

**Ludwig-Maximilians-
Universität
München
Mathematisches Institut**

Masterarbeit

Lévy-Prozesse in der Risikotheorie

Aufgabensteller: Prof. Dr. M. Schweizer
Betreuerin: Prof. Dr. C. Klüppelberg
Bearbeiterin: Bregman Yuliya
Abgabedatum: 15.07.2004

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich diese Masterarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, den 14.07.2004

Zusammenfassung

In der vorliegenden Masterarbeit wird die Schätzung von Ruinwahrscheinlichkeit in bivariaten Modellen unter Verwendung von S-Copulas betrachtet. Als Beispiele werden zusammengesetzte Poisson-Prozesse mit einer möglichen Störung in der Form einer α -stabilen Lévy-Bewegung untersucht. Außerdem wird gezeigt, dass mittels einer S-Copula das Lévy-Maß der Summe von zwei abhängigen Subordinatoren ermittelt werden kann.

Vorwort

Seit den dreißiger Jahren ist die Risikotheorie eine der wichtigen Herausforderungen der Finanzindustrie. Obwohl die Risikotheorie ständig weiter entwickelt wird, bleiben noch viele Fragen, besonders im Bereich der Modellierung, ungelöst.

Lévy-Prozesse dienen in der Risikotheorie als Instrument der Modellierung und Bewertung von Versicherungsrisiken (Schäden) und Finanzrisiken (Investitionen).

Zur Zeit sind fast alle existierenden Modelle der Risikotheorie eindimensional. Nun betrachten wir als Beispiel ein Versicherungsunternehmen mit Zweigstellen in Berlin und München. Ihre Nettogewinne werden mittels der Lévy-Prozesse X und Y modelliert. X , Y können unterschiedliche Strukturen besitzen, denn sie entsprechen den verschiedenen Zweigstellen. Nichtsdestotrotz sind die Prozesse X , Y abhängig, weil einige Risiken in beiden Zweigstellen gemeinsam sind. Dieses einfache Beispiel zeigt die Unentbehrlichkeit von multivariaten Modellen.

In mathematischen Modellen können Versicherungsrisiken beispielsweise mittels einer Ruinwahrscheinlichkeit bewertet werden. Für die Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeit in multivariaten Modellen wird die Abhängigkeitsstruktur der Komponenten benötigt. In Tankov [26] werden S-Copulas für die Beschreibung der Abhängigkeit zwischen den Komponenten eines positiven multivariaten Lévy-Prozesses vorgeschlagen. Die Zielsetzung dieser Arbeit besteht darin, die Schätzung der Ruinwahrscheinlichkeit in bivariaten Modellen unter Verwendung von S-Copulas zu zeigen. Als Beispiele werden zusammengesetzte Poisson-Prozesse mit einer möglichen Störung in der Form einer α -stabilen Lévy-Bewegung untersucht.

Die Arbeit besteht aus drei Kapiteln, wobei im ersten sowohl Lévy-Prozesse als auch ihre typischen Beispiele und deren wichtigste Eigenschaften für die Risikotheorie beschrieben werden.

Im zweiten Kapitel wird an die Eigenschaften der subexponentiellen und insbesondere regulär variierenden Verteilungen erinnert, deren risikothoretische Anwendung später gezeigt wird.

Das dritte Kapitel beschreibt spektral positive Lévy-Prozesse, S-Copulas und Beispiele ihrer Verwendungen in der Versicherungsmathematik. Hier werden einige bivariate Mo-

delle gezeigt, wo das Lévy-Maß der Summe von abhängigen Komponenten mittels einer S-Copula abgeschätzt oder sogar ausgerechnet werden kann. Dieses Lévy-Maß wird für die Abschätzung von Ruinwahrscheinlichkeiten eingesetzt. Insbesondere wird die Anwendung auf Modelle mit stochastischem Ertrag aus der Investition präsentiert.

In Abschnitt 3.5 (Proposition 3.20, Beispiele 3.21, 3.22 und 3.24-3.26), in Abschnitt 3.6 (Beispiel 3.28), in Abschnitt 3.7 (Beispiele 3.33-3.34) und in Abschnitt 3.8 (Beispiel 3.36) werden neue Resultate hergeleitet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Lévy-Prozesse	7
1.1	Definition eines Lévy-Prozesses	7
1.2	Unendlich teilbare Verteilungen und Lévy-Hintschin-Formel	7
1.3	Die Brownsche Bewegung	9
1.4	α -stabile Lévy-Bewegung	10
1.5	Stoppzeiten und Markov-Eigenschaft	12
1.6	Der Poisson-Punktprozess	14
1.7	Risikoprozess und Ruinwahrscheinlichkeit	17
2	Subexponentielle Verteilungen	20
2.1	Reguläre Variation	20
2.2	Die Klasse der subexponentiellen Verteilungen	24
3	Spektral positive Lévy-Prozesse	36
3.1	Subordinatoren	36
3.2	Verbindung zwischen zusammengesetzten Poisson-Prozessen und Subordinatoren	38
3.3	Subordinatoren mit negativer Drift	41
3.4	Anwendungen in der Risikothorie	43
3.4.1	Cramér-Lundberg-Modell mit einem Subordinator	43
3.4.2	Bivariater Risikoprozess	45
3.5	S-Copulas	47
3.6	Spektral positive Lévy-Prozesse mit unbeschränkter Variation	62
3.7	Cramér-Lundberg-Modell mit einem Subordinator und einer Störung	64
3.8	Risikoprozess mit stochastischem Ertrag der Kapitalanlage	69
A		73
A.1	Lemma von Pratt	73
A.2	Satz von Karamata	73
A.3	Stochastische Copula	74
B	Verzeichnis der Notationen und Abkürzungen	75
	Literaturverzeichnis	77

Kapitel 1

Einführung in die Lévy-Prozesse

1.1 Definition eines Lévy-Prozesses

Lévy-Prozesse sind in der Risikotheorie eine bedeutende Klasse stochastischer Prozesse. Typische Beispiele für Lévy-Prozesse sind die Brownsche Bewegung, der Poisson-Prozess und stabile Prozesse. Wir definieren sie und beschreiben ihre wichtigsten Eigenschaften für risikothoretische Anwendungen.

Diese Einführung basiert auf Bertoin [2], Feller [9], Revuz und Yor [23], Sato [25].

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einem Polnischen Raum (Polisch space) Ω und einer Borel- σ -Algebra \mathcal{F} auf Ω .

Definition 1.1 *Ein \mathbb{R}^d -wertiger Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist ein stochastischer Prozess mit den folgenden Eigenschaften:*

- i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zufallsvariablen $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig.*
- ii) Die Verteilung von $X_{s+t} - X_s$ hängt nicht von s ab.*
- iii) Es gibt ein $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $P(\Omega_0) = 1$, so dass für jedes $\omega \in \Omega_0$ die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ für $t \geq 0$ rechtsstetig ist und einen linken Grenzwert für $t > 0$ besitzt.*

Ein \mathbb{R}^d -wertiger Lévy-Prozess heißt auch ein multivariater Lévy-Prozess, insbesondere für $d = 2$ ein bivariater Lévy-Prozess.

1.2 Unendlich teilbare Verteilungen und Lévy-Hintschin-Formel

Die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf \mathbb{R}^d ist eine komplexwertige Abbildung

$$\hat{\mu}(\theta) := \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i \langle \theta, x \rangle\} \mu(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Die Verteilung μ heißt unendlich teilbar, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ_n mit

$$\mu = \mu_n^{*n}$$

existiert, wobei " $*$ " die Faltung der Verteilungen bedeutet ($\mu^{*1} = \mu$, $\mu^{*2} = \mu * \mu, \dots$).

In der Schreibweise für charakteristische Funktionen bedeutet das für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{\mu}(\theta) = (\hat{\mu}_n(\theta))^n, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Eindimensionale Beispiele von unendlich teilbaren Verteilungen sind Exponential-, Poisson- und Normalverteilung.

Nehmen wir an, dass μ eine unendlich teilbare Verteilung auf \mathbb{R}^d ist. Dann gibt es eine eindeutige stetige Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, die *der charakteristische Exponent* von μ heißt, so dass

$$\Psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\mu}(\theta) = \exp\{-\Psi(\theta)\}.$$

Offensichtlich ist eine Faltung von unendlich teilbaren Verteilungen μ_1 und μ_2 auch unendlich teilbar mit dem charakteristischen Exponenten $\Psi_1 + \Psi_2$.

Lévy-Hintschin-Formel Eine Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann der charakteristische Exponent eines unendlich teilbaren Maßes μ auf \mathbb{R}^d , wenn es ein $a \in \mathbb{R}^d$, eine positiv semidefinite quadratische Form Q auf \mathbb{R}^d und ein Maß Π auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge \|x\|^2) \Pi(dx) < \infty$ gibt, so dass

$$\Psi(\theta) = i \langle a, \theta \rangle + \frac{1}{2} Q(\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i \langle \theta, x \rangle} + i \langle \theta, x \rangle I_{\{\|x\| < 1\}}) \Pi(dx) \quad (1.1)$$

für jedes $\theta \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Hier bedeutet $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^d . Das Maß Π in (1.1) heißt das Lévy-Maß von μ , und a in (1.1) heißt der Driftkoeffizient.

Betrachten wir nun einen Lévy-Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit $X_0 = 0$ f.s. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir X_1 als Summe darstellen:

$$X_1 = (X_{\frac{1}{n}} - X_0) + (X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}) + \dots + (X_{\frac{n}{n}} - X_{\frac{(n-1)}{n}}).$$

Nach der Definition eines Lévy-Prozesses sind die Zufallsvariablen

$$Y_k = (X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}}), \quad k = 1, \dots, n$$

i.i.d. Damit ist die Verteilung von X_1 unendlich teilbar. Wir bezeichnen mit Ψ den charakteristischen Exponenten von X_1 ,

$$E[\exp\{i \langle \theta, X_1 \rangle\}] = \exp\{-\Psi(\theta)\}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Nach den gleichen Argumenten ist die Verteilung von X_t für jedes rationale t somit unendlich teilbar und ihre charakteristische Funktion ist als

$$E[\exp\{i \langle \theta, X_t \rangle\}] = \exp\{-t\Psi(\theta)\}, \quad \theta \in \mathbb{R}^d \quad (1.2)$$

gegeben. Weil X f.s. rechtsstetig ist, ist die Abbildung $t \mapsto E[\exp\{i \langle \theta, X_t \rangle\}]$ rechtsstetig und (1.2) gilt für alle $t \geq 0$.

Die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *der charakteristische Exponent* des Lévy-Prozesses X .

Der Beweis des folgenden Satzes ist in Bertoin [2], S.13 zu finden.

Satz 1.2 *Seien $a \in \mathbb{R}^d$, Q eine positiv semidefinite quadratische Form auf \mathbb{R}^d , Π ein Maß auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge \|x\|^2) \Pi(dx) < \infty$. Definiere für jedes $\theta \in \mathbb{R}^d$*

$$\Psi(\theta) = i \langle a, \theta \rangle + \frac{1}{2} Q(\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i \langle \theta, x \rangle} + i \langle \theta, x \rangle I_{\{\|x\| < 1\}}) \Pi(dx).$$

Dann gibt es ein einziges Wahrscheinlichkeitsmaß P auf (Ω, \mathcal{F}) und einen Lévy-Prozess X mit dem charakteristischen Exponenten Ψ .

Das Tupel (a, Q, Π) definiert eigentlich den Lévy-Prozess X .

Für folgende Beispiele beschränken wir uns auf den Fall $d = 1$.

1.3 Die Brownsche Bewegung

Mit $N(\mu, \sigma^2)$ bezeichnen wir eine Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

Definition 1.3 *Eine Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- i) $P[X_0 = 0] = 1$.*
- ii) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ unabhängig und $N(0, t_i - t_{i-1})$ -verteilt.*
- iii) Für P -fast alle ω ist $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig für $t \geq 0$.*

Offensichtlich ist die Brownsche Bewegung ein eindimensionaler Lévy-Prozess.

Für alle $t, s \geq 0$ gilt

$$E[X_t] = 0, \quad \text{Var}[X_t] = t, \quad \text{Cov}[X_s, X_t] = s \wedge t \text{ und}$$

$$P[X_t \in dx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Der charakteristische Exponent der Brownschen Bewegung ist

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2} \theta^2, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

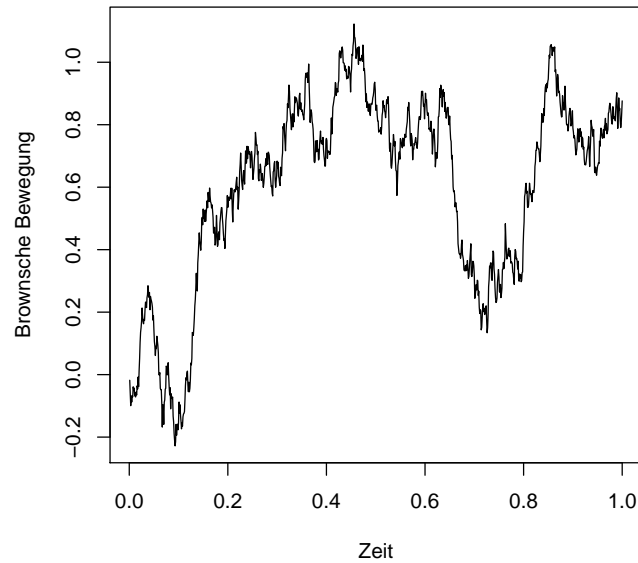


Abbildung 1.1: Simulation einer Trajektorie einer Brownschen Bewegung auf $[0, 1]$

Die Konstruktion einer Brownschen Bewegung findet man in Revuz und Yor [23]. In Abbildung 1.1 sieht man die Simulation einer Trajektorie einer Brownschen Bewegung auf $[0, 1]$.

Äquivalente Beschreibung: Eine Brownsche Bewegung X ist ein stetiger Gauß-Prozess, d.h. $X_t(\omega)$ ist stetig in t für P -fast alle $\omega \in \Omega$ und alle endlichdimensionale Verteilungen sind Normalverteilungen, mit $E[X_t] \equiv 0$, $Cov(X_s, X_t) = s \wedge t$.

1.4 α -stabile Lévy-Bewegung

Seien X_1, X_2, \dots eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit einer Verteilungsfunktion G und $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

Definition 1.4 (stabile Verteilung) Die Verteilung G heißt stabil, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Konstanten $c_n > 0$ und $\gamma_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass die Zufallsvariablen

$$S_n \quad \text{und} \quad c_n X_1 + \gamma_n \tag{1.4}$$

gleich verteilt sind und G nicht auf einem Punkt konzentriert ist.

Die Verteilung G heißt strikt stabil, falls in (1.4) $\gamma_n = 0$ ist.

Der folgende Satz kann in Feller [9], S.170 gefunden werden.

Satz 1.5 Die Normierungskonstanten c_n in (1.4) sind in der Form $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ mit $\alpha \in (0, 2]$.

Die Konstante α heißt der Index der stabilen Verteilung G .

Satz 1.6 (Zolotarev [27], S.9) Die Verteilung G ist genau dann stabil mit einem Index $\alpha \in (0, 2]$, wenn der Logarithmus der charakteristischen Funktion \hat{G} der Verteilung G in der Form

$$\log \hat{G}(t) = \sigma(itm - |t|^\alpha + itw(t, \alpha, \beta))$$

dargestellt werden kann, wobei $\beta \in [-1, 1]$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und

$$w(t, \alpha, \beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1} \beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ -\beta(\frac{2}{\pi}) \log |t| & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Bemerkung 1.7 (Zolotarev [27], S.16) Falls die Verteilung G strikt stabil ist, gilt

$$m = 0 \quad (\text{wenn } \alpha \neq 1) \quad \text{oder} \quad \beta = 0 \quad (\text{wenn } \alpha = 1).$$

Eine stabile Verteilung mit einem Index α und Parametern β, σ und m wird in Folgenden mit $S_\alpha(\sigma, \beta, m)$ bezeichnet.

Cauchy- und Normalverteilung sind stabil. Weitere eindimensionale Beispiele von stabilen Verteilungen können in Zolotarev [27] gefunden werden.

Definition 1.8 Eine α -stabile Lévy-Bewegung ist ein Lévy-Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $Z_0 = 0$ P -f.s.

2) für $0 \leq s < t < \infty$ ist $Z_t - Z_s \sim S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0)$ -verteilt für ein $\alpha \in (0, 2]$ und ein $\beta \in [-1, 1]$.

In Abbildung 1.2 sieht man die Simulation einer Trajektorie einer α -stabilen Lévy-Bewegung mit Cauchy-verteilten Inkrementen auf $[0, 1]$.

Eine α -stabile Lévy-Bewegung ist eine Brownsche Bewegung, falls $\alpha = 2$ und $\beta = 0$. Eine Beschreibung der α -stabilen Lévy-Bewegung kann in Sato [25] gefunden werden. Für $\alpha > 1$ hat die α -stabile Lévy-Bewegung einen endlichen Erwartungswert. Für $\beta = -1$ besitzt sie nur negative Sprünge, mit $\beta = 1$ wiederum nur positive.

Das Lévy-Maß einer α -stabilen Lévy-Bewegung ist

$$\Pi(du) = \frac{q}{u^{1+\alpha}} du \quad \text{mit} \quad q = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (1.5)$$

Für $\alpha \in (0, 1)$ und $\beta = 1$ ist die Lévy-Bewegung ein Subordinator. Subordinatoren werden im dritten Kapitel betrachtet.

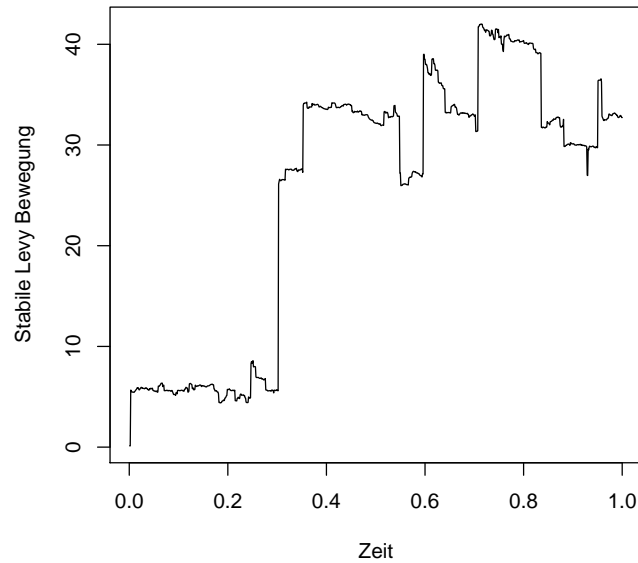


Abbildung 1.2: Simulation einer Trajektorie einer α -stabilen Lévy-Bewegung mit Cauchy-verteilten Inkrementen auf $[0, 1]$

Proposition 1.9 Für jedes $\alpha \in (0, 2]$ ist ein Lévy-Prozess Z mit dem charakteristischen Exponenten Ψ ohne Driftkoeffizient (d.h. $a = 0$) genau dann α -stabil, wenn

$$Z_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Psi(k\theta) = k^\alpha \Psi(\theta), \quad \forall k > 0 \quad \text{für} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Für den Beweis siehe Sato [25], S. 71.

Aus der Proposition folgt, dass der Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ und der Prozess $(k^{-\frac{1}{\alpha}} Z_{kt})_{t \geq 0}$ für jedes $k > 0$ gleich verteilt sind.

1.5 Stoppzeiten und Markov-Eigenschaft

Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ in diesem Abschnitt ein Lévy-Prozess.

Um eine Stoppzeit definieren zu können, brauchen wir eine Filtration.

Definition 1.10 a) Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) ist eine Familie von σ -Algebren $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$.

Wir versehen unseren Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration.

b) Das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ heißt ein *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Beispiele von Filtrationen sind folgende Familien von σ -Algebren:

$$\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}, \quad \mathcal{F}_t^0 := \sigma(X_s, s \leq t) \quad (1.6)$$

$$\text{und } \mathbb{F} = (\mathbb{F}_t)_{t \geq 0}, \quad \mathbb{F}_t := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^0 \quad \text{für } t \geq 0. \quad (1.7)$$

Ein wesentlicher Unterschied zwischen \mathcal{F}^0 und \mathbb{F} ist, dass \mathbb{F} rechtsstetig ist, d.h. es gilt $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{t+} := \bigcap_{u > t} \mathbb{F}_u$.

Definition 1.11 Ein stochastischer Prozess X heißt (\mathcal{F}_t) -*adaptiert*, falls X_t \mathcal{F}_t -messbar für alle $t \geq 0$ ist.

Offensichtlich ist X \mathcal{F}^0 - und \mathbb{F} -adaptiert.

Definition 1.12 Eine *Stoppzeit* bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist eine Abbildung

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ mit } \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Weiter sei

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0\}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass \mathcal{F}_τ eine σ -Algebra ist.

Beispiel 1.13 Sei $a > 0$ und

$$\tau_a := \inf\{t > 0 \mid X_t > a\} = \inf\{t > 0 \mid X_t \in (a, \infty)\}.$$

τ_a heißt die erste Eintrittszeit von X in (a, ∞) .

Dann ist τ_a eine Stoppzeit bezüglich \mathbb{F} , denn

$$\{\tau_a \leq t\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \{\tau_a < t + \epsilon\}.$$

X ist rechtsstetig und das Intervall (a, ∞) ist offen. Damit gilt

$$\{\tau_a \leq t\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < t + \epsilon} \{X_r > a\} \in \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^0 = \mathbb{F}_t.$$

Im Folgenden betrachten wir immer die Filtration \mathbb{F} , die auch die natürliche Filtration von X heißt.

Proposition 1.14 (Starke Markov-Eigenschaft) Sei T eine Stoppzeit mit $P(T < \infty) > 0$. Dann ist der Prozess $(X_{T+t} - X_T)_{t \geq 0}$ auf der Menge $\{T < \infty\}$ unabhängig von \mathcal{F}_T und hat die gleiche Verteilung wie der Prozess $(X_t - X_0)_{t \geq 0}$.

Die letzte Proposition ist zum Beispiel in Bertoin [2], S. 19, 20 zu finden.

Korollar 1.15 (Reflektionsprinzip für die Brownsche Bewegung) Sei X eine Brownsche Bewegung, $a > 0$ und τ_a die erste Eintrittszeit von X in (a, ∞) . Dann gilt

$$P(\tau_a \leq t) = 2P(X_t > a) = P(|X_t| > a).$$

Beweis. τ_a ist eine Stoppzeit und $\tau_a < \infty$ P -f.s. Nach der starken Markov-Eigenschaft ist $\tilde{X} := X_{\tau_a+} - X_{\tau_a}$ eine Brownsche Bewegung und unabhängig von \mathcal{F}_{τ_a} .

Ferner gilt $\{X_t > a\} \subseteq \{\tau_a \leq t\}$, also $\{\tau_a \leq t\} = \{\tau_a \leq t, X_t \leq a\} \cup \{X_t > a\}$.

Wegen $X_{\tau_a} = a$ folgt also

$$P(\tau_a \leq t, X_t \leq a) = P(\tau_a \leq t, \tilde{X}_{t-\tau_a} + a \leq a) = E(I_{\tau_a \leq t} P(\tilde{X}_{t-\tau_a} \leq 0 | \mathcal{F}_{\tau_a})) = \frac{1}{2}P(\tau_a \leq t),$$

weil $N(0, u)$ symmetrisch für jedes $u > 0$ ist. Daraus folgt

$$P(\tau_a \leq t) = 2P(X_t > a).$$

Die zweite Gleichung gilt nach der Symmetrie der Normalverteilung. □

Aus dem Reflektionsprinzip bekommen wir die Verteilung von τ_a für alle $a \neq 0$ wegen der Symmetrie von $N(0, t)$:

$$P(\tau_a \leq t) = 2P(X_t > a) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds.$$

Somit hat die Zufallsvariable τ_a eine absolutstetige Verteilung mit der Dichte

$$f_a(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} \quad \text{für } t \geq 0.$$

1.6 Der Poisson-Punktprozess

Die Beweise der Propositionen in diesem Abschnitt sind in Revuz und Yor [23], Kapitel XII zu finden.

Hier betrachten wir einen messbaren Raum (U, \mathcal{U}) , der mit einem Punkt δ ergänzt wird, zum Beispiel $U := \mathbb{R}$ und $\delta := \infty$. Wir setzen $U_\delta := U \cup \{\delta\}$ und $\mathcal{U}_\delta := \sigma(\mathcal{U}, \{\delta\})$.

Definition 1.16 Ein Prozess $e = (e_t)_{t \geq 0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Werten in $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ heißt ein Punktprozess, wenn

- 1) die Abbildung $(t, \omega) \rightarrow e_t(\omega)$ messbar ist
- 2) die Menge $D_\omega := \{t : e_t(\omega) \neq \delta\}$ P -f.s. abzählbar ist.

Sei ein Punktprozess e gegeben. Für jede Menge $A \in \mathcal{U}_\delta$ kann ein neuer Punktprozess e^A durch

$$e_t^A(\omega) := \begin{cases} e_t(\omega), & \text{falls } e_t(\omega) \in A \\ \delta, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden. Für eine messbare Menge

$$\Lambda \subset (0, \infty) \times \mathcal{U}_\delta$$

sei

$$N^\Lambda(\omega) := \sum_{t>0} 1_\Lambda(t, e_t(\omega)).$$

Insbesondere schreiben wir N_t^A für N^Λ , wenn $\Lambda = (0, t] \times A$.

Definition 1.17 Ein Punktprozess heißt *diskret*, falls $N_t^U < \infty$ für jedes t ist. Der Prozess e heißt *σ -diskret*, falls eine Mengenfolge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ existiert und jedes e^{U_n} diskret ist.

Definition 1.18 (Poisson-Prozess) Ein Poisson-Prozess $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ist ein monoton steigender Lévy-Prozess, so dass $N_0 = 0$ P-f.s. ist und für jedes $t > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

für eine Konstante $\lambda > 0$ ist.

Die Konstante λ heißt die Intensität des Poisson-Prozesses N .

Ferner gilt

$$E(\exp\{i\beta N_t\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t = k) e^{i\beta k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{i\beta k} = \exp\{-\lambda t(1 - e^{i\beta})\}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Somit ist der charakteristische Exponent eines Poisson-Prozesses mit der Intensität λ

$$\Psi(\beta) = \lambda(1 - e^{i\beta}), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren den Sprungprozess von N als $\Delta N = (\Delta N_t)_{t \geq 0}$ mit $\Delta N_t := N_t - N_{t-}$, wobei N_{t-} der linke Grenzwert von N zur Zeit t ist.

Proposition 1.19 Ein rechtsstetiger Prozess ist genau dann ein Poisson-Prozess, wenn er ein Lévy-Prozess ist, der nur bei Sprüngen f.s. gleich 1 steigt.

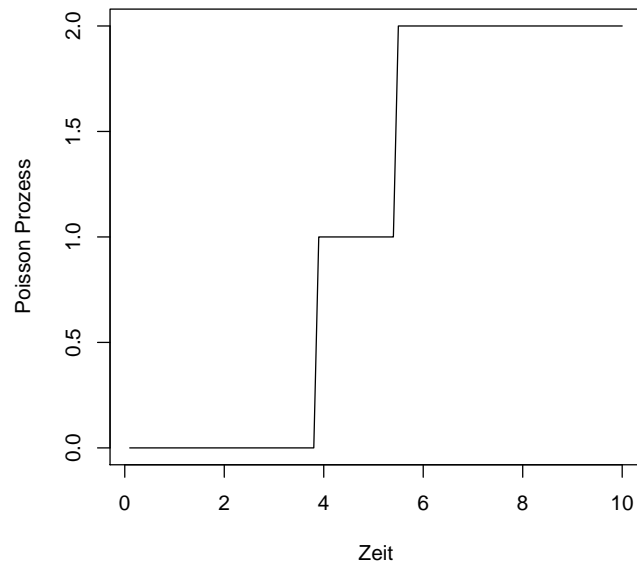


Abbildung 1.3: Simulation einer Trajektorie eines Poisson-Prozesses mit der Intensität $\lambda = 1$

Proposition 1.20 *Poisson-Prozesse N^i , $i = 1, \dots, d$, sind genau dann unabhängig, wenn sie fast nie gleichzeitig springen, d.h. für jedes i, j mit $i \neq j$ gilt für alle $t > 0$*

$$\Delta N_t^i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta N_t^j = 0 \quad f.s.$$

Definition 1.21 *Ein stochastischer Prozess (N^1, \dots, N^d) ist ein d -dimensionaler Poisson-Prozess, falls*

1. jedes N^i ein Poisson-Prozess ist,
2. seine Komponenten N^i , $i = 1, \dots, d$, unabhängig sind.

In der Abbildung 1.3 ist die Simulation einer Trajektorie eines Poisson-Prozesses zu sehen.

Definition 1.22 (Poisson-Punktprozess) *Ein Poisson-Punktprozess ist ein σ -diskreter Punktprozess $e = (e_t)_{t \geq 0}$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes $A \in \mathcal{U}_\delta$ ist der Prozess $(N_t^A)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess, der homogen ist, d.h. $\frac{1}{t} E[N_t^A]$ hängt nicht von t ab.*

Sei $e = (e_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson-Punktprozess.

Definition 1.23 (Intensitätsmaß) Das σ -endliche Maß μ auf \mathcal{U}_δ ,

$$\mu(A) := \frac{1}{t} E[N_t^A], \quad t > 0, \quad A \in \mathcal{U}_\delta,$$

heißt das Intensitätsmaß des Poisson-Punktprozesses e .

Falls $0 < \mu(A) < \infty$, ist der Prozess $N^A = (N_t^A)_{t \geq 0}$ nach Proposition 1.19 ein Poisson-Prozess mit der Intensität $\mu(A)$. Falls die Mengen A_i paarweise disjunkt sind und $0 < \mu(A_i) < \infty$, $i = 1, \dots, d$, ist der Prozess $(N^{A_1}, N^{A_2}, \dots, N^{A_d})$ ein d -dimensionaler Poisson-Prozess.

Den folgenden Satz benötigen wir für das dritte Kapitel.

Satz 1.24 Sei X ein Lévy-Prozess mit dem Lévy-Maß Π . Dann ist der Sprungprozess, $\Delta X = (\Delta X_t)_{t \geq 0}$, ein Poisson-Punktprozess mit dem Intensitätsmaß Π .

Der Beweis ist in Bertoin [2], S. 13 zu finden.

1.7 Risikoprozess und Ruinwahrscheinlichkeit

In der Versicherungsmathematik beschreibt der Risikoprozess die zeitliche Entwicklung des Erfolges eines Versicherungsunternehmens.

Unter Vernachlässigung von administrativen Kosten, Steuern etc. ist der Gewinn eines Versicherungsunternehmens aus dem reinen Versicherungsgeschäft durch drei Größen festgelegt: Anfangsrisikoreserve (ARR) $x \geq 0$, Prämieinnahmen $Pr = (Pr_t)_{t \geq 0}$ und Schäden $S = (S_t)_{t \geq 0}$.

Das Nettoergebnis

$$R_t = x + Pr_t - S_t, \quad t \geq 0, \tag{1.8}$$

heißt Risikoprozess. Wird $R = (R_t)_{t \geq 0}$ negativ, so hat das Versicherungsunternehmen Verlust gemacht (Ruin). Für eine ARR $x \geq 0$ heißt

$$\psi(x) := P\{R_t \leq 0 \text{ für ein } t \geq 0\}$$

Ruinwahrscheinlichkeit.

Wir nehmen an, dass die Prämien stetig in der Zeit mit konstanter Rate $c > 0$ gezahlt werden, d.h. $Pr_t = ct$, $t \geq 0$, und dass der Gesamtschadenprozess S ein Lévy-Prozess ist. Dann ist R somit ein Lévy-Prozess, und (1.8) lässt sich umschreiben als

$$R_t = x + ct - S_t, \quad t \geq 0.$$

Beispiel 1.25 (Cramér-Lundberg-Modell) Sei nun ein Gesamtschadenprozess S in der Form

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0 \tag{1.9}$$

gegeben, wobei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ der Schadenanzahlprozess und $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von positiven Zufallsvariablen ist.

N_t repräsentiert die Gesamtzahl der Schäden zum Zeitpunkt t und Y_i die Höhe des i -ten Schadens. Dann gilt

$$R_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0.$$

Unter den Annahmen

1. Y_1, Y_2, \dots sind i.i.d. mit Verteilungsfunktion F auf $(0, \infty)$, $E[Y_1] =: \nu < \infty$, und unabhängig von N ,
2. $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ist ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$

heißen R Cramér-Lundberg-Prozess und S ein zusammengesetzter Poisson-Prozess.

In der Abbildung 1.4 ist die Simulation einer Trajektorie eines Cramér-Lundberg-Prozesses ohne ARR (d.h. die ARR ist gleich Null) und mit exponentialverteilten Schadenhöhen zu sehen.

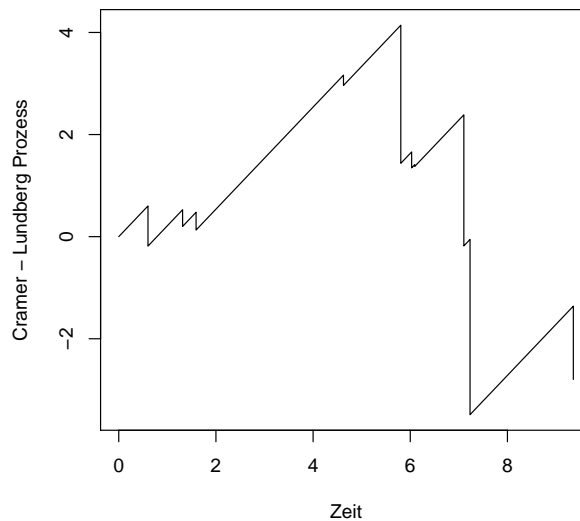


Abbildung 1.4: Simulation einer Trajektorie eines Cramér-Lundberg-Prozesses mit $x = 0$, $c = 1$, Expo(1)-verteilten Schadenhöhen und Poisson-Intensität $\lambda = 1$

Wir setzen noch voraus:

3. $\rho := \frac{c}{\lambda\nu} - 1 > 0$ (net profit-Bedingung).

4. Es existiert eine Konstante $r > 0$, so dass

$$\int_0^\infty e^{rx}(1 - F(x))dx = \frac{c}{\lambda} \quad (\text{Cramér-Bedingung}) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty xe^{rx}\bar{F}(x)dx < \infty. \quad (1.10)$$

Unter diesen zusätzlichen Annahmen erfüllt die Ruinwahrscheinlichkeit in diesem Modell die berühmte asymptotische Formel von Lundberg

$$\psi(u) \sim Ce^{-ru} \quad \text{für} \quad u \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

wobei

$$C = \left[\frac{r}{\rho\nu} \int_0^\infty xe^x \bar{F}(x) dx \right]^{-1} \quad (1.12)$$

ist. Die Konstante r heißt der Lundberg-Koeffizient.

Die Formeln (1.11), (1.12) können zum Beispiel in Embrechts, Klüppelberg und Mikosch [8], S.29 gefunden werden.

Unter den Annahmen 1,2 gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E[\exp\{i\beta S_t\}] &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) E[\exp\{i\beta \sum_{i=1}^n Y_i\}] \quad (\text{hier, falls } n = 0, \text{ ist } \sum_{i=1}^0 Y_i = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (E[\exp\{i\beta Y_1\}])^n. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Mit \hat{F} wird die charakteristische Funktion von Y_1 bezeichnet,

$$\hat{F}(\beta) := E[\exp\{i\beta Y_1\}], \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Dann können wir (1.13) folgendermaßen umschreiben

$$E[\exp\{i\beta S_t\}] = \exp\{-\lambda t(1 - \hat{F}(\beta))\}.$$

Folglich ist S nach Satz 1.2 ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Exponenten

$$\Psi(\beta) = \lambda(1 - \hat{F}(\beta)) = \lambda \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\beta x}) F(dx), \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

und für das Lévy-Maß von S gilt

$$\Pi(dx) = \lambda F(dx), \quad x \geq 0. \quad (1.15)$$

Somit ist S ein Lévy-Prozess mit einem endlichen Lévy-Maß.

Bemerkung 1.26 *Da $Y_i > 0$ f.s. ist, steigt der zusammengesetzte Poisson-Prozess monoton in t f.s.*

Kapitel 2

Subexponentielle Verteilungen

Jede unendlich teilbare Verteilung erzeugt einen Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ in dem Sinne, dass sie als die Verteilung von X_1 betrachtet werden kann. Im Folgenden werden spezifische unendlich teilbare Verteilungen betrachtet.

Dieses Kapitel basiert auf Embrechts, Klüppelberg und Mikosch [8].

2.1 Reguläre Variation

Im Folgenden betrachten wir nur nichtarithmetische Verteilungen.

Definition 2.1 Eine positive Lebesgue-messbare Funktion h auf $[0, \infty)$ variiert regulär mit einem Index $\gamma \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\gamma, \quad t > 0.$$

Wenn $\gamma = 0$ ist, heißt h langsam variierend.

Die Klasse der regulär variierenden Funktionen mit dem Index $\gamma \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit \mathcal{R}_γ .

Falls $h \in \mathcal{R}_\gamma$, ist $f(x) := h(x)x^{-\gamma} \in \mathcal{R}_0$ nach Definition 2.1.

Für eine Verteilungsfunktion F wird die Tail-Funktion $\bar{F} := 1 - F$ definiert. Zum Beispiel gehört der Tail einer Pareto-Verteilung F mit den Parametern a und b , $\bar{F}(x) = (\frac{a}{a+x})^b$, $x \geq 0$, zu \mathcal{R}_{-b} .

Die zwei folgenden Propositionen sind in Bingham, Goldie und Teugels [4], S. 6, 12 zu finden.

Proposition 2.2 (Gleichmäßige Konvergenz) Für $h \in \mathcal{R}_0$ konvergiert $\frac{h(tx)}{h(x)}$ gegen 1 für $x \rightarrow \infty$, gleichmäßig in t auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq [0, \infty)$.

Beweis. Wir setzen wir $l(x) := \log h(e^x)$. Die Annahme ist, dass

$$l(x+u) - l(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Wir weisen die gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen Intervall in $[0, \infty)$ nach. Es reicht dafür die Gleichmäßigkeit auf jedem $[0, A]$ zu zeigen, denn mittels einer Translation bekommen wir dann die Behauptung der Proposition.

Wählen wir ein $\epsilon \in (0, A)$. Für $x > 0$ seien

$$\begin{aligned} A_x &:= [x, x+2A], \\ E_x &:= \{t \in A_x : |l(t) - l(x)| \geq \frac{1}{2}\epsilon\}, \\ E_x^* &:= \{t \in [0, 2A] : |l(x+t) - l(x)| \geq \frac{1}{2}\epsilon\}. \end{aligned}$$

Da h nach Definition 2.1 Lebesgue-messbar ist, sind E_x und E_x^* auch messbar und $m(E_x) = m(E_x^*)$, wobei mit m das Lebesgue-Maß bezeichnet wird.

Nach (2.1) erhalten wir für die Indikator-Funktion

$$I_{E_x^*}(t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

und damit $m(E_x^*) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz.

Folglich existiert ein x_0 , so dass $m(E_x) < \frac{1}{2}\epsilon$ für alle $x \geq x_0$.

Ferner gilt für jedes $c \in [0, A]$

$$m(A_{x+c} \cap A_x) = m([x+c, x+2A]) = 2A - c \geq A$$

und für jedes $x \geq x_0$

$$m(E_x \cup E_{x+c}) \leq m(E_x) + m(E_{x+c}) < \epsilon < A.$$

Somit hat die Menge $(A_x \cap A_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})$ für $c \in [0, A]$ und $x \geq x_0$ ein positives Maß, d.h. diese Menge ist nicht leer. Ist $t \in (A_x \cap A_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})$, so gilt

$$|l(t) - l(x)| < \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{und} \quad |l(t) - l(x+c)| < \frac{1}{2}\epsilon,$$

$|l(x+c) - l(x)| < \epsilon$ für alle $c \in [0, A]$ und $x \geq x_0$. Wir haben die gewünschte Gleichmäßigkeit auf $[0, A]$ bewiesen. □

Korollar 2.3 *Sei h eine langsam variierende Funktion. Dann existiert ein $X > 0$, so dass h auf $[X, \infty)$ lokal beschränkt ist.*

Beweis. Nach Proposition 2.2 existiert ein X , so dass

$$|l(x+u) - l(x)| < 1 \quad \text{für} \quad x \geq X \quad \text{und} \quad u \in [0, 1],$$

wobei $l(x) = \log h(e^x)$. Folglich gilt $|l(x)| \leq 1 + |l(X)|$ auf $[X, X+1]$. Mit Induktion folgt $|l(x)| \leq n + |l(X)|$ auf $[X, X+n]$.

Also ist l und somit h lokal beschränkt und wegen der Messbarkeit lokal integrierbar auf $[X, \infty)$. □

Proposition 2.4 (Darstellungssatz für \mathcal{R}_0) Die Funktion h variiert genau dann langsam, wenn sie in folgender Form dargestellt werden kann:

$$h(x) = c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq a, \quad a > 0, \quad (2.2)$$

wobei $c(\cdot)$ messbar ist und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in (0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \epsilon(x) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass (2.2) gilt. Folglich ist

$$\frac{h(tx)}{h(x)} = \frac{c(tx)}{c(x)} \exp\left\{\int_x^{tx} \frac{\epsilon(u)}{u} du\right\} \quad \text{für jedes } t > 0. \quad (2.3)$$

Wählen wir ein Intervall $[A, B]$ mit $0 < A < B < \infty$ und ein $\epsilon > 0$. Für hinreichend großes x und alle $t \in [A, B]$ liegt dann die rechte Seite der Gleichung (2.3) zwischen

$$(1 \pm \epsilon) \exp\{\epsilon \max(|\log A|, |\log B|)\}.$$

Folglich variiert h langsam nach Definition 2.1.

Die Formel (2.2) können wir in

$$h(x) = \exp\left\{c_1(x) + \int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u} du\right\}, \quad x \geq a,$$

umschreiben, wobei c_1 messbar ist und $\lim_{x \rightarrow \infty} c_1(x) = d \in (0, \infty)$. Wir setzen wieder $l(x) = \log h(e^x)$ und beweisen, dass l in der Form

$$l(x) = d(x) + \int_b^x \delta(v) dv, \quad x \geq b \quad (2.4)$$

mit $d(x) \rightarrow d \in \mathbb{R}$, $\delta(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ dargestellt werden kann, falls l (2.1) erfüllt. Mit $b = \log a$, $d(x) = c_1(e^x)$ und $\delta(x) = \epsilon(e^x)$ ist (2.4) äquivalent zur (2.2).

Nach Korollar 2.3 ist l lokal integrierbar auf $[b, \infty)$ für ein $b > 0$. Damit können wir l in der folgenden Form darstellen:

$$l(x) = \int_x^{x+1} \{l(x) - l(t)\} dt + \int_b^x \{l(t+1) - l(t)\} dt + \int_b^{b+1} l(t) dt, \quad \text{für } x \geq b.$$

Also ist $l(x) = d + \int_0^1 \{l(x) - l(x+u)\} du + \int_b^x \delta(t) dt$, wobei $d := \int_b^{b+1} l(t) dt \in \mathbb{R}$ und $\delta(x) := l(x+1) - l(x)$.

Aus (2.1) folgt, $\delta(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Proposition 2.2 liefert, dass

$$\int_0^1 \{l(x) - l(x+u)\} du \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Somit haben wir (2.4) mit $d(x) = d + \int_0^1 \{l(x) - l(x+u)\} du$ bekommen.

□

Der Wert von a ist für die Formel (2.2) unwichtig, wir können zum Beispiel $a = 1$ wählen. Siehe Bingham, Goldie und Teugels [4], S. 12.

Bemerkung 2.5 Für $h \in \mathcal{R}_\gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $h(x) = f(x)x^\gamma$, wobei $f \in \mathcal{R}_0$. Folglich gilt nach dem Darstellungssatz

$$h(x) = \{c + o(1)\} \exp\left\{\int_1^x \frac{\gamma + o(1)}{u} du\right\}, \quad 0 < c < \infty,$$

weil $c(x) \rightarrow c$ und $\epsilon(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Die Funktionen F und G heißen *äquivalent* (in Zeichen $F \sim G$), falls $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 1$ und *tail-äquivalent*, falls $\bar{F} \sim \bar{G}$.

Korollar 2.6 1. Ist $h \in \mathcal{R}_\gamma$ für ein $\gamma \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \gamma > 0 \\ 0, & \text{falls } \gamma < 0. \end{cases}$$

2. Ist $h_i \in \mathcal{R}_{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, n$, so gilt $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{R}_m$, wobei $m = \max\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Beweis.

1. Folgt direkt aus der Bemerkung 2.5.

2. Sei $n = 2$. O. B. d. A. nehmen wir an, dass $\gamma_1 \geq \gamma_2$. Dann haben wir

$$\frac{h_1(tx) + h_2(tx)}{h_1(x) + h_2(x)} \sim \frac{t^{\gamma_1} h_1(x) + t^{\gamma_2} h_2(x)}{h_1(x) + h_2(x)} = t^{\gamma_1} \left(\frac{1 + t^{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{h_2(x)}{h_1(x)}}{1 + \frac{h_2(x)}{h_1(x)}} \right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Nach Bemerkung 2.5 gilt

$$\frac{h_2(x)}{h_1(x)} = \frac{c_2 + o(1)}{c_1 + o(1)} \exp\left\{\int_1^x (\gamma_2 - \gamma_1 + o(1)) \frac{du}{u}\right\} = o(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Damit ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_1(tx) + h_2(tx)}{h_1(x) + h_2(x)} = t^{\gamma_1} = t^m.$$

Der Beweis für $n > 2$ erfolgt mit Induktion über n . □

Das folgende Ergebnis kann in Feller [9], S. 278-279 in der allgemeineren Form gefunden werden.

Proposition 2.7 (Faltung einer Verteilungsfunktion mit regulär variierendem Tail)

Sei G eine Verteilungsfunktion auf $(0, \infty)$ und $\bar{G} \in \mathcal{R}_{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Dann gilt

$$\overline{G^{*2}}(x) \sim 2\bar{G}(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

wobei $\overline{G^{*2}}(x) = 1 - G^{*2}(x)$, $x \geq 0$.

Beweis. Seien X, Y zwei positive unabhängige Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion G .

Wegen $\{X + Y > x\} \supseteq \{X > x\} \cup \{Y > x\}$ gilt

$$\overline{G^{*2}}(x) \geq 2\bar{G}(x) - (\bar{G}(x))^2 = 2\bar{G}(x)(1 - o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Wählen wir ein $\delta \in (0, \frac{1}{2})$. Dann gilt

$$\{X + Y > x\} \subseteq \{X > (1 - \delta)x\} \cup \{Y > (1 - \delta)x\} \cup \{X > \delta x, Y > \delta x\}.$$

Daraus folgt

$$\overline{G^{*2}}(x) \leq 2\bar{G}((1 - \delta)x) + (\bar{G}(\delta x))^2 = 2\bar{G}((1 - \delta)x)(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Also erhalten wir aus (2.5) und (2.6)

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{2\bar{G}(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{2\bar{G}(x)} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{2\bar{G}((1 - \delta)x)} \frac{\bar{G}((1 - \delta)x)}{\bar{G}(x)} \leq (1 - \delta)^{-\gamma},$$

denn nach Definition 2.1 gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}((1 - \delta)x)}{\bar{G}(x)} = (1 - \delta)^{-\gamma}.$$

Mit $\delta \downarrow 0$ bekommen wir die Behauptung der Proposition. □

2.2 Die Klasse der subexponentiellen Verteilungen

Definition 2.8 (Klasse \mathcal{S}) Eine Verteilungsfunktion G auf $(0, \infty)$ gehört zur Klasse \mathcal{S} , falls

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(u)}{\bar{G}(u)} = 2. \quad (2.7)$$

Die Klasse \mathcal{S} wird auch die Klasse der subexponentiellen Verteilungen genannt.

Beispiel 2.9 Nach Proposition 2.7 sind alle Verteilungen mit einem regulär variierenden mit Index $\gamma < 0$ Tail subexponentiell.

Die Exponential-Verteilung $\text{Expo}(\alpha)$ gehört für kein α zu \mathcal{S} , denn die Faltung von zwei $\text{Expo}(\alpha)$ ist die Gamma-Verteilung $\text{Gamma}(2, \alpha)$, die die Eigenschaft (2.7) nicht erfüllt.

Bemerkung 2.10 Da G eine Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariable ist, gilt

$$G^{*2}(x) \leq G^2(x) \quad \text{bzw.} \quad \overline{G^{*2}}(x) \geq \overline{G^2}(x) \quad \text{für jedes } x \in (0, \infty).$$

Folglich ist

$$\frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \geq \frac{\overline{G^2}(x)}{\overline{G}(x)} = \frac{1 - G^2(x)}{1 - G(x)} = 1 + G(x) \rightarrow 2 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Damit gilt

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \geq 2.$$

Also ist die Verteilung subexponentiell, wenn

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \leq 2.$$

Im Folgenden beweisen wir einige wichtige Eigenschaften von subexponentiellen Verteilungen.

Lemma 2.11 Falls die Verteilung F subexponentiell ist,

1. konvergiert dann

$$\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \quad \text{gegen } 1 \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

gleichmäßig in y auf jeder kompakten Menge in $(0, \infty)$.

2. gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \quad (2.9)$$

Beweis.

1. F ist eine Verteilungsfunktion auf $(0, \infty)$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\overline{F}} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} F(dt) \\ &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} F(dt) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} F(dt) \geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} (F(x) - F(y)) \end{aligned}$$

für alle $0 < y \leq x$.

Also gilt für hinreichend großes x mit $F(x) - F(y) \neq 0$

$$1 \leq \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \left(\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\bar{F}(x)} - 1 - F(y) \right) (F(x) - F(y))^{-1} \rightarrow \frac{2 - 1 - F(y)}{1 - F(y)} = 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Die Konvergenz ist hier gleichmäßig, denn $\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}$ ist monoton in y .

2. Beweisen wir den zweiten Teil des Lemmas mittels Induktion über n .

Für $n = 2$ ist (2.9) nach Definition 2.8 erfüllt.

Für $x \geq y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\bar{F}(x)} &= 1 + \frac{F(x) - F^{*(n+1)}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\ &= 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) + \int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\ &=: 1 + I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst das Integral I_1 :

$$I_1(x) = \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt).$$

Ist $t \in [0, x-y]$, so ist $x-t \in [y, x]$.

Nach der Induktionsannahme konvergiert $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)}$ gegen n für $x \rightarrow \infty$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists X(\epsilon) > 0, \quad \text{so dass} \quad \forall x \geq X(\epsilon) \quad \text{ist} \quad \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)} \in [n - \epsilon, n + \epsilon].$$

Wählen wir ein $\epsilon > 0$ und setzen $y = X(\epsilon)$, dann ist

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \in [n - \epsilon, n + \epsilon] \quad \text{für alle} \quad t \in [0, x-y].$$

Folglich ist

$$I_1(x) = (n + o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) &= \int_0^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\
&= \int_0^x \frac{1-F(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\
&= \frac{F(x) - F^{*2}(x)}{\bar{F}(x)} - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\
&= \frac{\overline{F^{*2}}(x) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\
&= 2 + o(1) - 1 - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \\
&= 1 + o(1) - \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Nach dem ersten Teil des Lemmas gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) = \frac{\int_{x-y}^x (1-F(x-t)) F(dt)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{F(x) - F(x-y)}{\bar{F}(x)} \\
&= \frac{\bar{F}(x-y) - \bar{F}(x)}{\bar{F}(x)} = 1 + o(1) - 1 = o(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) = 1 + o(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \tag{2.12}$$

Aus (2.12) und (2.10) erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = n.$$

Das zweite Integral I_2 ist

$$I_2(x) = \int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt).$$

Weil $\frac{\overline{F^{*n}}(x-t)}{\bar{F}(x-t)}$ beschränkt für $x-y \leq t \leq x$ ist und nach (2.11)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x-y}^x \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) = 0,$$

ist $\lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) = 0$.

□

Mit M_F wird die *momenterzeugende Funktion* der Verteilung F auf $(0, \infty)$ bezeichnet,

$$M_F(\alpha) := \int_{[0, \infty)} e^{\alpha u} F(du), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist $M_F(0) = 1$.

Lemma 2.12 *Für eine subexponentielle Verteilung G gilt*

$$M_G(\epsilon) = \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Damit können solche Verteilungen die Cramér-Bedingung nicht erfüllen.

Beweis. Da G als subexponentielle Verteilung (2.8) erfüllt, variiert die Komposition $h := \bar{G} \circ \log$ langsam.

Folglich gilt nach dem Darstellungsgatz

$$x^\epsilon h(x) \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \text{oder äquivalent} \quad e^{\epsilon x} \bar{G}(x) \rightarrow \infty, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Ferner ist

$$\int_y^\infty e^{\epsilon x} G(dx) \geq e^{\epsilon y} \bar{G}(y), \quad \forall y \geq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung des Lemmas. □

Definition 2.13 *Falls F eine absolut stetige Verteilungsfunktion auf $(0, \infty)$ mit einer Dichte f ist, heißt die Funktion $q(x)$,*

$$q(x) := \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \quad \text{für} \quad x > 0,$$

Hazard-Rate von F , und $Q(x)$,

$$Q(x) := \int_0^x q(y) dy = -\log \bar{F}(x) \quad \text{für} \quad x > 0,$$

heißt Hazard-Funktion von F . Offenbar gilt $\bar{F}(x) = e^{-Q(x)}$.

Die folgende Proposition hilft, Beispiele von subexponentiellen Verteilungen zu finden. In der allgemeineren Form kann sie in Embrechts, Klüppelberg und Mikosch [8], S. 574 gefunden werden.

Proposition 2.14 *Sei F eine absolut stetige Verteilung auf $(0, \infty)$ mit einer Dichte f und Hazard-Rate $q(x)$, so dass $q(x)$ monoton fallend auf dem ganzen Intervall $(0, \infty)$ ist und $q(x) \searrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ gilt. Dann erfüllt F folgende Eigenschaften:*

1. F ist genau dann subexponentiell, wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yq(x)} f(y) dy = 1. \quad (2.13)$$

2. Falls die Funktion $x \rightarrow \exp\{xq(x)\}f(x)$ integrierbar auf $(0, \infty)$ ist, ist F subexponentiell.

Beweis.

1. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 = \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) = \int_0^x e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(y) dy, \quad (2.14)$$

wobei $Q(x)$ die Hazard-Funktion von F ist. Außerdem gilt nach der Definition der Hazard-Rate $q(\cdot)$

$$\int_0^x e^{yq(x)} f(y) dy = \int_0^x e^{yq(x)-Q(y)} q(y) dy.$$

Die Funktion $q(x)$ ist nach der Voraussetzung monoton fallend auf $(0, \infty)$. Damit gilt

$$Q(x) - Q(x-y) = \int_{x-y}^x q(t) dt \geq yq(x)$$

und aus (2.14) folgt

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 \geq \int_0^x e^{yq(x)-Q(y)} q(y) dy \geq \int_0^x e^{-Q(y)} q(y) dy = F(x). \quad (2.15)$$

Wenn F subexponentiell ist, konvergiert $\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)}$ gegen 2. Folglich erfüllt sie notwendigerweise (2.13) nach (2.15).

Umgekehrt nehmen wir an, dass (2.13) gilt. Dann

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(y) dy &= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(y) dy + \int_{\frac{x}{2}}^x e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{x}{2}} e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(y) dy + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{Q(x)-Q(x-y)-Q(y)} q(x-y) dy \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Funktion $q(\cdot)$ ist monoton fallend und $x - y \geq \frac{x}{2}$ für $y \leq \frac{x}{2}$. Dann gilt $Q(x) - Q(x - y) = \int_{x-y}^x q(t)dt \leq yq(x - y) \leq yq(\frac{x}{2})$.
Folglich gilt

$$I_1(x) \leq \int_0^{\frac{x}{2}} e^{yq(\frac{x}{2}) - Q(y)} q(y) dy.$$

Wie in (2.15) bekommen wir

$$F(\frac{x}{2}) = \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-Q(y)} q(y) dy.$$

Ferner gilt

$$F(\frac{x}{2}) \leq I_1(x) \leq \int_0^{\frac{x}{2}} e^{yq(\frac{x}{2}) - Q(y)} q(y) dy.$$

Nach (2.13) ist dann $\lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = 1$.

Für jedes feste y konvergiert $e^{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)} q(x - y)$ punktweise gegen Null für $x \rightarrow \infty$, weil $q(x) \downarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ nach der Voraussetzung.
Außerdem haben wir

$$e^{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)} q(x - y) \leq e^{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)} q(y),$$

denn für $y \leq \frac{x}{2}$ ist $x - y \geq \frac{x}{2}$, also $y \leq x - y$, und das liefert $I_2 \leq I_1$. Nach dem Lemma von Pratt ist $\lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) = 0$. (Siehe den Anhang, Lemma A.1)
Folglich ist nach (2.14) und nach (2.16)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)} q(y) dy = 1$$

Somit ist F subexponentiell nach Definition 2.8.

2. $q(x) < q(y)$, falls $y < x$. Somit gilt $e^{yq(x)} f(y) < e^{yq(y)} f(y)$, falls $y < x$.
Weil $e^{yq(y)} f(y)$ integrierbar nach der Voraussetzung auf $(0, \infty)$ ist, ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{yq(x)} f(y) dy = 1$$

nach dem Satz über die dominierte Konvergenz. Folglich ist F subexponentiell nach dem ersten Teil der Proposition.

Beispiel 2.15 (Weibull) Sei F eine Weibull-Verteilung auf $(0, \infty)$ mit dem Parameter $\tau \in (0, 1)$. Dann ist die Tail-Funktion von F $\overline{F}(x) = e^{-x^\tau}$, die Dichte von F ist $f(x) = \tau x^{\tau-1} e^{-x^\tau}$, die Hazard-Funktion von F ist $Q(x) = x^\tau$ und die Hazard-Rate von F ist $q(x) = \tau x^{\tau-1} \downarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Die Funktion $x \mapsto e^{xq(x)} f(x) = e^{(\tau-1)x^\tau} \tau x^{\tau-1}$ ist integrierbar auf $(0, \infty)$. Nach Proposition 2.14 gehört F also zu der Klasse \mathcal{S} .

Proposition 2.16 Seien F und G Verteilungsfunktionen auf $(0, \infty)$. Falls $F \in \mathcal{S}$ und für ein $c \in (0, \infty)$ $\bar{G} \sim c\bar{F}$ für $x \rightarrow \infty$ ist, gehört G auch zu der Klasse \mathcal{S} .

Beweis. Seien X, Y unabhängige positive Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion G . Für ein festes $y > 0$ und $x > 2y$ gilt
 $\{X + Y > x\} = \{X \leq y, X + Y > x\} \cup \{Y \leq y, X + Y > x\} \cup \{y < X \leq x - y, X + Y > x\} \cup \{Y > y, X > x - y\}$,
wobei alle Ereignisse disjunkt sind. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{\bar{G}^{*2}(x)}{2\bar{G}(x)} &= \int_0^y \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{G}(x)} G(dt) + \int_y^{x-y} \frac{\bar{G}(x-t)}{2\bar{G}(x)} G(dt) + \frac{\bar{G}(x-y)}{2\bar{G}(x)} \bar{G}(y) \\ &=: I_1(x, y) + \frac{1}{2} I_2(x, y) + \frac{\bar{G}(x-y)}{2\bar{G}(x)} \bar{G}(y). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.11 bekommen wir

$$I_1(x, y) \rightarrow G(y) \quad \text{und} \quad \frac{\bar{G}(x-y)}{\bar{G}(x)} \bar{G}(y) \rightarrow \bar{G}(y) \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = c,$$

d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $X(\epsilon) > 0$, so dass für alle $x \geq X(\epsilon)$:

$$c - \epsilon \leq \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} \leq c + \epsilon.$$

Folglich gilt für $y \leq t \leq x - y$ und ein hinreichend grosses y

$$\frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{F}(x-t)} \leq c + \epsilon \quad \text{und} \quad \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} \leq (c - \epsilon)^{-1}.$$

Somit ist

$$I_2(x, y) \leq \frac{c + \epsilon}{c - \epsilon} \int_y^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} dG(t)$$

Mit partieller Integration und nach Lemma 2.11 ist

$$\frac{c + \epsilon}{c - \epsilon} \int_y^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} G(dt) = \frac{c + \epsilon}{c - \epsilon} \left(\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{G}(y) - \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \bar{G}(x-y) + \int_{x-y}^y \frac{\bar{G}(x-t)}{\bar{F}(x)} \bar{F}(dt) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c+\epsilon}{c-\epsilon} \left(\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{G}(y) - \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \bar{G}(x-y) + (c+\epsilon) \int_y^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \right) \\
&= \frac{c+\epsilon}{c-\epsilon} \left(\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \bar{G}(y) - \bar{F}(y) \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \frac{\bar{G}(x-y)}{\bar{F}(x-y)} + (c+\epsilon) \int_y^{x-y} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} F(dt) \right) \\
&\rightarrow -\frac{c+\epsilon}{c-\epsilon} (c\bar{F}(y) - \bar{G}(y) - (c+\epsilon)o_y(1)), \quad x \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

wobei $o_y(1)$ bedeutet, dass $\lim_{y \rightarrow \infty} o_y(1) = 0$ ist. Letzteres folgt aus $F \in \mathcal{S}$. Also erhalten wir

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{2\bar{G}(x)} \leq G(y) -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{c+\epsilon}{c-\epsilon} (c\bar{F}(y) - \bar{G}(y) - (c+\epsilon)o_y(1)) + \frac{1}{2} \bar{G}(y) \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty.$$

Da G die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsvariable ist, gilt nach Bemerkung 2.10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\bar{G}(x)} = 2.$$

Somit ist G subexponentiell nach Definition 2.8.

□

Das nächste Ergebnis stammt von Chover, Ney und Wainger [5].

Lemma 2.17 *Falls F eine subexponentielle Verteilung ist, erfüllt sie die folgende Eigenschaft:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists K_\epsilon \in (0, \infty), \quad \text{so dass} \quad \overline{F^{*n}}(t) \leq K_\epsilon (1 + \epsilon)^{n-1} \bar{F}(t)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$.

Beweis. Für jedes $s > 0$ und hinreichend großes $t > 0$ gilt wegen Lemma 2.11

$$\int_0^s \frac{\bar{F}(t-u)}{\bar{F}(t)} F(du) \geq 1 - \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.17)$$

Fixieren wir ein s . Ferner gilt für alle $t > s$

$$\frac{\overline{F^{*2}}(t)}{\bar{F}(t)} = 1 + \int_0^t \frac{\bar{F}(t-u)}{\bar{F}(t)} F(du) = 1 + \int_0^{t-s} \frac{\bar{F}(t-u)}{\bar{F}(t)} F(du) + \int_{t-s}^t \frac{\bar{F}(t-u)}{\bar{F}(t)} F(du).$$

Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*2}}(t)}{\overline{F}(t)} &= 1 + \int_0^{t-s} \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) + \frac{F(t) - \overline{F}(s)F(t-s)}{\overline{F}(t)} - \int_0^s \frac{F(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) \\
&= \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(t)} + \int_0^{t-s} \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) + \frac{F(t) - F(s) - \overline{F}(s)F(t-s)}{\overline{F}(t)} + \int_0^s \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) \\
&= \int_0^{t-s} \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) + \frac{\overline{F}(s) - \overline{F}(s)F(t-s)}{\overline{F}(t)} + \int_0^s \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) \\
&= \int_0^{t-s} \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du) + \frac{\overline{F}(s)\overline{F}(t-s)}{\overline{F}(t)} + \int_0^s \frac{\overline{F}(t-u)}{\overline{F}(t)} F(du). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Wählen wir ein $t_0 > s$, so dass für $t \geq t_0$

$$\frac{\overline{F^{*2}}(t)}{\overline{F}(t)} \leq 2 + \frac{\epsilon}{4} \tag{2.19}$$

und (2.17) gilt. Aus (2.17)-(2.19) folgt dann

$$\int_0^{t-s} \overline{F}(t-u)F(du) + \overline{F}(s)\overline{F}(t-s) \leq (1 + \frac{\epsilon}{2})\overline{F}(t), \quad t \geq t_0.$$

Sei

$$K_\epsilon := \max \left(\frac{2}{\epsilon} \sup_{t \geq t_0} \frac{\overline{F}(t-s)}{\overline{F}(t)}, \frac{1}{\overline{F}(t_0)} \right) > 1.$$

Für den Beweis benutzen wir Induktion über n .

Für $n = 1$ ist die Behauptung des Lemmas trivial.

Für $t \leq t_0$ ist

$$\overline{F^{*(n+1)}}(t) \leq 1 \leq \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(t_0)} \leq K_\epsilon (1 + \epsilon)^n \overline{F}(t).$$

nach der Definition von K_ϵ .

Für $t > t_0$ erhalten wir analog (2.18)

$$\overline{F^{*(n+1)}}(t) \leq \int_0^{t-s} \overline{F}^{*n}(t-u)F(du) + \overline{F}^{*n}(s)\overline{F}(t-s) + \int_0^s \overline{F}(t-u)F^{*n}(du)$$

Nach der Induktionannahme ist

$$\begin{aligned}
\overline{F^{*(n+1)}}(t) &\leq K_\epsilon (1 + \epsilon)^{n-1} \left(\int_0^{t-s} \overline{F}(t-u)F(du) + \overline{F}(s)\overline{F}(t-s) \right) + \overline{F}(t-s) \\
&\leq \left(K_\epsilon (1 + \epsilon)^{n-1} (1 + \frac{\epsilon}{2}) + K_\epsilon \frac{\epsilon}{2} \right) \overline{F}(t) \leq K_\epsilon (1 + \epsilon)^n \overline{F}(t).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.18 Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1 + \epsilon)^n < \infty$ für ein $\epsilon > 0$. Sei

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x > 0.$$

Dann gilt

$$F \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} np_n. \quad (2.20)$$

Beweis

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x), \quad x > 0,$$

denn $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

Nach Lemma 2.17 und nach der Voraussetzung des Satzes gilt für ein $\epsilon > 0$ und für alle $x > 0$

$$\bar{G}(x) \leq K_\epsilon \bar{F}(x) \sum_{n=0}^{\infty} p_n (1 + \epsilon)^{n-1} \leq K'_\epsilon,$$

wobei

$$K'_\epsilon := K_\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} p_n (1 + \epsilon)^n < \infty.$$

Wir setzen

$$\bar{G}_k(x) := \sum_{n=0}^k p_n \bar{F}^{*n}(x), \quad x > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ folgt aus Lemma 2.11

$$\bar{G}_k(x) \sim \bar{F}(x) \sum_{n=0}^k np_n \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Außerdem gilt für jedes $x > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{G}_k(x) = \bar{G}(x). \quad (2.22)$$

Nach (2.21) und (2.22) ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

wegen der dominierten Konvergenz.

□

Der Tail eines endlichen Maßes auf $(0, \infty)$ kann als der Tail einer Verteilung normiert werden und zur Klasse \mathcal{S} gehören, wenn er nach der Normierung die Eigenschaft (2.7) erfüllt.

Beispiel 2.19 (α -stabile Lévy-Bewegungen) *Das Lévy-Maß einer α -stabilen Lévy-Bewegung hat nach (1.5) die Gestalt $\Pi(dx) = qx^{-1-\alpha}dx$ und besitzt damit einen regulär variierenden Tail mit dem Index α .*

Beispiel 2.20 (Zusammengesetzter Poisson-Prozess) *Wir betrachten den zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Verteilungsfunktion F für die Sprünge und Poisson-Intensität λ . Mit Π wird sein Lévy-Maß bezeichnet. Nach (1.15) gilt*

$$\bar{\Pi}(x) = \lambda \bar{F}(x), \quad \text{für } x > 0.$$

Somit ist $\bar{\Pi}$ subexponentiell, wenn F subexponentiell ist.

Kapitel 3

Spektral positive Lévy-Prozesse

Ein Lévy-Prozess ohne negative Sprünge heißt auch ein spektral positiver Lévy-Prozess.

3.1 Subordinatoren

Definition 3.1 *Ein Subordinator ist ein $(0, \infty)^d$ -wertiger Lévy-Prozess.*

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Subordinator ist.

Aus der Definition ergibt sich, dass Pfade eines eindimensionalen Subordinators ($d = 1$) monoton wachsend sind und auf jedem kompakten Zeitintervall f.s. beschränkte Variation besitzen, d.h. ein Subordinator besitzt beschränkte Variation.

Außerdem ist ein Subordinator ein Lévy-Prozess ohne negative Sprünge.

Proposition 3.2 (Bertoin [2], S. 16) *Ein Lévy-Prozess besitzt genau dann beschränkte Variation, wenn sein Lévy-Maß Π die Bedingung $\int (1 \wedge \|x\|) \Pi(dx) < \infty$ erfüllt und sein charakteristischer Exponent*

$$\Psi(\theta) = -i \langle a, \theta \rangle + \int_{(0, \infty)^d} (1 - e^{i \langle \theta, x \rangle}) \Pi(dx) \quad (3.1)$$

für einen Driftkoeffizienten $a \in \mathbb{R}^d$ ist.

Da Subordinator ein positiver Lévy-Prozess ist, gilt $a \in [0, \infty)^d$.

Sei nun $d = 1$. Dann hat (3.1) die Form

$$\Psi(\theta) = -ia\theta + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{i\theta x}) \Pi(dx). \quad (3.2)$$

X ist ein $(0, \infty)$ -wertiger Prozess und aus Proposition 3.2 folgt:

$$\int_{(0, \infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty. \quad (3.3)$$

Die Funktionen $\theta \mapsto \Psi(\theta)$ und $\theta \mapsto E[\exp(i\theta X_t)]$ können offensichtlich auf die obere komplexe Halbebene so erweitert werden, dass $E[\exp(i\theta X_t)] = \exp(-t\Psi(\theta))$, falls $\text{Im}\theta \geq 0$. Damit liefert die unendliche Teilbarkeit (Abschnitt 1.2) der Verteilung von X_1 , dass die Laplace-Transformation die Form

$$E[\exp\{-\theta X_t\}] = \exp\{-t\Phi(\theta)\}, \quad \theta \geq 0 \quad (3.4)$$

für alle $t \geq 0$ besitzt, wobei

$$\Phi(\theta) = \Psi(i\theta) = a\theta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x})\Pi(dx). \quad (3.5)$$

Mit partieller Integration folgt

$$\frac{\Phi(\theta)}{\theta} = a + \int_{(0,\infty)} e^{-\theta x} \bar{\Pi}(x) dx, \quad \theta \neq 0$$

und aus (3.3)

$$\int_{(0,1)} \bar{\Pi}(x) dx < \infty,$$

wobei $\bar{\Pi}(x) := \Pi[(x, \infty)]$. Die Funktion $\bar{\Pi}(x)$, $x > 0$ heißt das *Tail-Integral* von X . Außerdem gilt (Bertoin [2], S. 16)

$$\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} \theta^{-1} \Psi(\theta) = -ia$$

und damit

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\theta)}{\theta} = a. \quad (3.6)$$

Die Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Laplace-Exponent* von X .

Ist X umgekehrt ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Exponenten Ψ der Form (3.2) für $a \geq 0$ und $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\Pi(dx) < \infty$, so ist X ein Subordinator mit dem Laplace-Exponenten Φ gegeben in (3.5).

Nach (3.5) und nach der Ungleichung von Hölder ist Φ strikt konkav.

Beispiele 3.3

1. Sei $\tau = \tau(k)$ eine von X unabhängige exponentialverteilte Stoppzeit mit einem Parameter $k > 0$. Der $(0, \infty)$ -wertige Prozess $X^k = (X_t^k)_{t \geq 0}$ mit

$$X_t^k := \begin{cases} X_t & \text{für } t \in [0, \tau) \\ \infty & \text{für } t \in [\tau, \infty) \end{cases}$$

heißt mit Rate k verabschiedeter Subordinator (killed Subordinator).
 Direkt aus der Definition folgt, dass $P(X_t^k < \infty) = P(t < \tau) = e^{-kt}$.
 Der Laplace-Exponent eines eliminierten Subordinators X^k ist $\Phi^k = \Phi + k$, wobei Φ der Laplace-Exponent des Subordinators X ist.

2. Der Poisson-Prozess, den wir in Kapitel 1 betrachtet haben, ist ein Subordinator.
 Der Laplace-Exponent eines Poisson-Prozesses mit der Intensität λ ist

$$\Phi(\theta) = \lambda(1 - e^{-\theta}), \quad \theta \geq 0.$$

3. Der Subordinator heißt α -stabil (mit $0 < \alpha < 1$), falls sein Laplace-Exponent die Form

$$\Phi(\theta) = \theta^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta x}) x^{-1-\alpha} dx, \quad \theta \geq 0 \quad (3.7)$$

hat. Der Fall $\alpha = 1$ entspricht dem deterministischen Prozess $X_t \equiv t$ und wird nicht weiter betrachtet. Dieser Subordinator ist eine α -stabile Bewegung (siehe Abschnitt 1.4). Die Nebenbedingung $\alpha \in (0, 1)$ wird für (3.6) benötigt.

4. Das nächste Beispiel ist ein Gamma-Subordinator $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit den Parametern $a, b > 0$. Der Laplace-Exponent dieses Prozesses hat die Form

$$\Phi(\theta) = a \log\left(1 + \frac{\theta}{b}\right) = \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta x}) a x^{-1} e^{-bx} dx, \quad \theta \geq 0. \quad (3.8)$$

Daraus folgt, dass das Lévy-Maß des Gamma-Subordinators $\Pi^{(a,b)}(dx) = a x^{-1} e^{-bx} dx$ und sein Driftkoeffizient gleich 0 ist. Mit $a = b = 1$ heißt X standardisierter Gamma-Subordinator.

5. Der zusammengesetzte Poisson-Prozess (1.9) ist nach (1.14) auch ein Subordinator mit dem Laplace-Exponenten

$$\Phi(\theta) = \lambda \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta x}) F(dx), \quad \theta \geq 0.$$

3.2 Verbindung zwischen zusammengesetzten Poisson-Prozessen und Subordinatoren

Sei $U : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion mit den Eigenschaften

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0, \quad (3.9)$$

$$2. \quad \int_{(0, \infty)} U(x) dx < \infty. \quad (3.10)$$

Mit partieller Integration kann die letzte Bedingung auch als

$$2'. \int_{(0,\infty)} x(-dU(x)) < \infty$$

umgeschrieben werden, denn aus 2. folgt insbesondere, dass $xU(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Die Funktion $U(x)$ definiert einen Prozess $S = (S_t)_{t \geq 0}$ im folgenden Sinne (die Idee stammt von Dufresne, Gerber und Shiu [7], S. 178).

Sei $S(x) = (S_t(x))_{t \geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit dem Poisson-Parameter $U(x)$ und mit der Verteilungsfunktion $F(y; x)$ für die Sprünge, wobei für $y \in (0, \infty)$

$$F(y; x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } y \leq x \\ \frac{U(x)-U(y)}{U(x)} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.

Den Prozess $S = (S_t)_{t \geq 0}$ definieren wir als den Grenzwert der zusammengesetzten Poisson-Prozesse $(S_t(x))_{t \geq 0}$ für $x \rightarrow 0$ folgendermaßen. Für jedes $t \geq 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_t(x) =: S_t \quad P\text{-f.s.} \quad (3.11)$$

Wir schreiben

$$U(0) := \lim_{x \rightarrow 0} U(x)$$

und müssen zwei Fälle unterscheiden: $U(0) < \infty$ und $U(0) = \infty$.

Wenn $U(0) < \infty$, ist S ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit der Poisson-Intensität $\lambda := U(0)$ und der Verteilungsfunktion

$$F(y) = 1 - \frac{U(y)}{U(0)}, \quad y \geq 0$$

für die Sprünge.

Betrachten wir nun einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit einer Poisson-Intensität $\lambda > 0$ und einer Verteilungsfunktion F auf $(0, \infty)$ für die Sprünge. Setzen wir

$$U(y) := \lambda(1 - F(y)), \quad y \geq 0.$$

Dann erfüllt die nicht negative fallende Funktion $U : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ die Eigenschaften (3.9), (3.10) und $\lambda = U(0)$. Somit kann jeder zusammengesetzte Poisson-Prozess mit einer Poisson-Intensität

$\lambda > 0$ und einer Verteilungsfunktion F auf $(0, \infty)$ für die Sprünge mittels einer fallenden Funktion $U : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ definiert werden.

Im zweiten Fall, wenn die erwartete Anzahl der Sprünge $U(0)$ unendlich ist, ist S kein zusammengesetzter Poisson-Prozess, weil mit der Wahrscheinlichkeit eins die Anzahl der Sprünge in jedem Zeitintervall $[0, t]$ unendlich ist. (Siehe Dufresne, Gerber und Shiu [7], S. 179)

Für den zusammengesetzten Poisson-Prozess $(S_t(x))_{t \geq 0}$ haben wir

$$E[S_t(x)] = tU(x) \int_{(0, \infty)} (1 - F(y; x)) dy = txU(x) + t \int_x^\infty U(y) dy \quad (3.12)$$

und die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} E[e^{-zS_t(x)}] &= \exp\{tU(x)(\int_x^\infty e^{-zy} dF(y; x) - 1)\} \\ &= \exp\{t(\int_x^\infty (e^{-zy} - 1)(-dU(y))\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wegen (3.10) und (3.11) können wir aus (3.12) und (3.13) für $x \rightarrow 0$

$$E[S_t] = t \int_0^\infty U(y) dy = t \int_0^\infty y(-dU(y)) \quad (3.14)$$

und

$$E[e^{-zS_t}] = \exp\{t(\int_x^\infty (e^{-zy} - 1)(-dU(y))\} \quad (3.15)$$

bekommen.

Aus (3.15) folgt, dass der Prozess S nach (3.5) ein Subordinator mit dem Driftkoeffizient $a = 0$ und mit dem Tail-Integral U ist.

Umgekehrt kann jeder Subordinator X nach Proposition 3.2 und nach der Formel (3.5) in der Form

$$X_t = at + S_t$$

umgeschrieben werden, wobei $a \geq 0$ und S der oben präsentierte Prozess ist.

Beispiel 3.4 (Gamma-Subordinator) Sei $U(x)$ differenzierbar und

$$u(x) := -U'(x) = \frac{a}{x} e^{-bx}, \quad x > 0,$$

wobei a und b positive Konstanten sind. Dann ist

$$U(x) = a \int_x^\infty \frac{e^{-by}}{y} dy, \quad U(0) = \infty.$$

Wie oben konstruieren wir den Prozess $S = (S_t)_{t \geq 0}$ mittels $U(x)$.

Nach (3.14) und (3.15) gelten

$$E[S_t] = t \int_0^\infty y u(y) dy = \frac{at}{b}$$

und

$$E[e^{-zS_t}] = \exp\left\{t \int_x^\infty (e^{-zy} - 1)u(y)dy\right\} = \exp\left\{at \int_0^\infty \frac{e^{-(z+b)y} - e^{-by}}{y} dy\right\}.$$

Daraus folgt, dass der Laplace-Exponent von S

$$\Phi(z) = -a \int_0^\infty \frac{e^{-(z+b)y} - e^{-by}}{y} dy = a \log\left(1 + \frac{z}{b}\right)$$

ist. Nach (3.8) ist S ein Gamma-Subordinator mit den Parametern a und b .

3.3 Subordinatoren mit negativer Drift

Sei $C = (C_t)_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler Subordinator ohne Drift und sei

$$X_t = C_t - at, \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

wobei $a > 0$.

Der Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess ohne negative Sprünge und seine Pfade besitzen beschränkte Variation. Nach Proposition 3.2 kann jeder Lévy-Prozess X mit beschränkter Variation und ohne negative Sprünge in der Form (3.16) dargestellt werden, wobei $a \leq 0$ genau dann ist, wenn X ein Subordinator ist.

Nehmen wir an, dass $a > 0$. Dann heißt X ein Subordinator mit negativer Drift.

Obwohl X_t sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, sind seine Exponentialmomente nach dem nächsten Lemma endlich.

Lemma 3.5 *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess ohne negative Sprünge. Dann gilt*

$$\text{für alle } \theta \geq 0 \quad E[\exp\{-\theta X_t\}] < \infty \quad \text{für jedes } t \geq 0. \quad (3.17)$$

Siehe Bertoin [2], S.188.

Somit kann die charakteristische Funktion $\theta \mapsto E[\exp\{i\theta X_t\}]$, $\theta \in \mathbb{R}$ auf die obere komplexe Halbebene erweitert werden.

Mit $\Phi_C(\theta)$, $\theta \geq 0$, bezeichnen wir den Laplace-Exponenten von C . Dann gilt nach (3.16), (3.17) und (3.4)

$$E[\exp\{-\theta X_t\}] = \exp\{t\Phi(\theta)\}, \quad t, \theta \geq 0,$$

wobei $\Phi(\theta) = c\theta - \Phi_C(\theta)$. Nach (3.5) gilt

$$\Phi(\theta) = a\theta - \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\theta x}) \Pi_C(dx),$$

wobei Π_C das Lévy-Maß von C ist.
 Ferner nehmen wir an, dass

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \Phi(\theta) = \infty,$$

Die Funktion $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach der Ungleichung von Hölder strikt konvex.
 Es gilt offensichtlich $\Phi(0) = 0$.

Wegen der Konvexität hat dann Φ eine strikt negative (eventuell unendliche) rechtsseitige Ableitung in 0, d.h.

$$c > \int_{(0, \infty)} x \Pi_C(dx).$$

Bemerkung 3.6 (Bertoin, [3], S.25)

$$P(X_t > 0 \text{ für ein } t \geq 0) = 1 \Leftrightarrow \int_{(0, \infty)} x \Pi_C(dx) \geq c.$$

Nach (3.17) hat die Funktion $\Phi(\theta)$ eine positive Nullstelle $k > 0$ (0 und k sind wegen der Konvexität die einzigen Nullstellen).

Die Abbildung $\Phi : [k, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist stetig und monoton wachsend. Sie ist bijektiv und wir bezeichnen durch $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [k, \infty)$ die inverse Abbildung, $\Phi \circ \varphi(\theta) = \theta$.

Die folgenden Propositionen gelten auch für allgemeine spektral positive Lévy-Prozesse.
 Siehe Bertoin [2] und [3].

Für den Lévy-Prozess X definieren wir seinen *Supremum-Prozess* $X^* = (X_t^*)_{t \geq 0}$,

$$X_t^* := \sup\{X_s, 0 \leq s \leq t\}.$$

Proposition 3.7 (Bertoin [3], S 25) Sei T eine von X unabhängige exponentialverteilte Stoppzeit mit Parameter $a > 0$. Dann gilt

$$E(\exp\{-\theta X_T^*\}) = \frac{a(\varphi(a) - \theta)}{\varphi(a)(a - \Phi(\theta))}. \quad (3.18)$$

Proposition 3.8 (Bertoin [3], S 23) Sei τ_x die erste Eintrittszeit von X in (x, ∞) . Dann fällt das Maß $tP(\tau_x \in dt)dx$ mit dem Maß $xP(-X_t \in dx)dt$ auf $[0, \infty) \times [0, \infty)$ zusammen.

3.4 Anwendungen in der Risikotheorie

3.4.1 Cramér-Lundberg-Modell mit einem Subordinator

Wir betrachten hier das klassische *Cramér-Lundberg-Modell* aus Beispiel 1.25 mit dem Subordinator $C = (C_t)_{t \geq 0}$ als Gesamtschadenprozess. Der Risikoprozess $R = (R_t)_{t \geq 0}$ hat also die Form

$$R_t := x + ct - C_t, \quad (3.19)$$

wobei $x \geq 0$ die ARR und $c > 0$ die Prämienrate ist.

Sei $\mu := E[C_1] < \infty$. Mit Π_C bezeichnen wir ferner das Lévy-Maß von C .

Wir definieren einen Hilfsprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$,

$$X_t := C_t - ct = -R_t + x.$$

X ist ein Subordinator mit negativer Drift.

Für ein $u \geq 0$ bezeichnen wir die erste Eintrittszeit von X in (u, ∞) als τ_u . Nach Beispiel 1.13 ist τ_u eine Stoppzeit. Für $u = x$ ist τ_x die Ruinzeit des Risikoprozesses R .

Die Ruinwahrscheinlichkeit kann man darstellen als

$$\psi(x) = P(\tau_x < \infty).$$

Wir nehmen an, dass

$$\mu < c \quad (\text{net profit-Bedingung})$$

ist, sonst ist $\psi(x) = 1$ nach Bemerkung 3.6.

Proposition 3.9 *Unter der net profit-Bedingung erfüllt die Ruinwahrscheinlichkeit ψ für den Risikoprozess (3.19) die folgende Gleichung:*

$$\psi(x) = 1 - (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n H^{n*}(x)$$

oder äquivalent

$$\psi(x) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \bar{H}^{n*}(x), \quad (3.20)$$

wobei

$$H(x) := \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{\Pi}_C(u) du, \quad \bar{H} := 1 - H \quad \text{und} \quad \rho := \frac{\mu}{c}.$$

Der Beweis kann zum Beispiel in Huzak, Perman, Sikić und Vondracek [15] gefunden werden. Die Beweisideen werden für den allgemeineren Fall des Cramér-Lundberg-Modells mit einem Subordinator und einer Störung in Abschnitt 3.6 gezeigt.

Beispiel 3.10 (Cramér-Lundberg-Prozess) Sei nun $C_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, $t \geq 0$, ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. Dann ist $R = (R_t)_{t \geq 0}$ mit $R_t = x + ct - C_t$ ein Cramér-Lundberg-Prozess.

In diesem Fall ist $\bar{\Pi}(u) = \lambda \bar{F}(u)$ nach (1.15),

$$\mu = \lambda \nu < c \quad (\text{net profit-Bedingung}) \quad \text{und}$$

$$H(x) = \frac{1}{\lambda \nu} \int_0^x \lambda \bar{F}(t) dt =: F_I(x),$$

wobei F die Verteilungsfunktion von Y_1 ist und $\nu = E[Y_1]$.

Die Gleichung (3.20) für den Cramér-Lundberg-Prozess heißt die Pollaczek-Hintschin-Formel und hat die Form

$$\psi(x) = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \bar{F}_I^{n*}(x). \quad (3.21)$$

(3.21) kann zum Beispiel in Asmussen [1], S. 61 gefunden werden.

Nehmen wir an, dass $F_I \in \mathcal{S}$. Aus Satz 2.18 mit $p_n = (1 - \rho)\rho^n$ folgt dann, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{\bar{F}_I(x)} = (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Zum Beispiel, gehört \bar{F}_I zu \mathcal{S} nach dem Satz von Karamata (Siehe den Anhang, Satz A.2) wenn \bar{F} regulär mit einem Index $\gamma < -1$ variiert.

Im Crámer-Lundberg Modell mit einem Subordinator kann auch ein Lundberg-Koeffizient definiert werden. Wir betrachten den Risikoprozess

$$R_t = x + ct - C_t. \quad (3.22)$$

Nach (3.15) kann der Laplace-Exponent des Subordinators C in der Form

$$\Phi(\theta) = \int_{0, \infty} (1 - e^{-\theta x})(-dU(x)) \quad \text{für } \theta \geq 0$$

dargestellt werden, wobei $U(x)$ die nicht negative monoton fallende Funktion auf $(0, \infty)$ mit den Eigenschaften (3.9) und (3.10) ist.

Ferner nehmen wir an, dass

$$c > E[C_1] \quad (\text{net profit-Bedingung}).$$

Die positive Lösung der Gleichung

$$\int_{(0,\infty)} (e^{ry} - 1)(-dU(y)) = cr, \quad (3.23)$$

falls sie existiert, heißt der Lundberg-Koeffizient des Risikoprozesses (3.22).

Das folgende Ergebnis kann in Dufresne, Gerber und Shiu [7] gefunden werden.

Proposition 3.11 *Nehmen wir an, dass für den Risikoprozess (3.22) ein Lundberg-Koeffizient r existiert und $\int_{(0,\infty)} ye^{ry}(-dU(y)) < \infty$. Dann gilt*

$$\psi(\lambda) \sim Ke^{-r\lambda} \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

wobei

$$K = \frac{\theta \int_{(0,\infty)} ydU(y)}{\int_{(0,\infty)} ye^{ry}dU(y) + c} \quad \text{mit } \theta = c - E[C_1]. \quad (3.25)$$

Beispiel 3.12 *Sei Subordinator C in (3.22) ein standardisierter Gamma-Subordinator und $c > E[C_1] = 1$. Dann ist der Lundberg-Koeffizient des Risikoprozesses (3.22) nach Beispiel 3.4 und nach (3.23) die positive Lösung der Gleichung*

$$\int_{(0,\infty)} (e^{rx} - 1) \frac{e^{-x}}{x} dx = cr. \quad (3.26)$$

Das Integral auf der linken Seite von (3.26) ist bekannt als das Frullani-Integral.

$$\int_{(0,\infty)} (e^{rx} - 1) \frac{e^{-x}}{x} dx = \log \frac{1}{1-r}.$$

Folglich ist die Gleichung (3.26) äquivalent zu

$$\log \frac{1}{1-r} = cr \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1-r} = e^{r(1+\theta)} \quad \text{mit } \theta = c - 1.$$

Die Konstante K aus (3.24) ist nach (3.25) in diesem Fall gleich

$$K = \frac{\theta(1-r)}{r - \theta(1-r)}.$$

3.4.2 Bivariater Risikoprozess

Wir betrachten ein Versicherungsunternehmen mit Zweigstellen zum Beispiel in Berlin und München. Ihre Nettogewinne werden mittels der Lévy-Prozesse R^1 und R^2 modelliert. R^1 und R^2 können unterschiedliche Strukturen besitzen, denn sie entsprechen den verschiedenen Zweigstellen. Nichtsdestotrotz sind diese Prozesse abhängig, weil einige

Risiken in beiden Zweigstellen gemeinsam sind.

Der gemeinsame Nettogewinn beider Zweigstellen ist gegeben durch den stochastischen Prozess $R = (R_t)_{t \geq 0}$, wobei für $t \geq 0$

$$R_t := R_t^1 + R_t^2.$$

In solcher Situation kann auch ein bivariater Risikoprozess $\tilde{R} = (R^1, R^2) = (R_t^1, R_t^2)_{t \geq 0}$ betrachtet werden.

Für den bivariaten Risikoprozess $\tilde{R} = (R^1, R^2)$ und die ARR $x := R_0 = R_0^1 + R_0^2 \geq 0$ definieren wir die Ruinwahrscheinlichkeit als

$$\psi(x) := P(R_t < 0 \text{ für ein } t \geq 0).$$

Lemma 3.13 *Die Summe der Komponenten eines bivariaten Lévy-Prozesses ist ein Lévy-Prozess.*

Beweis. Sei $X = (X^1, X^2)$ ein bivariater Lévy-Prozess und $X^+ := X^1 + X^2$.

X^+ ist f.s. rechtsstetig, denn X ist f.s. rechtsstetig.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für die gemeinsame Verteilung

$$P(X_{t_{i+1}}^+ - X_{t_i}^+ \leq a, X_{t_{j+1}}^+ - X_{t_j}^+ \leq b) = P(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \in B_a, X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \in B_b), \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n,$$

wobei $B_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq a\}$ und $B_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq b\}$.

Da X ein bivariater Lévy-Prozess ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(X_{t_{i+1}}^+ - X_{t_i}^+ \leq a, X_{t_{j+1}}^+ - X_{t_j}^+ \leq b) &= P(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \in B_a)P(X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \in B_b) \\ &= P(X_{t_{i+1}}^+ - X_{t_i}^+ \leq a)P(X_{t_{j+1}}^+ - X_{t_j}^+ \leq b). \end{aligned}$$

D.h. die Zufallsvariablen $X_{t_{i+1}}^+ - X_{t_i}^+$ und $X_{t_{j+1}}^+ - X_{t_j}^+$ sind für jedes $1 \leq i \neq j \leq n$ unabhängig.

Analog prüfen wir nach, dass für jedes $s > 0$ die Verteilung von $X_{(t+s)}^+ - X_t^+$ nicht von s abhängt.

□

Im allgemeinen haben wir im bivariaten Modell das folgende ungelöste mathematische Problem: Wenn R^1, R^2 bekannte Lévy-Maße und unbekannte Abhängigkeitsstruktur besitzen, ist das Lévy-Maß der Summe R unbekannt.

Beispiel 3.14 *Betrachten wir die Risikoprozesse R^1 und R^2 in der Form*

$$\begin{aligned} R_t^1 &:= x_1 + c_1 t - C_t^1, \\ R_t^2 &:= x_2 + c_2 t - C_t^2, \end{aligned}$$

wobei C^1, C^2 unabhängige Subordinatoren mit endlichen Erwartungswerten und regulär variierenden Tail-Integralen $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2$ ($\bar{\Pi}_i \in \mathcal{R}_{\gamma_i}, i = 1, 2$) sind. Dann ist der gemeinsame Nettogewinn

$$R_t := R_t^1 + R_t^2 = x + ct - C_t^+ \quad \text{mit} \quad c := c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad C^+ := C^1 + C^2.$$

Mit Π_+ bezeichnen wir weiter das Lévy-Maß von C^+ . Wegen der Unabhängigkeit von C^1, C^2 ist der Prozess C^+ ein Subordinator und $\bar{\Pi}_+ = \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2$.

Ferner nehmen wir an, dass $m = \max(\gamma_1, \gamma_2) < -1$. Dann gehört $\bar{\Pi}_+$ zu \mathcal{R}_m nach Korollar 2.6.2.

In (3.20) haben wir in diesem Fall

$$\bar{H}(x) := \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{\Pi}(u) du \quad \text{und} \quad \mu = E[C_1^1] + E[C_1^2].$$

Nach dem Satz von Karamata (Satz A.1) gilt $\bar{H} \in \mathcal{R}_{m+1}$ und folglich ist $\psi(x)$ subexponentiell nach Satz 2.18 mit $p_n = (1 - \rho)\rho^n$.

Im nächsten Abschnitt präsentieren wir ein neues bivariates Modell für das Nettoergebnis eines Versicherungsunternehmens.

3.5 S-Copulas

Eine mögliche Abhängigkeit zwischen Komponenten eines bivariaten Subordinators kann auch durch eine S-Copula modelliert werden. Der Buchstabe S stammt aus Subordinator.

Definition 3.15 Eine S-Copula ist eine Funktion $S(x, y)$ auf $\bar{\mathbb{R}}_+^2 = [0, \infty]^2$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $S(x, 0) = S(0, y) = 0$.
2. Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$ gilt

$$S(x_2, y_2) - S(x_2, y_1) - S(x_1, y_2) + S(x_1, y_1) \geq 0,$$

d.h. S ist eine maßdefinierende Funktion.

3. $S(\infty, y) = y$ und $S(x, \infty) = x, \quad \forall x, y \in [0, \infty]$.

Definition einer S-Copula ist eine Verallgemeinerung des Begriffs einer stochastischen Copula auf den Fall eines σ -endlichen Maßes (Siehe Definition A.3).

Mit Hilfe von S-Copulas soll das Verhalten eines bivariaten Subordinators in seinen Komponenten beschrieben werden.

Ein *Tail-Integral* eines bivariaten Subordinators mit dem Lévy-Maß Π ist

$$\bar{\Pi}(x, y) := \Pi([x, \infty) \times [y, \infty)).$$

Ein Tail-Integral besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\bar{\Pi}(\infty, x_2) = \bar{\Pi}(x_1, \infty) = 0$,
2. $\bar{\Pi}(0, x_2) = \bar{\Pi}_2(x_2)$, $\bar{\Pi}(x_1, 0) = \bar{\Pi}_1(x_1)$,

wobei $\bar{\Pi}_i(x) = \Pi_i([x, \infty))$ das Tail-Integral der Komponente i ist, $i = 1, 2$.

Satz 3.16 (Tankov) *Sei $\bar{\Pi}$ ein Tail-Integral eines bivariaten Subordinators mit den Lévy-Maßen Π_1, Π_2 der Komponenten. Dann existiert eine S-Copula S , so dass für jeden Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$*

$$\bar{\Pi}(x, y) = S(\bar{\Pi}_1(x), \bar{\Pi}_2(y)) \tag{3.27}$$

gilt. Wenn $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2$ stetig sind, ist diese S-Copula eindeutig.

Wenn umgekehrt S eine S-Copula und $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2$ Tail-Integrale von Subordinatoren sind, so ist die oben definierte Funktion $\bar{\Pi}$ das Tail-Integral eines bivariaten Subordinators und $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2$ sind Tail-Integrale seiner Komponenten.

Zum Beweis siehe Tankov [26], S.11.

Beispiel: Unabhängige Prozesse. Die Lévy-Hintschin-Formel (1.1) liefert, dass der Träger des Lévy-Maßes Π eines bivariaten Subordinators $Z = (X, Y)$ mit unabhängigen Komponenten in der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy = 0\}$$

enthalten ist und das Lévy-Maß von Z folgende Form hat

$$\Pi_Z(A) = \Pi_X I_{\{0 \in A_y\}} + \Pi_Y I_{\{0 \in A_x\}} \quad \forall A \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2),$$

wobei

$$A_x = \{x \in \mathbb{R}_+ : (x, 0) \in A\} \quad \text{und} \quad A_y = \{y \in \mathbb{R}_+ : (0, y) \in A\}.$$

Nach (3.27) ist damit die entsprechende S-Copula

$$S_{\perp}(x, y) = x I_{\{y=\infty\}} + y I_{\{x=\infty\}}. \tag{3.28}$$

Beispiel: Volle Abhängigkeit. Sei $X = (X^1, X^2)$ ein bivariater Subordinator mit $X_t^1 = X_t^2$ für jedes $t \geq 0$. In dieser Situation ist

$$\Pi(x, y) = \Pi_1(x)\delta_x(y), \quad \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folglich gilt

$$\bar{\Pi}(x, y) = \int_{\max(x, y)}^{\infty} \Pi_1(u)du = \min(\bar{\Pi}_1(x), \bar{\Pi}_2(y)),$$

und die zugehörige S-Copula ist

$$S_{||}(x, y) = \min(x, y). \quad (3.29)$$

S_{\perp} und $S_{||}$ erfüllen die Eigenschaften 1-3 der Definition einer S-Copula.

Die nächste Proposition zeigt, wie S-Copulas konstruiert werden können.

Proposition 3.17 (Tankov [26], Proposition 4.2) *Sei $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ eine streng monoton fallende Funktion, so dass $\phi(0) = \infty$, $\phi(\infty) = 0$, die inverse Funktion ϕ^{-1} Ableitungen jeder Ordnung hat und $(-1)^k \frac{d^k \phi^{-1}(t)}{dt^k} > 0$.*

Dann ist

$$S(x, y) = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)) \quad (3.30)$$

eine S-Copula.

Lemma 3.18 (Tankov [26], Proposition A.1.5) *Wenn eine Funktion $H(x, y) : [0, \infty] \times [0, \infty] \mapsto [0, \infty]$ die Eigenschaften: $H(0, y) = H(x, 0) = 0$ und für alle x_1, x_2, y_1, y_2 mit $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$*

$$H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \geq 0. \quad (3.31)$$

erfüllt, und wenn die Funktion $f : [0, \infty] \mapsto [0, \infty]$ positive Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, gilt

$$f(H(x_2, y_2)) - f(H(x_2, y_1)) - f(H(x_1, y_2)) + f(H(x_1, y_1)) \geq 0.$$

Beweis von Proposition 3.17. Wir überprüfen die erste und die dritte Eigenschaft der Definition einer S-Copula

$$\begin{aligned} S(0, y) &= S(x, 0) = \phi^{-1}(\infty) = 0, \\ S(\infty, y) &= \phi^{-1}(\phi(y)) = y, \\ S(x, \infty) &= \phi^{-1}(\phi(x)) = x. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt die zweite Eigenschaft, die mit (3.31) zusammenfällt.

Betrachten wir die Funktion $S^{**}(x, y) = x + y$, die (3.31) erfüllt.

Nach der Variablensubstitution $x \rightarrow -\phi(x)$ und $y \rightarrow -\phi(y)$ erhalten wir aus S^{**} die neue Funktion $S^*(x, y) = -\phi(x) - \phi(y)$, die wieder (3.31) erfüllt, da $-\phi(x)$ nach der Voraussetzung steigt.

$S(x, y) = \phi^{-1}(-S^*(x, y))$. Weil die Abbildung $\phi^{-1}(-x)$ positive Ableitungen jeder Ordnung besitzt, folgt die Behauptung von Proposition 3.17 aus Lemma 3.18.

□

Clayton-Familie von S-Copulas Nehmen wir nun $\phi(t) = t^{-\theta}$ für $\theta > 0$, dann bekommen wir nach Proposition 3.17 die folgende Familie von S-Copulas:

$$S_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (3.32)$$

Die Familie S_θ für $\theta > 0$ heißt Clayton-Familie von S-Copulas.

Ferner können wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} S_\theta(u, v) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{uv}{(u^\theta + v^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} \\ &= \begin{cases} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{u}{\left(1 + \left(\frac{u}{v}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}} = u & \text{falls } u \leq v \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{v}{\left(1 + \left(\frac{v}{u}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}} = v & \text{falls } v \leq u \end{cases} \end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} S_\theta(u, v) = S_{||}(u, v).$$

In Abbildungen 3.1, 3.3 sind Clayton-S-Copulas für zwei verschiedene Werte von θ gezeigt.

Beispiel 3.19 Seien C^1, C^2 α -stabile Subordinatoren mit den Lévy-Maßen Π_1, Π_2 , $C = (C^1, C^2)$ und sei die Abhängigkeit zwischen C^1, C^2 durch die Clayton-S-Copula S_θ gegeben.

Nach (1.5) gilt

$$\Pi_i(du) = qu^{-(\alpha+1)}du, \quad q = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad i = 1, 2.$$

Daraus folgt

$$\bar{\Pi}_i(u) = \tilde{q}u^{-\alpha} \quad \text{mit} \quad \tilde{q} = \frac{q}{\alpha}, \quad i = 1, 2 \quad (3.33)$$

und nach Satz 3.16 gilt

$$\bar{\Pi}_\theta(u, v) = S_\theta(\bar{\Pi}_1(u), \bar{\Pi}_2(v)) = \tilde{q}(u^{\alpha\theta} + v^{\alpha\theta})^{-\frac{1}{\theta}},$$

wobei Π_θ das Lévy-Maß von C ist.

Folglich hat C eine Lévy-Dichte

$$\Pi_\theta(dx, dy) = q\alpha(\theta + 1)(x^{\alpha\theta} + y^{\alpha\theta})^{-\frac{1}{\theta}-2} x^{\alpha\theta-1} y^{\alpha\theta-1} dx dy. \quad (3.34)$$

Falls $\alpha\theta < 1$ ist, wird die Lévy-Dichte in (3.34) auf die Koordinatenachsen konzentriert. Das zeigt, dass für kleine θ die Komponenten fast unabhängig sind.

Die Abbildungen 3.2, 3.4 stellen zwei Lévy-Dichten (3.34) für $\alpha = 0.5$ und für zwei verschiedene Werte von θ dar (ohne Beachtung der Konstante q).

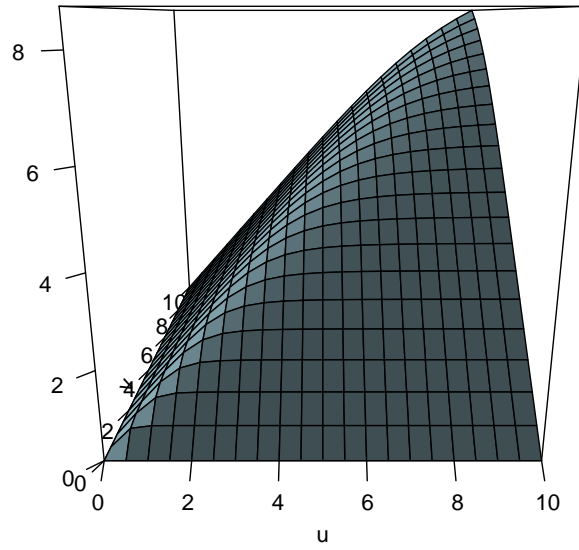


Abbildung 3.1: Clayton-S-Copula $S_\theta(u, v)$ aus (3.32) mit $\theta = 5$ für $0 < u, v \leq 10$

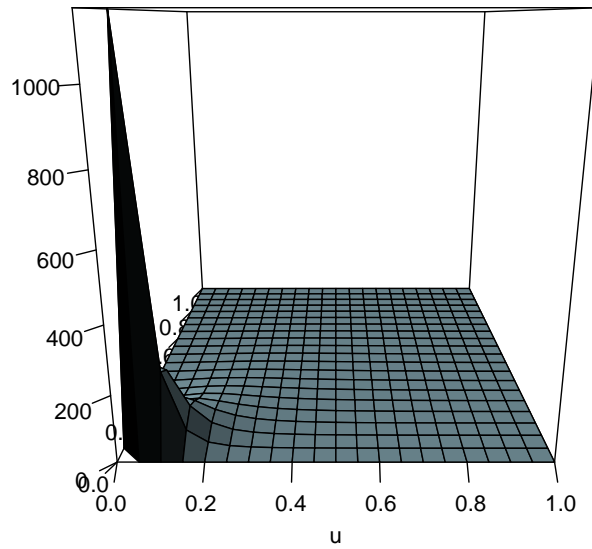


Abbildung 3.2: Lévy-Dichte (3.34) mit $\theta = 5$, $\alpha = 0.5$ auf $[0, 1]^2$

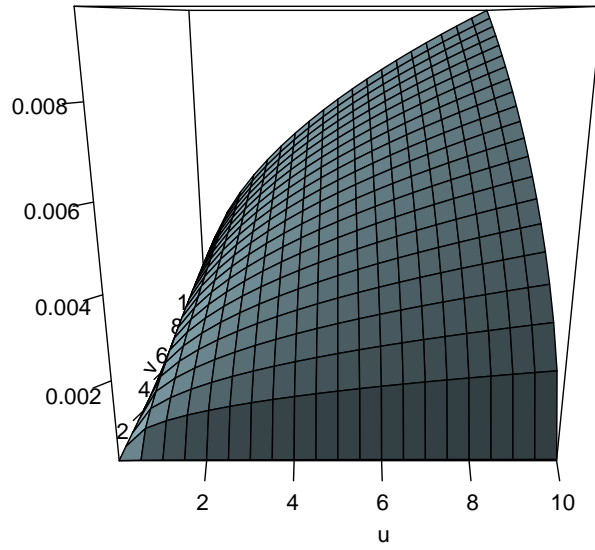


Abbildung 3.3: Clayton-S-Copula $S_\theta(u, v)$ aus (3.32) mit $\theta = 0.1$ für $0 < u, v \leq 10$

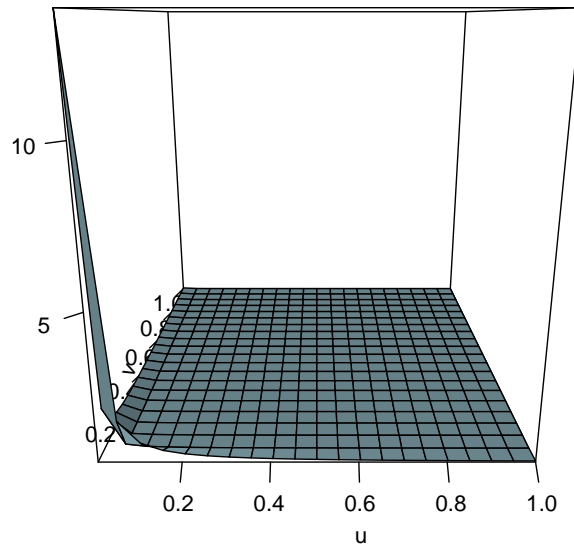


Abbildung 3.4: Lévy-Dichte (3.34) mit $\theta = 0.1$, $\alpha = 0.5$ auf $[0.01, 1]^2$

Mittels einer S-Copula kann auch das Lévy-Maß einer Summe von Subordinatoren dargestellt werden. Das kann zum Beispiel für die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit benutzt werden.

Proposition 3.20 *Sei $C = (C^1, C^2)$ ein bivariater Subordinator und $C^+ := C^1 + C^2$. Falls die Tail-Integrale $\bar{\Pi}_i$ ($i = 1, 2$) absolut stetig sind und die Abhängigkeit zwischen C^1, C^2 durch eine bis zur zweiten Ordnung differenzierbare S-Copula S gegeben ist, gilt für das Lévy-Maß von C^+*

$$\bar{\Pi}_+(z) = \int_{(0,\infty)} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=\bar{\Pi}_1(x), v=\bar{\Pi}_2((z-x)\vee 0)} \Pi_1(dx) \quad \text{für jedes } z > 0. \quad (3.35)$$

Beweis. Mit Π bezeichnen wir das Lévy-Maß von C . Aus der Lévy-Hintschin-Formel (1.1) folgt für jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Pi_+(B) = \Pi(\{(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}_+^2 : x + y \in B\}).$$

Nach Satz 3.16 ist

$$\bar{\Pi}(x, y) = S(\bar{\Pi}_1(x), \bar{\Pi}_2(y)) \quad \text{für jedes } (x, y) \in \bar{\mathbb{R}}_+^2,$$

wobei

$$\bar{\Pi}(x, y) = \Pi([x, \infty) \times [y, \infty))$$

und $\bar{\Pi}_i(x) = \Pi_i([x, \infty))$, $i = 1, 2$.

Da nach der Voraussetzung der Proposition S eine bis zur zweiten Ordnung differenzierbare positive Funktion auf $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ ist und die Tail-Integrale $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2$ absolut stetig sind, existiert die Lévy-Dichte $\Pi(dx, dy)$ und gilt

$$\Pi(dx, dy) = \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{u=\bar{\Pi}_1(x), v=\bar{\Pi}_2(y)} \Pi_1(dx) \Pi_2(dy).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_+(z) &= \Pi_+([z, \infty)) = \Pi(\{(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}_+^2 : x + y \leq z\}) \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,\infty)} I_{\{x+y \geq z\}} \Pi(dx, dy) = \int_{(0,\infty)} \int_{((z-x)\vee 0, \infty)} \Pi(dx, dy) \\ &= \int_{(0,\infty)} \int_{((z-x)\vee 0, \infty)} \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v} \Big|_{u=\bar{\Pi}_1(x), v=\bar{\Pi}_2(y)} \Pi_1(dx) \Pi_2(dy) \\ &= \int_{(0,\infty)} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=\bar{\Pi}_1(x), v=\bar{\Pi}_2((z-x)\vee 0)} \Pi_1(dx). \end{aligned}$$

□

Die zwei folgenden Beispiele zeigen, wie mittels einer Clayton-S-Copula das Lévy-Maß der Summe von zwei abhängigen Subordinatoren abgeschätzt oder sogar berechnet werden kann.

Beispiel 3.21 Seien C, C^1 und C^2 die Subordinatoren aus Beispiel 3.19. Nach Lemma 3.13 ist dann C^+ ein Lévy-Prozess. Aus (3.35) folgt

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_+(z) &= \alpha \tilde{q} \int_{(0,z)} x^{\alpha\theta-1} (x^{\alpha\theta} + (z-x)^{\alpha\theta})^{-\frac{1}{\theta}-1} dx + \alpha \tilde{q} \int_z^\infty x^{-(\alpha+1)} dx \\ &= \frac{q}{\alpha} z^{-\alpha} + q \int_{(0,z)} x^{\alpha\theta-1} (x^{\alpha\theta} + (z-x)^{\alpha\theta})^{-\frac{1}{\theta}-1} dx.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Ferner gilt nach (3.36) für jedes positive k

$$\bar{\Pi}_+(kz) = k^{-\alpha} \bar{\Pi}_+(z).$$

Damit ist C^+ für jedes $\theta > 0$ α -stabil nach Proposition 1.9.

Ist beispielsweise $\theta = \frac{1}{\alpha}$, dann erhalten wir aus der Gleichung (3.36)

$$\bar{\Pi}_+(z) = q \frac{\alpha+1}{\alpha} z^{-\alpha}.$$

Beispiel 3.22 Seien C^1, C^2 zusammengesetzte Poisson-Prozesse mit Verteilungsfunktionen F_1, F_2 für die Sprünge und Poisson-Intensitäten λ_1, λ_2 . Die Abhängigkeit zwischen C^1, C^2 sei wieder durch die Clayton-S-Copula S_θ gegeben. Es gelten nach (1.15)

$$\bar{\Pi}_i(x) = \lambda_i \bar{F}_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Ferner nehmen wir an, dass F_i absolut stetig mit den Dichten f_i sind und $F_i(x) < 1$ für jedes $x > 0$.

Wie im letzten Beispiel gilt nach (3.35) für das Lévy-Maß Π_+ des Prozesses $C^+ = C^1 + C^2$

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_+(z) &= \int_{(0,z)} \lambda_1^{-(\theta+1)} \bar{F}_1^{-(\theta+1)}(x) (\lambda_1^{-\theta} \bar{F}_1^{-\theta}(x) + \lambda_2^{-\theta} \bar{F}_2^{-\theta}(z-x))^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \lambda_1 F_1(dx) \\ &+ \int_z^\infty \lambda_1^{-(\theta+1)} \bar{F}_1^{-(\theta+1)}(x) (\lambda_1^{-\theta} \bar{F}_1^{-\theta}(x) + \lambda_2^{-\theta})^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \lambda_1 F_1(dx) \\ &= \lambda_1 \lambda_2^{\theta+1} \int_{(0,z)} \bar{F}_2^{\theta+1}(z-x) (\lambda_1^\theta \bar{F}_1^\theta(x) + \lambda_2^\theta \bar{F}_2^\theta(z-x))^{-\frac{\theta+1}{\theta}} F_1(dx) \\ &+ \lambda_1 \lambda_2^{\theta+1} \int_z^\infty (\lambda_1^\theta \bar{F}_1^\theta(x) + \lambda_2^\theta)^{-\frac{\theta+1}{\theta}} F_1(dx), \quad z > 0.\end{aligned}$$

Ferner bekommen wir aus der letzten Gleichung, dass

$$\bar{\Pi}_+(0) = \lambda_1 \lambda_2^{\theta+1} \int_0^\infty \frac{1}{(\lambda_1^\theta \bar{F}_1^\theta(x) + \lambda_2^\theta)^{\frac{\theta+1}{\theta}}} F_1(dx) < \lambda_1 \int_0^\infty F_1(dx) = \lambda_1 < \infty.$$

Somit ist das Lévy-Maß von C^+ endlich, folglich ist der charakteristische Exponent Ψ_{C^+} von C^+ beschränkt, denn

$$\Psi_{C^+}(\theta) = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\theta x}) \Pi_+(dx), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.23 (Bertoin [2], S. 17) *Der charakteristische Exponent eines Lévy-Prozesses ist genau dann beschränkt, wenn er ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist.*

Nach der letzten Proposition ist C^+ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. Das ist aber nicht weiter verwunderlich, denn C^1, C^2 und somit C^+ haben in jedem beschränkten Zeitintervall nur endlich viele Sprünge.

Ferner gilt

$$\bar{\Pi}_+(z) \searrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt, falls $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und $F = F_1 = F_2$ ist,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_+(z) &= \lambda \int_0^z \bar{F}^{\theta+1}(z-x)(\bar{F}^\theta(x) + \bar{F}^\theta(z-x))^{-\frac{\theta+1}{\theta}} F(dx) + \lambda \int_z^\infty (\bar{F}^\theta(x) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}} F(dx) \\ &=: \lambda(I_1(z) + I_2(z)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass $F = F_1 = F_2$ und $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$I_2(z) = \int_z^\infty (\bar{F}^\theta(x) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \bar{F}(dx) = (\bar{F}^\theta(\xi(z)) + 1)^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \bar{F}(z),$$

wobei $\xi(z) \in [z, \infty)$.

Da $\bar{F}^\theta(\xi(z)) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$, folgt aus der letzten Gleichung

$$I_2(z) \sim \bar{F}(z), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.38)$$

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Pareto-Verteilung.

Beispiel 3.24 (Pareto-Verteilung) *Sei $\bar{F}(x) = (\frac{a}{a+x})^b$ der Tail der Pareto-Verteilung mit Parametern $a > 0$ und $b > 1$. Dann gilt nach (3.37) für jedes $\theta > 0$*

$$I_1(z) = \int_0^z \frac{\bar{F}^{\theta+1}(z-x)F(dx)}{(\bar{F}^\theta(z-x) + \bar{F}^\theta(x))^{\frac{\theta+1}{\theta}}} = \int_0^z \frac{\left(\frac{a}{a+z-x}\right)^{b(\theta+1)} \frac{ba^b}{(a+x)^{b+1}} dx}{\left(\left(\frac{a}{a+z-x}\right)^{b\theta} + \left(\frac{a}{a+x}\right)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}}.$$

Der Einfachheit halber können wir annehmen, dass $a = 1$. Ferner gilt

$$I_1(z) = b \int_0^z \frac{(1+x)^{b\theta-1} dx}{\left((1+z-x)^{b\theta} + (1+x)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}}. \quad (3.39)$$

Wir weisen nach, dass die Funktion $I_1(z)$ regulär mit dem Index $-b$ variiert.

Nach (3.39) können wir $I_1(z)$ in folgender Form darstellen

$$I_1(z) = b \int_1^z \frac{y^{b\theta-1} dy}{\left((2+z-y)^{b\theta} + y^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}}, \quad z \geq 1.$$

Definieren wir eine neue Funktion auf $[2, \infty)$ durch

$$L(w) := b \int_1^{w-2} \frac{y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}},$$

d.h. $L(w) := I_1(w-2)$.

Für jedes $k \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} L(kw) &= b \int_1^{kw-2} \frac{y^{b\theta-1} dy}{((kw-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \\ &= \frac{b}{k^b} \left(\int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} + \int_1^{w-2} \frac{y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{w-2}^{w-\frac{2}{k}} \frac{y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \right) \\ &=: L_1(w) + L_2(w) + L_3(w). \end{aligned}$$

Wir haben weiter

$$L_2(w) = \frac{1}{k^b} L(w).$$

Wir weisen nach, dass $L_1(w) = o(1)L_2(w)$ und $L_3(w) = o(1)L_2(w)$ für $w \rightarrow \infty$. Dann bekommen wir, dass $L(w)$ regulär mit dem Index $-b$ variiert.

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$L_1(w) = \frac{b}{k^b} \frac{\xi^{b\theta-1} (1 - \frac{1}{k})}{((w-\xi)^{b\theta} + \xi^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \sim \frac{b\xi^{b\theta} (1 - \frac{1}{k})}{w^{b(\theta+1)}}, \quad w \rightarrow \infty, \quad \text{für ein } \xi \in [\frac{1}{k}, 1]$$

und

$$\begin{aligned} L_3(w) &= \frac{b}{k^b} \int_{w-2}^{w-\frac{2}{k}} \frac{y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \\ &= \frac{b(2 - \frac{2}{k})\xi(w)^{b\theta-1}}{((w-\xi(w))^{b\theta} + \xi(w)^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \quad \text{für ein } \xi(w) \in [w-2, w-\frac{2}{k}] \\ &\sim \frac{b(2 - \frac{2}{k})}{k^b w^{b+1}} \quad \text{für } w \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$w^{b(\theta+1)} L_2(w) = \frac{b}{k^b} \int_1^{w-2} \frac{w^{b(\theta+1)} y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \geq \frac{b}{k^b} \int_1^{w-2} y^{b\theta-1} dy \rightarrow \infty, \quad w \rightarrow \infty.$$

Folglich konvergiert $\frac{L_1(w)}{L_2(w)}$ gegen 0 für $w \rightarrow \infty$, d.h. $L_1(w) = o(1)L_2(w)$. Ferner gilt

$$w^{b+1} L_2(w) = \frac{b}{k^b} \int_1^{w-2} \frac{w^{b+1} y^{b\theta-1} dy}{((w-y)^{b\theta} + y^{b\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \geq \frac{b}{k^b} \int_1^{w-2} \frac{w^{b+1} y^{b\theta-1} dy}{w^{b(\theta+1)}} = \frac{(w-2)^{b\theta} - 1}{\theta k^b w^{b\theta-1}} \rightarrow \infty$$

für $w \rightarrow \infty$.

Daraus folgt, dass $L_3(w) = o(1)L_2(w)$ für $w \rightarrow \infty$.

Also erhalten wir

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{L(kw)}{L(w)} = \frac{1}{k^b},$$

d.h. $L \in \mathcal{R}_{-b}$.

Nach Lemma 2.11 ist $L(z) \sim I_1(z)$, $z \rightarrow \infty$ und daraus folgt, dass $I_1 \in \mathcal{R}_{-b}$ und mit (3.38) $\bar{\Pi}_+ \in \mathcal{R}_{-b}$. Damit gehört $\bar{\Pi}_+$ zu \mathcal{S} .

Ferner können wir $\bar{\Pi}_+$ mittels \bar{F} abschätzen:

$$\begin{aligned} \frac{I_1(z)}{\bar{F}(z)} &= b \int_0^z \frac{(1+z)^b(1+x)^{b\theta-1} dx}{\left((1+z-x)^{b\theta} + (1+x)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \\ &= b(1+z)^b \left(\int_0^{\frac{z}{2}} \frac{(1+x)^{b\theta-1} dx}{\left((1+z-x)^{b\theta} + (1+x)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}} + \int_{\frac{z}{2}}^z \frac{(1+x)^{b\theta-1} dx}{\left((1+z-x)^{b\theta} + (1+x)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \right) \\ &\leq b(1+z)^b \left(\int_0^{\frac{z}{2}} \frac{(1+\frac{z}{2})^{b\theta-1} dx}{\left(1+\frac{z}{2}\right)^{b(\theta+1)}} + \int_{\frac{z}{2}}^z \frac{(1+z)^{b\theta-1} dx}{\left(1+\frac{z}{2}\right)^{b(\theta+1)}} \right) \\ &= b(1+z)^b \left(\frac{(1+\frac{z}{2})^{b\theta-1}}{\left(1+\frac{z}{2}\right)^{b(\theta+1)}} + \frac{(1+z)^{b\theta-1}}{\left(1+\frac{z}{2}\right)^{b(\theta+1)}} \right) \frac{z}{2} \rightarrow C_1 \in (0, \infty), \quad \text{für } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Somit fällt $I_1(z)$ gegen Null nicht langsamer als $\bar{F}(z)$ für $z \rightarrow \infty$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{I_1(z)}{\bar{F}(z)} &= b \int_0^z \frac{(1+z)^b(1+x)^{b\theta-1} dx}{\left((1+z-x)^{b\theta} + (1+x)^{b\theta}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \geq b(1+z)^b \int_0^z \frac{(1+x)^{b\theta-1} dx}{(2+z)^{b(\theta+1)}} \\ &= \frac{b(1+z)^b((1+z)^{b\theta} - 1)}{b\theta(2+z)^{b(\theta+1)}} \rightarrow C_2 \in (0, \infty) \quad \text{für } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

d.h. $I_1(z)$ fällt gegen Null nicht schneller als $\bar{F}(z)$ für $z \rightarrow \infty$.

Für einige Werte von θ können wir Konstanten explizit ausrechnen, so dass

$$\bar{\Pi}_+ \sim K\bar{F}(z), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Sei zum Beispiel $\theta = \frac{1}{b}$. Dann gilt

$$I_1(z) = \int_0^z \frac{1}{(1+z-x)^{b+1} \left(\frac{1}{1+z-x} + \frac{1}{1+x}\right)^{b+1}} \frac{b}{(1+x)^{b+1}} dx = \frac{b}{(2+z)^{b+1}} z \sim \frac{b}{z^b}, \quad z \rightarrow \infty,$$

und nach (3.38) bekommen wir

$$\bar{\Pi}_+(z) \sim \lambda_1 \frac{1}{z^b} \quad \text{für } z \rightarrow \infty \quad \text{mit } \lambda_1 = (b+1)\lambda.$$

Für $\theta = 1$ und $b = 2$ haben wir

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^z \frac{1}{(1+z-x)^4 \left(\frac{1^2}{(1+z-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right)^2} \frac{2}{(1+x)^3} dx \\ &= 2 \int_0^z \frac{1+x}{\left((1+x)^2 + (1+z-x)^2 \right)^2} = 2 \int_1^{1+z} \frac{y}{(y^2 + (2+z-y)^2)^2} dy \\ &= 2 \int_1^{1+z} \frac{y}{(2y^2 + (2+z)^2 - 2y(2+z))^2} dy = 2 \int_1^{1+z} \frac{y}{4(y^2 - 2y(1+\frac{z}{2}) + 2(1+\frac{z}{2})^2)^2} dy, \end{aligned}$$

und mit $k := 1 + \frac{z}{2}$ wird

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{1}{2} \int_1^{1+z} \frac{y}{((y-k)^2 + k^2)^2} dy \frac{1}{2} \left(\int_1^{1+z} \frac{y-k}{((y-k)^2 + k^2)^2} dy + k \int_1^{1+z} \frac{dy}{((y-k)^2 + k^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \frac{t}{(t^2 + k^2)^2} dt + k \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \frac{1}{(t^2 + k^2)^2} dt \right) = \frac{k}{2} \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \frac{1}{(t^2 + k^2)^2} dt \\ &= \frac{k}{2} \left(\frac{1}{k^2} \frac{z}{2(\frac{z^2}{4} + k^2)} + \frac{1}{k^3} \arctan \frac{z}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{2z}{z^2 + 4k^2} + \frac{1}{k^2} \arctan \frac{z}{2k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2+z}{2} z^2 + (2+z)^2} \frac{2z}{(2+z)^2} + \frac{4}{(2+z)^2} \arctan \frac{z}{2+z} \right) \\ &\sim \left(\frac{2z}{z^3} + \frac{2}{z^2} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Also gilt mit (3.38)

$$\bar{\Pi}_+(z) \sim \lambda_2 \frac{1}{z^2} \quad \text{für } z \rightarrow \infty \quad \text{mit } \lambda_2 = a^2 \lambda \left(2 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Eine intuitive Frage ist nun, ob für jedes mit einem Index regulär variierende \bar{F} auch $\bar{\Pi}_+$ regulär variierend ist.

Falls C^1 und C^2 unabhängig sind, gilt $\bar{\Pi}_+(z) = 2\lambda\bar{F}(z)$. Folglich erfüllt $\bar{\Pi}_+$ auch die Eigenschaft (3.40) mit $K = 2\lambda$.

Falls $C^1 = C^2$ und $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für ein $\alpha > 0$ ist, gilt $\bar{\Pi}_+(z) \sim \frac{\lambda}{2\alpha} \bar{F}(z)$, denn $\bar{\Pi}_+(z) = \lambda\bar{F}(\frac{z}{2})$. Somit ist (3.40) im Fall der vollen Abhängigkeit mit $K = \frac{\lambda}{2\alpha}$ erfüllt.

Das nächste Beispiel zeigt, dass zumindest nicht alle Verteilungen mit subexponentiellen Tails die Eigenschaft (3.40) erfüllen. Ob sie in der Klasse der regulär variierenden Tails erfüllt ist, bleibt vorerst offen.

Beispiel 3.25 (Weibull-Verteilung) Sei $\bar{F}(x) = \exp\{-\sqrt{x}\}$, $x \geq 0$ und $\theta = 1$.
Wie oben betrachten wir das Integral I_1 .

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^z \left(\frac{\exp\{-\sqrt{z-x}\}}{\exp\{-\sqrt{z-x}\} + \exp\{-\sqrt{x}\}} \right)^2 \frac{\exp\{-\sqrt{x}\}}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^z \frac{\exp\{-\sqrt{x}\}}{(\exp\{\sqrt{z-x} - \sqrt{x}\} + 1)^2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ &= \int_0^{\sqrt{z}} \frac{\exp\{-x\}}{(\exp\{\sqrt{z-x^2} - x\} + 1)^2} dx = \int_0^{\sqrt{z/2}} \frac{\exp\{-x\}}{(\exp\{\sqrt{z-x^2} - x\} + 1)^2} dx \\ &+ \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z}} \frac{\exp\{-x\}}{(\exp\{\sqrt{z-x^2} - x\} + 1)^2} dx =: A(z) + B(z). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\frac{A(z)}{\bar{F}(z)} = \int_0^{\sqrt{z/2}} \frac{\exp\{\sqrt{z-x}\}}{(\exp\{\sqrt{z-x^2} - x\} + 1)^2} dx \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty$$

und

$$\begin{aligned} \frac{B(z)}{\bar{F}(z)} &= \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z}} \frac{\exp\{\sqrt{z-x}\}}{(\exp\{-(x - \sqrt{z-x^2})\} + 1)^2} dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z}} \exp\{\sqrt{z-x}\} dx \geq \frac{1}{8} \sqrt{z} \rightarrow \infty \quad \text{für } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\frac{I_1(z)}{\bar{F}(z)} \rightarrow \infty \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Wir haben gezeigt, dass $I_1(z)$ und somit $\bar{\Pi}_+(z)$ langsamer gegen Null fallen als $\bar{F}(z)$.

Wir betrachten noch in diesem Abschnitt ein einfaches Beispiel, das eine *risikothoretische Anwendung der S-Copulas* zeigt.

Beispiel 3.26 (Exponential-Verteilung) Sei $\bar{F}(x) = e^{-ax}$. Dann können wir das Integral $I_1(z)$ für jedes z explizit ausrechnen.

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^z \left(\frac{\bar{F}^\theta(z-x)}{\bar{F}^\theta(z-x) + \bar{F}^\theta(x)} \right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} F(dx) = \int_0^z \left(\frac{e^{-a\theta(z-x)}}{e^{-a\theta(z-x)} + e^{-\theta ax}} \right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} a e^{-ax} dx \\ &= \int_0^z \frac{e^{-a(\theta+1)z} e^{a(\theta+1)x}}{(e^{-a\theta z} e^{a\theta x} + e^{-a\theta x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} a e^{-ax} dx, \end{aligned}$$

und mit $k := e^{a\theta z}$ wird

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^z \frac{e^{a(\theta+1)x}}{(e^{a\theta x} + ke^{-a\theta x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} ae^{-ax} dx = \int_0^z \frac{1}{(1 + ke^{-2a\theta x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} ae^{-ax} dx \\ &= \int_{e^{-az}}^1 \frac{dy}{(1 + ky^{2\theta})^{\frac{\theta+1}{\theta}}}. \end{aligned}$$

Sei $\theta = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$I_1(z) = \int_{e^{-az}}^1 \frac{dy}{(1 + ky)^3} = -\frac{1}{2k(1 + ky)^2} \Big|_{e^{-az}}^1 \sim \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}az} \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

und

$$I_2(z) \sim e^{-az} \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Also erhalten wir

$$\bar{\Pi}_+(z) \sim \lambda_1 e^{-bz} \quad \text{mit } \lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda \quad \text{und } b = \frac{1}{2}a.$$

Für $\theta = 1$ gilt

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_{e^{-az}}^1 \frac{dy}{(1 + ky^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{e^{-\frac{1}{2}az}}^{e^{\frac{1}{2}az}} \frac{dy}{(1 + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}az}}{e^{az} + 1} - \frac{e^{-\frac{1}{2}az}}{e^{-az} + 1} + \arctan e^{\frac{1}{2}az} - \arctan e^{-\frac{1}{2}az} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{az} + 1} - \frac{e^{-az}}{e^{-az} + 1} + e^{-\frac{1}{2}az} \left(\arctan e^{\frac{1}{2}az} - \arctan e^{-\frac{1}{2}az} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}az} \left(\arctan e^{\frac{1}{2}az} - \arctan e^{-\frac{1}{2}az} \right) \sim \frac{\pi}{4} e^{-\frac{1}{2}az} \quad \text{für } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und

$$I_2(z) = a \int_z^\infty (1 + e^{-ax})^{-2} e^{-ax} dx = \frac{e^{-az}}{1 + e^{-az}} \sim e^{-az} \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Somit bekommen wir für $\theta = 1$

$$\bar{\Pi}_+(z) \sim \lambda_2 e^{-bz} \quad \text{mit } \lambda_2 = \frac{\pi}{4}\lambda \quad \text{und } b = \frac{1}{2}a.$$

Sei $\bar{G}(z) := 2(I_1(z) + I_2(z))$. Dann ist C^+ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit der Verteilung $G(z)$ auf $(0, \infty)$ und mit dem Poisson-Parameter $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$. Ferner gilt

$$\bar{G}(z) \leq 2(e^{-\frac{1}{2}az} + e^{-az}). \quad (3.41)$$

Damit ist

$$M_G(\alpha) = \int_{(0, \infty)} e^{\alpha u} G(du) < \infty \quad \text{für } \alpha < \frac{a}{2}. \quad (3.42)$$

Nun betrachten wir das Cramér-Lundberg-Modell mit C^+ als Gesamtschadenprozess. Ferner nehmen wir an, dass C^+ (für $\theta = 1$) die net profit-Bedingung erfüllt, d.h.

$$c > \tilde{\lambda}\nu \quad \text{bzw.} \quad a > \frac{\lambda}{c},$$

wobei

$$\nu = \int_0^\infty \bar{G}(x) dx.$$

Ferner sei

$$y(s) := \int_0^\infty e^{sx} \bar{G}(x) dx, \quad s \in [0, \frac{a}{2}).$$

$y(s)$ ist eine konvexe stetige Funktion auf $[0, \frac{a}{2})$,

$$y(0) = \nu < \frac{c}{\tilde{\lambda}}, \quad \lim_{s \rightarrow \frac{a}{2}} = +\infty.$$

Damit existiert eine positive Lösung der Gleichung

$$y(s) = \frac{c}{\tilde{\lambda}} = \frac{2c}{\lambda},$$

d.h. C^+ erfüllt die Cramér-Bedingung (1.10). Mit r bezeichnen wir den Lundberg-Koeffizienten. Wenn C^1, C^2 unabhängig sind, ist $C^+ = 2C^1$, hat die net profit Bedingung die Form

$$a > \frac{2\lambda}{c}$$

und für den Lundberg-Koeffizienten r_0 gilt

$$r_0 = a - \frac{2\lambda}{c}.$$

Der Koeffizient r ist schwierig auszurechnen, aber wir können in einigen Fällen r mit r_0 vergleichen.

Zuerst sei $a \geq \frac{4\lambda}{c}$.

$$\begin{aligned} y(r_0) &= \int_0^\infty e^{r_0 x} \bar{G}(x) dx = \int_0^\infty e^{r_0 x} e^{-\frac{1}{2}ax} (\arctan e^{\frac{1}{2}ax} - \arctan e^{-\frac{1}{2}ax}) dx + 2 \int_0^\infty \frac{e^{r_0 x} e^{-ax}}{1 + e^{-ax}} dx \\ &= \int_0^\infty e^{\frac{ax}{2} - \frac{2x\lambda}{c}} (\arctan e^{\frac{1}{2}ax} - \arctan e^{-\frac{1}{2}ax}) dx + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2x\lambda}{c}}}{1 + e^{-ax}} dx = \infty, \end{aligned}$$

denn $\frac{a}{2} \geq \frac{2\lambda}{c}$.

Folglich ist $r_0 > r$ und nach der asymptotischen Formel (1.11) von Lundberg ist die Ruinwahrscheinlichkeit für hinreichend große ARR in diesem Modell bei der Unabhängigkeit kleiner als bei der Clayton-Abhängigkeit.

Nun betrachten wir den Fall $\frac{\lambda}{c} < a < \frac{2\lambda}{c}$. Dann ist $r_0 < 0$, und folglich verkleinert in diesem Fall die Clayton-Abhängigkeit das Risiko.

Wir können die Clayton-Abhängigkeit mit der vollen Abhängigkeit vergleichen. Wenn $C^1 = C^2$, ist der Lundberg-Koeffizient gleich

$$r_1 = \frac{a}{2} - \frac{\lambda}{c}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y(r_1) &= \int_0^\infty e^{-\frac{x\lambda}{c}} (\arctan e^{\frac{1}{2}ax} - \arctan e^{-\frac{1}{2}ax}) dx + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{ax}{2} - \frac{x\lambda}{c}}}{1 + e^{-ax}} dx \\ &= \varphi(a) \frac{c}{\lambda} + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{ax}{2} - \frac{x\lambda}{c}}}{1 + e^{-ax}} dx \quad \text{für ein } \varphi(a) \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

Falls $y(r_1) > \frac{2c}{\lambda}$, ist $r_1 > r$. Sonst ist $r < r_1$.

3.6 Spektral positive Lévy-Prozesse mit unbeschränkter Variation

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler, spektral positiver Lévy-Prozess mit unbeschränkter Variation ist.

Der charakteristische Exponent lässt sich nach Lemma 3.5 auch in diesem Fall auf die obere komplexe Halbebene erweitern. Damit hat X den Laplace-Exponenten $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$E(\exp\{-\theta X_t\}) = \exp\{t\Phi(\theta)\}, \quad t, \theta \geq 0$$

und

$$E(\exp\{-\theta X_t\}) < \infty, \quad t, \theta \geq 0,$$

wobei nach der Lévy-Hintschin-Formel

$$\Phi(\theta) = a\theta^2 + b\theta - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\theta x} - \theta x I_{\{x < 1\}}) \Pi(dx)$$

mit $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ und dem Lévy-Maß Π von X ist.

Wegen der unbeschränkten Variation ist entweder $a > 0$ oder $\int (1 \wedge x) \Pi(dx) = \infty$, d.h.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\theta)}{\theta} = \infty.$$

Das nächste Ergebnis kann in der allgemeineren Form in Klüppelberg, Kyprianou und Maller [18], S.19 gefunden werden.

Satz 3.27 Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein eindimensionaler, spektral positiver Lévy-Prozess mit einem Lévy-Maß Π . Wir nehmen an, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \bar{\Pi} \in \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \Phi'(0+) > 0 \quad (\text{net profit-Bedingung}).$$

Dann gilt

$$P(\tau_u < \infty) \sim \frac{1}{\Phi'(0+)} \int_u^\infty \bar{\Pi}(y) dy \quad \text{für} \quad u \rightarrow \infty.$$

Beispiel 3.28 Wir betrachten den Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ in der Form

$$X_t = -ct + C_t^+ \quad \text{mit} \quad C^+ := C^1 + C^2,$$

wobei $c \geq 0$ und C^i ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit der Poisson-Intensität λ_i und Verteilungsfunktion F_i ist, $i = 1, 2$. Die Abhängigkeit zwischen C^1 und C^2 ist durch die Clayton-S-Copula S_θ , $\theta > 0$, gegeben. Für diesen Prozess haben wir den Laplace-Exponenten

$$\Phi(\gamma) = \gamma c - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\gamma x}) \Pi_+(dx),$$

wobei Π_+ das Lévy-Maß der Summe C^+ ist.

Weiter nehmen wir an, dass $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und $F = F_1 = F_2$ eine Pareto-Verteilung mit den Parametern $a = 1$ und $b = 2$ ist. Wir setzen den Parameter θ der Clayton-S-Copula

gleich 1 .

Für das Lévy-Maß von C^+ erhielten wir schon in Beispiel 3.24

$$\bar{\Pi}_+(z) \sim \frac{\tilde{\lambda}}{z^2}, \quad z \rightarrow \infty, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\lambda} = \lambda(2 + \frac{\pi}{2}).$$

Also ist $\bar{\Pi}_+ \in \mathcal{S}$, und nach dem Satz von Karamata (Satz A.2) gilt

$$\int_u^\infty \bar{\Pi}_+(z) dz \sim u \bar{\Pi}_+(u) \quad \text{für} \quad u \rightarrow \infty.$$

Ferner ist $\Phi'(0+) = c - E[C_+] = c - 2\lambda$. Wir nehmen an, dass $c - 2\lambda > 0$. Aus dem Satz 3.27 folgt dann, dass

$$\psi(u) \sim \frac{\tilde{\lambda}}{c - 2\lambda} \frac{1}{u}$$

Betrachten wir nun das gleiche Modell mit der vollen Abhängigkeit. Dann ist das Lévy-Maß der Summe

$$\bar{\Pi}_+(z) = \lambda \bar{F}(\frac{z}{2}) \sim \frac{\lambda}{4z^2}.$$

Nach dem Satz von Karamata (Satz A.1) und Satz 3.27 haben wir

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{4(c - 2\lambda)u}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Zum Vergleich betrachten wir noch dieses Modell mit den unabhängigen Subordinatoren C^1, C^2 . Dann ist

$$\bar{\Pi}_+(z) = \bar{\Pi}_1(z) + \bar{\Pi}_2(z) = 2\lambda \bar{F}(z) = 2\lambda(\frac{1}{1+z})^2.$$

Die Pareto-Verteilung gehört zur Klasse \mathcal{S} , damit können wir wieder Satz 3.27 benutzen,

$$\psi(u) \sim \frac{1}{c - 2\lambda} \int_u^\infty \frac{2\lambda}{(1+z)^2} dz = \frac{2\lambda}{c - 2\lambda} \frac{1}{1+u} \sim \frac{\hat{\lambda}}{c - 2\lambda} \frac{1}{u} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = 2\lambda.$$

In diesen drei Situationen ergibt die volle Abhängigkeit das kleinste und die Clayton-Abhängigkeit das größte Risiko.

3.7 Cramér-Lundberg-Modell mit einem Subordinator und einer Störung

Jetzt betrachten wir den Risikoprozess mit einer Störung $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$,

$$R_t = x + ct - C_t - Z_t, \quad t \geq 0, \quad x, c \geq 0 \quad (3.43)$$

Wir nehmen an, dass C ein Subordinator und Z ein spektral positiver Lévy-Prozess ist, unabhängig von C und mit endlichem Erwartungswert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $E[Z_1] = 0$.

Wir definieren einen spektral positiven Hilfsprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$,

$$X_t := -ct + C_t + Z_t. \quad (3.44)$$

Der Laplace-Exponent von X hat die Form

$$\Phi_X(\beta) := c\beta - \Phi_C(\beta) - \Phi_Z(\beta), \quad (3.45)$$

wobei Φ_C der Laplace-Exponent des Subordinators C und Φ_Z der Laplace-Exponent des spektral positiven Lévy-Prozesses Z ist.

Im Folgenden wird die Funktion $H(x)$ benötigt,

$$H(x) := \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{\Pi}_C(u) du$$

mit dem Erwartungswert μ von C_1 und mit dem Lévy-Maß Π_C von C .

$H(x)$ ist eine absolut stetige Verteilungsfunktion mit der Dichte $h(x) = \frac{\bar{\Pi}_C(x)}{\mu}$.

Die Laplace-Transformation von H hat die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}H(\beta) &:= \int_0^\infty e^{-\beta y} H(dy) = \int_0^\infty e^{-\beta y} h(y) dy = \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\beta y} \bar{\Pi}_C(y) dy = \frac{1}{\mu} \frac{\Phi_C(\beta)}{\beta}. \end{aligned}$$

Mit $Y^* = (Y^*)_{t \geq 0}$ wird der Supremum-Prozess des spektral positiven Prozesses $Y = (-ct + Z_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet, d.h. $Y_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} Y_s$.

Sei T eine von Y unabhängige exponentialverteilte Stoppzeit mit einem Parameter a und Nach Proposition 3.7 gilt

$$E(\exp\{-\theta Y_T^*\}) = \frac{a(\varphi_Y(a) - \theta)}{\varphi_Y(a)(a - \Phi_Z(\theta))}, \quad (3.46)$$

wobei die Funktion φ_Y wie in Abschnitt 3.3 für den Prozess Y definiert wird.

Mit Y_∞^* wird $\sup_{s \geq 0} \{-cs + Z_s\}$ bezeichnet. Sei G die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y_∞^* .

Aus (3.46) erhalten wir mit $a \searrow 0$, dass G die Laplace-Transformation in der Form

$$\mathcal{L}G(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta y} G(dy) = \frac{c\beta}{c\beta - \Phi_Z(\beta)} \quad (3.47)$$

hat.

Beispiel 3.29 Sei $Z = \sigma W$, wobei W eine Brownsche Bewegung ist. Dann haben wir nach (1.3)

$$\Phi_Z(\beta) = \frac{\sigma^2}{2}\beta^2,$$

und die Laplace-Transformierte von G ist

$$\mathcal{L}G(\beta) = \frac{2c/\sigma^2}{\beta - 2c/\sigma^2}.$$

Daraus folgt, dass G eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $p := \frac{2c}{\sigma^2}$ ist.

Beispiel 3.30 Sei Z eine spektral positive α -stabile Lévy-Bewegung ohne Drift. Aus (1.5) folgt, dass

$$\Phi_Z(\beta) = \int_{(0,\infty)} (e^{-\beta x} - 1 + \beta x)\Pi_Z(dx) = \beta^\alpha.$$

Nach (3.47) ist die Laplace-Transformierte von G

$$\mathcal{L}G(\beta) = \frac{c}{c + \beta^{\tilde{\alpha}}}, \quad 0 < \tilde{\alpha} := \alpha - 1 \leq 1.$$

Dann ist die Verteilungsfunktion

$$G(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n x^{\tilde{\alpha}n}}{\Gamma(1 + \tilde{\alpha}n)}, \quad x \geq 0.$$

Siehe Furrer [10] für Details.

Nun betrachten wir den Supremum-Prozess $X^* = (X_t^*)_{t \geq 0}$,

$$X_t^* := \sup\{X_s, 0 \leq s \leq t\}.$$

Sei U eine von X unabhängige exponentialverteilte Stopzeit mit einem Parameter u . Nach Proposition 3.7 gilt wie oben

$$E(\exp\{-\theta X_U^*\}) = \frac{u(\varphi_X(u) - \theta)}{\varphi_X(u)(u - \Phi_X(\theta))}. \quad (3.48)$$

Sei $X_\infty^* := \sup_{s \geq 0} X_s$. Dann ist die Ruinwahrscheinlichkeit für den Risikoprozess (3.43)

$$\psi(x) = 1 - P(X_\infty^* \leq x).$$

Mit $u \searrow 0$ erhalten wir aus (3.48)

$$E(\exp\{-\theta X_\infty^*\}) = \frac{\Phi_X'(0+)\theta}{\Phi_X(\theta)} = \frac{(c - \mu)\theta}{\Phi_X(\theta)}. \quad (3.49)$$

Ferner haben wir nach (3.45)

$$\begin{aligned}
\frac{(c - \mu)\theta}{\Phi_X(\theta)} &= (c - \mu) \frac{1}{\frac{c\theta - \Phi_Z(\theta)}{\theta} - \frac{\Phi_C(\theta)}{\theta}} = \\
&= (c - \mu) \frac{1}{\frac{c}{\mathcal{L}G(\theta)} - \mu\mathcal{L}H(\theta)} = \frac{c - \mu}{c} \frac{\mathcal{L}G(\theta)}{1 - \frac{\mu}{c}\mathcal{L}G(\theta)\mathcal{L}H(\theta)} = \\
&= (1 - \rho)\mathcal{L}G(\theta) \sum_{n=0}^{\infty} (\rho\mathcal{L}G(\theta)\mathcal{L}H(\theta))^n, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

wobei $\rho = \frac{\mu}{c}$.

Mit der inversen Laplace-Transformation folgt das nächste Ergebnis aus (3.50) und (3.49).

Proposition 3.31 *Die Ruinwahrscheinlichkeit für den Risikoprozess (3.43) ist*

$$\psi(x) = 1 - P(X_{\infty}^* \leq x) = 1 - (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n G^{*(n+1)} * H^{*n}(x), \quad x \geq 0. \tag{3.51}$$

Beispiel 3.32 *Sei jetzt*

$$R_t = x + ct - S_t + \sigma W_t,$$

wobei S ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit dem Lévy-Maß

$$\Pi(dx) = \lambda p^2 e^{-px} dx, \quad p = \frac{2c}{\sigma^2}.$$

und W eine Brownsche Bewegung ist. Dann haben wir $H(dx) = pe^{-px} dx$ und nach dem Beispiel 3.29 gilt (3.51) mit

$$(H^{*n} * G^{*(n+1)}) du = \frac{p^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)} u^{2n} e^{-pu} du.$$

Erinnern wir uns an die Summe der abhängigen Subordinatoren und betrachten den Prozess aus Beispiel 3.24 mit einer stabilen Lévy-Bewegung als Störung.

Beispiel 3.33 *Sei*

$$R_t = x + ct - C_t^+ - Z_t, \tag{3.52}$$

wobei $x, c \geq 0$, $C^+ = C^1 + C^2$, C^1, C^2 die zusammengesetzten Poisson-Prozesse aus Beispiel 3.24 sind, deren Abhängigkeit durch die Clayton-S-Copula S_1 gegeben ist, und Z eine von C^+ unabhängige p -stabile Lévy-Bewegung ohne negative Sprünge ist,

$p \in (1, 2)$.

Wir definieren den Hilfsprozess X

$$X_t := -ct + C_t^+ + Z_t.$$

Der Laplace-Exponent von X ist dann

$$\Phi(\gamma) = \gamma c - \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-\gamma x}) \Pi_+(dx) - \gamma^p, \quad \gamma \geq 0,$$

wobei Π_+ das Lévy-Maß von C^+ ist. Stabile Prozesse gehören nach Beispiel 2.19 zu \mathcal{S} , damit können wir wieder den Satz 3.27 anwenden.

Weil Z unabhängig von C^+ ist, gilt nach (1.5)

$$\bar{\Pi}_X(x) = \frac{p-1}{\Gamma(2-p)} x^{-p} + \bar{\Pi}_+(x).$$

In Beispiel 3.24 erhielten wir bereits

$$\bar{\Pi}_+(x) \sim \frac{\tilde{\lambda}}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ferner gilt nach dem Satz von Karamata (Satz A.2)

$$\int_u^\infty \bar{\Pi}_X(x) dx = \frac{1}{u^{p-1} \Gamma(2-p)} + \frac{\tilde{\lambda}}{u} \sim \frac{1}{u^{p-1} \Gamma(2-p)}, \quad u \rightarrow \infty,$$

denn $p-1 \in (0, 1)$. Aus Satz 3.27 folgt

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\Phi'(0+) \Gamma(2-p) u^{p-1}} = \frac{1}{(c-2\lambda) \Gamma(2-p) u^{p-1}}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Da das Lévy-Maß von C^+ in diesem Modell nicht die Ruinwahrscheinlichkeit beeinflusst, ändert die volle Abhängigkeit oder die Unabhängigkeit das Ergebnis nicht.

Falls Z eine Brownsche Bewegung ist, gilt

$$\bar{\Pi}_X(x) = \bar{\Pi}_+(x) \sim \frac{\tilde{\lambda}}{x^2}, \quad x \rightarrow \infty$$

und wir bekommen das gleiche Ergebnis wie in Beispiel 3.24.

Wir können das letzte Modell erweitern, indem wir eine bivariate Störung betrachten.

Beispiel 3.34 Sei $R = (R^1, R^2)$ ein bivariater Risikoprozess mit den Komponenten in der Form

$$R_t^i := x_i + c_i t - C_t^i - Z_t^i, \quad t, x_i, c_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Wir nehmen an, dass C^1, C^2 Subordinatoren wie aus dem letzten Beispiel sind, Z^1, Z^2 unabhängig sind und C^i nicht von Z^i abhängt, $i=1,2$. Wieder wird ein Hilfsprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$X_t := -ct + C^+_t + Z^1_t + Z^2_t,$$

wobei $c = c_1 + c_2$, $C^+ = C^1 + C^2$.

Weiter setzen wir voraus, dass Z^i eine p_i -stabile Lévy-Bewegung ist, $i = 1, 2$, $p_i \in (1, 2)$. Wie im letzten Beispiel erhalten wir für das Lévy-Maß von X

$$\bar{\Pi}_X(x) = \bar{\Pi}_+(x) + \frac{p_1 - 1}{\Gamma(2 - p_1)} x^{-p_1} + \frac{p_2 - 1}{\Gamma(2 - p_2)} x^{-p_2},$$

wobei Π_+ das Lévy-Maß von C^+ ist.

Nach Beispiel 3.24 gilt $\bar{\Pi}_+(x) \sim \frac{\tilde{\lambda}}{x^2}$ für $x \rightarrow \infty$. Folglich bekommen wir

$$\psi(u) \sim \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2-p_1)(c-2\lambda)u^{p_1-1}}, & \text{falls } p_1 < p_2, \\ \frac{1}{\Gamma(2-p_2)(c-2\lambda)u^{p_2-1}}, & \text{falls } p_2 < p_1, \\ \frac{2}{\Gamma(2-p_1)(c-2\lambda)u^{p_1-1}}, & \text{falls } p_1 = p_2 < 2. \end{cases}$$

Wie im letzten Beispiel beeinflusst die Abhängigkeitsstruktur in diesem Modell das Ergebnis nicht.

3.8 Risikoprozess mit stochastischem Ertrag der Kapitalanlage

In diesem Abschnitt betrachten wir einige weitere Möglichkeiten der Anwendung von S-Copulas.

Ein Versicherungsunternehmen kann sein Kapital in den Markt investieren. Sowohl Hipp und Plum in [13] als auch Gaier und Grandits in [11] betrachteten das folgende Modell mit stochastischem Ertrag der Kapitalanlage.

Der Risikoprozess $R = (R_t)_{t \geq 0}$ ist ein Cramér-Lundberg-Prozess,

$$R_t = s + ct - S_t, \quad S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

mit dem Poisson-Parameter λ und der Verteilungsfunktion F . Sei

$$c > \lambda \int_0^\infty x dF(x). \quad (3.53)$$

Weiter wird ein Wertpapierpreisprozess in der Form

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \quad (3.54)$$

betrachtet, wobei $a, b > 0$ und $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist.

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.54) stellt nach der Definition eine geometrische Brownsche Bewegung dar (siehe Protter [22], S. 77-78).

Die Wertpapiere werden für die Investition mit der Strategie $\theta(s)$ gehandelt. Eine natürliche Vermutung ist, dass ein Versicherungsunternehmen versucht, eine optimale Strategie zu wählen (optimal im Sinne der Minimierung des möglichen Verlustes). Das Nettoergebnis wird durch den Prozess $T^{\theta,s} = (T_t^{\theta,s})_{t \geq 0}$ mit

$$dT_t^{\theta,s} = dR_t + a\theta(X_t)dt + b\theta(X_t)dW_t \quad \text{und} \quad T_0^{\theta,s} = s \quad (3.55)$$

dargestellt. Das Ziel des Versicherungsunternehmens besteht darin, eine optimale Strategie θ zu wählen, die die Ruinwahrscheinlichkeit minimiert; also suchen wir

$$\psi(s) := \inf_{\theta} \psi^{\theta}(s), \quad \text{wobei} \quad \psi^{\theta}(s) = P(T_t^{\theta,s} < 0 \text{ für ein } t \geq 0).$$

Für den Beweis der Existenz und Stetigkeit von θ siehe Hipp und Plum [13].

Als $\delta(s) = 1 - \psi(s)$ bezeichnen wir die Überlebenswahrscheinlichkeit bei der optimalen Strategie, und sei $\tilde{\delta}(s) := \gamma\delta(s)$, wobei γ eine Konstante ist, so dass $\tilde{\delta}(\infty) = 1$. $\tilde{\delta}$ ist die Lösung der folgenden Integrodifferential-Gleichung

$$\tilde{\delta}''(s) \left(-\frac{\lambda b^2}{a^2} \int_0^s \tilde{\delta}'(s-x) \bar{F}(x) dx + \frac{cb^2}{a^2} (\tilde{\delta}'(s) - \bar{F}(s)) \right) = \frac{1}{2} (\tilde{\delta}'(s))^2$$

und erfüllt die Randbedingung

$$\tilde{\delta}'(0) = 1.$$

Schreiben wir $u(s) = \tilde{\delta}'(s)$, so erhalten wir eine äquivalente Anfangswertaufgabe für u :

$$u'(s) \left(-\frac{\lambda b^2}{a^2} \int_0^s u(s-x) \bar{F}(x) dx + \frac{cb^2}{a^2} (u(s) - \bar{F}(s)) \right) = \frac{1}{2} (u(s))^2, \quad u(0) = 1. \quad (3.56)$$

Nach Hipp und Plum [13], Korollar 3.2, existiert eine positive strikt wachsende Lösung der Gleichung (3.56), falls F eine lokal beschränkte Dichte besitzt.

Gaier und Grandits zeigten in [11], dass, wenn \bar{F} mit einem Index $\rho < -1$ regulär variiert, das gleiche für die minimale Ruinwahrscheinlichkeit $\psi = 1 - \delta$ gilt.

An der Stelle des zusammengesetzten Poisson-Prozesses S können wir auch hier die Summe C^+ betrachten. Sei C^+ der Subordinator aus Pareto-Beispiel 3.24. Wir setzen die Parameter a, b der Pareto-Verteilung gleich 1 und 2 und die Clayton-S-Copula S_1 als Abhängigkeitsstruktur. Dann variiert $\psi(s)$ regulär mit dem Index $\rho = -2$ nach Beispiel 3.24.

Hipp und Schmidli [14] betrachteten auch dieses Modell, aber mit den zusätzlichen Voraussetzungen

$$M_F(R) = E[\exp\{RY\}] < \infty \quad \text{und} \quad M'_Y(R) < \infty \quad (3.57)$$

für den Lundberg-Koeffizienten R , der nachfolgend definiert wird. Durch $R(\theta)$ sei die folgende Gleichung erfüllt:

$$\lambda(M_F(r) - 1) - (c + a\theta)r + \frac{1}{2}b^2\theta^2r^2 = 0. \quad (3.58)$$

$R(\theta)$ ist der Lundberg-Koeffizient für die konstante Strategie θ . Insbesondere entspricht $R(0)$ dem klassischen Cramér-Lundberg-Modell (Beispiel 1.22). Den Lundberg-Exponenten für (3.55) definieren wir als

$$R := \sup_{\theta \geq 0} R(\theta). \quad (3.59)$$

Wir können bemerken, dass R die Lösung von (3.58) ist, falls $\theta = \theta^* := \frac{a}{Rb^2}$. Somit gilt

$$\lambda M_F(R) = \lambda + cR + \frac{a^2}{2b^2}. \quad (3.60)$$

Beispiel 3.35 Sei F eine Exponentialverteilung $\text{Expo}(\alpha)$. Dann haben wir

$$M_F(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-r}, & \text{falls } r < \alpha \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir $\alpha = a = b = 1$. Dann ist (3.60) der folgenden Gleichung äquivalent

$$cR^2 - R(c - \lambda - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 0.$$

Der Lundberg-Koeffizient R ist positiv, damit ist

$$R = \frac{c - \lambda - \frac{1}{2}}{2c} + \frac{\sqrt{(c - \lambda - \frac{1}{2})^2 + 2c}}{2c}.$$

Für $c = \lambda + \frac{1}{2}$ gilt insbesondere

$$R = \sqrt{\frac{1}{2\lambda + 1}} > R(0) = \frac{c - \lambda}{c} = \frac{1}{\sqrt{2(2\lambda + 1)}}.$$

Unter den Voraussetzungen (3.53) und (3.57) existieren Konstanten $0 < k \leq 1$ und $\varsigma \in (0, \infty)$, so dass die minimale Ruinwahrscheinlichkeit die Ungleichung

$$\psi(u) \leq ke^{-Ru}$$

und die Gleichung

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u)e^{Ru} = \varsigma$$

erfüllt. Außerdem gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} \theta(s) = \theta^*$. Siehe Hipp und Schmidli [14].

In diesem Modell können auch bivariate Risikoprozesse mit den Clayton-S-Copulas betrachtet werden.

Beispiel 3.36 Der Gesamtschadenprozess sei der Subordinator C^+ aus Beispiel 3.26. Dann ist die Voraussetzung (3.57) nach (3.41) und (3.42) erfüllt. Also können wir auch in einem solchen Modell einen Lundberg-Koeffizienten (3.59) definieren. Die Clayton-Abhängigkeit verkleinert aber das Risiko nicht unbedingt. Mit R^U bezeichnen wir den Lundberg-Koeffizienten, falls die Subordinatoren C^i , $i = 1, 2$, unabhängig sind, und mit R^{Cl} , falls die Abhängigkeit zwischen C^1 und C^2 durch die Clayton-S-Copula S_1 gegeben wird.

Sei $c = 2\lambda + \frac{1}{2}$ und $\lambda < \frac{3}{4}$, dann gilt nach Beispiel 3.35

$$R^U = \frac{1}{\sqrt{4\lambda + 1}} > \frac{1}{2} > R^{Cl}, \quad \text{denn} \quad M_G(R^U) = \infty.$$

Somit ist die Ruinwahrscheinlichkeit in diesem Fall kleiner bei der Unabhängigkeit als bei der Clayton-Abhängigkeit.

Anhang A

A.1 Lemma von Pratt

Lemma A.1 (Pratt [21], S.74) Sei B eine Lebesgue-messbare Menge in \mathbb{R} und seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgen von den auf der Menge B integrierbaren Funktionen mit den Eigenschaften:

1. $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$, $G_n \rightarrow G$ für jedes $x \in B$,
2. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $g_n(x) \leq f_n(x) \leq G_n(x)$ für jedes $x \in B$,
3. $\int_B g_n \rightarrow \int_B g$ und $\int_B G_n \rightarrow \int_B G$ mit $\int_B g < \infty$ und $\int_B G < \infty$.

Dann gilt

$$\int_B f_n \rightarrow \int_B f \quad \text{und} \quad \int_B g < \infty.$$

A.2 Satz von Karamata

Der folgende Satz ist in Bingham, Goldie und Teugels [4], S.28 zu finden.

Satz A.2 (Karamata) Sei f eine regulär variierende Funktion auf $(0, \infty)$ mit einem Index $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. für $\gamma > -1$

$$\int_{\delta}^x f(t) dt \sim (\gamma + 1)^{-1} x f(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad \text{und } \delta > 0,$$

2. für $\gamma < -1$

$$\int_x^{\infty} f(t) dt \sim -(\gamma + 1)^{-1} x f(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

A.3 Stochastische Copula

Definition A.3 (Copula) *Eine bivariate stochastische Copula ist eine Funktion $C : [0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$ mit den Eigenschaften:*

1. $C(0, y) = C(x, 0) = 0, \quad \forall x, y \in [0, 1].$

2. *Für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0, 1]$ mit $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$ gilt*

$$C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) + C(x_1, y_1) \geq 0.$$

3. $C(1, y) = y$ und $C(x, 1) = x, \quad \forall x, y \in [0, 1].$

Isbesondere ist eine stochastische Copula eine bivariate Verteilungsfunktion.

Der Begriff einer stochastischen Copula und ihre Eigenschaften werden in Nelsen [19] ausführlich betrachtet.

Anhang B

Verzeichnis der Notationen und Abkürzungen

ARR	Anfangsrisikoreserve
α	Index einer stabilen Lévy-Bewegung
C	Subordinator
C_+	Summe von zwei Subordinatoren
$Cov[.,.]$	Covarianz
c	Prämienrate
d.h.	das heißt
$\Delta X = (\Delta X_t)_{t \geq 0}$	Sprungprozess: $\Delta = X_t - X_{t-}$
$E[.]$	Erwartungswert
$Expo(\alpha)$	Exponential-Verteilung mit dem Parameter α
$e = (e_t)_{t \geq 0}$	Punktprozess
F	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable
\hat{F}	charakteristische Funktion der Verteilung F
\bar{F}	Tail-Funktion der Verteilung F : $\bar{F} := 1 - F$
F_I	integrierte Tail-Funktion $F_I(x) = \frac{1}{\nu} \int_0^x \bar{F}(t) dt$, wobei ν der Erwartungswert ist
\mathcal{F}	σ -Algebra
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	Filtration
\mathcal{F}_τ	von der Stoppzeit τ erzeugte σ -Algebra
$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_t)_{t \geq 0}$	natürliche Filtration eines Lévy-Prozesses
f	Dichte der Verteilung
f.s.	fast sicher
$Gamma(\alpha)$	Gamma-Verteilung mit dem Parameter α
Γ	Gamma-Funktion
Im	imaginärer Teil
i.i.d.	independent, identically distribution
log	Logarithmus mit der Basis e
\mathcal{L}	Laplace-Transformation
M_F	Momenterzeugende Funktion der Verteilung F

\mathbb{N} (\mathbb{N}_0)	Menge von positiven (nicht negativen) ganzen Zahlen
$N = (N_t)_{t \geq 0}$	Poisson-Prozess
o, O	Landau-Symbole: $a(x) = o(b(x))$ für $x \rightarrow \infty$ bedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \left \frac{a(x)}{b(x)} \right = 0$, $a(x) = O(b(x))$ für $x \rightarrow \infty$ bedeutet, dass $\limsup_{x \rightarrow \infty} \left \frac{a(x)}{b(x)} \right < \infty$.
(Ω, \mathcal{F}, P)	Wahrscheinlichkeitsraum
w	Element von Ω
O.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
Π	Lévy-Maß: Π_X das Lévy-Maß des Lévy-Prozesses X
$\bar{\Pi}$	Tail-Integral: $\bar{\Pi}(x) := \Pi([x, \infty])$
Ψ	charakteristischer Exponent: Ψ_X charakteristischer Exponent von X
ψ	Ruinwahrscheinlichkeit: $\psi(x)$ Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der ARR
Φ	Laplace-Exponent: Φ_X Laplace-Exponent von X
$Q(x)$	Hazard-Funktion
$q(x)$	Hazard-Rate
$R = (R_t)_{t \geq 0}$	Risikoprozess
\mathbb{R}, \mathbb{R}^1	Menge von reellen Zahlen
$\bar{\mathbb{R}}_+$	$\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$
\mathbb{R}^d	d-dimensionaler euklidischer Raum
$\bar{\mathbb{R}}_+^d$	$\bar{\mathbb{R}}_+^d = [0, \infty]^d$
$R(\theta)$	Lundberg-Koeffizient für Strategie θ
\mathcal{R}_γ	Klasse der regulär variierenden Funktionen mit Index $\gamma \in \mathbb{R}$
r	Lundberg-Koeffizient
$S = (S_t)_{t \geq 0}$	Gesamtschadenprozess
$S(x, y)$	S-Copula
S_\perp	S-Copula eines bivariaten Subordinators mit unabhängigen Komponenten
$S_{ }$	S-Copula eines bivariaten Subordinators $X = (X^1, X^2)$ mit $X^1 = X^2$
S_θ	Clayton-S-Copula mit dem Parameter θ
\mathcal{S}	Klasse der subexponentiellen Verteilungen
S.	Seite
T, τ	Stoppzeit
t	Zeitpunkt
τ_a	die erste Eintrittszeit in (a, ∞)
$Var[.]$	Varianz
$X = (X_t)_{t \geq 0}$	Lévy-Prozess
$X^* = (X_t^*)_{t \geq 0}$	Supremum-Prozess von X
X_{t-}	linker Grenzwert von X zur Zeit t
\mathbb{Z}	Menge von ganzen Zahlen
\langle, \rangle	Skalarprodukt
\wedge	min
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$*$	Faltung
\sim	$a(x) \sim b(x)$ bedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$
\circ	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Literaturverzeichnis

- [1] S. Asmussen (1996) *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.
- [2] J. Bertoin (1996) *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] J. Bertoin (1999) *Subordinators, Lévy processes with no negative jumps and branching processes*. Preprint, Pierre and Marie Curie University, Paris, www.maphysto.dk/publications/MPS-LN/2000/
- [4] N.H. Bingham, C.M. Goldie and J.L. Teugels (1987) *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] J. Chover, P. Ney und S. Wainger (1973) *Degeneracy properties of subcritical branching processes*. Ann. Probab. 1, 663-673.
- [6] D.B.H. Cline (1987) *Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 43, 347-365.
- [7] F. Dufresne, H. Gerber and E. Shiu (1991) *Risk Theory with the Gamma Process*. ASTIN Bulletin, vol. 21, no. 2, S. 177-192.
- [8] P. Embrechts, C. Klüppelberg und T. Mikosch (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [9] W. M. Feller (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 2nd edn, vol. 2. Wiley, New York.
- [10] H. Furrer (1998) *Risk processes perturbed by α -stable Lévy motion*. Scand. Act. J., 59-74.
- [11] J. Gajer and P. Grandits (2002) *Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment*. Insurance: Mathematics and Economics 30, 211-217.
- [12] C.M. Goldie und C. Klüppelberg (1998) *Subexponential distributions*. In: Adler R., Feldman R. and Taqqu M.S. (Eds.) A Practical Guide to Heavy Tails, pp. 435-459. Birkhäuser, Boston, M.A.
- [13] C. Hipp and M. Plum (2000) *Optimal investment for insurers*. Insurance: Mathematics and Economics 27, 215-228.

- [14] C. Hipp and H. Schmidli (2003) *Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case*. Preprint. University of Karlsruhe, <http://www.uni-karlsruhe.de/~ivw/hipp.html>
- [15] M. Huzak, M. Perman, H. Sikić and Z. Vondracek (2003) *Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes*. Preprint, University of Ljubljana.
- [16] M. Huzak, M. Perman, H. Sikić and Z. Vondracek (2003) *Ruin probabilities for competing claim process*. Preprint, University of Ljubljana.
- [17] C. Klüppelberg (1989) *Subexponential distributions and characterizations of related classes*. Probab. Theory Related Fields 82, 259-269.
- [18] C. Klüppelberg, A.E. Kyprianou, R.A. Maller (2003) *Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes*. Ann. Appl. Probab. To Appear.
- [19] R. Nelsen (1999) *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [20] A.G. Pakes (2002) *Convolution equivalence and infinite divisibility* Preprint, University of Western Australia, School of Math. and Statistics.
- [21] J.W. Pratt (1960) *On interchanging limits and integrals* Ann. Math. Statist. 31, S.74-77.
- [22] P. Protter (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, Berlin.
- [23] D. Revuz and M. Yor (1999) *Continuous Martingales and Brownian Motion*. 3rd edn, Springer, Berlin.
- [24] B.A. Rogozin (2000) *On the constant in the definition of subexponential distributions*. Theory Probab. Appl. 44, 409-412.
- [25] K. I. Sato (1999) *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] P. Tankov (2003) *Dependence structure of multivariate Lévy processes with applications in risk management*. Ecole Polytechnique, Palaiseau, <http://www.cmap.polytechnique.fr/~tankov/levycopulas.ps>
- [27] V.M. Zolotarev (1986) *One-Dimensional Stable Distributions*. Vol. 65 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society. Providence RI.