
$\mathcal{M}(I)$	Eine Teilmenge von $\mathcal{I}$.
$\mathcal{D}$	Die Menge der zulässigen Entscheidungsfunktionen δ.
i	Ein Versicherungsnehmer, ein Element aus $\mathcal{I}$.
δ	Eine Entscheidungsfunktion, ein Element aus $\mathcal{D}$.
t, s	Zeitpunkte.
$t = 0$	Der Zeitpunkt des Vertragsabschlusses.
$t = \tau$	Ein Zeitpunkt, an dem der Versicherungsnehmer ein Wahlrecht ausüben kann.
T	Die Laufzeit eines Vertrages.
x	Das Alter des Versicherungsnehmers zur Zeit des Vertragsabschlusses.
H	Ein Claim.
X	Ein Fonds-Anteil.
B_T	Ein Zero-Coupon-Bond mit Laufzeit T
η	Die Anzahl von Numeraires in einer Handelsstrategie.
ξ	Die Anzahl von Assets außer den Numeraires in einer Handelsstrategie.
(η, ξ)	Eine Handelsstrategie.
(η^*, ξ^*)	Eine in gewissem Sinne optimale Handelsstrategie.

B.2 Lebensversicherungsverträge

Der allgemeine klassische Vertrag

$$V^i_{x,T} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Der allgemeine fondsgebundene Vertrag

$$V^i_{x,T,Fonds} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & \dots & e_T \\ - & d_1 & \dots & d_T \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

Der Standardvertrag

$$E^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Der fondsgebundene Standardvertrag

$$E^i_{x,T,Fonds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ - & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

Der reine Todesfallvertrag für das Jahr $(T-1, T]$

$$D^i_{x,T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}$$

Der reine fondsgebundene Todesfallvertrag für das Jahr $(T-1, T]$

$$D^i_{x,T,Fonds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{i,x,T}_X$$

B.3 Verträge mit Option

Der allgemeine klassische Vertrag mit 1-Option

$$O^{1,i} = ((\mathcal{V}^i, 0), (\mathcal{P}^i_1, \tau))$$

Der allgemeine fondsgebundene Vertrag mit 1-Option

$$O^{1,i}_{Fonds} = ((\mathcal{V}^i_{Fonds}, 0), (\mathcal{P}^i_{1,Fonds}, \tau))$$

Literaturverzeichnis

[1] D. Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press, 2004.

[2] K. Arrow. *Essays in the Theory of Risk Aversion*. Markham, Chicago, 1971.

[3] N. H. Bingham and Rüdiger Kiesel. *Risk-Neutral Valuation - Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2004.

[4] P.J. Brockwell and R.A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 1991.

[5] Statistisches Bundesamt. *Pressemitteilung vom 17. November*. 2004. http://www.destatis.de/presse/deutsch/pm2004/p4860022.htm.

[6] Tobias Dillmann and Jochen Ruß. Implicit Options in Life Insurance Contracts - From Option Pricing to the Price of the Option. 2003. http://www.ifa-ulm.de/.

[7] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. de Gruyter, 2nd edition, 2002.

[8] Hans Föllmer and Martin Schweizer. Hedging by Sequential Regression: An Introduction to the Mathematics of Option Trading. *ASTIN Bulletin*, 18:147–160, 1988.

[9] Hans Föllmer and Dieter Sondermann. Hedging of Non-Redundant Contingent Claims. *Contributions to Mathematical Economics*, 1:971–1005, 1986.

[10] Schweizer Bundesamt für Privatversicherungen. Schweizer Solvenztest, 2003. http://www.bpv.admin.ch/de/pdf/SST_181204_de.pdf.

[11] Hans U. Gerber. *Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1997.

[12] Nils Hakannson. The Fantastic World of Finance: Progress and the Free Lunch. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14:717–734, 1979.

[13] Wolfgang Christian Held. *Optionen in Lebensversicherungsverträgen*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften Ulm, 1999.

[14] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, New York, 2nd edition, 2003.

[15] Christoph Kühn. *Shocks and Choices - an Analysis of Incomplete Market Models.* Dissertation, 2002.
http://tumb1.biblio.tu-muenchen.de/publ/diss/ma/2002/kuehn.html.

[16] Claudia Klüppelberg. Skript zur Vorlesung Stochastik 2, 2002.
http://www-m4.ma.tum.de/courses/SS02/stochastik2.html.

[17] Michael Koller. *Lebensversicherungsmathematik, Version 0.35: July 2000.* Springer-Verlag, 2nd edition, 2000.

[18] Hiroshi Kunita and Shinozo Watanabe. On Square Integrable Martingales. *Nagoya Mathematical Journal*, 30:209 – 245, 1967.

[19] Anna Lenz. Optionen in Lebensversicherungsverträgen. Diplomarbeit, ETH Zürich, 2004.

[20] Andreas Löffler. Skript zur Vorlesung Entscheidungs- und Kapitalmarkttheorie (I), 2003.
http://www.wiwi.uni-hannover.de/finanzierung/faecher/entscheidung/Skript.pdf.

[21] Thomas Mack. *Schadenversicherungsmathematik.* Verlag Versicherungswirtschaft, 1997.

[22] Antje Mahayni and Erik Schlögl. The Risk Management of Minimum Return Guarantees. 2003. http://ideas.repec.org/p/uts/rpaper/102.html.

[23] K. R. Miltersen and Svein-Arne Persson. Guaranteed Investment Contracts: Distributed and Undistributed Excess Return. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 257–279, 2003.

[24] Thomas Møller. *Quadratic Hedging Approaches and Indifference Pricing in Insurance.* Dissertation, Faculty of Science, University of Copenhagen, Laboratory of Actuarial Mathematics, Institute for Mathematical Science, 2000.

[25] Thomas Møller. Risk Minimizing Hedging Strategies for Unit Linked Life Insurance Contracts. Mastersthesis, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 1998. http://www.math.ku.dk/∼tmoller/.

[26] Statistische Ämter des Bundes und der Länder. *Genesis.* 2004. http://www.statistik-portal.de/Statistik-Portal/GenesisUebersicht.asp.

[27] Antoon Pelsser. Pricing and Hedging Guaranteed Annuity Options via Static Option Replication. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33:293–296, 2003.

[28] Svein-Arne Persson. Stochastic Interest in Life Insurance: The Principle of Equivalence Revisited. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 97 – 112, 1998.

[29] Svein-Arne Persson. Pricing of Unit-linked Life Insurance Policies. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 26 – 52, 1994.

[30] John W. Pratt. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, 32: 122–136, 1964.

[31] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, New York, 2nd edition, 2003.

[32] DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit. Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen. Entwurf vom 16.04.2004, 2004.

[33] Martin Schweizer. From Actuarial to Financial Valuation Principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28:31–47, 2001.

[34] Martin Schweizer. A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches. *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management,Cambridge University Press*, pages 538–574, 2001.

[35] Martin Schweizer. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37:339–363, 1990.

[36] Berkeley (USA) University of California and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). *Human Mortality Database.* Available at http://www.mortality.org (data downloaded on [04.01.05]).

[37] Die freie Enzyklopädie Wikipedia. Stichwort: Modell, 2005.
http://de.wikipedia.org/wiki/Modell.

[38] A.D. Wilkie, H.R. Waters, and S. Yang. Reserving, Pricing and Hedging for Policies with Guaranteed Annuity Options. *British Actuarial Journal*, 10:131–152, 2004.

[39] Richard Willets. Mortality in the next millennium. *Paper presented in the Staple Inn Actuarial Society*, 1999. www.sias.org.uk/papers/mortality.pdf.