

Technische Universität München  
Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Analytische Mechanik

# Optimale Gestaltung von Strukturen elastischer Materialien durch die Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

Nicholas Carsten Drude

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr. Peter Rentrop
Prüfer der Dissertation:	1. Univ.-Prof. Dr. Jürgen Scheurle
	2. Univ.-Prof. Dr. Hartmut Hoffmann
	3. Univ.-Prof. Dr. Hans Josef Pesch, Universität Bayreuth

Die Dissertation wurde am 13. Juli 2011 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 16. November 2011 angenommen.



## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell entwickelt und analysiert, mit dem Strukturen elastischer Materialien hinsichtlich ihrer mechanischen und gießtechnischen Eigenschaften sowie ihrer Fertigungsgerechtigkeit optimiert werden können. Ferner wird ein Algorithmus entwickelt und analysiert, mit dem entsprechende „large-scale“ Probleme effizient behandelt werden können. Als Anwendungsbeispiel erfolgt schließlich die Optimierung der Verrippung der wirkflächenabgewandten Seite für eine Klasse von Umformwerkzeugen sowie der Vergleich mit konventionell gestalteten Verrippungen.

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Jürgen Scheurle. Er hat mich bei der Anfertigung dieser Arbeit stets geduldig und hilfsbereit unterstützt. Ferner bin ich Herrn Prof. Dr. Hartmut Hoffmann für die zahlreichen anregenden Gespräche zu Dank verpflichtet. Weiterhin danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung des Projekts „Mathematisch, gießtechnische Optimierung der Verrippung großer Umformwerkzeuge“, an dem ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter mitwirken durfte. Überdies danke ich meinen Kollegen Leopold Meier und Patrick Saal, die sich nach Kräften bemüht haben, mir Einblick in die Welt des Gießereiwesens zu verschaffen. Sie haben mich bei sämtlichen gießtechnischen Auswertungen unterstützt und waren mir dabei eine unschätzbare Hilfe. Mein Dank gebührt weiterhin meinem Lehrstuhlkollegen Dr. Stefan Markwardt für die zahllosen tief sinnigen, selten unsinnigen und stets freundschaftlichen Gespräche über die Wissenschaft und das Leben an sich. Zuletzt ein herzliches Dankeschön allen übrigen Kollegen des Lehrstuhls „Höhere Mathematik und Analytische Mechanik“ für die allzeit produktive und angenehme Atmosphäre.

Darüber hinaus gilt mein aufrichtiger Dank meiner Familie. Erst durch ihre Unterstützung war mir das Glück beschert, erfolgreich studieren und mich mit aller Kraft dieser Arbeit widmen zu können. Schließlich danke ich all meinen Freunden, die, ob sie wollten oder nicht, bei zahlreichen Gelegenheiten meinen nicht immer sortierten Gedanken und Ausführungen über abstrakte mathematische Fragestellungen beiwohnen mussten, deren Sinngehalt sich nicht jedermann automatisch erschließt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Ziele der Arbeit . . . . .	1
1.2. Übersicht der Ergebnisse . . . . .	2
1.2.1. Mathematisches Modell . . . . .	2
1.2.2. Algorithmus . . . . .	6
1.2.3. Umformwerkzeuge . . . . .	9
1.3. Aufbau . . . . .	11
<b>2. Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1. Banach- und Hilberträume . . . . .	13
2.2. Sobolev-Räume . . . . .	16
2.3. Bochner-Räume . . . . .	22
2.4. Schwache Konvergenz . . . . .	24
2.5. Gâteaux- und Fréchet Differenzierbarkeit . . . . .	27
<b>3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften</b>	<b>29</b>
3.1. Die Lamé-Gleichung in ihrer starken Form . . . . .	29
3.1.1. Kinematik . . . . .	29
3.1.2. Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	30
3.1.3. Materialgesetze . . . . .	31
3.1.4. Lineare Elastizitätstheorie . . . . .	32
3.2. Die schwache Formulierung der Lamé-Gleichung . . . . .	33
3.3. Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen . . . . .	34
3.4. Galerkin Approximation schwacher Lösungen . . . . .	37
3.4.1. Das Ritz-Galerkin-Verfahren . . . . .	37
3.4.2. Finite-Elemente-Räume . . . . .	38
3.4.3. Fehlerabschätzungen . . . . .	39
<b>4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material</b>	<b>41</b>
4.1. Gewichtungsooperatoren als Mittel zur Topologieoptimierung . . . . .	41
4.2. Problemformulierung und Lösbarkeit . . . . .	47
4.2.1. Formulierung und Lösbarkeit der Zustandsgleichung . . . . .	47
4.2.2. Formulierung und Lösbarkeit des Optimierungsproblems . . . . .	48
4.3. Betrachtung von Nebenbedingungen . . . . .	51
4.4. Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Lösung . . . . .	56
4.5. Endlichdimensionale Approximation des Optimierungsproblems . . . . .	57

<b>5. Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtsoperatoren</b>	<b>59</b>
5.1. Gründe für die Erweiterung des SIMP-Modells . . . . .	59
5.2. Konzept der Erweiterung . . . . .	61
5.3. Umsetzung der Erweiterung im Falle abschnittsweise konstanter relativer Dichteverteilungen . . . . .	63
5.4. Vergleich der Erweiterung mit dem mesh-independence filter . . . . .	64
5.4.1. Probegeometrie a) . . . . .	65
5.4.2. Probegeometrie b) . . . . .	67
5.4.3. Fazit . . . . .	69
<b>6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren</b>	<b>71</b>
6.1. Entwicklung des Algorithmus . . . . .	71
6.1.1. Problemstellung . . . . .	71
6.1.2. Approximation der notwendigen Optimalitätsbedingungen . . . . .	73
6.1.3. Diskretisierung der approximierten notwendigen Optimalitätsbedingungen . . . . .	74
6.1.4. Vereinfachung . . . . .	77
6.1.5. Formulierung des Algorithmus . . . . .	79
6.2. Vergleich des entwickelten mit einem gängigen Algorithmus . . . . .	82
6.2.1. Die Iterationsregel des gängigen Algorithmus . . . . .	82
6.2.2. Vergleich der Iterationsregeln . . . . .	83
6.2.3. Vergleich der Ergebnisse . . . . .	84
<b>7. Anwendung des Algorithmus zur mechanischen Optimierung von Umformwerkzeugen</b>	<b>87</b>
7.1. Entwickelte Software . . . . .	88
7.2. Definition der zu optimierenden Probegeometrien . . . . .	88
7.3. Optimierte Verrippungsstrategien als Resultat . . . . .	89
7.4. Vergleich mit konventionellen Verrippungsstrategien . . . . .	90
7.4.1. Mechanische Eigenschaften . . . . .	90
7.4.2. Gießtechnische Eigenschaften . . . . .	91
7.4.3. Fertigungsgerechtigkeit . . . . .	94
7.5. Reduktion von Eigenspannungen . . . . .	95
7.6. Ergebnis . . . . .	96
<b>8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren</b>	<b>97</b>
8.1. Modellierung des Gießvorgangs . . . . .	97
8.1.1. Das Stefan-Problem . . . . .	98
8.1.2. Verwendung des Stefan-Problems in der Topologieoptimierung . . . . .	98
8.1.3. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	100
8.1.4. Numerische Implementierung . . . . .	104
8.1.5. Ergebnis . . . . .	106

8.2. Einbeziehung des Gießvorgangs . . . . .	107
8.2.1. Entwicklung eines Gewichtungsooperators zur Berücksichtigung des Abkühlverlaufs . . . . .	108
8.2.2. Ermittlung der Ableitungen des Abkühlverlaufs . . . . .	112
8.3. Anwendung des entwickelten Gewichtungsooperators . . . . .	118
8.3.1. Auswertung der Ergebnisse . . . . .	119
8.3.2. Fazit . . . . .	122
<b>A. Notation</b>	<b>123</b>
<b>B. Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>





# 1. Einleitung

*„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.“*

Johann Wolfgang von Goethe<sup>1</sup>

Nach welchen Richtlinien sollen große Umformwerkzeuge konstruiert werden, um eine möglichst optimale Nutzbarkeit zu erreichen? Diese Fragestellung beschäftigt nicht mehr nur Ingenieure. In den vergangenen Jahren ist die optimale Gestaltung von Strukturen ein aktives und bedeutendes Feld der mathematischen Forschung geworden.

Zielsetzungen der optimalen Gestaltung von Umformwerkzeugen sind vielfältig und komplex: Umformwerkzeuge müssen den an sie gestellten mechanischen Anforderungen genügen, d.h. sie müssen unter Einhaltung einer vorgegebenen Gewichtsschranke eine möglichst hohe Steifigkeit bzw. eine möglichst geringe Nachgiebigkeit aufweisen. Damit liegt bereits ein mathematisches Optimierungsproblem vor. Weiterhin muss die Gestalt eines Umformwerkzeuges so beschaffen sein, dass seine Anfertigung möglich ist. Schließlich dürfen die aus dem Gießvorgang zur Anfertigung des Umformwerkzeugs resultierenden Auswirkungen auf die Bauteileigenschaften nicht so sein, dass die Verwendbarkeit des Umformwerkzeuges gefährdet oder gar unmöglich ist.

Die optimale Gestaltung von Umformwerkzeugen wird in dem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Projekt „Mathematisch, gießtechnische Optimierung der Verrippung großer Umformwerkzeuge“ (MgOVgU) erforscht, an dem der Autor dieser Arbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter mitwirkt und in dessen Rahmen diese Arbeit gefördert wurde.

## 1.1. Ziele der Arbeit

Innerhalb des DFG-Projekts MgOVgU arbeiten die Lehrstühle „Höhere Mathematik und Analytische Mechanik“ (M8) und „Umformtechnik und Gießereiwesen“ (utg) der Technischen Universität München (TUM) zusammen. Es werden Strategien zur optimalen Gestaltung großer Umformwerkzeuge entwickelt und umgesetzt. M8 soll hierbei die mathematische Modellierung einbringen, anhand derer diese Strategien entwickelt werden, utg das gießtechnische know-how. Das Projekt MgOVgU ist in hohem Maße interdisziplinär, was von der DFG gewünscht und gerade deshalb gefördert wird. Aus diesem Charakter des Projekts ergeben sich die Ziele dieser Arbeit, nämlich:

---

<sup>1</sup>Maximen und Reflexionen, Über Natur und Naturwissenschaft.

## 1. Einleitung

- 1) Entwicklung und Analyse eines mathematischen Modells, mit welchem Strukturen elastischer Materialien hinsichtlich ihrer mechanischen und gießtechnischen Eigenschaften sowie ihrer Fertigungsgerechtigkeit optimiert werden können.
- 2) Entwicklung und Analyse eines Algorithmus, mit welchem die Optimierung von sog. „large-scale“ Problemen hinsichtlich Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit durchgeführt werden kann.
- 3) Optimierung großer Umformwerkzeuge hinsichtlich Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit und Vergleich mit konventionell gestalteten Umformwerkzeugen.

## 1.2. Übersicht der Ergebnisse

Die Übersicht der Ergebnisse dieser Arbeit erfolgt entsprechend den oben genannten Zielen der Arbeit.

### 1.2.1. Mathematisches Modell

In den vergangenen Jahren haben sich die *Topologieoptimierung* bzw. die *Formoptimierung* als bedeutende Ansätze zur optimalen Gestaltung von Strukturen etabliert. Aufgrund der größeren Freiheiten, die die Topologieoptimierung bei der optimalen Gestaltung von Strukturen bietet,<sup>2</sup> wird im weiteren Verlauf dem Ansatz der Topologieoptimierung gefolgt.

#### Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung hat das Ziel, innerhalb eines gegebenen Designraums  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  die optimale Gestalt eines Festkörpers  $\mathcal{B} \subset \Omega$  zu finden. Gesucht wird jedoch i.a. nicht direkt nach der Gestalt des Festkörpers  $\mathcal{B}$ , sondern nach einer optimalen *relativen Dichteverteilung*  $h \in Q_{\text{ad}}$  ( $Q_{\text{ad}}$  ist der Raum der zulässigen relativen Dichteverteilungen, der Index  $_{\text{ad}}$  steht für *admissible*, vgl. Gleichung (4.1), S. 42) mit dem Wertebereich  $[0, 1]$ , welche wiederum die Gestalt des Festkörpers  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(h)$  definiert. Die relative Dichteverteilung  $h$  ist dann optimal, wenn sie ein *Optimierungsproblem* löst, welches durch eine *Zustandsgleichung*, ein *Zielfunktional* und *Nebenbedingungen* definiert ist:

Im Designraum  $\Omega$  wirken *Volumen-* und *Oberflächenkräfte*, die durch Dichten  $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  und  $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$  gegeben sind ( $L^2$  ist der Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen im Sinne von Lebesgue, vgl. Kap. 2.2, S. 16). Dies führt zu einer *Verschiebung*  $u = u(h) \in V$  ( $V$  ist der Raum der zulässigen Verschiebungen), d.h. die Verschiebung ist wiederum abhängig von der relativen Dichteverteilung  $h$ . Das *Lastfunktional*  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert durch

$$(\ell, v) := \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v ds$$

---

<sup>2</sup>„Die Topologieoptimierung ist die flexibelste Form der Optimierung (...)“, [Harz07, S. 199].

und berechnet die *äußere virtuelle Arbeit*, die bei gegebenen Kraftdichten  $f$  und  $g$  für eine beliebige Verschiebung  $v$  aufgewandt werden muss (vgl. Kap. 3.3, S. 34). Die Bilinearform  $a(h) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert durch

$$a(h)(u, v) := \int_{\Omega} (\mathcal{C}(h) : e(u)) \cdot e(v) dx$$

und berechnet die *innere virtuelle Arbeit* für einen *linear elastischen* Körper im Zustand  $u$  für eine beliebige Verschiebung  $v$  bei gegebener relativer Dichteverteilung  $h$  (vgl. Kap. 3.3, S. 34, und Gleichung (4.3), S. 48). Dabei ist

$$e(u) := \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

die (*symmetrisierte*) *Verzerrung* bzgl.  $u$  (vgl. Kap. 3.1.1, S. 29), während  $\mathcal{C}(h)$  der *Elastizitätstensor* ist, ein Tensor 4. Ordnung (vgl. Kap. 3.1.4, S. 32). Die Verschiebung  $u(h)$  hat die Zustandsgleichung der Topologieoptimierung (in ihrer schwachen Formulierung)

$$a(h)(u(h), v) = (\ell, v), \quad \text{für alle } v \in V$$

zu lösen. In einem Gleichgewichtszustand muss die innere virtuelle Arbeit also stets der äußeren virtuellen Arbeit entsprechen (vgl. Gleichung (4.5), S. 48). Das Zielfunktional  $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$  (anstelle von  $V$  wären auch andere Definitionsräume möglich) berechnet die Größe, die es zu minimieren gilt. Die Nebenbedingungen  $g_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  ( $Q$  ist der Raum der relativen Dichteverteilungen) sind erfüllt, wenn  $g_i(h) \leq 0$  ist (vgl. Kap. 4.3, S. 51).

Das Optimierungsproblem der Topologieoptimierung wird definiert als die Suche nach der optimalen relativen Dichteverteilung  $h_*$ , die das Problem

$$\begin{aligned} & \min_{h \in Q} g_0(u(h)) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} a(h)(u(h), v) = (\ell, v), & \forall v \in V, \\ g_i(h) \leq 0, & \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \end{aligned}$$

löst. Die gesuchte optimale Gestalt des Festkörper  $\mathcal{B}$  wird im weiteren Verlauf definiert durch  $\mathcal{B}(h_*) := \{h_* \geq 1/2\} \subset \Omega$  oder gegebenenfalls eine geglättete Version hiervon.

Das oben unter Kap. 1.1 genannte erste Ziel der Arbeit (Entwicklung und Analyse eines mathematischen Modells) führt zu folgenden Anforderungen an diese Arbeit:

Es sind Möglichkeiten zu entwickeln, die Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit in das eben genannte Optimierungsproblem einzubeziehen. Darüber hinaus sind Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Zustandsgleichung und des Optimierungsproblems zu formulieren. Dies geschieht auf die im Folgenden beschriebene Weise:

### **Einbeziehung von Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit in die Topologieoptimierung**

Um die Mechanik, die Gießtechnik und die Fertigungsgerechtigkeit in die Optimierung einzubeziehen, muss das Optimierungsproblem geeignet formuliert werden. Dies gelingt anhand einer bedachten Wahl des Zielfunktionals, des Elastizitätstensors und der Nebenbedingungen:

## 1. Einleitung

**Wahl des Zielfunktional** Im weiteren Verlauf wird  $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g_0(u) := (\ell, u)$$

und berechnet die *Nachgiebigkeit*. Das Optimierungsproblem heißt entsprechend *minimales Nachgiebigkeitsproblem* (vgl. Gleichung (4.8), S. 49).

**Wahl des Elastizitätstensors** Die Gestaltung des Elastizitätstensors hat zwei Anforderungen zu genügen: Sie muss die Materialeigenschaften des gesuchten Körpers  $\mathcal{B}$  widerspiegeln und ferner dem Konzept der relativen Dichteverteilungen Rechnung tragen. Ein bekanntes Modell zur Gestaltung des Elastizitätstensors in der Topologieoptimierung ist das *Solid Isotropic Material with Penalisation-Modell* (kurz: SIMP-Modell), vgl. [Bend89, Rozv92, Mlej92]. Dieses definiert den Elastizitätstensor  $\mathcal{C} : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3})$  (mit geeignet definiertem  $Q_G \subset Q$ ) durch

$$\mathcal{C}(h) := h^p \mathcal{C}_0,$$

wobei  $p > 1$  und  $\mathcal{C}_0$  der (als konstant angenommene) Elastizitätstensor des verwendeten Materials ist. Der Skalar  $p$  ist ein Strafexponent, der darauf abzielt, die Nachgiebigkeit in Bereichen mit *Zwischendichten*  $0 < h < 1$  überproportional zu erhöhen, damit Lösungen des Optimierungsproblems diese nicht erwünschten *Zwischendichten* nicht oder wenigstens kaum aufweisen.

Das SIMP-Modell wird durch das in dieser Arbeit entwickelte Konzept der *Gewichtungsoperatoren* verallgemeinert (vgl. Kap. 4.1, S. 41). Ein Gewichtungoperator  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  ist ein Operator, der relative Dichteverteilungen  $h$  gewichtet (daher die Bezeichnung) und damit ermöglicht, den Elastizitätstensor  $\mathcal{C}$  einer relativen Dichteverteilung  $h$  geeignet zu modifizieren. Mit Hilfe von passend gewählten Gewichtungoperatoren können nicht nur *Zwischendichten*, sondern diverse Eigenschaften von relativen Dichteverteilungen, die unerwünscht sind und in ihren Auswirkungen beseitigt oder wenigstens reduziert werden sollen, z.B. gießtechnisch mangelhafte Eigenschaften, mit Straftermen bedacht und auf diese Weise in der Optimierung vermieden werden. So wird erreicht, dass nur relative Dichteverteilungen als Lösung des Optimierungsproblems in Frage kommen, die nicht oder nur in geringem Maße unerwünschte Eigenschaften haben. Unter Zuhilfenahme eines Gewichtungoperators  $G$  wird der Elastizitätstensor  $\mathcal{C}$  definiert durch

$$\mathcal{C}(h) := G(h)\mathcal{C}_0.$$

Die Gießtechnik wird durch den in Kap. 8.2, S. 107, entwickelten Gewichtungoperator  $G_3$  in das Optimierungsproblem einbezogen. Hierbei wird unterstellt, dass in einem Umformwerkzeug  $\mathcal{B}$  gießtechnisch mangelhafte Eigenschaften wie z.B. hohe *Eigenstressungen* vor allem dann entstehen, wenn während des Gießvorgangs von  $\mathcal{B}$  der *Abkühlverlauf* stark inhomogen ist, d.h. einige Bereiche des Umformwerkzeuges deutlich schneller abkühlen als andere. In diesem Fall werden Bereiche von  $\Omega$ , die einen inhomogenen Abkühlverlauf vorweisen, durch den Gewichtungoperator  $G_3$  mit Straftermen bedacht.

Der Abkühlverlauf wird in das Optimierungsproblem einbezogen, indem in Kap. 8.1, S. 97, eine Möglichkeit entwickelt wird, das *Stefan-Problem* innerhalb der Topologieoptimierung zu nutzen. Durch die Lösung des Stefan-Problems wird der Erstarrungsprozess des Materials bei dem Guss eines Umformwerkzeuges mathematisch beschrieben.

**Wahl der Nebenbedingungen** Die Nebenbedingungen beschränken die Möglichkeiten zur Auswahl von  $h$ , sorgen aber auch für ein wohlgestelltes Optimierungsproblem. Nach der Priorität dieser beiden Aufgaben erfolgt die Auswahl der Nebenbedingungen. Anhand des Instruments der Nebenbedingungen lässt sich die Fertigungsgerechtigkeit in die Optimierung einbeziehen. Die Anfertigung eines Umformwerkzeugs ist grundsätzlich problemlos möglich, wenn der die Gestalt des Umformwerkzeugs definierende Festkörper  $\mathcal{B}(h)$  keine Hohlräume oder Hinterschnitte aufweist. Dies ist der Fall, wenn die relative Dichteverteilung  $h$  eine *Entformungsrichtung*  $r_e \in \mathbb{R}^3$  besitzt, so dass  $h$  in Entformungsrichtung nicht abnimmt, also

$$\nabla h r_e \geq 0.$$

### Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

**Zustandsgleichung** Die Zustandsgleichung entspricht der schwachen Formulierung der Lamé-Gleichung. Diese elliptische Differentialgleichung beschreibt die Reaktion eines linear elastischen, *isotropen* Körpers auf ein System anliegender Kräfte. Ein linear elastischer Körper ist dadurch gekennzeichnet, dass seine *Spannung*  $\sigma(u)$  in linearem Zusammenhang zu seiner Verzerrung steht, genauer

$$\sigma(u) = \mathcal{C}_0 : e(u).$$

Der Elastizitätstensor  $\mathcal{C}_0$  eines zusätzlich isotropen Körpers ist bereits eindeutig definiert durch den *Elastizitätsmodul*  $E > 0$  und die *Poissonszahl*  $0 < \nu < 1/2$ . Im weiteren Verlauf wird angenommen,  $\mathcal{B}$  sei ein linear elastischer, isotroper und zusätzlich *homogener* Körper, d.h.  $E$  und  $\nu$  sind konstant (vgl. Kap. 3.1, S. 29).

Die schwache Formulierung ist eine Standardmethode zur Lösung partieller Differentialgleichungen und erlaubt Lösungen (und Systeme von Kräften) geringerer Glattheit als die starke Formulierung (vgl. Kap. 3.2, S. 33). Daher wird der Raum der zulässigen Verschiebungen  $V$  definiert als der Abschluss von  $\{v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_0\}$  bzgl. der  $\|\cdot\|_{H^1}$  Norm ( $H^1$  ist der Sobolev-Raum der Funktionen, deren schwache Ableitungen in  $L^2$  sind). Dabei gilt  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ .

Die Zustandsgleichung ist eindeutig lösbar, wobei die Lösung  $u(h)$  in  $V$  beschränkt ist, wenn der Designraum  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist, ferner  $\mathcal{H}_2(\Gamma_0) > 0$  gilt ( $\mathcal{H}_2$  ist das zweidimensionale Hausdorff-Maß) und  $a(h)(\cdot, \cdot)$  elliptisch ist (vgl. Kap. 3.3, S. 34, und Kap. 4.2.1, S. 47). Um sicherzustellen, dass  $a(h)(\cdot, \cdot)$  elliptisch ist, muss

$$0 < G_{\min} \leq G(h) \leq G_{\max}$$

gelten. Wird die Verschiebung  $u$  als Operator  $u : Q_G \rightarrow V$  definiert, so kann gezeigt werden, dass  $u$  zweimal stetig F-differenzierbar ist, falls  $G$  zweimal stetig F-differenzierbar ist (vgl. Kap. 2.5, S. 27, und Kap. 4.3, S. 51).

**Optimierungsproblem** Um das Optimierungsproblem durch eine optimale relative Dichteverteilung  $h_* \in Q_{\text{ad}}$  und einen Optimalwert  $g_* := g_0(u(h_*))$  zu lösen, reicht es zu zeigen, dass für eine Folge  $\{h_n\} \subset Q_{\text{ad}}$  mit  $g_0(u(h_n)) \rightarrow g_*$  die Folge  $G(h_n)$  gleichmäßig in  $L^\infty(\Omega)$  konvergiert (vgl. Kap. 4.2.2, S. 48). Dies ist (bei geeigneter Wahl von  $Q_{\text{ad}}$ ) gewährleistet,

## 1. Einleitung

wenn die Folge  $\{h_n\}$  beschränkt ist. Dieser Umstand lässt sich mit Hilfe der verwendeten Nebenbedingungen, jedoch auch mit Hilfe eines geeignet gewählten Gewichtungsopeators sicherstellen.

In Kapitel 5, S. 59, wird ein solcher, mit  $G_2$  bezeichneter Gewichtungsopeator entwickelt. Dieser bestraft Bereiche von  $\Omega$ , die eine hohe Norm des Gradienten  $\|\nabla h\|_2$  der relativen Dichteverteilung  $h$  aufweisen.

### 1.2.2. Algorithmus

Zwei Standardmethoden zur Behandlung von Problemen aus der Topologieoptimierung sind die *Method of moving asymptotes* (MMA) und die *optimality criteria* (OC). MMA wurde ursprünglich in [Svan87] vorgeschlagen und in [Svan95] zur *globally convergent version of MMA* (GCMMA) erweitert. Inzwischen wurden Hybridansätze von MMA und GCMMA vorgeschlagen, [Zuo07]. MMA erzeugt in jedem Iterationsschritt ein strikt konvexes, das ursprüngliche Problem approximierendes Unterproblem und löst dieses. MMA kann allgemeine Probleme der Topologieoptimierung behandeln, hat jedoch in der Regel schlechtere Konvergenzeigenschaften als OC, vgl. [Bend04, S. 18ff].

OC Methoden als Ansatz zur Lösung von Strukturoptimierungsproblemen haben sich in den späten 1960 Jahren entwickelt, vgl. [Zhou92, Abschnitt 1]. Sie werden üblicherweise aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine Lösung des Optimierungsproblems abgeleitet, welche mit Hilfe des *Lagrangefunktionals* gewonnen werden, vgl. Kap. 4.4, S. 56. In jedem Iterationsschritt berechnet OC eine Lösung, welche die *notwendigen Optimalitätsbedingungen* (NO) annähernd erfüllt. OC Algorithmen zur Topologieoptimierung werden in [Bend95] und [Hass98] vorgeschlagen. Der erstgenannte Algorithmus wird in [Sigm01] mit Hilfe der Programmiersprache *Matlab* realisiert. Obgleich das Iterationsschema von OC Algorithmen aufgrund des Verzichts auf die Berechnung von Ableitungen (insbesondere von  $u(h)$ ) heuristisch ist, haben OC Algorithmen üblicherweise bessere Konvergenzeigenschaften als MMA, vgl. [Zuo07, Abschnitt 1]. Allerdings erfordern OC-Algorithmen „einfach“ zu behandelnden Nebenbedingungen. Weil solche in dieser Arbeit vorliegen, wird im Folgenden die OC der MMA-Methodik vorgezogen.

Das in Kap. 1.1 genannte zweite Ziel der Arbeit (Entwicklung und Analyse eines Algorithmus zur Optimierung von „large-scale“ Problemen) führt zu folgenden Anforderungen an diese Arbeit:

Es sind die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Topologieoptimierung mit Gewichtungsopeatoren zu formulieren. Mit diesen ist ein OC Algorithmus zur Behandlung von „large-scale“ Problemen zu entwickeln, auf seine Konvergenzeigenschaften zu testen und mit bereits existierenden OC Algorithmen zu vergleichen. Dies geschieht auf folgende Weise:

#### Notwendige Optimalitätsbedingungen

Notwendige Optimalitätsbedingungen (NO) werden mit Hilfe der partiellen Ableitungen des Lagrangefunktionals ermittelt. Die partiellen Ableitungen können ermittelt werden, wenn sämtliche Nebenbedingungen F-differenzierbar sind. Dies ist im weiteren Verlauf der Fall, vgl. Kap. 4.3, S. 51. Das Lagrangefunktional des Optimierungsproblems wird

definiert durch

$$\mathcal{L}(h, u, v, \Lambda) := g_0(u) + \sum_{i=1}^m \Lambda_i g_i(h) + a(h)(u, v) - (\ell, v),$$

wobei  $\Lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $u, v \in V$ ,  $h \in Q_G$  (vgl. Kap. 4.4, S. 56). Die NO an  $(h, u, v, \Lambda) \in Q_G \times V \times V \times \mathbb{R}^m$  lauten

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\geq 0, & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ \Lambda_i g_i(h) &= 0, & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ \mathcal{L}_h(h, u, v, \Lambda)q &= \sum_{i=1}^m \Lambda_i g'_i(h)q + a'(h)q(u, v) = 0, & \forall q \in Q, \\ \mathcal{L}_u(h, u, v, \Lambda)w &= a(h)(u + v, w) = 0, & \forall w \in V, \\ \mathcal{L}_v(h, u, v, \Lambda)w &= a(h)(u, w) - (\ell, w) = 0, & \forall w \in V, \\ \mathcal{L}_\Lambda(h, u, v, \Lambda)\Upsilon &= (g_1(h), \dots, g_m(h))\Upsilon \leq 0, & \forall \Upsilon \geq 0 \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

vgl. Satz 4.9, S. 56.

### Entwicklung eines OC Algorithmus

Ein OC Algorithmus hat das Ziel, in jedem Iterationsschritt eine Lösung zu berechnen, die die NO annähernd erfüllt. Um die Zusammenhänge klar darstellen zu können, wird die Entwicklung des OC Algorithmus unterteilt in die Zwischenschritte Problemstellung, Approximation der NO und Vereinfachung:

**Problemstellung** Nachfolgend wird knapp beschrieben, mit welcher Problemstellung der Algorithmus in jedem Iterationsschritt konfrontiert ist. Hierfür werden die NO wie folgt umgerechnet:

Aufgrund der oben genannten NO gilt

$$\begin{aligned} u &= u(h), \\ v &= -u(h), \\ \sum_{i=1}^m \Lambda_i g'_i(h)q &= a'(h)q(u(h), u(h)). \end{aligned}$$

Mit der Zustandsgleichung gilt

$$a'(h)q(u(h), v) = -a(h)(u'(h)q, v)$$

für beliebige  $v \in V$  und damit auch

$$a'(h)q(u(h), u(h)) = -a(h)(u'(h)q, u(h)).$$

Überdies gilt

$$a(h_n + \Delta h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n + \Delta h_n)) = a(h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n))$$

## 1. Einleitung

für  $h_n, h_n + \Delta h_n \in Q_G$  aufgrund der Zustandsgleichung.

Mit diesen Resultaten lautet das Ziel eines Iterationsschrittes, für ein gegebenes  $n \in \mathbb{N}$  und  $h_n \in Q_{\text{ad}}$  den *Korrekturterm*  $\Delta h_n \in Q$  und die Lagrange-Multiplikatoren  $\Lambda_n := (\Lambda_{ni}) \in \mathbb{R}^m$  zu finden, so dass für sämtliche  $i \in \{1, \dots, m\}$  die NO

$$\begin{aligned} g_i(h_n + \Delta h_n) &\leq 0, \\ \Lambda_{ni} &\geq 0, \\ \Lambda_{ni} g_i(h_n + \Delta h_n) &= 0, \\ \sum_{i=1}^m \Lambda_{ni} g'_i(h_n + \Delta h_n) q &= -a(h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n)), \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

erfüllt sind, vgl. Kap. 6.1.1, S. 71.

**Approximation der notwendigen Optimalitätsbedingungen** Die NO werden approximiert, indem eine *Taylorentwicklung* der rechten Seite der oben genannten vierten Gleichung durchgeführt wird:

$$\begin{aligned} -a(h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n)) &\approx -a(h_n)(u'(h_n)q + u''(h_n)\Delta h_n q, u(h_n)) \\ &= a'(h_n)q(u(h_n), u(h_n)) + a''(h_n)\Delta h_n q(u(h_n), u(h_n)) \\ &\quad + 2a'(h_n)q(u'(h_n)\Delta h_n, u(h_n)), \end{aligned}$$

vgl. Kap. 6.1.2, S. 73.

**Vereinfachung** Aus den oben approximierten NO lässt sich prinzipiell ein OC Algorithmus ableiten. Dieser wäre jedoch nicht in der Lage, „large-scale“ Probleme der Topologieoptimierung zu bearbeiten, da die Berechnung von  $u'(h_n)$  hierfür bei Weitem zu aufwändig ist. Entsprechend müssen, wie bei wissenschaftlich veröffentlichten OC Algorithmen der Topologieoptimierung üblich, Vereinfachungen vorgenommen werden, um eine Berechnung von  $u'(h_n)$  zu umgehen. Hierzu wird vereinfacht gesagt angenommen, dass die Integralgleichung

$$a'(h)q(u(h), v) = -a(h)(u'(h)q, v)$$

auch für die Integranden gültig ist, falls  $v = u(h)$ , dass also

$$G'(h)q(\sigma(u(h)) \cdot e(u(h))) = -G(h)(\sigma(u'(h)q) \cdot e(u(h)))$$

gilt, vgl. Kap. 6.1.4, S. 77. In Kap. 6.1.5, S. 79, wird aus dieser Vereinfachung ein OC Algorithmus entwickelt, der in seiner Struktur mit [Bend95] vergleichbar ist.

## Auswertung und Vergleich der Konvergenzeigenschaften

Der in Kap. 6.1.5, S. 79, formulierte Algorithmus wird in Kap. 6.2.3, S. 84, mit Hilfe von exemplarischen Probegeometrien mit dem Algorithmus nach [Bend95] verglichen. In sämtlichen Fällen erzielt der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, eine niedrigere Nachgiebigkeit als der Algorithmus nach [Bend95]. Der Unterschied beträgt im Durchschnitt



4,12%, mindestens 1,43% und höchstens 6,77%. Überdies weisen die durch den Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, errechneten relativen Dichteverteilungen in der Regel „glattere“ Strukturen auf als die des Algorithmus nach [Bend95].

Die numerische Implementierung beider Algorithmen ist vergleichbar einfach. Daher erscheint die Feststellung berechtigt, dass der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, dem Algorithmus nach [Bend95] aufgrund seiner durchgängig besseren Ergebnisse vorzuziehen ist.

### 1.2.3. Umformwerkzeuge

Das in Kap. 1.1 genannte dritte Ziel der Arbeit (Optimierung von Umformwerkzeugen und Vergleich mit konventionell gestalteten Umformwerkzeugen) führt zu folgenden Anforderungen an diese Arbeit:

Es sind abstrakte Bedingungen an den Designraum, die wirkenden Kräfte und die Nebenbedingungen (sog. *Probegeometrien*) zu entwickeln, die sowohl die topologieoptimierten, wie auch die konventionell gestalteten Umformwerkzeuge zu erfüllen haben. Ferner sind Kriterien zu definieren, nach denen die topologieoptimierten Umformwerkzeuge ausgewertet und mit den konventionell gestalteten Umformwerkzeugen verglichen werden. Schließlich ist das Ergebnis der Auswertung zu präsentieren. Dies geschieht wie folgt:

#### Probegeometrien

Zur Überprüfung des mathematischen Modells und zum Vergleich von optimierten mit konventionell verrippten Umformwerkzeugen durch mechanische FE-Analyse und die Gießsimulation MAGMASOFT werden parametrisch aufgebaute Probegeometrien definiert. Die Auswahl und Festlegung der Parameter orientiert sich an charakteristischen Merkmalen und den Abmessungen realer Umformwerkzeuge, vgl. Kap. 7.2, S. 88.

#### Auszuwertende Kriterien

Das zentrale mechanische Kriterium eines Umformwerkzeugs ist die errechnete Nachgiebigkeit. Diese soll möglichst gering sein. Das weitere mechanische Kriterium ist die Verschiebung der Wirkfläche in z-Richtung (sog. *Wirkflächendurchbiegung*). Diese soll möglichst homogen ausfallen, vgl. Kap. 7.4.1, S. 90.

Gießtechnisch interessieren vor allem die aus dem Gießprozess resultierenden Eigenspannungen, die möglichst gering sein sollen. Dies wird u.a. durch einen möglichst homogenen Abkühlverlauf eines gegossenen Umformwerkzeugs erreicht. Darüber hinaus bestimmen Art und Lage von *Lunkern* die gießtechnische Eignung eines Umformwerkzeugs. Lunker sind bei der Erstarrung einer Schmelze entstandene Schwindungshohlräume, vgl. [Hass00, S. 811], und sollen möglichst klein und fern der Wirkfläche positioniert sein, vgl. Kap. 7.4.2, S. 91.

Die Fertigungsgerechtigkeit eines Umformwerkzeugs wird durch die Menge an Hohlräumen und Hinterschnitten innerhalb des Umformwerkzeugs bestimmt. Je weniger davon auftreten, desto höher ist die Fertigungsgerechtigkeit, vgl. Kap. 7.4.3, S. 94.

## 1. Einleitung

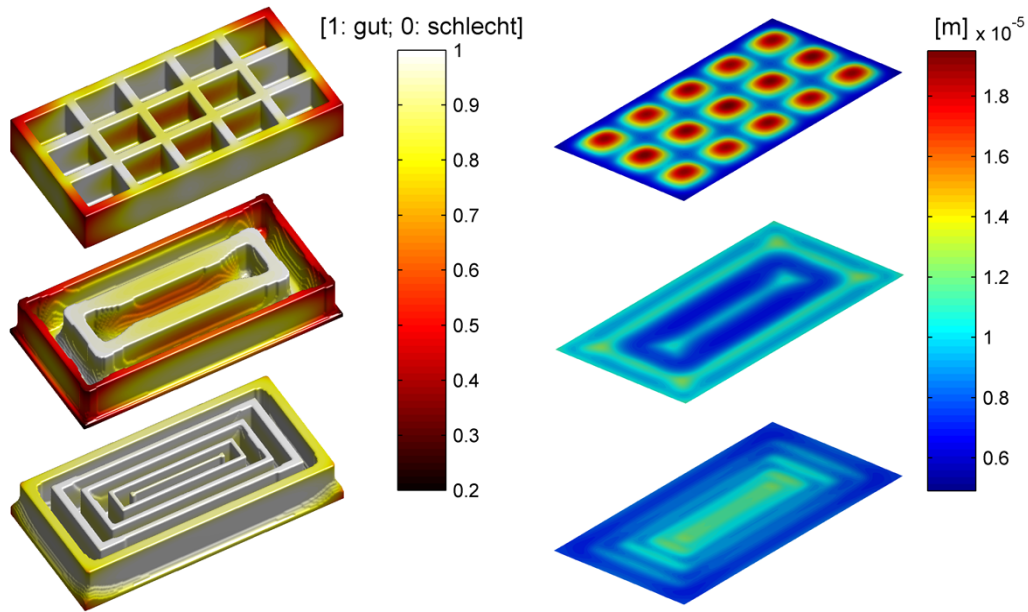


Abbildung 1.1.: Bewertung der Homogenität des Abkühlverlaufs (links) und Wirkflächendurchbiegung (rechts) von exemplarisch ausgewählten Umformwerkzeugen, auf deren Wirkfläche jeweils ein homogener Druck von 5MPa ausgeübt wird. Oben wird ein konventionell verripptes Umformwerkzeug dargestellt, in der Mitte ein rein mechanisch optimiertes Umformwerkzeug und unten ein mechanisch-gießtechnisch optimiertes Umformwerkzeug.

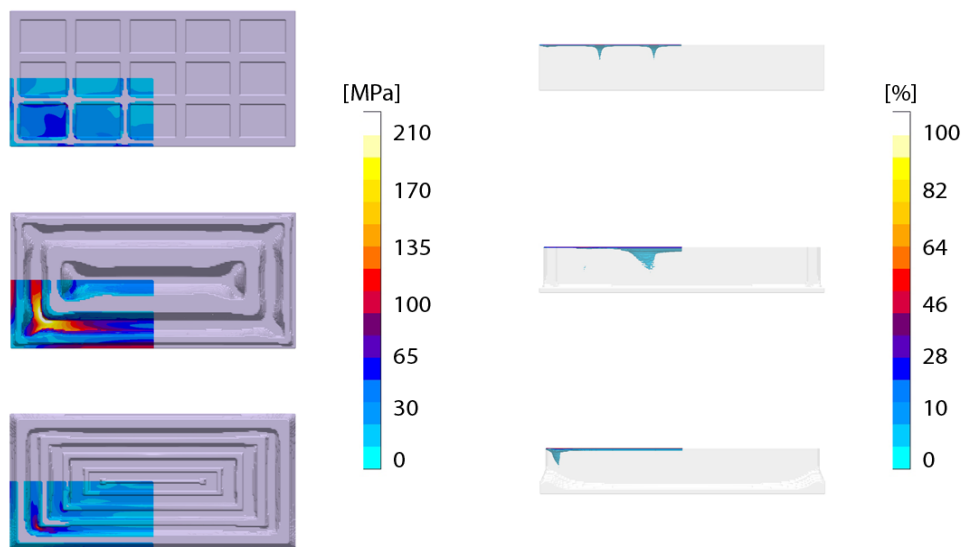


Abbildung 1.2.: Durch MAGMASOFT errechnete Eigenspannungen (links, Draufsicht) und Lunkerwahrscheinlichkeit (rechts, Seitenansicht) der exemplarisch ausgewählten Umformwerkzeuge nach Abbildung 1.1. Bereiche mit einer Lunkerwahrscheinlichkeit unter 0,5% sind transparent dargestellt.

## Ergebnis

Topologieoptimierte Umformwerkzeuge sind konventionell verrippten Umformwerkzeugen hinsichtlich der oben genannten mechanischen Kriterien stets deutlich überlegen. Während die Nachgiebigkeit von konventionell verrippten Umformwerkzeugen in der Regel um etwa 15% höher ist, fällt bei ihnen die Homogenität der Wirkflächendurchbiegung meist sogar um mehrere Hundert Prozent schlechter aus, vgl. obige Abb. 1.1 sowie Kap. 7.4.1, S. 90, und Kap. 8.3.1, S. 119.

Rein mechanisch optimierte Umformwerkzeuge weisen im Vergleich mit konventionell verrippten Umformwerkzeugen in der Regel deutlich höhere Eigenspannungen auf. Bei mechanisch-gießtechnisch optimierten Umformwerkzeugen ist der Abkühlverlauf wesentlich homogener als bei rein mechanisch optimierten Umformwerkzeugen. Die auftretenden Eigenspannungen sind vergleichbar mit denen der konventionell verrippten Umformwerkzeuge. Ferner sind topologieoptimierte Umformwerkzeuge in Bezug auf Lunker vergleichbar mit konventionell verrippten, vgl. obige Abb. 1.1 und Abb. 1.2 sowie Kap. 7.4.2, S. 91, und Kap. 8.3.1, S. 119.

Durch Einbeziehung einer Entformungsrichtung in die Topologieoptimierung werden Hohlräume und Hinterschnitte vermieden. Derart optimierte Umformwerkzeuge weisen eine vergleichbar hohe Fertigungsgerechtigkeit auf wie konventionell verrippte Umformwerkzeuge.

## 1.3. Aufbau

An den in Kap. 1.1 formulierten Zielen orientiert sich der Aufbau dieser Arbeit:

In Kapitel 2, S. 13, werden die funktionalanalytischen Grundlagen zur Topologieoptimierung genannt. Inhalt und Aufbau des Kapitels folgen größtenteils den entsprechenden Abschnitten aus [Hinz09, Kapitel 1], es fließen jedoch auch einzelne Resultate aus [Litv00, Kapitel 1] ein. Eine eingehende Behandlung des Themas kann z.B. auch in [Alt06] gefunden werden.

Kapitel 3, S. 29, befasst sich mit der linearen Elastizitätstheorie, welche das Verhalten linear elastischer Körper unter einwirkenden Kräften modelliert. Inhalt und Aufbau folgen insbesondere den entsprechenden Abschnitten aus [Brae03, Kapitel 2 und 6], vereinzelt fließen Resultate aus [Hinz09, Ciar78, Gurt72, Scha99, Thie03] ein.

Kapitel 4, S. 41, stellt die Topologieoptimierung linear elastischen Materials dar. Zunächst wird das Konzept der Gewichtungsoperatoren als Mittel zur Topologieoptimierung entwickelt. Ferner wird die eindeutige Lösbarkeit der Zustandsgleichung sowie die Lösbarkeit des Optimierungsproblems unter Verwendung von Gewichtungsoperatoren diskutiert. Schließlich werden notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Lösung des Optimierungsproblems genannt. Die Ausführungen in Kap. 4.4, S. 56, und Kap. 4.5, S. 57, basieren hierbei auf in [Litv00, Kapitel 2] dargestellten Abschnitten.

In Kapitel 5, S. 59, wird mit dem Gewichtungsoperator  $G_2$  eine in der Topologieoptimierung neue Glättungsmethodik entwickelt und mit der gängigen Glättungsmethodik *mesh-independence filter*, [Sigm94, Sigm97], verglichen.  $G_2$  liefert sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Hinsicht bessere Ergebnisse.

## 1. Einleitung

In Kapitel 6, S. 71, wird ein in der Topologieoptimierung neuartiger OC Algorithmus entwickelt. Dessen Konvergenzeigenschaften werden mit denen des in der Topologieoptimierung gängigen OC Algorithmus [Bend95] verglichen und stellen sich als durchwegs besser heraus.

In Kapitel 7, S. 87, werden hinsichtlich mechanischer Eigenschaften topologieoptimierte Umformwerkzeuge entwickelt. Ferner werden deren Eigenschaften mit konventionell gestalteten Umformwerkzeugen verglichen. Die Ausführungen in diesem Kapitel folgen [Drud09], das im Rahmen des Projekts MgOVgU veröffentlicht wurde.

In Kapitel 8, S. 97, wird mit Hilfe des Konzepts der Gewichtungsooperatoren eine Möglichkeit entwickelt, die Gießtechnik in die Topologieoptimierung einzubeziehen: Zunächst wird ermöglicht, das Stefan-Problem in der Topologieoptimierung zu nutzen, wodurch der Abkühlverlauf eines durch eine relative Dichteverteilung definierten Umformwerkzeuges beim Gießvorgang modelliert und berechnet werden kann. Ferner werden Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Stefan-Problems in der Topologieoptimierung diskutiert. Sodann wird der Gewichtsoperator  $G_3$  entwickelt, mit dem die Gießtechnik in die Topologieoptimierung einbezogen wird. Schließlich werden Umformwerkzeuge hinsichtlich Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit optimiert. Hierbei wird festgestellt, dass die Einbeziehung der Gießtechnik durch den Gewichtsoperator  $G_3$  die gießtechnischen Eigenschaften der optimierten Umformwerkzeuge deutlich verbessert. Der Vergleich mit konventionell gestalteten Umformwerkzeugen ergibt gleichwertige Ergebnissen hinsichtlich Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit, jedoch eine deutliche Überlegenheit der optimiert gestalteten Umformwerkzeuge hinsichtlich ihrer mechanischen Eigenschaften.

## 2. Grundlagen

Essenziell für das Studium der Topologieoptimierung und daraus resultierender Problemstellungen ist das Verständnis der verwendeten funktionalanalytischen Techniken. Daher werden die im weiteren Verlauf benötigten Resultate aus der Funktionalanalysis in diesem Kapitel knapp vorgestellt.

### 2.1. Banach- und Hilberträume

**Definition 2.1 (Norm, Banach-Raum)** *Es sei  $X$  ein reeller Vektorraum.*

(i) *Eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  ist eine Norm auf  $X$ , wenn für beliebige  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u, v \in X$*

a)  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$

b)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,$

c)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

*gilt.*

(ii) *Ein normierter Raum heißt Banachraum, wenn er vollständig ist, also alle Cauchyfolgen  $\{u_n\}$  einen Grenzwert  $u \in X$  besitzen, d.h. falls  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0$ , so existiert ein  $u \in X$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$ .*

**Beispiel 2.2 (Banachräume  $C(\bar{\Omega})$ ,  $C^k(\bar{\Omega})$ )**

(i) Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  sei der Funktionenraum  $C(\Omega)$  definiert durch

$$C(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ stetig}\}.$$

Falls  $\Omega$  beschränkt ist, so ist  $C(\bar{\Omega})$  ein Banachraum mit der sup-Norm

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

(ii) Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und  $u \in C(\Omega)$ . Für einen Multiindex  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$  werden dessen Ordnung durch  $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$  sowie die partielle Ableitung der Ordnung  $|\alpha|$  an der Stelle  $x$  durch

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} u(x)$$

## 2. Grundlagen

definiert. Setze nun

$$C^k(\Omega) := \{u \in C(\Omega) \mid D^\alpha(u) \in C(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Sofern  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt ist, sei

$$C^k(\bar{\Omega}) := \{u \in C^k(\Omega) \mid D^\alpha(u) \text{ hat eine stetige Erweiterung auf } \bar{\Omega}, |\alpha| \leq k\}.$$

Dann sind die Räume  $C^k(\bar{\Omega})$  Banachräume mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Definition 2.3 (Skalarprodukt, Hilbertraum)** *Es sei  $H$  ein reeller Vektorraum.*

(i) *Eine Abbildung  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Skalarprodukt auf  $H$ , falls*

a)  $(u, v) = (v, u)$  für alle  $u, v \in H$ .

b)  $(\cdot, \cdot)$  ist bilinear.

c)  $(u, u) \geq 0$  für alle  $u \in H$  und  $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

(ii) *Ein Vektorraum  $H$  mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und assoziierter Norm*

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}$$

*heißt Prä-Hilbertraum.*

(iii) *Ein Prä-Hilbertraum  $(H, (\cdot, \cdot))$  heißt Hilbertraum, wenn er unter seiner assoziierten Norm vollständig ist.*

**Beispiel 2.4** Es sei  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Dann ist  $(C(\bar{\Omega}), (\cdot, \cdot)_{L^2})$  ein Prä-Hilbertraum (jedoch kein Hilbertraum) mit dem  $L^2$ -Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

**Satz 2.5 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)** *Es sei  $H$  ein Prä-Hilbertraum. Dann gilt für alle  $u, v \in H$  die Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.1, S. 11]. □

**Definition 2.6 (Linearer Operator)** *Es seien  $X, Y$  normierte reelle Vektorräume mit den Normen  $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ .*

(i) *Eine Abbildung  $A : X \rightarrow Y$  heißt linearer Operator, sofern für alle  $u, v \in X$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av$$

*gilt.*

- (ii) Durch  $\mathcal{L}(X, Y)$  wird der Raum aller linearer Operatoren  $A : X \rightarrow Y$  definiert, die beschränkt sind im Sinne von

$$\|A\|_{X,Y} := \sup_{\|u\|_X=1} \|Au\|_Y < \infty.$$

$\mathcal{L}(X, Y)$  ist ein normierter Raum mit der Operatornorm  $\|\cdot\|_{X,Y}$ .

**Satz 2.7** Falls  $Y$  ein Banachraum ist, ist auch  $\mathcal{L}(X, Y)$  ein Banachraum.

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.2, S. 12]. □

Der folgende Satz besagt, dass jeder Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  eindeutig durch sein Verhalten auf einem dichten Unterraum von  $X$  determiniert ist, sofern  $Y$  ein Banachraum ist:

**Satz 2.8** Es seien  $X$  ein normierter Vektorraum,  $Y$  ein Banachraum und  $U \subset X$  ein dichter Unterraum mit der selben Norm wie  $X$ . Dann existiert für alle  $A \in \mathcal{L}(U, Y)$  eine eindeutige Erweiterung  $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\tilde{A}|_U = A$  sowie  $\|\tilde{A}\|_{X,Y} = \|A\|_{U,Y}$ .

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.3, S. 12]. □

**Definition 2.9 (Lineares Funktional, Dualraum)**

- (i) Es sei  $X$  ein Banachraum. Ein beschränkter linearer Operator  $u^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ , d.h.  $u^* \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  heißt beschränktes lineares Funktional auf  $X$ .
- (ii) Der Raum  $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  der beschränkten linearen Funktionale auf  $X$  heißt Dualraum von  $X$  und ist nach Satz 2.7 ein Banachraum mit der Operatornorm

$$\|u^*\| := \sup_{\|u\|_X=1} |u^*(u)|.$$

- (iii) Es wird die Notation

$$\langle u^*, u \rangle_{X^*, X} := u^*(u)$$

verwendet.

Der folgende Satz ist von besonderer Bedeutung:

**Satz 2.10 (Rieszscher Darstellungssatz)** Der Dualraum  $H^*$  eines Hilbertraumes  $H$  ist isometrisch zu  $H$ : für jedes  $v \in H$  ist  $u^*$ , definiert durch

$$\langle u^*, u \rangle_{H^*, H} := (v, u)_H \quad \forall u \in H,$$

in  $H^*$  mit der Norm  $\|u^*\|_{H^*} = \|v\|_H$ . Umgekehrt existiert für jedes  $u^* \in H^*$  ein eindeutiges  $v \in H$ , so dass wiederum

$$\langle u^*, u \rangle_{H^*, H} := (v, u)_H \quad \forall u \in H,$$

mit  $\|u^*\|_{H^*} = \|v\|_H$  gilt. Insbesondere ist ein Hilbertraum reflexiv (vgl. Def. 2.36, S. 25).

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.4, S. 13]. □

## 2.2. Sobolev-Räume

Um eine effiziente Theorie zur Lösung partieller Differentialgleichungen zu entwickeln, ist es nötig, die klassischen Funktionenräume  $C^k(\bar{\Omega})$  durch *Sobolev-Räume*  $W^{k,p}(\Omega)$  zu ersetzen. Vereinfacht gesagt setzt sich  $W^{k,p}(\Omega)$  aus allen Funktionen  $u \in L^p(\Omega)$  zusammen, die schwache partielle Ableitungen  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  für alle  $|\alpha| \leq k$  besitzen.

Hierfür wird zunächst der Raum  $L^p(\Omega)$  charakterisiert. Dabei sei  $\mathcal{B}_d$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf dem  $\mathbb{R}^d$  und  $\mu_d : \mathcal{B}_d \rightarrow [0, \infty]$  das Lebesgue Maß.

**Definition 2.11** ( $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ) *Es sei  $\Omega \in \mathcal{B}_d$ . Es werden für  $p \in [1, \infty)$  die Seminormen*

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &:= \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| := \inf\{\alpha \geq 0 : \mu_d(\{|u| > \alpha\}) = 0\} \end{aligned}$$

und für  $1 \leq p \leq \infty$  der Raum

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

definiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Räume  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  keine normierten Räume sind, da messbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \neq 0$  mit  $\|u\|_{L^p} = 0$  existieren. Aus diesem Grund verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$u \sim v \text{ in } L^p(\Omega) \iff \|u - v\|_{L^p(\Omega)} = 0 \iff u = v \text{ f.ü.},$$

um  $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$  als den Raum der Äquivalenzklassen von fast überall identischen Funktionen zu bilden, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ . Außerdem sei

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : u \in \mathcal{L}^p(K) \text{ für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

und weiterhin  $L_{\text{loc}}^p(\Omega) = \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega) / \sim$ . Überdies gelten  $L^p(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  und, falls  $\mu_d(\Omega) < \infty$ ,  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  für alle  $1 \leq p \leq q$ .

**Satz 2.12 (Fischer-Riesz)** *Die Räume  $L^p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty]$  sind Banachräume. Der Raum  $L^2(\Omega)$  ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{L^2} := \int_{\Omega} uv dx.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.6, S. 17]. □

**Lemma 2.13 (Höldersche Ungleichung)** *Es seien  $\Omega \in \mathcal{B}_d$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $q \in [1, \infty]$  der duale Exponent, d.h.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

*Dann gelten für alle  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  die Aussagen  $uv \in L^1(\Omega)$  und*

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$



*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Lemma 1.3, S. 17]. □

Zur Definition der Sobolev-Räume ist ein Verständnis der schwachen Ableitung erforderlich. Die Definition der schwachen Ableitung ist motiviert durch die Tatsache, dass für eine beliebige Funktion  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  und jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $|\alpha| \leq k$ , die Gleichung

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u \eta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \eta dx$$

für alle  $\eta \in C_c^{\infty}(\Omega)$  erfüllt ist. Hierbei sind

$$C_c^{\infty}(\Omega) := \{u \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) : \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

und

$$\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

**Definition 2.14 (Schwache Ableitung)** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Sofern eine Funktion  $w \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  existiert, so dass*

$$\int_{\Omega} w \eta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \eta dx$$

für alle  $\eta \in C_c^{\infty}(\Omega)$ , so heißt  $D^{\alpha} u := w$  die  $\alpha$ -te schwache partielle Ableitung von  $u$ .

Es sei angemerkt, dass – sofern vorhanden – die klassische Ableitung mit der schwachen übereinstimmt.

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen. Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\beta \in (0, 1]$  sei

$$C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) := \{u \in C^k(\bar{\Omega}) : D^{\alpha} u \text{ ist } \beta\text{-Hölder stetig für } |\alpha| = k\}.$$

Hierbei ist  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$   $\beta$ -Hölder stetig, falls eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|_2^{\beta}, \quad \text{für alle } x, y \in \bar{\Omega},$$

wobei  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm im  $\mathbb{R}^d$  ist. 1-Hölder Stetigkeit entspricht Lipschitz Stetigkeit. Es wird  $C^{k,0}(\bar{\Omega}) := C^k(\bar{\Omega})$  gesetzt. Falls  $\Omega$  beschränkt ist, ist  $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$  ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\|_{C^{k,\beta}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|D^{\alpha} u(x) - D^{\alpha} u(y)|}{\|x - y\|_2^{\beta}}.$$

**Definition 2.15 ( $C^{k,\beta}$ - und Lipschitz-Rand, Einheitsnormalenfeld)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.*

- (i)  $\Omega$  hat einen  $C^{k,\beta}$ -Rand,  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ,  $\beta \in [0, 1]$ , falls  $r > 0$ ,  $l \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\sigma \in \{\pm 1\}$  und eine Funktion  $\gamma \in C^{k,\beta}(\mathbb{R}^{d-1})$  für ein beliebiges  $x \in \partial\Omega$  existieren, so dass

$$\Omega \cap B(x; r) = \{y \in B(x; r) : \sigma y_l < \gamma(y_1, \dots, y_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_d)\},$$

wobei  $B(x; r)$  die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$  bezeichnet. Anstelle eines  $C^{0,1}$ -Randes sprechen wir auch von einem Lipschitz-Rand.

## 2. Grundlagen

(ii) Falls  $\partial\Omega$  ein Lipschitz-Rand ist, kann f.ü. das äußere Einheitsnormalenfeld  $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  definiert werden, wobei  $n(x)$  mit  $\|n\|_2 = 1$  der äußere Normalenvektor von  $\partial\Omega$  an der Stelle  $x$  ist.

(iii) Es sei  $\partial\Omega$  ein Lipschitz-Rand. Dann heißt die Richtungsableitung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \nabla u(x)n(x), \quad x \in \partial\Omega$$

die Normalenableitung von  $u$ .

Nachdem der Begriff der schwachen Ableitung eingeführt wurde, können die Sobolev-Räume definiert werden.

**Definition 2.16 (Sobolev-Räume)** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen. Für  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  sei der Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}$$

und mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$$

versehen.

### Notation

- (i) Für  $p = 2$  schreiben wir  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ . Es ist darauf hinzuweisen, dass  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$  für  $p \in [1, \infty]$ .
- (ii) Für schwache partielle Ableitungen verwenden wir auch die Notation  $u_{x_i}$ ,  $u_{x_i x_j}$ ,  $u_{x_i x_j x_k}, \dots$
- (iii) Für  $u \in H^1(\Omega)$  setzen wir

$$\nabla u(x) = (u_{x_1}(x), \dots, u_{x_d}(x)).$$

**Satz 2.17** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen.

- (i) Die Menge  $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty)$  ist dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$ . Somit ist  $W^{k,p}(\Omega)$  die Vervollständigung von  $\{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{k,p}} < \infty\}$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ .
- (ii) Falls  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand ist, ist  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty)$ .

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.10, S. 20].  $\square$

**Satz 2.18** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $W^{k,p}(\Omega)$  ein Banachraum. Außerdem ist der Raum  $H^k(\Omega)$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.11, S. 20].  $\square$

Um homogene Randbedingungen bereits in den Funktionenraum einzubeziehen, wird folgender Unterraum definiert:

**Definition 2.19 (Sobolev-Räume mit Nullrandbedingung)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen. Für  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  sei  $W_0^{k,p}(\Omega)$  der Abschluss von  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ , d.h. für jedes  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  existiert eine Folge  $(\eta_i) \subset C_c^\infty(\Omega)$  mit*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u - \eta_i\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Wie auch bei den Sobolev-Räumen ohne Nullrandbedingung ist  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ein Banachraum und  $H_0^k(\Omega)$  ein Hilbertraum.

$W_0^{k,p}(\Omega)$  setzt sich exakt aus den  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  zusammen, so dass  $D^\alpha u = 0$  für alle  $|\alpha| \leq k - 1$  auf  $\partial\Omega$  gilt, wobei noch eine angemessene Interpretation der Spuren  $D^\alpha u|_{\partial\Omega}$  nötig ist. Wie diese aussehen kann, soll nachfolgend geklärt werden, sofern jedenfalls  $\Omega$  einen Lipschitz-Rand hat.

Falls  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  gilt, kann der Randwert auf klassische Weise durch Verwendung der stetigen Erweiterung definiert werden. Da  $\partial\Omega$  allerdings eine Nullmenge ist und Funktionen  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  auf Nullmengen gerade nicht determiniert sind, bedarf es der Sorgfalt bei der Definition von Randwerten. Dieses Problem wird mit der Existenz eines *Spuroperators* gelöst:

**Satz 2.20 (Spursatz)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann existiert für alle  $p \in [1, \infty]$  ein eindeutiger, beschränkter linearer Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega),$$

so dass

$$Tu = u|_{\partial\Omega}, \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Hierbei hängt  $\|T\|_{W^{1,p}(\Omega), L^p(\partial\Omega)}$  nur von  $\Omega$  und  $p$  ab.  $Tu$  wird die Spur von  $u$  auf  $\partial\Omega$  genannt.

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.12, S. 21].  $\square$

Für die Behandlung von Randwertproblemen ist es nützlich zu erkennen, dass die Seminorm  $|\cdot|_{H^k(\Omega)}$ , definiert durch

$$|u|_{H^k(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

## 2. Grundlagen

auf  $H_0^k(\Omega)$  äquivalent zur Norm  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$  ist. Offensichtlich gilt

$$|u|_{H^k(\Omega)} \leq \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Aus der im nachfolgenden Satz genannten Ungleichung folgt die Äquivalenz:

**Satz 2.21 (Poincaré-Friedrichssche Ungleichung)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Dann existiert ein  $C > 0$ , so dass*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C|u|_{H^k(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in H_0^k(\Omega).$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.13, S. 22]. □

Sobolev-Räume sind in klassische Räume eingebettet:

**Satz 2.22 (Einbettungssatz)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand. Es seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$ .*

(i) *Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 < \beta < 1$  mit*

$$m - \frac{d}{p} \geq k + \beta$$

*gilt die stetige Einbettung*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\bar{\Omega}),$$

*d.h., es existiert ein  $C > 0$ , so dass für alle  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  (eventuell sind Veränderungen auf einer Nullmenge nötig)  $u \in C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$  gilt, wobei*

$$\|u\|_{C^{k,\beta}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

(ii) *Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  mit*

$$m - \frac{d}{p} > k + \beta$$

*gilt die kompakte Einbettung*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{k,\beta}(\bar{\Omega}),$$

*d.h., abgeschlossene Kugeln in  $W^{m,p}(\Omega)$  sind relativ kompakt in  $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$ , d.h., jede in  $W^{m,p}(\Omega)$  beschränkte Folge  $\{x_k\} \subset W^{m,p}(\Omega)$  besitzt eine in  $C^{k,\beta}(\bar{\Omega})$  konvergente Teilfolge  $\{x_{k_i}\}$ .*

(iii) *Für  $q \geq 1$  und  $l \in \mathbb{N}_0$  mit*

$$m - \frac{d}{p} \geq l - \frac{d}{q}$$

*gilt die stetige Einbettung*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega).$$

*Die Einbettung ist kompakt, falls  $m > l$  und  $m - \frac{d}{p} > l - \frac{d}{q}$ .*

Für beliebige offene und beschränkte  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  gelten die Aussagen (i) – (iii) ebenfalls für  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.14, S. 22]. □

Aufgrund der Bedeutung für den weiteren Verlauf werden nachfolgend spezielle Einbettungen genannt:

### Proposition 2.23

(i) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand,  $k \in \mathbb{N}$  und  $p_0 > 3$ . Dann gilt

$$W^{k,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_0}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{k-1,\infty}(\Omega).$$

(ii) Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume. Gelten  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$  oder  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ , so gilt auch  $X \hookrightarrow Z$ .

*Beweis:*

(i) Es sei  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{i=1}^n x_i^{p_0} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^{p_0}, \quad \text{falls alle } x_i \geq 0.$$

Weil  $x \mapsto x^{1/p_0}$  für  $x \geq 0$  streng monoton wächst, folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p_0}} &= \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}^{p_0} dx \right)^{1/p_0} \\ &= \mu_3(\Omega)^{1/p_0} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}^{p_0} \right)^{1/p_0} \\ &\leq \mu_3(\Omega)^{1/p_0} \|u\|_{W^{k,\infty}}. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.22, S. 20, folgt die Aussage.

(ii) Gilt  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ , so konvergiert eine in  $Y$  konvergente Folge auch in  $Z$ . Gilt  $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$ , so ist eine in  $X$  beschränkte Folge auch in  $Y$  beschränkt.

□

## 2.3. Bochner-Räume

Im Folgenden werden knapp die grundlegenden Räume vorgestellt, in welchen nach schwachen Lösungen parabolischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung gesucht wird. Seien nachfolgend stets  $X$  ein separabler Banachraum und  $T > 0$ . Betrachtet werden Abbildungen

$$t \in [0, T] \mapsto u(t) \in X.$$

Es wird das Verständnis der Messbarkeit, Integrierbarkeit und schwachen Differenzierbarkeit erweitert.

### Definition 2.24 (Einfache Funktionen, starke Messbarkeit)

(i) Wir bezeichnen die Funktion  $s : [0, T] \rightarrow X$  als einfach, falls sie von der Form

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{E_i}(t) y_i$$

mit Lebesgue messbaren Mengen  $E_i \subset [0, T]$  und  $y_i \in X$  ist.

(ii) Eine Funktion  $f : t \in [0, T] \mapsto f(t) \in X$  heißt stark messbar, falls einfache Funktionen  $s_k : [0, T] \rightarrow X$  existieren, so dass

$$s_k(t) \rightarrow f(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0, T].$$

### Definition 2.25 (Bochner-Integral)

(i) Wir definieren für eine einfache Funktion  $s(t) = \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{E_i}(t) y_i$  das Integral

$$\int_0^T s(t) dt := \sum_{i=1}^m y_i \mu(E_i).$$

(ii) Eine Funktion  $f : [0, T] \rightarrow X$  heißt Bochner-integrierbar, falls eine Folge einfacher Funktionen  $(s_k)$  existiert mit  $s_k(t) \rightarrow f(t)$  f.ü. und

$$\int_0^T \|s_k(t) - f(t)\|_X dt \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

(iii) Falls  $f$  Bochner-integrierbar ist, definieren wir

$$\int_0^T f(t) dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T s_k(t) dt.$$

**Satz 2.26 (Bochner-Integrierbarkeit)** Eine stark messbare Funktion  $f : [0, T] \rightarrow X$  ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn  $t \mapsto \|f(t)\|_X$  Lebesgue integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt$$

und für alle  $u^* \in X^*$  ist die Funktion  $t \mapsto \langle u^*, f(t) \rangle_{X^*, X}$  integrierbar mit

$$\left\langle u^*, \int_0^T f(t) dt \right\rangle_{X^*, X} = \int_0^T \langle u^*, f(t) \rangle_{X^*, X} dt.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.30, S. 38]. □

Dies motiviert zu folgender Definition Banachraum-wertiger Räume:

**Definition 2.27** *Es sei  $X$  ein separabler Banachraum. Für  $1 \leq p < \infty$  definieren wir den Raum*

$$L^p(0, T; X) := \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ stark messbar : } \|u\|_{L^p(0, T; X)} := \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Darüber hinaus ist

$$L^\infty(0, T; X) := \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ stark messbar : } \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X < \infty \right\}.$$

Der Raum  $C^k([0, T]; X)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , ist entsprechend definiert als der Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[0, T]$ .

**Definition 2.28 (Schwache Zeitableitung)** *Es sei  $u \in L^1(0, T; X)$ . Die Funktion  $v \in L^1(0, T; X)$  heißt schwache Zeitableitung von  $u$ , geschrieben  $u_t = v$ , falls*

$$\int_0^T \eta'(t) u(t) dt = - \int_0^T \eta(t) v(t) dt \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty((0, T)).$$

**Lemma 2.29** *Für jedes  $u \in L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , existiert eine Folge einfacher Funktionen  $(s_k)$  mit  $s_k \rightarrow u$  f.ü. und  $s_k \rightarrow u$  in  $L^p(0, T; X)$ . Darüber hinaus sind Funktionen der Form*

$$\sum_{i=1}^m \eta_i(t) u_i, \quad \eta_i \in C_c^\infty((0, T)), \quad u_i \in X$$

*dicht in  $L^p(0, T; X)$ . Weiterhin sind auch  $C_c^\infty((0, T); X)$  und  $C^k([0, T]; X)$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  dicht in  $L^p(0, T; X)$ .*

**Satz 2.30** *Es sei  $X$  ein separabler Banachraum. Dann ist  $L^p(0, T; X)$  für  $1 \leq p < \infty$  ein Banachraum. Weiterhin kann der Dualraum von  $L^p(0, T; X)$  isometrisch identifiziert werden durch  $L^q(0, T; X^*)$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , mit*

$$\langle v, u \rangle_{L^q(0, T; X^*), L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X^*, X} dt.$$

*Falls  $H$  ein separabler Hilbertraum ist, ist  $L^2(0, T; H)$  ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt*

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} := \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

## 2. Grundlagen

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.31, S. 39]. □

**Definition 2.31 (Gelfandscher Dreier)** *Es seien  $H, V$  separable Hilberträume mit der stetigen und dichten Einbettung  $V \hookrightarrow H$ . Dann gilt die stetige und dichte Einbettung*

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*,$$

*die Gelfandscher Dreier genannt wird. Die Einbettung  $H \hookrightarrow V^*$  ist gegeben durch*

$$u \in H \mapsto (u, \cdot)_H \in H^* \subset V^*.$$

*Darüber hinaus werde der Raum*

$$W(0, T; H, V) := \{u : u \in L^2(0, T; V), u_t \in L^2(0, T; V^*)\}$$

*mit der Norm*

$$\|u\|_{W(0, T; H, V)} := \left( \|u\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right)^{1/2}$$

*eingeführt.*

Aufgrund des Gelfandschen Dreiers  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$  gilt für  $u \in L^2(0, T; V)$  auch  $u \in L^2(0, T; V^*)$  und damit  $u \in L^1(0, T; V^*)$ . Daher macht es Sinn,  $u_t \in L^1(0, T; V^*)$  zu verlangen und die zusätzliche Bedingung  $u_t \in L^2(0, T; V^*)$  einzuführen.

**Satz 2.32** *Es sei  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$  ein Gelfandscher Dreier. Dann ist  $W(0, T; H, V)$  ein Hilbertraum und es gilt die stetige Einbettung*

$$W(0, T; H, V) \hookrightarrow C([0, T]; H).$$

*Überdies gilt für alle  $u, v \in W(0, T; H, V)$  die Integrationsformel*

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t (\langle u_t(\tau), v(\tau) \rangle_{V^*, V} + \langle v_t(\tau), u(\tau) \rangle_{V^*, V}) d\tau.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.32, S. 40]. □

## 2.4. Schwache Konvergenz

In unendlichdimensionalen Räumen sind beschränkte, abgeschlossene Mengen nicht mehr zwingend kompakt. Um Kompaktheitsresultate zu erlangen, muss das Konzept der *schwachen Konvergenz* verwendet werden.

**Definition 2.33 (Schwache Konvergenz)** *Es sei  $X$  ein Banachraum. Eine Folge  $\{x_k\} \subset X$  konvergiert schwach gegen  $x \in X$ , geschrieben*

$$x_k \rightharpoonup x,$$

*falls*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^*, x_k \rangle_{X^*, X} = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X}, \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$



**Definition 2.34 (Schwach abgeschlossen, schwach folgenkompakt)** *Es seien  $X$  ein Banachraum und  $C \subset X$ .*

(i) *Die Menge  $C$  heißt schwach abgeschlossen, wenn*

$$\{x_k\} \in C, x_k \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad x \in C.$$

(ii) *Die Menge  $C$  heißt schwach folgenkompakt, wenn*

$$\{x_k\} \in C \quad \Rightarrow \quad \exists \{x_{k_i}\} \subset \{x_k\} \text{ mit } x_{k_i} \rightharpoonup x, x \in C.$$

Ist eine Menge schwach abgeschlossen, so ist sie abgeschlossen. Der Umkehrschluss ist im Allgemeinen falsch.

**Satz 2.35 (Eigenschaften schwacher Konvergenz)** *Es sei  $X$  ein Banachraum.*

(i) *Es sei  $\{x_k\} \subset X$  mit  $x_k \rightarrow x \in X$ . Dann gilt  $x_k \rightharpoonup x$ .*

(ii) *In einem endlichdimensionalen Vektorraum  $X$  ist schwache Konvergenz äquivalent zu Konvergenz.*

(iii) *Ist  $X$  ein Hilbertraum, so folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, dass schwache Konvergenz  $x_k \rightharpoonup x \in X$  äquivalent ist zu*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, v)_X = (x, v)_X \quad \text{für alle } v \in X.$$

(iv) *Es sei  $\{x_k\} \subset X$  schwach konvergent gegen  $x \in X$ . Dann ist  $\{x_k\}$  beschränkt.*

(v) *Es sei  $C \subset X$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $C$  schwach abgeschlossen.*

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.16, S. 25]. □

**Definition 2.36 (Reflexiv)** *Ein Banachraum  $X$  ist reflexiv, wenn die kanonische Einbettung  $x \in X \mapsto \langle \cdot, x \rangle_{X^*, X} \in (X^*)^*$  surjektiv ist, d.h., wenn für jedes  $x^{**} \in (X^*)^*$  ein  $x \in X$  existiert mit*

$$\langle x^{**}, x^* \rangle_{(X^*)^*, X^*} = \langle x^*, x \rangle_{X^*, X} \quad \text{für alle } x^* \in X^*.$$

Es gilt  $\|x^{**}\|_{(X^*)^*} = \|x\|_X$ . Weiterhin sind  $L^p$  und  $W^{m,p}$  für  $1 < p < \infty$  und  $m \in \mathbb{N}$  sowie jeder Hilbertraum reflexiv.

**Satz 2.37 (Schwache Folgenkompaktheit)** *Es sei  $X$  ein reflexiver Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Jede beschränkte Folge  $\{x_k\} \subset X$  beinhaltet eine schwach konvergente Teilfolge  $\{x_{k_i}\} \subset \{x_k\}$  mit  $x_{k_i} \rightharpoonup x \in X$ .*

(ii) *Jede beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge  $C \subset X$  ist schwach folgenkompakt.*

## 2. Grundlagen

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.17, S. 25].  $\square$

**Definition 2.38 (Schwach [unterhalb-]stetig)** *Es seien  $X$  ein Banachraum und  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional.*

- (i)  $F$  heißt schwach stetig, sofern für eine beliebige schwach konvergente Folge  $\{x_k\} \subset X$  gilt, dass  $F(x_k) \rightarrow F(x)$ .
- (ii)  $F$  heißt schwach unterhalbstetig, sofern für eine beliebige schwach konvergente Folge  $\{x_k\} \subset X$  gilt, dass  $\liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k) \geq F(x)$ .

Ist  $F$  schwach stetig, so ist  $F$  stetig. Der Umkehrschluss gilt üblicherweise nicht. Insbesondere sind die meisten nichtlinearen stetigen Funktionale nicht schwach stetig.

**Satz 2.39 (Schwach [unterhalb-]stetige Funktionale)** *Es sei  $X$  ein Banachraum. Dann gilt:*

- (i) Jedes beschränkte lineare Funktional  $F \in X^*$  ist schwach stetig.
- (ii) Jedes stetige und konvexe Funktional  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist schwach unterhalbstetig.

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.18, S. 25].  $\square$

Ist  $X$  ein Hilbertraum, so sind insbesondere die Funktionale  $\|\cdot\|_X$  und  $\|\cdot\|_X^2$  schwach unterhalbstetig.

Nachfolgend werden Operatoren vorgestellt, die schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen abbilden:

**Definition 2.40 (Kompakte Operatoren)** *Ein linearer Operator  $A : X \rightarrow Y$  zwischen normierten Räumen heißt kompakt, wenn  $A$  beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, also*

$$M \subset X \text{ beschränkt} \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \subset Y \text{ kompakt.}$$

Nachdem kompakte Mengen beschränkt sind, sind kompakte Operatoren automatisch beschränkt und damit stetig. Für eine kompakte Einbettung  $X \hookrightarrow Y$  ist der Einbettungsoperator  $I_{X,Y} : x \in X \mapsto y \in Y$  kompakt.

Es folgt der Zusammenhang zwischen schwacher und starker Konvergenz:

**Satz 2.41** *Es sei  $A : X \rightarrow Y$  ein kompakter Operator zwischen normierten Räumen. Dann gilt für alle schwach konvergenten Folgen  $\{x_k\} \subset X$  mit  $x_k \rightharpoonup x \in X$*

$$Ax_k \rightarrow Ax \quad \text{in } Y.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Lemma 1.6, S. 26].  $\square$

## 2.5. Gâteaux- und Fréchet Differenzierbarkeit

Nachfolgend wird vorgestellt, wie der Begriff der Differenzierbarkeit auf Operatoren zwischen Banachräumen ausgedehnt wird.

**Definition 2.42 (Richtungs-/ G- und F-Differenzierbarkeit)** *Es seien  $F : U \subset X \rightarrow Y$  ein Operator mit Banachräumen  $X, Y$  und  $U \neq \emptyset$  offen.*

- (i)  $F$  heißt richtungsdifferenzierbar in  $x \in U$ , falls der Grenzwert

$$dF(x, h) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \in Y$$

für alle  $h \in X$  existiert. In diesem Fall heißt  $dF(x, h)$  Richtungsableitung von  $F$  in Richtung  $h$ .

- (ii)  $F$  heißt Gâteaux differenzierbar ( $G$ -differenzierbar) in  $x \in U$ , falls  $F$  richtungsdifferenzierbar in  $x$  und die Richtungsableitung  $F'(x) : X \ni h \mapsto dF(x, h) \in Y$  beschränkt und linear ist, also  $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
- (iii)  $F$  ist Fréchet differenzierbar ( $F$ -differenzierbar) in  $x \in U$ , falls  $F$   $G$ -differenzierbar in  $x$  ist und ferner folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|_Y = o(\|h\|_X) \quad \text{für } \|h\|_X \rightarrow 0.$$

- (iv) Falls  $F$  richtungs-,  $G$ -,  $F$ -differenzierbar in jedem  $x \in V$  mit  $V \subset U$  offen ist, so heißt  $F$  richtungs-,  $G$ -,  $F$ -differenzierbar auf  $V$ .

Höhere Ableitungen werden folgendermaßen definiert: Falls  $F$   $G$ -differenzierbar in einer Umgebung  $V$  von  $x$  ist und  $F' : V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  wiederum  $G$ -differenzierbar in  $x$  ist, heißt  $F$  zweimal  $G$ -differenzierbar in  $x$ .  $F''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$  bezeichnet die zweite  $G$ -Ableitung von  $F$  in  $x$ . Höhere  $G$ -Ableitungen sind äquivalent definiert und auf die selbe Weise auch höhere  $F$ -Ableitungen.

Offensichtlich impliziert  $F$ -Differenzierbarkeit von  $F$  in  $x$  auch Stetigkeit von  $F$  in  $x$ . Wenn  $F$   $k$ -mal  $F$ -differenzierbar und  $F^{(k)}$  stetig ist, heißt  $F$   $k$ -mal stetig  $F$ -differenzierbar.

Nachfolgend einige Eigenschaften:

- (i) Für  $F$ -differenzierbare Operatoren gilt die Kettenregel. Es sei  $H(x) := G(F(x))$ . Falls  $F, G$   $F$ -differenzierbar in  $x$  bzw.  $F(x)$  sind, ist  $H$   $F$ -differenzierbar in  $x$  mit  $H'(x) = G'(F(x))F'(x)$ . Falls  $F$   $G$ -differenzierbar in  $x$  ist und  $G$   $F$ -differenzierbar in  $F(x)$ , so ist  $H$   $G$ -differenzierbar in  $x$  und die Kettenregel gilt. Überdies gilt auch die Summenregel für  $F$ - und  $G$ -Ableitungen.
- (ii) Falls  $F$   $G$ -differenzierbar in einer Umgebung von  $x$  ist und  $F'$  stetig in  $x$  ist, ist  $F$   $F$ -differenzierbar in  $x$ .

## 2. Grundlagen

- (iii) Falls  $F : X \times Y \rightarrow Z$   $F$ -differenzierbar in  $(x, y)$  ist, sind  $F(\cdot, y)$  und  $F(x, \cdot)$   $F$ -differenzierbar in  $x$  bzw.  $y$ . Diese sog. partiellen Ableitungen werden mit  $F_x(x, y)$  und  $F_y(x, y)$  bezeichnet. Es gilt

$$F'(x, y)(h_x, h_y) = F_x(x, y)h_x + F_y(x, y)h_y.$$

- (iv)  $F : X \times Y \rightarrow Z$  ist genau dann stetig  $F$ -differenzierbar in der offenen Menge  $U \subset X \times Y$ , wenn die partiellen Ableitungen stetig  $F$ -differenzierbar in  $U$  sind.

- (v) Falls  $F$   $G$ -differenzierbar in einer Umgebung  $V$  von  $x$  ist, dann gilt für alle  $h \in X$  mit  $\{x + th : t \in [0, 1]\} \subset V$

$$\|F(x + h) - F(x)\|_Y \leq \sup_{0 < t < 1} \|F'(x + th)h\|_Y.$$

Falls  $t \in [0, 1] \mapsto F'(x + th)h \in Y$  stetig ist, gilt

$$F(x + h) - F(x) = \int_0^1 F'(x + th)h dt,$$

wobei das  $Y$ -wertige Integral als Riemann Integral definiert ist.

Anschließend wird die Produktregel auf Operatoren zwischen Banachräumen verallgemeinert:

**Definition 2.43 (Produkt)** *Es seien  $X, Y, W$  Banachräume. Eine stetige, bilineare Abbildung  $B : X \times Y \rightarrow W$  heißt Produkt.*

**Satz 2.44 (Produktregel)** *Es seien  $X, Y, W, Z$  Banachräume,  $U \subset X$  offen und nicht-leer,  $F : U \rightarrow Y$  und  $G : U \rightarrow Z$   $F$ -differenzierbar und  $B : Y \times Z \rightarrow W$  ein Produkt. Dann ist  $H : x \mapsto B(F(x), G(x))$   $F$ -differenzierbar mit der Ableitung*

$$H'(x)h = B(F'(x)h, G(x)) + B(F(x), G'(x)h), \quad \text{für alle } x \in U, h \in X.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Ruzi04, Satz 2.2.7]. □

Der nachfolgende Satz hat große Bedeutung für Optimierungsprobleme mit partiellen Differentialgleichungen:

**Satz 2.45 (Satz über implizite Funktionen)** *Es seien  $X, Y, Z$  Banachräume und  $F : G \rightarrow Z$  eine stetig  $F$ -differenzierbare Abbildung von einer offenen Menge  $G \subset X \times Y$  nach  $Z$ . Es sei  $(x_0, y_0) \in G$  derart, dass  $F(x_0, y_0) = 0$  und  $F_y(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$  eine beschränkte Inverse habe. Dann existieren eine offene Umgebung  $U_X(x_0) \times U_Y(y_0) \subset G$  von  $(x_0, y_0)$  und eine eindeutig definierte stetige Funktion  $w : U_X(x_0) \rightarrow Y$ , so dass*

(i)  $w(x_0) = y_0$ ,

- (ii) für alle  $x \in U_X(x_0)$  genau ein  $y \in U_Y(y_0)$  mit  $F(x, y) = 0$  existiert, nämlich  $y = w(x)$ .

Überdies ist die Abbildung  $w : U_X(x_0) \rightarrow Y$  stetig  $F$ -differenzierbar mit der Ableitung

$$w'(x) = -F_y(x, w(x))^{-1}F_x(x, w(x)).$$

Falls  $F : G \rightarrow Z$   $m$ -fach stetig  $F$ -differenzierbar ist, so ist es auch  $w : U_X(x_0) \rightarrow Y$ .

*Beweis:* Siehe z.B. [Hinz09, Theorem 1.41, S. 52]. □

# 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

Bei der Topologieoptimierung ist als Nebenbedingung stets die Zustandsgleichung zu erfüllen. In dieser ist ein strukturmechanisches Problem zu lösen. Der von uns als linear elastisch angenommene Körper unterliegt hierbei einem vorgegebenen System an Kräften und hat darauf akkurat zu reagieren. Es ist für uns also von Bedeutung, mit den Grundlagen der Strukturmechanik und hierbei vor allem mit der *linearen Elastizitätstheorie* vertraut zu sein. Dabei beschäftigen uns insbesondere Fragen nach der Lösbarkeit unseres kontinuierlichen strukturmechanischen Problems, der diskreten Approximation einer solchen Lösung und der Approximationsgüte.

Probleme in der Strukturmechanik befassen sich mit der Deformation von Körpern unter Einwirkung von Kräften unterschiedlicher Art. Von Interesse sind hierbei die Verzerrungen und Spannungen, die durch die Verformung eines Körpers entstehen. Die *Elastizitätstheorie* geht davon aus, dass die auftretenden Spannungen nur von der ersten Ableitung der Verschiebungen herrühren. Die lineare Elastizitätstheorie nimmt einen ausschließlich linearen Zusammenhang an.

Im Folgenden werden in Kap. 3.1 die wesentlichen Grundlagen der Elastizitätstheorie aufgeführt und die im weiteren Verlauf der Arbeit bedeutende Lamé-Gleichung hergeleitet. In Kap. 3.2, S. 33, folgt die schwache Formulierung der Lamé-Gleichung. In Kap. 3.3, S. 34, werden die Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung präsentiert. Kap. 3.4, S. 37, beschreibt die Methode der diskreten Approximation solcher schwachen Lösungen, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet wird. Schließlich wird die Güte dieser Approximationen mittels Fehlerabschätzung diskutiert.

## 3.1. Die Lamé-Gleichung in ihrer starken Form

Die Grundlage der Elastizitätstheorie bildet die dreidimensionale Theorie. Ihre wesentlichen Bestandteile sind die Kinematik, die Gleichgewichtsbedingungen und die Materialgesetze:

### 3.1.1. Kinematik

Es werde ein beliebiger Körper betrachtet. Für diesen sei eine *Referenzkonfiguration*  $\bar{\Omega}$  bekannt, welche der Abschluss einer beschränkten offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei. In der Regel ist  $\bar{\Omega}$  gerade die Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , die der Körper im spannungsfreien Zustand einnimmt. Der aktuelle Zustand des Körpers wird durch eine Abbildung

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

### 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

beschrieben. Insbesondere nennt  $\phi(x)$  den Ort des Punktes, der sich im Referenzzustand am Ort  $x \in \bar{\Omega}$  befunden hat. Es ist

$$\phi = id + u,$$

wobei  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  als *Verschiebung* bezeichnet wird.

Nachfolgend werde  $\phi$  stets als hinreichend glatt angenommen.  $\phi$  ist eine *Deformation*, wenn

$$\det(\nabla\phi(x)) > 0$$

für ein  $x \in \Omega$  gilt. Dabei ist  $\nabla\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der *Deformationsgradient* und seine Matrixdarstellung lautet

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

wobei  $\nabla\phi = \nabla u$ . Bei einer Deformation werden Teilmengen mit positivem Volumen wieder in solche mit positivem Volumen abgebildet. Deformationen sind lokal injektive Abbildungen.

Einer der wichtigsten Begriffe der Elastizitätstheorie ist die *Verzerrung* (engl.: *strain*), die lokale Änderungen der Längen im betrachteten Körper beschreibt. In der linearen Theorie werden die quadratischen Terme vernachlässigt und es ergibt sich die *symmetrisierte Verzerrung*  $e : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , definiert durch

$$e := \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T).$$

Der Anschaulichkeit halber wird oft  $e(u)$  anstelle von  $e$  geschrieben.

#### 3.1.2. Gleichgewichtsbedingungen

In der Mechanik wird der Einfluss der Kräfte axiomatisch behandelt. Es wird angenommen, dass die Kräfte-Wechselwirkungen vollständig zurückgeführt werden können auf flächenhaft verteilt wirkende Kräfte (kurz: *Flächenkräfte*) und volumenhaft verteilt wirkende Kräfte (kurz: *Volumenkräfte*). Eine typische Volumenkraft ist die Schwerkraft, während etwa der Luftdruck eine Flächenkraft darstellt.

Das zentrale Axiom der Mechanik besagt nun, dass sich in einem Gleichgewichtszustand alle Kräfte und Momente zu Null addieren:

**Axiom des statischen Gleichgewichts** Der Körper  $\mathcal{B}$  befinde sich unter den Volumenkräften  $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (also im deformierten Zustand) im Gleichgewicht. Dann existiert ein Vektorfeld  $g : \mathcal{B} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $S^2$  bezeichnet die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$ ), so dass in jeder Teilmenge  $V \subset \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \int_V f(x) dx + \int_{\partial V} g(x, n) ds &= 0, \\ \int_V x \wedge f(x) dx + \int_{\partial V} x \wedge g(x, n) ds &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Das Zeichen  $\wedge$  steht für das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$ . Die durch  $g$  spezifizierten Flächenkräfte hängen hierbei nicht nur vom Ort, sondern auch von der Richtung des äußeren Normalenvektors  $n$  ab.

Im nachfolgenden Satz von Cauchy wird die Abhängigkeit von der Normalen  $n$  geklärt und die klassische Differentialgleichung der Mechanik aufgestellt. Hierbei seien:

- $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  Menge der  $3 \times 3$ -Matrizen,
- $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  Menge der  $3 \times 3$ -Matrizen mit positiver Determinante,
- $\mathbb{O}^{3 \times 3}$  Menge der orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen,
- $\mathbb{O}_+^{3 \times 3}$  Menge der orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen mit positiver Determinante,
- $\mathbb{S}^{3 \times 3}$  Menge der symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrizen,
- $\mathbb{S}_+^{3 \times 3}$  Menge der positiv definiten  $3 \times 3$ -Matrizen.

**Satz 3.1 (Satz von Cauchy)** *Es seien  $g(\cdot, n) \in C^1(\mathcal{B}, \mathbb{R}^3)$ ,  $g(x, \cdot) \in C^0(S^2, \mathbb{R}^3)$  und  $f \in C(\mathcal{B}, \mathbb{R}^3)$  im Gleichgewicht gemäß des Axioms des statischen Gleichgewichts. Dann gibt es ein symmetrisches Tensorfeld  $\sigma \in C^1(\mathcal{B}, \mathbb{S}^{3 \times 3})$  mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} g(x, n) &= \sigma(x)n, & x \in \mathcal{B}, n \in S^2, \\ \operatorname{div} \sigma(x) + f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Der Tensor  $\sigma$  wird (Cauchyscher) Spannungstensor genannt.

*Beweis:* Siehe zum Beispiel [Brae03, S. 265]. □

Es sei darauf hingewiesen, dass  $\operatorname{div} \sigma(x) \in \mathbb{R}^3$  gilt, genauer

$$\operatorname{div} \sigma(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} (x).$$

### 3.1.3. Materialgesetze

Eines der zentralen Probleme der Strukturmechanik besteht darin, zu gegebenen äußeren Kräften die Deformation des Körpers und die Spannungen zu bestimmen. Die im Satz von Cauchy genannte Differentialgleichung liefert dazu drei Gleichungen. Dadurch sind die sechs Komponenten des symmetrischen Spannungstensors jedoch noch nicht vollständig bestimmt. Die fehlenden Gleichungen ergeben sich aus den Materialgesetzen. Darin kommt zum Ausdruck, dass die Deformation zu gegebenen Kräften auch von Materialeigenschaften abhängt.

#### Definition 3.2 (Elastisches, homogenes, objektives, isotropes Material)

(i) *Ein Material heißt elastisch, wenn es eine Abbildung*

$$\hat{\sigma} : \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{S}_+^{3 \times 3}$$

*gibt, so dass für jeden deformierten Zustand*

$$\sigma(x) = \hat{\sigma}(\nabla \phi(\phi^{-1}(x)))$$

*gilt.  $\hat{\sigma}$  heißt Antwortfunktion.*

### 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

- (ii) Ein Material heißt homogen, wenn  $\hat{\sigma}$  nicht explizit vom Ort  $\phi^{-1}(x)$  abhängt.
- (iii) Ein Material heißt objektiv, wenn  $Q\sigma(x)n = \sigma(Qx)Qn$  für alle  $Q \in \mathbb{O}_+^{3 \times 3}$ .
- (iv) Ein Material heißt isotrop, wenn

$$\hat{\sigma}(\nabla\phi(\phi^{-1}(x))) = \hat{\sigma}(\nabla\phi(\phi^{-1}(x))Q)$$

für alle  $Q \in \mathbb{O}_+^{3 \times 3}$ .

Die Forderung, die an den Spannungstensor  $\sigma$  eines elastischen Materials gestellt wird, wird als *konstitutives Gesetz* bezeichnet. Bei diesem wird angenommen, dass die Spannungen in lokaler Weise nur von den ersten Ableitungen der Verschiebungen abhängen.

Die Definition der Objektivität eines Materials wird auch *Axiom der Koordinatenunabhängigkeit* genannt und für jedes Material gefordert. Isotropie dagegen ist eine reine Materialeigenschaft: Sie besagt, dass im Material keine Richtung ausgezeichnet ist.

#### 3.1.4. Lineare Elastizitätstheorie

Die Deformationen, Verzerrungen und Spannungen in einem Körper sind durch die Kinetik, die Gleichgewichtsbedingungen und die Materialgesetze bestimmt. Grundsätzlich sind hierbei nur die Gleichgewichtsbedingungen für den Spannungstensor linear.

Die *geometrisch lineare Theorie* geht von kleinen Verschiebungen aus und verwendet anstelle der Verzerrung nur die symmetrisierte Verzerrung  $e$ . Die *physikalisch lineare Theorie* nimmt kleine Verzerrungen an und verwendet ein Materialgesetz, welches einen linearen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen herstellt (kurz: *lineares Materialgesetz*). Die *lineare Elastizitätstheorie* ist eine geometrisch und physikalisch lineare Theorie. In ihr braucht nicht zwischen den (oben nicht erwähnten) unterschiedlichen Spannungstensoren unterschieden werden.

In der linearen Elastizitätstheorie errechnet sich die Spannung  $\sigma$  durch Verknüpfung der symmetrisierten Verzerrung  $e$  mit einem Tensor 4. Ordnung  $\mathcal{C}$ , dem *Elastizitätstensor*. Aufgrund der geforderten Materialeigenschaften und den daraus resultierenden Symmetrien müssen nicht die gesamten 81, sondern nur noch 21 Komponenten von  $\mathcal{C}$ , die sogenannten *Elastizitäten*, benannt werden. Hierfür sind wiederum - abhängig von der Komplexität des Materialgesetzes - 2 bis 21 Konstanten bzw. Funktionen nötig.

Das bekannteste und auch einfachste lineare Materialgesetz ist das *Hookesche Gesetz*. Es lautet bei geometrisch linearer Theorie

$$\sigma = 2\mu e + \lambda \text{tr}(e)I$$

für linear elastisches, isotropes Material, für welches wir uns nachfolgend interessieren. Die beiden Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  werden als *Lamé-Konstanten* bezeichnet und definieren die oben genannten 21 Elastizitäten von  $\mathcal{C}$  bereits vollständig. Zu beachten ist, dass die Gleichung  $\text{tr}(e) = \text{div}(u)$  gilt,  $\lambda$  also die Spannungen infolge von Dichteänderungen beschreibt. Der Anschaulichkeit halber wird oft  $\sigma(u)$  anstelle von  $\sigma$  geschrieben.



Mit anderen, ebenfalls oft genutzten Konstanten, nämlich dem *Elastizitätsmodul*  $E$  und der *Querkontraktion* (auch *Poissonzahl*)  $\nu$  besteht folgender Zusammenhang:

$$E := \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

sowie

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Es kann berechnet werden, dass  $\lambda, \mu, E > 0$  und  $0 < \nu < 1/2$  gelten muss. Für viele Materialien gilt  $\nu \approx 1/3$ .

Es werden nun  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  derart definiert, dass  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  und  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ . Auf dem Randstück  $\Gamma_0$  sei die Verschiebung  $u_0$  gegeben und auf dem Randstück  $\Gamma_1$  die Flächenkraft  $g$ . Die klassische elliptische Differentialgleichung für ein linear elastisches, isotropes Material mit dem Referenzzustand  $\Omega$  ist die *Lamésche Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} -2\mu \operatorname{div} e(u) - \lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 && \text{auf } \Gamma_0, \\ \sigma(u)n &= g && \text{auf } \Gamma_1. \end{aligned}$$

## 3.2. Die schwache Formulierung der Lamé-Gleichung

Die numerische Berechnung einer Lösung einer elliptischen Differentialgleichung fußt auf deren *Variationsformulierung*. Die Lösungen der wichtigsten Differentialgleichungen lassen sich durch Minimaleigenschaften charakterisieren. Die Variationsaufgaben besitzen ihre Lösungen in Sobolev-Räumen. Bei der numerischen Behandlung wird die Minimierung in endlichdimensionalen Unterräumen durchgeführt. Als passend - sowohl aus praktischer als auch aus theoretischer Sicht - haben sich die sogenannten *Finiten-Elemente-Räume* erwiesen. Außerdem wird hierbei auf einfache Weise die Existenz sogenannter *schwacher Lösungen* gewonnen.

Es sei  $u$  Lösung der Laméschen Differentialgleichung. Wird diese Gleichung mit einer beliebigen (hinreichend glatten) *Testfunktion*  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  multipliziert und über  $\Omega$  integriert, ergibt sich

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma(u)n \cdot v \, ds = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Gelten Nullrandbedingungen auf  $\Gamma_0$ , so folgt aufgrund der Symmetrie von  $\sigma$

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot e(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, ds.$$

Die obige Gleichung wird als *schwache Formulierung* bzw. *Variationsgleichung* (der Laméschen Differentialgleichung), eine Lösung derselben als schwache Lösung bezeichnet.

### 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

Jede klassische Lösung der Laméschen Differentialgleichung löst auch die schwache Formulierung.

Es sei darauf hingewiesen, dass aufgrund der Symmetrie von  $e(u)$  und  $\sigma(u)$  deren Komponenten oftmals zu Vektoren zusammengefasst werden. Damit lautet das Hooksche Gesetz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{13} \\ 2\sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{pmatrix},$$

kurz  $\bar{\sigma}(u) = \mathbf{C}\bar{e}(u)$  mit der *Materialmatrix*  $\mathbf{C}$ .<sup>3</sup> Es gilt

$$\sigma(u) \cdot e(v) = \bar{e}(u)^T \mathbf{C} \bar{e}(v). \quad (3.1)$$

### 3.3. Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Es stellt sich heraus, dass unter bestimmten Voraussetzungen die schwache Lösung gerade die Lösung des zugehörigen Variationsproblems ist. Hierzu wird die übliche abstrakte Notation eingeführt:

**Definition 3.3 (Elliptische Bilinearform, Energienorm, stetiges Funktional)** *Es sei  $H$  ein Hilbert-Raum. Eine Bilinearform  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig, falls*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in H$$

*mit einem  $C > 0$  gilt. Eine symmetrische, stetige Bilinearform  $a$  heißt H-elliptisch, kurz elliptisch oder koerziv, wenn mit einem  $\alpha > 0$*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in H$$

*gilt. Mit jeder elliptischen Bilinearform  $a$  wird durch*

$$\|v\|_a := a(v, v)^{1/2}$$

*offensichtlich eine Norm induziert, die zur Norm des Hilbert-Raums  $H$  äquivalent ist. Diese Norm wird Energienorm genannt. Auf einem normierten Raum  $V$  ist ein lineares Funktional  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, falls*

$$|\ell(v)| \leq c \|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

*Der Raum der stetigen, linearen Funktionalen auf einem normierten Raum  $V$  wird mit  $V^*$  bezeichnet (siehe Definition 2.9, S. 15).*

<sup>3</sup>Die Materialmatrix ist zwar vergleichbar, aber nicht identisch mit dem Elastizitätstensor  $\mathcal{C}$ , welcher ein Tensor 4. Ordnung ist.

Anstelle von  $\ell(v)$  wird häufig die Notation  $(\ell, v)$  verwendet, um die Symmetrie in  $\ell$  und  $v$  zum Ausdruck zu bringen.

Mit  $V$  als dem Abschluss von  $\{v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_0\}$  bzgl. der  $\|\cdot\|_{H^1}$  Norm ist  $V$  ein Hilbertraum, vgl. [Brae03, S. 45]. Dann werden  $a(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot e(v) dx & (3.2) \\ (\ell, v) &:= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v ds. \end{aligned}$$

Dann lautet das Variationsproblem der linearen Elastizitätstheorie in der eben eingeführten Notation:

$$\text{Finde } u \in V : \quad a(u, v) = (\ell, v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (3.3)$$

Weil  $a(u, \cdot) \in V^*$  für alle  $u \in V$  gilt und  $u \in V \mapsto a(u, \cdot) \in V^*$  stetig und linear ist, existiert ein beschränkter, linearer Operator  $A : V \rightarrow V^*$  mit

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{V^*, V} \quad \forall u, v \in V. \quad (3.4)$$

Das Variationsproblem kann also auch in der Form

$$\text{Finde } u \in V : \quad Au = \ell$$

beschrieben werden.

Für Lösungen des Variationsproblems (3.3) gilt das folgende wichtige Resultat über Existenz und Eindeutigkeit:

**Satz 3.4 (Satz von Lax-Milgram)** *Es sei  $V$  ein reeller Hilbert-Raum und  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine elliptische Bilinearform mit den Konstanten  $C, \alpha > 0$  aus Definition 3.3, S. 34. Dann hat für jedes  $\ell \in V^*$  die Variationsgleichung*

$$a(u, v) = (\ell, v) \quad \text{für alle } v \in V$$

*genau eine Lösung  $u \in V$ . Außerdem gilt*

$$\|u\|_V \leq \alpha^{-1} \|\ell\|_{V^*}.$$

*Der Operator  $A$  aus Gleichung (3.4) genügt*

$$A \in \mathcal{L}(V, V^*), \quad A^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V), \quad \|A^{-1}\|_{V^*, V} \leq \alpha^{-1}.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 37], [Litv00, S. 18] und [Hinz09, S. 29]. □

Nachfolgend wird geprüft, ob die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt sind. Für beliebige  $u, v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  gilt mit dem Spursatz 2.20, S. 19,

$$\begin{aligned} |(\ell, v)| &= \left| \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v ds \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + c \|g\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \\ &\leq c \max\{\|f\|_{L^2}, \|g\|_{L^2}\} \|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

### 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

mit einem  $c > 0$ , weshalb das lineare Funktional  $\ell$  stetig ist. Überdies gilt mit Konstanten  $c_1, c_2 > 0$

$$\begin{aligned}
 a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot e(v) dx \\
 &= \int_{\Omega} (2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u))I) \cdot e(v) dx \\
 &= 2\mu \int_{\Omega} e(u) \cdot e(v) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}(u)I \cdot e(v) dx \\
 &= 2\mu \int_{\Omega} e(u) \cdot e(v) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) dx \\
 &\leq 2\mu \int_{\Omega} \|e(u)\| \|e(v)\| dx + \lambda \int_{\Omega} |\operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v)| dx \\
 &\leq 2\mu \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \lambda \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2} \|\operatorname{div}(v)\|_{L^2} \\
 &\leq (2\mu c_1^2 + \lambda c_2^2) \left( \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2} \right) \left( \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha v\|_{L^2} \right) \\
 &\leq (2\mu c_1^2 + \lambda c_2^2) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearform  $a$  stetig. Zum Nachweis der Elliptizität von  $a$  wird folgende Abschätzung verwendet:

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= 2\mu \int_{\Omega} e(u) \cdot e(u) dx + \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div}(u)^2 dx \\
 &\geq 2\mu \int_{\Omega} e(u) \cdot e(u) dx.
 \end{aligned}$$

Dabei wird zwischen homogenen und inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen unterschieden:

**Lemma 3.5 (1. Kornsche Ungleichung)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene, beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^d$  mit stückweise glattem Rand. Dann existiert ein  $c = c(\Omega) > 0$ , so dass für ein beliebiges  $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$*

$$\int_{\Omega} e(v) \cdot e(v) dx + \|v\|_{L^2}^2 \geq c \|v\|_{H^1}^2$$

*gilt.*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 280]. □

**Lemma 3.6 (2. Kornsche Ungleichung)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene, beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand. Ferner habe  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  ein positives 2-dimensionales Maß. Dann existiert ein  $c' = c'(\Omega, \Gamma_0) > 0$ , so dass für ein beliebiges  $v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$*

$$\int_{\Omega} e(v) \cdot e(v) dx \geq c' \|v\|_{H^1}^2$$

*gilt.*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 281]. □

Die Kornschen Ungleichungen besagen, dass  $a$  elliptisch ist.

**Satz 3.7 (Existenzsatz)** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Ferner habe  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  ein positives 2-dimensionales Maß. Dann hat das Variationsproblem der linearen Elastizitätstheorie (3.3), S. 35, genau eine Lösung.*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 282]. □

## 3.4. Galerkin Approximation schwacher Lösungen

### 3.4.1. Das Ritz-Galerkin-Verfahren

Für die numerische Lösung von elliptischen Randwertaufgaben bietet sich ein natürliches Vorgehen an. Für das Funktional  $J$  der zugehörigen Variationsaufgabe wird das Minimum nicht im Sobolev-Raum  $V$  bestimmt, sondern nur in einen passend gewählten, mit  $V_l$  bezeichneten endlichdimensionalen Unterraum. Hierbei steht  $l$  für einen Diskretisierungsparameter. Die Bezeichnung weist darauf hin, dass mit  $l \rightarrow 0$  Konvergenz gegen die Lösung des gegebenen (kontinuierlichen) Problems erreicht werden soll.

Die Lösung der Variationsaufgabe

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (\ell, v) \rightarrow \min_{V_l}!$$

ist nach dem Satz von Lax-Milgram berechenbar. Es ist  $u_l$  eine Lösung in  $V_l$ , wenn

$$a(u_l, v) = (\ell, v) \quad \text{für alle } v \in V_l. \quad (3.5)$$

Es sei insbesondere  $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  eine Basis von  $V_l$ . Dann ist Gleichung (3.5) äquivalent zu

$$a(u_l, \phi_i) = (\ell, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Der Ansatz

$$u_l = \sum_{k=1}^N U_k \phi_k$$

führt zu dem Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^N a(\phi_k, \phi_i) U_k = (\ell, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

in Matrix-Vektorform also

$$AU = b$$

mit  $A_{ik} := a(\phi_k, \phi_i)$  und  $b_i := (\ell, \phi_i)$ . Die Matrix  $A$  heißt *Steifigkeitsmatrix*. Sie ist symmetrisch positiv definit, wenn  $a$  eine elliptische Bilinearform ist. Der Vektor  $b$  ist der *Lastvektor*. Das oben genannte Gleichungssystem wird im praktischen Teil dieser Arbeit durch ein vorkonditioniertes cg-Verfahren gelöst. Als guter Vorkonditionierer erweist sich die unvollständige Cholesky-Faktorisierung, vgl. [Deuf02, Beispiel 8.27, S. 287].

### 3.4.2. Finite-Elemente-Räume

In der Praxis werden Variationsprobleme in Räumen  $V_l$  gelöst, für die sich die Bezeichnung *Finite-Elemente-Räume* eingebürgert hat.  $\Omega$  wird in endlich viele Teilgebiete zerlegt, auf denen Funktionen betrachtet werden, die auf jedem Teilgebiet Polynome sind. Die Teilgebiete werden als *Elemente* bezeichnet, die Funktionen heißen *Finite Elemente*. Die Letztgenannten werden als  *$C^k$ -Elemente* bezeichnet, wenn sie in  $C^k(\Omega)$  enthalten sind. Sie heißen *konforme Finite Elementen*, wenn sie in dem Sobolev-Raum enthalten sind, in dem das Variationsproblem gestellt ist.

Es werde davon ausgegangen, dass  $\Omega$  ein polygonales Gebiet ist. Nachfolgend werden die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen eingeführt.

#### Definition 3.8 (Zulässige und [quasi-]uniforme Zerlegungen)

(i) Eine Zerlegung  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_M\}$  von  $\Omega$  heißt zulässig, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

a)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$ ;

b) Besteht  $T_i \cap T_j$  aus genau einem Eckpunkt, so ist dieser sowohl ein Eckpunkt von  $T_i$  als auch von  $T_j$ .

c) Besteht  $T_i \cap T_j$  für  $i \neq j$  aus mehr als einem Punkt, so ist  $T_i \cap T_j$  eine Seite sowohl von  $T_i$  als auch von  $T_j$ .

(ii) Als Ausdruck der Zerlegungsfeinheit kann  $\mathcal{T}_l$  anstatt  $\mathcal{T}$  geschrieben werden, wenn jedes Element einen Durchmesser von höchstens  $2l$  besitzt.

(iii) Eine Familie von Zerlegungen  $\mathcal{T}_l$  heißt quasiuniform, wenn es eine Zahl  $\kappa > 0$  gibt, so dass jedes  $T$  von  $\mathcal{T}_l$  einen Kreis vom Radius  $\rho_T$  mit

$$\rho_T \geq l_T/\kappa$$

enthält, wobei  $l_T$  der halbe Durchmesser von  $T$  ist.

(iv) Eine Familie von Zerlegungen  $\mathcal{T}_l$  heißt uniform, wenn es eine Zahl  $\kappa > 0$  gibt, so dass jedes  $T$  von  $\mathcal{T}_l$  einen Kreis mit Radius  $\rho_T \geq l/\kappa$  enthält.

Von Interesse ist die Frage, welche Anforderungen an die Basis von  $V_l$  gestellt werden sollen. Der nachfolgende Satz 3.9 und die anschließende Definition 3.10 geben hierzu Auskunft. Dabei hat eine Funktion  $u$  auf  $\Omega$  bei vorgegebener Zerlegung eine Eigenschaft *stückweise*, wenn die Restriktion auf jedes Element diese Eigenschaft hat.

**Satz 3.9** *Es sei  $k \geq 1$  und  $\Omega$  beschränkt. Eine stückweise beliebig oft differenzierbare Funktion  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  gehört dann zu  $H^k(\Omega)$ , wenn  $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$  gilt.*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 59]. □

**Definition 3.10 (Nodale Basis)** *Zu einem Finite-Elemente-Raum  $V_l$  seien eine Menge von Punkten  $\mathcal{N}(V_l)$  bekannt, so dass die Funktionen durch die Werte an den Punkten bestimmt sind. Die Funktionen, die an genau einem Punkt dieser Menge einen von Null unterschiedlichen Wert annehmen, bilden eine nodale Basis.*

**Definition 3.11 (Finites Element, Referenzelement)**

- (i) Ein Finites Element ist ein Tripel  $(T, \Pi, \Sigma)$  mit folgenden Eigenschaften:
- $T$  ist ein Polyeder im  $\mathbb{R}^d$ . (Die Teile der Oberfläche von  $\partial T$ , die auf einer Hyperebene liegen, werden als Seite bezeichnet.)
  - $\Pi$  ist ein Unterraum von  $C(T)$  mit endlicher Dimension  $s$ . Die Funktionen in  $\Pi$  heißen Formfunktionen (engl. shape functions).
  - $\Sigma$  ist eine Menge von  $s$  linear unabhängigen Funktionalen über  $\Pi$ . Jedes  $p \in \Pi$  ist durch die Werte der  $s$  Funktionalen aus  $\Sigma$  eindeutig bestimmt. Da sich die Funktionalen in der Regel auf Funktionswerte und Ableitungen an Punkten in  $T$  beziehen, spricht man von (verallgemeinerten) Interpolationsbedingungen.
- (ii) Eine Familie von Finite-Element-Räumen  $V_l$  mit Zerlegung  $\mathcal{T}_l$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  wird als affine Familie bezeichnet, wenn es ein Referenzelement  $(T_{ref}, \Pi_{ref}, \Sigma_{ref})$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

Zu jedem  $T_j \in \mathcal{T}_l$  gibt es eine affine Abbildung  $F_j : T_{ref} \rightarrow T_j$ , so dass für jedes  $v \in V_l$  die Restriktion auf  $T_j$  die Gestalt

$$v(x) = p(F_j^{-1}x) \quad \text{mit } p \in \Pi_{ref}$$

hat. Ferner hat jedes Funktional  $\ell \in \Sigma$  die Form  $\ell(v) = \ell_{ref}(p)$  mit  $p = v \circ F$  und  $\ell_{ref} \in \Sigma_{ref}$ .

**3.4.3. Fehlerabschätzungen**

Neben der Approximation einer Lösung des Variationsproblems der linearen Elastizitätstheorie interessiert die Approximationsgüte. Grundlegend für die Fehlerabschätzungen von Finite-Elemente-Näherungen ist das folgende Lemma:

**Lemma 3.12 (Céa-Lemma)** Die Bilinearform  $a$  sei  $V$ -elliptisch mit den Konstanten  $C, \alpha > 0$  und  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$ . Ferner seien  $u$  bzw.  $u_l$  die Lösungen der Variationsaufgabe in  $V$  bzw. in  $V_l \subset V$ . Dann gilt

$$\|u - u_l\|_{H^m} \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_l \in V_l} \|u - v_l\|_{H^m}.$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 53]. □

Nach dem Céa-Lemma hängt die Genauigkeit der numerischen Lösung wesentlich davon ab, dass man Funktionenräume wählt, in denen die Lösung  $u$  gut approximiert werden kann. Von Interesse sind jedoch vor allem Abschätzungen der Form

$$\|u - u_l\| \leq cl^p$$

mit einer großen Fehlerordnung  $p$ . Die Fehlerordnung hängt im allgemeinen von der Regularität der Lösung, vom Grad der Polynome in den Finiten Elementen und davon ab, mit welcher Sobolev-Norm der Fehler gemessen wird.

### 3. Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

**Definition 3.13 ( $H^s$ -regulär)** *Es sei  $m \geq 1$ ,  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$  und  $a$  eine  $V$ -elliptische Bilinearform. Das Variationsproblem*

$$a(u, v) = (\ell, v) \quad \text{für alle } v \in V$$

*heißt  $H^s$ -regulär, wenn es zu jedem  $\ell \in H^{s-2m}(\Omega)$  eine Lösung  $u \in H^s(\Omega)$  gibt und*

$$\|u\|_{H^s} \leq c \|\ell\|_{H^{s-2m}}$$

*mit einem  $c = c(\Omega, a, s) > 0$  gilt.*

Die nachfolgenden Fehlerabschätzungen gelten für  $d = 2$ . Es werde dabei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  als polygonales, konvexes Gebiet vorausgesetzt, damit es in Dreiecke bzw. Vierecke zerlegt werden kann. Zunächst folgt eine Abschätzung in der  $H^1$ -Norm:

**Satz 3.14** *Es seien ein  $H^2$ -reguläres Variationsproblem und eine Menge quasiuniformer Zerlegungen  $\mathcal{T}_l$  von  $\Omega$  in Dreiecke bzw. Parallelogramme gegeben sowie  $\ell \in L^2(\Omega)$  und damit  $u \in H^2(\Omega)$ . Dann gilt für die Finite-Elemente-Näherung  $u_l \in V_l$  durch (wenigstens) lineare Dreieck- oder bilineare Viereckelemente*

$$\|u - u_l\|_{H^1} \leq cl \|\ell\|_{L^2}$$

*mit einem  $c > 0$ .*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 86f]. □

Die folgende Fehlerabschätzung wird in der  $L^2$ -Norm (also der  $H^0$ -Norm) gemessen und verwendet in ihrem Beweis ein Dualitätsargument, den sogenannten *Aubin-Nitsche-Trick*:

**Satz 3.15** *Es seien ein  $H^2$ -reguläres Variationsproblem und eine Menge quasiuniformer Zerlegungen  $\mathcal{T}_l$  von  $\Omega$  in Dreiecke bzw. Parallelogramme gegeben. Dann gilt*

$$\|u - u_l\|_{L^2} \leq cCl \|u - u_l\|_{H^1},$$

*wenn  $u \in H^1(\Omega)$  die Lösung des gegebenen Variationsproblems ist. Gilt außerdem  $\ell \in L^2(\Omega)$  und damit  $u \in H^2(\Omega)$ , dann ist*

$$\|u - u_l\|_{L^2} \leq cC^2 l^2 \|\ell\|_{L^2}.$$

*Hierbei ist  $c > 0$  die Konstante aus Satz 3.14 und  $C > 0$  die Stetigkeitskonstante der Bilinearform  $a$ .*

*Beweis:* Siehe z.B. [Brae03, S. 88]. □

Die bisherigen Abschätzungen schließen nicht aus, dass der Fehler an einzelnen Punkten groß ist. Das ist durch Abschätzungen in der  $L_\infty$ -Norm ausgeschlossen:

**Satz 3.16** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.14 gelte zusätzlich  $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ . Dann gilt*

$$\|u - u_l\|_{L_\infty} \leq cl^2 |\log l|^{3/2} \|u\|_{W^{2,\infty}}$$

*mit einer Konstante  $c > 0$ .*

*Beweis:* Siehe z.B. [Ciar78, S. 165]. □



## 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

Ziel der Topologieoptimierung ist die optimale Gestaltung eines Festkörpers, auf den vorgegebene Kräfte wirken. Optimiert wird eine physikalischen Größe wie die Nachgiebigkeit, die maximalen Spannung, Verschiebung oder Verzerrung, wobei die Zustandsgleichung und andere Nebenbedingungen erfüllt sein müssen.

Hierbei sind Fragen nach der Lösbarkeit, den Optimalitätskriterien und der diskreten Approximierung des Optimierungsproblems von besonderer Bedeutung. Diese Fragestellungen bestimmen den Inhalt des folgenden Kapitels: In Kap. 4.1 wird das im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendete Konzept der Gewichtungsooperatoren entwickelt und diskutiert. In Kap. 4.2, S. 47, werden das Optimierungsproblem formuliert und die Fragen nach der Lösbarkeit der Zustandsgleichung und des Optimierungsproblems erörtert. Kap. 4.3, S. 51, widmet sich den gebräuchlichen und auch in dieser Arbeit verwendeten Nebenbedingungen. In Kap. 4.4, S. 56, werden notwendige Optimalitätsbedingungen an eine Lösung aufgezeigt, mit welchen später in Kap. 6, S. 71, ein in der Topologieoptimierung neuartiger Optimierungsalgorithmus entwickelt wird. Kap. 4.5, S. 57, beschäftigt sich mit der endlichdimensionalen Approximation einer Lösung des Optimierungsproblems.

### 4.1. Gewichtungsooperatoren als Mittel zur Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung strebt an, innerhalb eines gegebenen Designraums  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  die optimale Gestalt eines Festkörpers  $\mathcal{B} \subset \Omega$  zu finden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass der zu gestaltende Festkörper aus linear elastischem, isotropem Material mit konstanten  $E$  und  $\nu$  besteht. Es ist also zu bestimmen, welche Punkte  $x \in \Omega$  Materialpunkte sein sollen und welche nicht; man spricht von einem *Materialverteilungsproblem*. Die Topologieoptimierung sucht nach einer optimalen *relativen Dichteverteilung*  $h$  auf  $\Omega$  mit dem Wertebereich  $[0; 1]$ . Die Gestalt des gesuchten Festkörpers wird berechnet durch  $\mathcal{B} = \{h \geq 1/2\} \subset \Omega$  oder gegebenenfalls durch eine geglättete Version hiervon.

Zunächst sollen die Voraussetzungen an die verwendeten Räume genannt werden:

**Voraussetzung 4.1** Der Designraum  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei ein offenes, beschränktes Lipschitz-Gebiet. Der Raum der relativen Dichteverteilungen sei  $Q := W^{1,\infty}(\Omega)$ , womit die stetige Einbettung von  $Q$  in  $C(\bar{\Omega})$  garantiert ist. Aus numerischen Gründen ist zu verlangen, dass der Wertebereich einer *zulässigen relativen Dichteverteilung*  $h_1$  in  $[h_{\min}, 1]$  mit  $h_{\min} := 10^{-3}$  liegt. Überdies sei eine *Volumenobergrenze*  $V_0 > 0$  gegeben, welche von  $h_1$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

nicht überschritten werden darf. Schließlich hat eine zulässige relative Dichteverteilung beschränkt zu sein. Aus diesen Gründen wird mit einem  $c > 0$  der Raum der zulässigen relativen Dichteverteilungen definiert durch

$$Q_{\text{ad}} \subset \{h \mid h \in W^{2,\infty}(\Omega) \subset Q, \|h\|_{W^{2,\infty}} \leq c, h_{\min} \leq h \leq 1, \int_{\Omega} h dx \leq V_0\}, \quad (4.1)$$

wobei  $Q_{\text{ad}} \neq \emptyset$  zu gelten hat und damit  $V_0 \geq \mu_3(\Omega)h_{\min}$  mit  $\mu_3$  als Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{B}_3$ . Überdies sei

$$Q_G := \{h \mid h \in Q, \|h\|_Q < 2c, e_1 < h < e_2\}$$

mit Konstanten  $0 < e_1 < h_{\min}$  und  $e_2 > 1$ . Weil die Einbettung von  $Q$  in  $C(\bar{\Omega})$  stetig ist, ist  $Q_G$  eine offene Menge in  $Q$ , vgl. [Litv00, S. 91f]. Weiterhin gilt  $Q_{\text{ad}} \subset Q_G$ . Der Raum der zulässigen Verschiebungen  $V$  sei der Abschluss von  $\{v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_0\}$  bzgl. der  $\|\cdot\|_{H^1}$  Norm und ist ein Hilbertraum, vgl. [Brae03, S. 45]. Dabei haben  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  und  $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  ein positives 2-dimensionales Maß. Ferner bestehe der gesuchte Festkörper  $\mathcal{B} \subset \Omega$  aus linear elastischem, isotropem und homogenem Material mit Elastizitätsmodul  $E > 0$  und Poissonzahl  $0 < \nu < 1/2$ , die wiederum den Elastizitätstensor  $\mathcal{C}_0$  definieren. Weiterhin gelte  $f = 0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  für die Volumenkraft, d.h. die Volumenkraft wird vernachlässigt. Schließlich gelte  $0 \neq g \in L^2(\Gamma_1, \mathbb{R}^3)$  für die Flächenkraft, so dass fast überall  $e(u(h)) \neq 0$  für beliebige  $h \in Q_{\text{ad}}$  sei.

Um die Möglichkeit zu schaffen, ohne zusätzliche Nebenbedingungen Einfluss auf die Topologieoptimierung zu nehmen, wurde von mir das Konzept der sog. *Gewichtungsoperatoren* entwickelt:

Ein Gewichtungsoperator  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  ist ein Operator, der relative Dichteverteilungen  $h$  gewichtet (daher die Bezeichnung) und dadurch ermöglicht, den aus einer relativen Dichteverteilung  $h$  resultierenden Elastizitätstensor  $\mathcal{C} : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3})$  durch  $\mathcal{C}(h) := G(h)\mathcal{C}_0$  auf beliebige Weise zu gestalten. Eigenschaften von relativen Dichteverteilungen, die unerwünscht sind und in ihren Auswirkungen beseitigt oder wenigstens reduziert werden sollen, z.B. das Auftreten von Zwischendichten oder gießtechnisch mangelhafte Eigenschaften, können mit Hilfe von geeignet gewählten Gewichtungsoperatoren mit Straftermen bedacht und auf diese Weise für die Optimierung unbrauchbar gemacht werden. So wird erreicht, dass nur relative Dichteverteilungen als Lösung des Optimierungsproblems in Frage kommen, die nicht oder nur in geringem Maße unerwünschte Eigenschaften haben.

Ein Gewichtungsoperator ist mathematisch wie folgt zu definieren:

**Definition 4.2 (Gewichtungsoperator)** *Es sei Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt.*

- (i) *Eine Abbildung  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  heißt Gewichtungsoperator, wenn sie zweimal stetig  $F$ -differenzierbar ist,  $0 < G_{\min} \leq G(h)(x) \leq G_{\max}$  mit  $G_{\min}, G_{\max} \in \mathbb{R}$  sowie  $G(h_1)(x) \leq 1$  für beliebige  $h \in Q_G, h_1 \in Q_{\text{ad}}$  und  $x \in \Omega$  gelten.*
- (ii) *Eine Abbildung  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  heißt zulässiger Gewichtungsoperator, wenn  $G$  ein Gewichtungsoperator ist und zusätzlich für beliebige  $h_1 \in Q_{\text{ad}}, q \in Q$  mit  $q \neq 0$  auf einem  $\Omega_q \subset \Omega$  mit  $\mu_3(\Omega_q) > 0$  und  $x \in \Omega$*

$$\left( \frac{2(G'(h_1)q)^2}{G(h_1)} - G''(h_1)qq \right) (x) \geq 0$$

und echt größer 0 für alle  $x \in \Omega_q$  gilt, wobei  $\mu_3$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathcal{B}_3$  ist.

**Bemerkung**

- (i) Aufgrund der stetigen Einbettung von  $Q$  in  $C(\bar{\Omega})$  werden  $h, h_1$  und  $q$  in der vorangegangenen Definition als stetig auf  $\bar{\Omega}$  angesehen (eventuell sind hierfür Veränderungen auf Nullmengen nötig). Aus diesem Grund sind Punktauswertungen sinnvoll.
- (ii) Das Produkt zweier Elemente von  $Q$  ist hierbei und auch im weiteren Verlauf der Arbeit als punktweises Produkt auf  $\Omega$  zu verstehen.
- (iii) Die in Voraussetzung 4.1, S. 41, formulierte Anforderung an die Regularität  $Q_{\text{ad}} \subset W^{2,\infty}(\Omega) \neq Q$  ist notwendig, um sicherzustellen, dass eine in  $Q_{\text{ad}}$  schwach konvergente Folge  $h_n \rightharpoonup h_* \in Q_{\text{ad}}$  in  $Q$  stark konvergiert, also  $h_n \rightarrow h_* \in Q$ . Gemeinsam mit Definition 4.2 (i), S. 42, wird so die Konvergenz der Folge von Gewichtungsoperatoren (4.9), S. 50, erreicht.
- (iv) Definition 4.2 (ii), S. 42, sichert die positive Definitheit der durch Gleichung (6.10), S. 78, definierten Matrix  $D$ .

Ein bekanntes und häufig verwendetes Modell der Topologieoptimierung heißt *Solid Isotropic Material with Penalisation*-Modell (kurz *SIMP*-Modell). Auch dieses lässt sich durch den Gewichtungsoperator  $G_1 : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$

$$G_1(h) := h^p, \quad h \in Q_G \tag{4.2}$$

beschreiben. Der Skalar  $p > 1$ , welcher das SIMP-Modell charakterisiert, ist ein Strafeffizient und bezweckt, den Elastizitätsmodul in Gebieten mit Zwischendichten überproportional zu schwächen, damit die Nachgiebigkeit zu erhöhen und somit letztlich Zwischendichten  $h_{\text{min}} < h < 1$  unbrauchbar zu machen. Eine übliche Wahl - auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit - ist  $p = 3$ .

**Satz 4.3 (SIMP-Modell)** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt und  $G_1 : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  definiert wie in Gleichung (4.2) mit  $p > 1$ . Dann ist  $G_1$  ein zulässiger Gewichtungsoperator.*

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$ ,  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$  und  $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q$  mit  $q_4 \neq 0$  auf einem  $\Omega_q \subset \Omega$  mit  $\mu_d(\Omega_q) > 0$ . Wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned} G_1'(h)q_1 &= ph^{p-1}q_1, \\ G_1''(h)q_1q_2 &= p(p-1)h^{p-2}q_1q_2. \end{aligned}$$

Offensichtlich definiert  $G_1'(h)$  eine lineare Abbildung von  $Q$  nach  $L^\infty(\Omega)$ . Überdies gilt

$$\begin{aligned} \|G_1'(h)q_1\|_{L^\infty} &= p\|h^{p-1}q_1\|_{L^\infty} \\ &\leq p\|h^{p-1}\|_{L^\infty}\|q_1\|_{L^\infty} \\ &\leq pe_2^{p-1}\|q_1\|_{L^\infty} \\ &\leq pe_2^{p-1}\|q_1\|_Q, \end{aligned}$$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

weshalb  $G'_1(h) \in \mathcal{L}(Q, L^\infty(\Omega))$  gilt. Außerdem gilt für  $\|q_1\|_Q \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|G_1(h + q_1) - G_1(h) - G'_1(h)q_1\|_{L^\infty} &= \|(h + q_1)^p - h^p - ph^{p-1}q_1\|_{L^\infty} \\ &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \binom{p}{k} q_1^k h^{p-k} \right\|_{L^\infty} \\ &= O(\|q_1^2\|_{L^\infty}) \\ &= o(\|q_1\|_{L^\infty}) \\ &= o(\|q_1\|_Q), \end{aligned}$$

weshalb  $G_1$  auf  $Q_G$  F-differenzierbar ist. Mit denselben Mitteln wird gezeigt, dass  $G_1$  auf  $Q_G$  zweimal F-differenzierbar ist. Überdies gilt für  $\|q_1\|_Q \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|(G''_1(h + q_1) - G''_1(h))q_2q_3\|_{L^\infty} &= \|p(p-1)((h + q_1)^{p-2} - h^{p-2})q_2q_3\|_{L^\infty} \\ &\leq O(\|q_1\|_{L^\infty}) \|q_2\|_{L^\infty} \|q_3\|_{L^\infty} \\ &\leq O(\|q_1\|_Q) \|q_2\|_Q \|q_3\|_Q \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

weshalb  $G_1$  auf  $Q_G$  zweimal stetig F-differenzierbar ist. Mit  $G_{\min} = e_1^p > 0$  und  $G_{\max} := e_2^p$  ist  $G_1$  nach Definition 4.2, S. 42, ein Gewichtungoperator. Darüber hinaus gilt

$$\frac{2(G'_1(h_1)q_4)^2}{G_1(h_1)} - G''_1(h_1)q_4q_4 = p(p+1)h_1^{p-2}q_4q_4 \geq 0$$

und nach Voraussetzung echt größer 0 auf  $\Omega_q$ . Damit ist  $G_1$  ein zulässiger Gewichtungoperator.  $\square$

Anschließend werden einige Eigenschaften von Gewichtungoperatoren dargestellt:

**Satz 4.4 (Eigenschaften von  $G$ )** *Es gelten Voraussetzung 4.1, S. 41, und  $h \in Q_G$ ,  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$  sowie  $q \in Q$ .*

- (i) *Es seien  $G_1, G_2$  zulässige Gewichtungoperatoren und gelte  $G'_1(h_1)qG'_2(h_1)q \geq 0$ . Dann ist  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$ , definiert durch  $G(h) := G_1(h)G_2(h)$ , ein zulässiger Gewichtungoperator.*
- (ii) *Es seien  $G_1$  ein zulässiger Gewichtungoperator und  $H : Q_G \rightarrow Q_G$  zweimal stetig F-differenzierbar. Weiterhin gelte*

$$h_1 \in Q_{\text{ad}} \quad \Rightarrow \quad H(h_1) \in Q_{\text{ad}}$$

*und  $G'_1(H(h_1))H''(h_1)qq \leq 0$ . Dann ist  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$ , definiert durch  $G(h) := G_1(H(h))$ , ein zulässiger Gewichtungoperator.*

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$ ,  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$  und  $q_1, q_2, q_3 \in Q$  mit  $q_3 \neq 0$  auf einem  $\Omega_q \subset \Omega$  mit  $\mu_3(\Omega_q) > 0$ .

#### 4.1. Gewichtungsoperatoren als Mittel zur Topologieoptimierung

- (i) Mit  $G_{\max} := G_{1,\max}G_{2,\max}$  und  $G_{\min} := G_{1,\min}G_{2,\min}$  ist  $G(h) \in L^\infty(\Omega)$  und die Abbildung  $G$  zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} G'(h)q_1 &= G'_1(h)q_1G_2(h) + G_1(h)G'_2(h)q_1, \\ G''(h)q_1q_2 &= G''_1(h)q_1q_2G_2(h) + G'_1(h)q_1G'_2(h)q_2 \\ &\quad + G'_1(h)q_2G'_2(h)q_1 + G_1(h)G''_2(h)q_1q_2 \end{aligned}$$

und damit ein Gewichtungsoperator. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{2(G'(h_1)q_3)^2}{G(h_1)} &= \frac{2(G'_1(h_1)q_3)^2G_2(h_1)}{G_1(h_1)} + \frac{2(G'_2(h_1)q_3)^2G_1(h_1)}{G_2(h_1)} \\ &\quad + 4G'_1(h_1)q_3G'_2(h_1)q_3 \\ &\geq G''_1(h_1)q_3q_3G_2(h_1) + G''_2(h_1)q_3q_3G_1(h_1) + 4G'_1(h_1)q_3G'_2(h_1)q_3 \end{aligned}$$

und hiermit

$$\frac{2(G'(h_1)q_3)^2}{G(h_1)} - G''(h_1)q_3q_3 \geq 2G'_1(h_1)q_3G'_2(h_1)q_3 \geq 0$$

und echt größer 0 auf  $\Omega_q$ . Daher ist  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator.

- (ii) Als Verkettung zweier zweimal stetig F-differenzierbarer Funktionen ist  $G$  ebenfalls zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} G'(h)q_1 &= G'_1(H(h))H'(h)q_1, \\ G''(h)q_1q_2 &= G''_1(H(h))H'(h)q_1H'(h)q_2 + G'_1(H(h))H''(h)q_1q_2. \end{aligned}$$

Mit  $G_{\max} := G_{1,\max}$  und  $G_{\min} := G_{1,\min}$  ist  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator. Überdies gilt

$$\begin{aligned} \frac{2(G'(h_1)q_3)^2}{G(h_1)} &= \frac{2G'_1(H(h_1))H'(h_1)q_3)^2}{G_1(H(h_1))} \\ &\geq G''_1(H(h_1))H'(h_1)q_3H'(h_1)q_3 \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{2(G'(h_1)q_3)^2}{G(h_1)} - G''(h_1)q_3q_3 \geq -G'_1(H(h_1))H''(h_1)q_3q_3 \geq 0$$

und echt größer 0 auf  $\Omega_q$ . Deshalb ist  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator.

□

Nachfolgend werden Richtlinien vorgestellt, anhand welcher zulässige Gewichtungsoperatoren konstruiert werden können. Die Richtlinien haben den Vorteil, dass nicht in jedem Einzelfall geprüft werden muss, ob ein zulässiger Gewichtungsoperatoren vorliegt. Im weiteren Verlauf werden durch diese Richtlinien zulässige Gewichtungsoperatoren erzeugt. Anhand des in Kapitel 6, S. 71, entwickelten Algorithmus lässt sich ein derart geschaffener Gewichtungsoperator  $G$  ohne weiteren Aufwand in die Optimierung implementieren.

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

**Satz 4.5 (Konstruktion von  $G$ )** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $p > 1$  (üblicherweise  $p = 3$ ) und  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$ ,  $h \in Q_G$ ,  $q_1, q_2 \in Q$  sowie  $x \in \Omega$ . Weiterhin sei die Abbildung  $H : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  zweimal stetig F-differenzierbar und es gelte  $H_{\min} \leq H(h)(x) \leq 0$  und  $H''(h_1)q_1q_1 \leq 0$  für ein  $H_{\min} < 0$ . Es werde die Abbildung  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  definiert durch*

$$G(h) := h^p \exp(H(h)).$$

*Dann ist  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator mit den Ableitungen*

$$\begin{aligned} G'(h)q_1 &= \exp(H(h)) (ph^{p-1}q_1 + h^p H'(h)q_1), \\ G''(h)q_1q_2 &= \exp(H(h)) (p(p-1)h^{p-2}q_1q_2 + ph^{p-1}q_1H'(h)q_2 \\ &\quad + ph^{p-1}q_2H'(h)q_1 + h^p H'(h)q_1H'(h)q_2 \\ &\quad + h^p H''(h)q_1q_2). \end{aligned}$$

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$ ,  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$  und  $q_1 \in Q$  mit  $q_1 \neq 0$  auf einem  $\Omega_q \subset \Omega$  mit  $\mu_3(\Omega_q) > 0$ . Mit  $G_{\min} = e_1^p \exp(H_{\min}) > 0$  und  $G_{\max} = e_2^p$  gilt auch  $G(h) \in L^\infty(\Omega)$ . Deshalb ist  $G$  als Produkt und Verkettung zweimal stetig F-differenzierbarer Abbildungen wiederum zweimal stetig F-differenzierbar. Daher ist  $G$  nach Definition 4.2, S. 42, ein Gewichtungsoperator. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{2(G'(h_1)q_1)^2}{G(h_1)} - G''(h_1)q_1q_1 &= \underbrace{\exp(H(h_1))}_{>0} \underbrace{(ph_1^{p-1}q_1 + h_1^p H'(h_1)q_1)^2}_{\geq 0} \\ &\quad + \underbrace{ph_1^{p-2}q_1^2}_{\geq 0} - \underbrace{h_1^p H''(h_1)q_1q_1}_{\leq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und echt größer 0 auf  $\Omega_q$ . Deshalb ist  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator.  $\square$

Nachdem in Satz 4.5, S. 46, dargestellt wurde, wie ein zulässiger Gewichtungsoperator  $G$  geschaffen werden kann, soll nachfolgend ausgeführt werden, anhand welcher Kriterien  $H$  aus Satz 4.5 konstruiert werden kann:

**Satz 4.6 (Konstruktion von  $H$ )** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $p > 1$  (üblicherweise  $p = 3$ ),  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$ ,  $h \in Q_G$ ,  $x \in \Omega$  und  $q_1, q_2 \in Q$  beliebig.*

- (i) *Es sei  $c > 0$  und  $f : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  eine zweimal stetig F-differenzierbare Abbildung mit*

$$\max_{h \in Q_G} \|f(h)\|_{L^\infty} \leq f_{\max}$$

*und  $(f'(h_1)q_1)^2 + f(h_1)f''(h_1)q_1q_1 \geq 0$ . Dann erzeugt die Funktion  $H : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$ , definiert durch*

$$H(h) := -cf(h)^2,$$

*einen zulässigen Gewichtungsoperator  $h \mapsto G(h) := h^p \exp(H(h))$ .*

- (ii) Es seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  und erfülle  $H_i$  die Anforderungen an  $H$  aus Satz 4.5, S. 46. Dann bildet die Funktion  $G : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$ ,

$$G(h) := h^p \exp \left( \sum_{i=1}^k H_i(h) \right),$$

einen zulässigen Gewichtungoperator.

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$ ,  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$ ,  $q_1, q_2 \in Q$  und beliebig.

- (i)  $H$  ist als Verkettung von zwei je zweimal stetig F-differenzierbaren Abbildungen wiederum zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} H'(h)_{q_1} &= -2cf(h)f'(h)_{q_1}, \\ H''(h)_{q_1q_2} &= -2c(f'(h)_{q_1}f'(h)_{q_2} + f(h)f''(h)_{q_1q_2}). \end{aligned}$$

Weiterhin gelten  $H_{\min} \leq H(h)(x) \leq 0$  mit  $H_{\min} := -cf_{\max}^2$  und

$$\begin{aligned} H''(h_1)_{q_1q_1} &= -2c((f'(h_1)_{q_1})^2 + f(h_1)f''(h_1)_{q_1q_1}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Voraussetzungen dieses Satzes. Damit erfüllt  $H$  die Voraussetzungen von Satz 4.5, S. 46, weshalb  $G$  ein zulässiger Gewichtungoperator ist.

- (ii) Nach den Voraussetzungen dieses Satzes sind sämtliche  $H_i$  auf  $Q_G$  zweimal stetig F-differenzierbar. Setze

$$H(h) := \sum_{i=1}^k H_i(h).$$

Dann ist  $H$  als Summe zweifach stetig F-differenzierbarer Funktionen ebenfalls zweimal stetig F-differenzierbar auf  $Q_G$  mit  $H(h) \leq 0$  und  $H''(h_1)_{q_1q_1} \leq 0$ . Weiterhin gilt  $H_{\min} \leq H(h)(x) \leq 0$ , wobei

$$H_{\min} := \sum_{i=1}^k H_{i,\min}$$

und  $H_{i,\min}$  das jeweilige Minimum von  $H_i$  ist. Damit erfüllt  $H$  die Voraussetzungen von Satz 4.5, S. 46, weshalb  $G$  ein zulässiger Gewichtungoperator ist.  $\square$

## 4.2. Problemformulierung und Lösbarkeit

### 4.2.1. Formulierung und Lösbarkeit der Zustandsgleichung

Im Folgenden seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $h \in Q_G$  und  $u, v \in V$ . Dann lautet die schwache Formulierung der Zustandsgleichung in der Topologieoptimierung mit Gewichtungoperator  $G$

$$\int_{\Omega} G(h) \sigma(u) \cdot e(v) dx = \int_{\Gamma_1} g \cdot v ds,$$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

wobei  $\sigma(u) := \mathcal{C}_0 : e(u)$ . Nachfolgend werde wieder die abstrakte Notation aus Kap. 3.3, S. 34, verwendet. Die Bilinearform  $a$  wird ab jetzt mit  $a(h)$  bezeichnet, um die Abhängigkeit von  $h$  zu dokumentieren. Sie errechnet sich durch

$$a(h)(u, v) := \int_{\Omega} G(h) \sigma(u) \cdot e(v) \, dx. \quad (4.3)$$

Das Funktional  $\ell \in V^*$  wird definiert durch

$$(\ell, v) := \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, ds. \quad (4.4)$$

**Satz 4.7** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $G$  ein Gewichtungoperator,  $h \in Q_G$  und  $a(h)$  sowie  $\ell$  wie in den vorstehenden Gleichungen (4.3), (4.4), S. 48, definiert. Dann besitzt die Gleichung*

$$a(h)(u, v) = (\ell, v), \quad \text{für alle } v \in V \quad (4.5)$$

genau eine Lösung  $u \in V$ .

*Beweis:* Es seien  $u, v \in V$ ,  $h \in Q_G$  und  $a(1)$  die Bilinearform  $a(h_1)$ , welche sich durch  $h_1 = 1$  ergibt. Nach Kap. 3.3, S. 34, ist  $a(1)$  elliptisch mit Konstanten  $C, \alpha > 0$ . Es gelten

$$\begin{aligned} |a(h)(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} G(h) \sigma(u) \cdot e(v) \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} G(h) |\sigma(u) \cdot e(v)| \, dx \\ &\leq G_{\max} \int_{\Omega} |\sigma(u) \cdot e(v)| \, dx \\ &\leq CG_{\max} \|u\|_V \|v\|_V \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(h)(v, v) &\geq G_{\min} a(1)(v, v) \\ &\geq \alpha G_{\min} \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Bilinearform  $a(h)$  elliptisch. Weiterhin sind  $\ell \in V^*$  und  $V$  ein Hilbertraum. Die Aussage folgt z.B. mit dem Existenzsatz 3.7, S. 37.  $\square$

Wenn  $u \in V$  die Zustandsgleichung (4.5), S. 48, für ein gegebenes  $h \in Q_G$  erfüllt, wird auch  $u(h)$  anstelle von  $u$  geschrieben.

#### 4.2.2. Formulierung und Lösbarkeit des Optimierungsproblems

Noch wurde das *Zielfunktional* des Optimierungsproblems nicht festgelegt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Optimierungsziel sein, eine zulässige relative Dichteverteilung  $h_* \in Q_{\text{ad}}$  zu finden, welche die *Nachgiebigkeit* des Designraums  $\Omega$  minimiert bzw. äquivalent hierzu die Steifigkeit maximiert. Für eine gegebene Verschiebung  $u$  errechnet sich die



Nachgiebigkeit gerade durch  $(\ell, u)$ . Daher wird das Zielfunktional  $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g_0(u) := (\ell, u). \quad (4.6)$$

Gesucht wird im Raum der *zulässigen Paare*, welcher stets durch

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} := \{(h, u) \in Q \times V \mid h \in Q_{\text{ad}}, a(h)(u, v) = (\ell, v) \quad \forall v \in V\} \quad (4.7)$$

definiert wird. Dann lautet das *minimale Nachgiebigkeitsproblem*

$$\min_{(h, u) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} g_0(u). \quad (4.8)$$

**Satz 4.8** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $G$  ein Gewichtungoperator und  $a(h)$  sowie  $\ell$  definiert wie in den Gleichungen (4.3), (4.4), S. 48, und  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  wie in vorstehender Gleichung (4.7), S. 49. Dann besitzt das minimale Nachgiebigkeitsproblem (4.8), S. 49, eine Lösung  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .*

*Beweis:* Es gilt  $Q_{\text{ad}} \neq \emptyset$  und mit Satz 4.7, S. 48, ist damit auch  $\mathcal{U}_{\text{ad}} \neq \emptyset$ . Für beliebige  $(h, u) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  gilt

$$\begin{aligned} g_0(u) &= (\ell, u) \\ &= a(h)(u, u) \geq 0 \end{aligned}$$

aufgrund der Koerzivität von  $a(h)$ . Deshalb existiert ein  $g_* \geq 0$  mit

$$g_* = \inf_{(h, u) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} g_0(u).$$

Wegen der Definition von  $g_*$  existiert eine Folge  $\{(h_n, u_n)\} \subset \mathcal{U}_{\text{ad}}$  mit

$$g_0(u_n) \rightarrow g_*$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Die Folge  $\{h_n\}$  ist in  $W^{2, \infty}(\Omega)$  beschränkt und mit Proposition 2.23, S. 21, auch in  $W^{2, p_0}(\Omega)$  mit  $p_0 > 3$ . Weil  $W^{2, p_0}(\Omega)$  ein reflexiver Banachraum ist, existiert nach Satz 2.37, S. 25, eine (wieder mit  $\{h_n\}$  bezeichnete) schwach konvergente Teilfolge

$$h_n \rightharpoonup h_* \in W^{2, p_0}(\Omega).$$

Daraus folgt mit Satz 2.41, S. 26, die gleichmäßige Konvergenz

$$h_n \rightarrow h_* \in Q,$$

da  $W^{2, p_0}(\Omega)$  nach Proposition 2.23, S. 21, in  $Q$  kompakt eingebettet ist. Es gilt überdies nach Kap. 2.5, S. 27,

$$\begin{aligned} \|G(h_n) - G(h_*)\|_{L^\infty} &\leq \sup_{0 < t < 1} \|G'(h_* + t(h_n - h_*))(h_n - h_*)\|_{L^\infty} \\ &\leq \sup_{0 < t < 1} \|G'(h_* + t(h_n - h_*))\|_{Q, L^\infty} \|h_n - h_*\|_Q \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

und damit

$$G(h_n) \rightarrow G(h_*) \in L^\infty(\Omega). \quad (4.9)$$

Weil  $Q_{\text{ad}}$  aufgrund der stetigen Einbettung von  $W^{2,\infty}(\Omega)$  in  $C(\bar{\Omega})$  konvex und abgeschlossen ist, ist  $Q_{\text{ad}}$  nach Satz 2.35, S. 25, schwach abgeschlossen. Somit ist  $h_* \in Q_{\text{ad}}$ . Mit Satz 3.4, S. 35, ist auch die Folge  $\{u_n\}$  in  $V$  beschränkt. Nachdem  $V$  ein Hilbertraum ist, existiert nach Satz 2.37, S. 25, eine (wieder mit  $\{u_n\}$  bezeichnete) schwach konvergente Teilfolge

$$u_n \rightharpoonup u_* \in V, \quad (4.10)$$

wobei  $u_* \in V$ , weil  $V$  konvex und abgeschlossen ist, also auch schwach abgeschlossen. Aus der oben stehenden Gleichung (4.10) folgt für ein beliebiges  $v \in V$

$$\begin{aligned} a(h_n)(u_n, v) &\rightarrow a(h_n)(u_*, v) \\ &= a(h_*)(u_*, v) + \int_{\Omega} (G(h_n) - G(h_*)) \sigma(u_*) \cdot e(v) \, dx, \end{aligned}$$

weil  $a(h_n)(\cdot, v) \in V^*$ . Mit der Hölderschen Ungleichung 2.13, S. 16, und der oben stehenden Gleichung (4.9) folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (G(h_n) - G(h_*)) \sigma(u_*) \cdot e(v) \, dx \right| &\leq \|G(h_n) - G(h_*)\|_{L^\infty} \|\sigma(u_*) \cdot e(v)\|_{L^1} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit folgt für ein beliebiges  $v \in V$

$$a(h_n)(u_n, v) \rightarrow a(h_*)(u_*, v),$$

siehe auch [Litv00, Lemma 2.1.1, S. 83], [Pete98, Abschnitt 3.2], weshalb  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ . Weil  $g_0$  beschränkt und linear ist, ist es nach Satz 2.39, S. 26, schwach stetig, woraus

$$g_0(u_*) = g_*$$

folgt. □

#### Über die Bedeutung des korrekt gestellten Problems

Man könnte meinen, der größtmögliche Raum der zulässigen relativen Dichteverteilungen wird nicht gebildet durch  $Q_{\text{ad}}$  aus Voraussetzung 4.1, S. 41, sondern durch

$$\check{Q}_{\text{ad}} := \{h \mid h \in L^\infty(\Omega), h_{\min} \leq h \leq 1, \int_{\Omega} h \, dx \leq V_0\},$$

vgl. [Litv00, Kap. 2.2.4]. Doch in diesem Fall ist es nicht möglich zu beweisen, dass das Optimierungsproblem (4.8), S. 49, eine Lösung besitzt. Es lässt sich zwar die Existenz schwach konvergenter Folgen

$$u_n \rightharpoonup u_* \in V$$

und

$$h_n \rightharpoonup h_* \in L^\infty(\Omega)$$

mit  $h_* \in \check{Q}_{\text{ad}}$  beweisen, jedoch nicht die Existenz gleichmäßig konvergenter Folgen  $h_n \rightarrow h_* \in L^\infty(\Omega)$  und  $G(h_n) \rightarrow G(h_*) \in L^\infty(\Omega)$ . Aus diesem Grund lässt sich nicht zeigen, dass für ein beliebiges  $v \in V$

$$a(h_n)(u_n, v) \rightarrow a(h_*)(u_*, v)$$

gilt. Das heißt nicht zwingend, dass  $u_* \neq u(h_*)$ . Zwei Umstände legen dies jedoch nahe. Zum einen gibt es veröffentlichte Beispiele ähnlicher Probleme, in denen die Nichtexistenz einer Lösung bewiesen wurde, siehe [Mura77]. Zum anderen ergibt die numerische Behandlung ohne weitergehende Nebenbedingungen als in  $\check{Q}_{\text{ad}}$  Probleme, die darauf hindeuten, dass  $h_n \not\rightarrow h_*$  und  $u_* \neq u(h_*)$ . In [Bend04] wird die Nichtexistenz einer Lösung von Optimierungsproblem (4.8), S. 49, mit zulässigen relativen Dichteverteilungen  $\check{Q}_{\text{ad}}$  als inzwischen etabliert angesehen.<sup>4</sup>

### 4.3. Betrachtung von Nebenbedingungen

Nachfolgend werden die im weiteren Verlauf verwendeten Nebenbedingungen genannt - sie sind in der praktischen Anwendungen von großer Relevanz. Weiterhin wird die F-Differenzierbarkeit der Nebenbedingungen sowie des Zielfunktional und der Zustandsgleichung gezeigt. Damit wird möglich, im nachfolgenden Kap. 4.4, S. 56, die notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine Lösung des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, nennen und in Kap. 6, S. 71, einen Algorithmus zur Lösung desselben entwickeln zu können.

Nebenbedingungen werden anhand von Funktionalen  $g_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  definiert. Sie sind erfüllt, falls  $g_i(h) \leq 0$ . Es kann gezeigt werden, dass für  $Q \subset H^1(\Omega)$  eine Lösung des Problems (4.8), S. 49, existiert, wenn sämtliche Funktionale  $g_i$  schwach unterhalbstetig sind, siehe [Litv00, S. 86ff]. Gilt  $Q \subset W^{1,p_0}(\Omega)$  mit  $p_0 > 3$ , so genügt es, dass sämtliche Funktionale  $g_i$  stetig sind. Sind sämtliche Funktionale jedoch F-differenzierbar, so kann die Existenz notwendiger Optimalitätsbedingungen gezeigt werden. Daher ist die F-Differenzierbarkeit der Funktionale Untersuchungsgegenstand des nachfolgenden Abschnittes, wobei stets Voraussetzung 4.1, S. 41, gültig und  $G$  ein Gewichtungoperator sei.

#### Zustandsgleichung

Es werde die Funktion  $F : Q_G \times V \rightarrow V^*$  mit  $a(h)$  und  $\ell$  wie in den Gleichungen (4.3) und (4.4), S. 48, definiert durch

$$(h, u) \in Q_G \times V, \quad (F(h, u), v) := a(h)(u, v) - (\ell, v), \quad v \in V. \quad (4.11)$$

Nachfolgend wird gezeigt, dass  $F : Q_G \times V \rightarrow V^*$  und damit  $a : Q_G \rightarrow (V \times V)^*$  sowie  $u : Q_G \rightarrow V$  zweimal stetig F-differenzierbar sind.

<sup>4</sup> „Another serious problem (...) is the now well established lack of existence of solutions to the distributed problem“, [Bend04, S. 7]. In [Sigm98, Abschnitt 1.1], wird dieser Umstand damit begründet, dass die Erhöhung der Anzahl der Hohlräume einer Geometrie bei Beibehaltung des Volumens üblicherweise die Nachgiebigkeit reduziere, d.h. die Menge zulässiger Geometrien sei nicht abgeschlossen.

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

Es seien  $h \in Q_G$ ,  $q_1, q_2 \in Q$  mit  $h + q_1 \in Q_G$  und  $h + q_2 \in Q_G$  sowie  $u, v, w_1, w_2 \in V$ . Dann gelten

$$\begin{aligned} (F(h, u + w_1), v) &= (F(h, u), v) + a(h)(w_1, v), \\ (F(h + q_1, u), v) - (F(h, u), v) &= a(h + q_1)(u, v) - a(h)(u, v). \end{aligned}$$

Man setze nun die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} (F_u(h, u)w_1, v) = a(h)(w_1, v) &= \int_{\Omega} G(h) \sigma(w_1) \cdot e(v) \, dx, \\ (F_h(h, u)q_1, v) = a'(h)q_1(u, v) &= \int_{\Omega} G'(h)q_1 \sigma(u) \cdot e(v) \, dx. \end{aligned}$$

Es sei  $H_1(h, q_1) := G(h + q_1) - G(h) - G'(h)q_1 \in L^\infty(\Omega)$ . Dann gilt aufgrund der Definitionen von  $F$ ,  $F_h$  und  $\|\cdot\|_{V^*}$ , Lemma 2.13, S. 16 (Höldersche Ungleichung), der Elliptizität von  $a(1)$  (mit Konstanten  $C, \alpha > 0$ ) sowie der F-Differenzierbarkeit von  $G$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |(F(h + q_1, u) - F(h, u) - F_h(h, u)q_1, v)| \\ &= \left| \int_{\Omega} H_1(h, q_1) \sigma(u) \cdot e(v) \, dx \right| \\ &\leq \|H_1(h, q_1)\|_{L^\infty} \|\sigma(u) \cdot e(v)\|_{L^1} \\ &\leq \|H_1(h, q_1)\|_{L^\infty} C \|u\|_V \|v\|_V \\ &= o(\|q_1\|_Q) \quad \text{für } \|q_1\|_Q \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Überdies gilt  $F_h(h, u) \in \mathcal{L}(Q, V^*)$ . Somit ist  $h \mapsto F(h, u)$  F-differenzierbar mit der oben genannten Ableitung  $F_h$ .

Aus Gleichung (4.11), S. 51, folgt, dass  $u \mapsto F(h, u)$  eine stetige, affine Abbildung von  $V$  nach  $V^*$  ist. Damit ist diese Abbildung F-differenzierbar mit der Ableitung

$$F_u(h, u)w_1 = F(h, w_1) + \ell.$$

Damit ist  $F$  F-differenzierbar.

Weiterhin gelten

$$\begin{aligned} (F_u(h, u + w_2)w_1, v) &= (F_u(h, u)w_1, v), \\ (F_u(h + q_1, u)w_1, v) - (F_u(h, u)w_1, v) &= a(h + q_1)(w_1, v) - a(h)(w_1, v), \\ (F_h(h, u + w_1)q_1, v) - (F_h(h, u)q_1, v) &= (F_h(h, w_1)q_1, v). \end{aligned}$$

Setze also

$$(F_{uu}(h, u)w_1w_2, v) = 0.$$

Offensichtlich ist  $(h, u) \mapsto F_{uu}(h, u) \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, V^*))$  stetig. Damit ist  $F_{uu}$  die stetige F-Ableitung von  $F_u$  nach  $u$ , womit  $F_u$  wiederum stetig in  $u$  ist. Setze weiterhin

$$(F_{hu}(h, u)w_1q_1, v) = a'(h)q_1(w_1, v) = \int_{\Omega} G'(h)q_1 \sigma(w_1) \cdot e(v) \, dx.$$

Es gilt für beliebige  $w_1$

$$\|F_u(h + q_1, u)w_1 - F_u(h, u)w_1 - F_{hu}(h, u)w_1q_1\|_{V^*} = o(\|q_1\|_Q) \quad \text{für } \|q_1\|_Q \rightarrow 0$$

mit den selben Argumenten wie oben, da nur  $u$  gegen  $w_1$  getauscht werden muss, allerdings  $u$  auch beliebig ist. Überdies gilt

$$F_{hu}(h, u)w_1q_1 = F_{uh}(h, u)q_1w_1,$$

sowie  $F_{hu}(h, u) \in \mathcal{L}(Q, \mathcal{L}(V, V^*))$  und  $F_{uh}(h, u) \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(Q, V^*))$ . Setze außerdem

$$(F_{hh}(h, u)q_1q_2, v) = a''(h)q_1q_2(u, v) = \int_{\Omega} G''(h)q_1q_2 \sigma(u) \cdot e(v) \, dx.$$

Es gilt für beliebige  $q_1$

$$\|F_h(h + q_2, u)q_1 - F_h(h, u)q_1 - F_{hh}(h, u)q_1q_2\|_{V^*} = o(\|q_2\|_Q) \quad \text{für } \|q_2\|_Q \rightarrow 0,$$

da  $G$  nach Voraussetzung zweimal stetig F-differenzierbar ist. Darüber hinaus gilt  $F_{hh}(h, u) \in \mathcal{L}(Q, \mathcal{L}(Q, V^*))$ . Überdies sind  $F_{hu}$  und  $F_{hh}$  aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von  $G'$  und  $G''$  sowie der Beschränktheit von  $a(1)$  stetig. Somit ist  $F$  zweimal stetig F-differenzierbar.

Es werde nun die Verschiebung  $u$  als Operator  $u : Q_G \rightarrow V$  betrachtet. Nach [Litv00, Theorem 2.4.5, S. 114] gilt  $F_u(h, u(h))^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V)$  mit

$$F_u(h, u(h))^{-1}\ell_1 = w_1, \quad \ell_1 \in V^*,$$

wobei  $w_1$  derart ist, dass  $a(h)(w_1, v) = (\ell_1, v)$  für beliebiges  $v \in V$ . Also ist  $u$  auf  $Q_G$  aufgrund von Satz 2.45, S. 28, ebenfalls zweimal stetig F-differenzierbar. Es gilt offensichtlich  $F(h, u(h)) = 0 \in V^*$  aufgrund der Gleichung (4.11), S. 51, und Satz 4.7, S. 48, (bzw. der Elliptizität von  $a(h)$ ). Weil  $F$  zweimal stetig F-differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned} V^* \ni 0 &= F_h(h, u(h))q_1 + F_u(h, u(h))u'(h)q_1, \\ \Rightarrow u'(h)q_1 &= -F_u(h, u(h))^{-1}F_h(h, u(h))q_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

sowie

$$\begin{aligned} V^* \ni 0 &= F_u(h, u(h))u''(h)q_1q_2 + F_{hh}(h, u(h))q_1q_2 \\ &\quad + F_{hu}(h, u(h))(u'(h)q_1q_2 + u'(h)q_2q_1) \\ &\quad + F_{uu}(h, u(h))u'(h)q_1u'(h)q_2, \\ \Rightarrow u''(h)q_1q_2 &= -F_u(h, u(h))^{-1}(F_{hh}(h, u(h))q_1q_2 \\ &\quad + F_{hu}(h, u(h))(u'(h)q_1q_2 + u'(h)q_2q_1)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

nachdem  $(F_{uu}(h, u)w_1w_2, v) = 0$ .

### Zielfunktional

Es gelten für beliebige  $u, w_1, w_2 \in V$  der Definition (4.6), S. 49, von  $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$  folgend

$$g_0(u + w_1) = (\ell, u + w_1) = g_0(u) + (\ell, w_1).$$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

Weil  $g_0$  stetig und linear ist, ist es zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} g_0'(u)w_1 &= g_0(w_1), \\ g_0''(u)w_1w_2 &= 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung** Es werde durch  $\Phi : Q_G \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(h) := g_0(u(h)), \quad h \in Q_G \quad (4.14)$$

das (nach Satz 4.7, S. 48, wohldefinierte) *reduzierte Zielfunktional* definiert. Weil  $g_0$  und  $u$  zweimal stetig F-differenzierbar sind, ist es auch  $\Phi$  mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \Phi_0'(h)q_1 &= g_0'(u(h))u'(h)q_1, \\ &= g_0(u'(h)q_1), \\ \Phi_0''(h)q_1q_2 &= g_0'(u'(h)q_1)u''(h)q_1q_2 \\ &= g_0(u''(h)q_1q_2). \end{aligned}$$

#### Volumen Nebenbedingung

Die Volumen Nebenbedingung  $g_1 : Q \rightarrow \mathbb{R}$  lautet  $g_1(h) := \int_{\Omega} h dx - V_0$  mit  $V_0 > 0$ . Hier gelten für beliebige  $h, q \in Q$

$$g_1(h + q) = \int_{\Omega} (h + q) d\Omega - V_0 = g_1(h) + \int_{\Omega} q d\Omega.$$

Die Abbildung  $h \mapsto g_1(h)$  ist eine stetige, affine Abbildung von  $Q$  nach  $\mathbb{R}$ . Daher ist diese Abbildung F-differenzierbar mit der Ableitung

$$g_1'(h)q = \int_{\Omega} q d\Omega.$$

#### Beschränktheits Nebenbedingung

Weil die Norm  $\|\cdot\|_{W^{2,\infty}}$  nicht F-differenzierbar ist, ist mit Proposition 2.23, S. 21, als gleichwertige Nebenbedingung die Beschränktheit von  $h$  in  $W^{2,p_0}(\Omega)$  mit  $p_0 > 3$  zu verlangen. Die Beschränktheits Nebenbedingung  $g_2 : W^{2,\infty}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  (engl. *global gradient constraint*) lautet daher  $g_2(h) := \|h\|_{W^{2,p_0}} - c$  für ein  $c > 0$ . Mit [Litv00, Theorem 1.10.1, S. 55] ist  $g_2$  F-differenzierbar und es gilt für beliebige  $h, q \in W^{2,\infty}(\Omega)$

$$g_2'(h)q = \|h\|_{W^{2,p_0}}^{1-p_0} \sum_{|\alpha| \leq 2} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha h|^{p_0-2} D^\alpha h D^\alpha q dx \right).$$

#### Material Nebenbedingungen

Der nachfolgende Abschnitt basiert auf [Litv00, S. 90f].

Eigentlich interessieren die Funktionale

$$g_{3,1}(h) := \max_{x \in \Omega} (h(x) - 1), \quad g_{3,2}(h) := \max_{x \in \Omega} (h_{\min} - h(x)),$$

doch sind diese nicht F-differenzierbar. Daher werden sie durch die Nebenbedingungen

$$g_i(h) \leq 0, \quad i = 3, \dots, 2r + 2, \quad r \in \mathbb{N}$$

ersetzt. Die Funktionale  $g_i$  werden so gewählt, dass sie F-differenzierbar sind und die Bedingung  $h_{\min} \leq h \leq 1$  hinreichend gut erfüllen, jedoch wenigstens so gut, dass die Bedingung in der endlichdimensionalen Approximation erfüllt ist:

Für  $\epsilon > 0$  werde auf der Menge  $\bar{\Omega}$  ein  $\epsilon$ -Netz  $\Omega_r := \{x_i\}_{i=1}^r \subset \bar{\Omega}$  so gewählt, dass für jeden Punkt  $x \in \bar{\Omega}$  wenigstens ein Punkt  $x_k \in \Omega_r$  existiert, so dass

$$\|x - x_k\|_2 \leq \epsilon.$$

In Kapitel 6, S. 71, wird sich zeigen, dass  $\Omega_r$  genau die Menge an Punkten ist, an denen wir innerhalb der Diskretisierung  $h$  auswerten.

Nun werden die Materialnebenbedingungen  $g_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\begin{aligned} g_i(h) &:= h(x_i) - 1, & i = 3, \dots, r + 2, \\ g_i(h) &:= h_{\min} - h(x_{i-r}), & i = r + 3, \dots, 2r + 2. \end{aligned}$$

Weil die Einbettung von  $Q$  in  $C(\bar{\Omega})$  stetig ist und die Abbildungen  $g_i$  in  $h$  affine Funktionale sind, sind diese Abbildungen F-differenzierbar und ihre Ableitungen für beliebige  $h, q \in Q$  bestimmt durch

$$g'_i(h)q = q(x_i), \quad g'_{i+r}(h)q = -q(x_i), \quad i = 3, \dots, r + 2.$$

### Entformungsrichtung

Es kann (meist aus fertigungstechnischen Gründen, vgl. Kap. 7, S. 87, und Kap. 8, S. 97) eine Entformungsrichtung  $r_e \in \mathbb{R}^d$  gewählt werden, entlang welcher die relative Dichteverteilung  $h$  nicht abnehmen darf. In dieser Arbeit wird als Entformungsrichtung einer der kanonischen Basisvektoren  $e_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  in positiver oder negativer Richtung gewählt (in der Regel  $r_e = -e_3$ ).

Die Nebenbedingungen werden so gewählt, dass sie die Entformungsrichtung hinreichend gut erfüllen, jedoch wenigstens so gut, dass die Entformungsrichtung in der endlichdimensionalen Approximation erfüllt ist: Es werden sämtliche  $r_2 \in \mathbb{N}_0$  Paare  $(x_j, x_k)_i := (x_{ji}, x_{ki})$  gebildet, wobei  $x_{ji}, x_{ki} \in \Omega_r$  für alle  $i$  in Entformungsrichtung „benachbart“ sind. Das bedeutet für alle  $i$ , dass  $x_{ki} = x_{ji} + \alpha r_e$  mit  $\alpha > 0$  errechnet werden kann und kein kleineres  $0 < \alpha_2 < \alpha$  und  $x_l \in \Omega_r$  existieren, so dass  $x_l = x_{ji} + \alpha_2 r_e$ . Die Anzahl  $r_2 \in \mathbb{N}_0$  dieser Paare hängt von der Wahl von  $\Omega_r$  und damit von der gewählten Diskretisierung ab. Daraufhin werden für  $i = 1, \dots, r_2$  die Funktionale  $g_{i+2r+2} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g_{i+2r+2}(h) := h(x_{ji}) - h(x_{ki}).$$

Für beliebige  $h, q \in Q$  und  $i = 1, \dots, r_2$  gelten

$$g_{i+2r+2}(h + q) = g_{i+2r+2}(h) + q(x_{ji}) - q(x_{ki}).$$

Weil die Einbettung von  $Q$  in  $C(\bar{\Omega})$  stetig ist und die Abbildungen  $g_{i+2r+2}$  in  $h$  affine Funktionale sind, sind diese Abbildungen F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$g'_{i+2r+2}(h)q = q(x_{ji}) - q(x_{ki}).$$

## 4.4. Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Lösung

Nun werden notwendige Bedingungen an ein Optimum des Problems (4.8), S. 49, genannt. Hierfür gelte wiederum Voraussetzung 4.1, S. 41. Für  $u \in V$  und  $h \in Q_G$  sind die  $m+1 \in \mathbb{N}$  Funktionale den Ausführungen in Kap. 4.3, S. 51, folgend definiert durch

$$\begin{aligned} g_0(u) &:= (\ell, u), \\ g_1(h) &:= \int_{\Omega} h dx - V_0, \\ g_2(h) &:= \|h\|_{W^{2,p_0}} - c, \\ g_i(h) &:= h(x_i) - 1, \quad i = 3, \dots, r+2, \\ g_i(h) &:= h_{\min} - h(x_i), \quad i = r+3, \dots, 2r+2, \\ g_i(h) &\quad \text{F-differenzierbar,} \quad i = 2r+3, \dots, m. \end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} := \{(h, u) \in Q \times V \mid g_i(h) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a(h)(u, v) = (\ell, v) \quad \forall v \in V\}. \quad (4.15)$$

Das Lagrangefunktional, welches aus dem Optimierungsproblem (4.8), S. 49, folgt, wird definiert durch

$$\mathcal{L}(h, u, v, \Lambda) := g_0(u) + \sum_{i=1}^m \Lambda_i g_i(h) + a(h)(u, v) - (\ell, v),$$

wobei  $\Lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $u, v \in V$ ,  $h \in Q_G$ .

**Satz 4.9** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt,  $G$  ein Gewichtungoperator und  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  definiert wie in Gleichung (4.15), S. 56. Dann besitzt das minimale Nachgiebigkeitsproblem (4.8), S. 49, eine Lösung  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .*

*Weiterhin existieren Lagrange Multiplikatoren  $\Lambda_* = (\Lambda_{*1}, \dots, \Lambda_{*m})^T \in \mathbb{R}^m$  und  $v_* \in V$ , die folgende Bedingungen erfüllen:*

$$\begin{aligned} \Lambda_{*i} &\geq 0, & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ \Lambda_{*i} g_i(h_*) &= 0, & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ \mathcal{L}_h(h_*, u_*, v_*, \Lambda_*) q &= \sum_{i=1}^m \Lambda_{*i} g'_i(h_*) q + a'(h_*) q(u_*, v_*) = 0, & \forall q \in Q, \\ \mathcal{L}_u(h_*, u_*, v_*, \Lambda_*) w &= a(h_*)(u_* + v_*, w) = 0, & \forall w \in V, \\ \mathcal{L}_v(h_*, u_*, v_*, \Lambda_*) w &= a(h_*)(u_*, w) - (\ell, w) = 0, & \forall w \in V, \\ \mathcal{L}_{\Lambda}(h_*, u_*, v_*, \Lambda_*) \Upsilon &= (g_1(h_*), \dots, g_m(h_*)) \Upsilon \leq 0, & \forall \Upsilon \geq 0 \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (4.16)$$

*Beweis:* Siehe z.B. [Litv00, Theorem 2.2.4, S. 95]. □

Es sei darauf hingewiesen, dass die Existenz der Lagrange Multiplikatoren dadurch sichergestellt ist, dass *Robinsons Regularitätsbedingung* erfüllt ist, eine sog. *constraint qualification*. Sie lautet:



Es ist  $F_u(h_*, u_*) \in \mathcal{L}(V, V^*)$  surjektiv und existiert ein Paar  $(h_0, u_0) \in Q \times V$ , so dass  $F'(h_*, u_*)(h_0, u_0) = 0$  und  $g_i(h_*) + g'_i(h_*)h_0 < 0$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$ , wobei  $F$  nach Gleichung (4.11), S. 51, definiert ist, vgl. (in anderer Notation) [Hin09, Gleichung (1.130), S. 82]. Diese Bedingung ist aus folgenden Gründen erfüllt:

Werden nur Nebenbedingungen aus Kap. 4.3, S. 51, verwendet und die Volumen- sowie die Beschränktheitsnebenbedingung entsprechend sinnvoll gewählt, wovon wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausgehen, so existieren innere Punkte von  $Q_{\text{ad}}$ . Sei  $\tilde{h} \in \text{int}(Q_{\text{ad}})$  und  $\tilde{h}_0 = \tilde{h} - h_*$ . Weil  $Q_{\text{ad}}$  abgeschlossen und konvex ist und sämtliche  $g'_i$  stetig sind, existiert ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $g_i(h_*) + g'_i(h_*)(\epsilon\tilde{h}_0) < 0$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Setze also  $h_0 = \epsilon\tilde{h}_0$ . Mit Gleichung (4.12)<sub>1</sub>, S. 53, und  $u_* = u(h_*)$  gilt  $F'(h_*, u_*)(h_0, u_0) = 0$ , wenn  $u_0 = u'(h_*)h_0$ . Mit [Litv00, Theorem 2.4.5, S. 114] gilt überdies  $F_u(h_*, u_*)^{-1} \in \mathcal{L}(V^*, V)$ .

## 4.5. Endlichdimensionale Approximation des Optimierungsproblems

Nachfolgend wird die Approximation des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, durch eine endlichdimensionale Problemstellung betrachtet, vgl. [Litv00, Kap. 2.3].

### Endlichdimensionale Problemstellung

Es sei  $\{Q_l\}_{l=1}^\infty$  eine Folge endlichdimensionaler Unterräume von  $Q$  aus Voraussetzung 4.1, S. 41, welche die Bedingung

$$\liminf_{l \rightarrow \infty} \inf_{h \in Q_l} \|h - w\|_{W^{1,p_0}} = 0, \quad w \in Q \quad (4.17)$$

mit  $p_0 > 3$  erfüllt. Definiere nun

$$\mathcal{U}_{\text{ad},l} := \{(h, u) \mid (h, u) \in Q_l \times V, F(h, u) = 0 \in V^*, g_i(h) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$$

sowie

$$Q_{\text{ad}} := \{h \mid h \in Q, g_i(h) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (4.18)$$

mit stetigen Funktionalen  $g_i$ . Das endlichdimensionale minimale Nachgiebigkeitsproblem besteht darin, ein zulässiges Paar  $(h_l, u_l)$  zu finden, so dass

$$g_0(u_l) = \min_{(h,u) \in \mathcal{U}_{\text{ad},l}} g_0(u). \quad (4.19)$$

**Satz 4.10** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.9, S. 56, erfüllt und  $\{Q_l\}_{l=1}^\infty$  eine Folge endlichdimensionaler Unterräume von  $Q$ , welche die Bedingung (4.17) erfüllen. Es existiere weiterhin eine Folge  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ , so dass*

$$\begin{aligned} q_n &\in \text{int}(Q_{\text{ad}}) && \forall n, \\ q_n &\rightarrow h_* && \text{in } W^{1,p_0}(\Omega), \end{aligned}$$

wobei  $(h_*, u_*)$  eine Lösung des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, ist. Dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $l \geq k$  eine Lösung  $h_l$  für das Problem (4.19) existiert und

$$\lim_{l \rightarrow \infty} g_0(h_l, u_l) = g_0(h_*, u_*).$$

#### 4. Topologieoptimierung von linear elastischem Material

Überdies existiert eine Teilfolge  $\{h_m\}_{m=1}^\infty$  der Folge  $\{h_l\}_{l=k}^\infty$ , so dass  $h_m \rightharpoonup h_*$  in  $W^{1,p_0}(\Omega)$ .

*Beweis:* Siehe z.B. [Litv00, Theorem 2.3.1, S. 103]. □

# 5. Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtungsooperatoren

In der praktischen Anwendung der Topologieoptimierung wird üblicherweise auf die Verwendung der Beschränktheitsnebenbedingung (Kap. 4.3, S. 51) verzichtet. Stattdessen wird diese durch andere Nebenbedingungen bzw. Methoden substituiert, die eine Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, sicherstellen oder wenigstens sicherstellen sollen. Eine häufig verwendete Methode wird als *mesh-independence filter* bezeichnet, [Sigm94, Sigm97]. Sie hat neben vielen Vorteilen auch Nachteile. Daher soll im Folgenden eine Methode entwickelt werden, die die Vorteile des mesh-independence filters übernimmt, dessen Nachteile jedoch reduziert. Dies geschieht mit Hilfe des in Kap. 4.1, S. 41, vorgestellten Konzepts der Gewichtungsooperatoren.

In Kap. 5.1 werden die gängigsten Methoden zur Sicherstellung der Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, sowie deren Vor- und Nachteile dargestellt, vgl. auch [Bend04, Kapitel 1.3.1]. In Kap. 5.2, S. 61, wird mit dem Gewichtungsooperator  $G_2$  eine neue Methode entwickelt und diskutiert. Dieser lässt sich an das in Kap. 4.1, S. 41, beschriebene SIMP-Modell anbinden und erweitert dieses. Kap. 5.3, S. 63, beschreibt, wie diese Methode bei abschnittsweise konstanten relativen Dichteverteilungen realisiert werden kann und Kap. 5.4, S. 64, zeigt auf, welche Ergebnisse der Einsatz dieser Methode erreicht und vergleicht die Ergebnisse mit denen des mesh-independence filters.

## 5.1. Gründe für die Erweiterung des SIMP-Modells

Nachfolgend sei Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt.

Die in Kap. 4.3, S. 51, vorgestellte Beschränktheitsnebenbedingung wird in wissenschaftlichen Veröffentlichungen als *global gradient constraint* bezeichnet. Neben der Lösbarkeit (des Optimierungsproblems (4.8), S. 49) garantiert diese nach Satz 4.10, S. 57, auch die (schwache) Konvergenz der Lösung der endlichdimensionalen Problemstellung gegen die kontinuierliche Problemstellung (sog. *FE-Konvergenz*). Jedoch wurden laut [Sigm98, Abschnitt 3.2.2] bisher keine numerischen Implementierungen der global gradient constraint im Zusammenhang mit der Topologieoptimierung getestet.

Eine weitere Methode wird als *local gradient constraint* bezeichnet. Diese verlangt, dass fast überall  $|D^\alpha h| \leq c$  für  $|\alpha| = 1$  zu gelten hat. Damit ist  $h$  in  $Q$  beschränkt. In [Pete98] wurden Lösbarkeit und FE-Konvergenz für die dort formulierte Problemstellung bewiesen sowie die numerische Implementierung auch für abschnittsweise konstante endlichdimensionale relative Dichteverteilungen  $h \notin Q$  vorgestellt. Die numerischen Resultate sind gut,

## 5. Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtungsooperatoren

jedoch wird eine Erhöhung der Rechenzeit um den Faktor 100-1000 erwähnt. Aus diesem Grund ist diese Methode für praktische Anwendungen zu langsam und daher nicht geeignet.

Neben den Restriktionsmethoden sind vor allem Regularisierungsmethoden üblich. Eine davon wird als *filtering the density* bezeichnet. Diese errechnet die Bilinearform  $a(h)$  für  $h \in Q$  und  $u, v \in V$  durch

$$\begin{aligned} a(h)(u, v) &:= \int_{\Omega} (h * K)^p \sigma(u) \cdot e(v) dx, \\ (h * K)(x) &:= \int_{\Omega} h(y) K(x - y) dy. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $K$  ein Faltungskern, zum Beispiel definiert durch

$$K_0(x) := \begin{cases} 1 - \|x\|_2/c, & \text{falls } \|x\|_2 \leq c, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $c > 0$  und  $K(x) := K_0(x) / \int_{\mathbb{R}^3} K_0(y) dy$ . In [Bour01] wurde das oben genannten Verfahren vorgeschlagen, Lösbarkeit und FE-Konvergenz bewiesen sowie numerische Implementierungen und Beispiele vorgestellt. Die Ergebnisse sind gut, jedoch gibt es keine Aussagen zur Berechnungsdauer. In [Bend04, S. 35] wird moniert, dass zwar die errechneten relativen Dichteverteilungen  $h$  auf großen Gebieten nur die Werte  $h_{\min}$  und 1 annehmen, dies jedoch nicht für die regularisierten relativen Dichteverteilungen  $(h * K)^p$  gilt, mit welchen die mechanischen Berechnungen durchgeführt werden.

Eine aktuell weit verbreitete Methode wird als *mesh-independence filter* bezeichnet. Sie wurde in [Sigm94] und [Sigm97] vorgeschlagen, ist heuristisch und nur für die numerische Implementierung, also die endlichdimensionale Problemstellung gedacht. Es stellt sich jedoch heraus, dass die Ergebnisse denen der local gradient constraint stark ähneln, die Implementierung einfach und die Berechnungsdauer gering ist, vgl. [Sigm98]. Die Methode regularisiert elementweise die Ableitung der Nachgiebigkeit für ein  $h \in Q_{\text{ad},l}$  ( $Q_{\text{ad},l}$  ist der Raum der diskretisierten zulässigen relativen Dichteverteilungen) folgendermaßen:

$$\widehat{\Phi}'_0(h)\psi_k := \frac{\sum_{i=1}^r h_i H_{ik} \Phi'_0(h)\psi_i}{h_k \sum_{i=1}^r H_{ik}},$$

wobei sich die Ableitung der Nachgiebigkeit Kap. 4.3, S. 51, folgend durch

$$\Phi'_0(h)\psi_i = - \int_{\Omega} G'(h)\psi_i \sigma(u(h)) \cdot e(u(h)) dx$$

berechnet,  $\psi_i$  Basisfunktion von  $Q_l$  ( $Q_l$  ist der Raum der diskretisierten relativen Dichteverteilungen) ist und

$$H_{ik} := \begin{cases} 1 - \|x_i - x_k\|_2/c, & \text{falls } \|x_i - x_k\|_2 \leq c, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $c > 0$  ist. Der offensichtliche Nachteil dieser Methode ist, dass nicht bekannt ist, was genau berechnet bzw. gelöst wird, vgl. [Bend04, S. 36]. Entsprechend existieren auch keine

Beweise zur Lösbarkeit bzw. FE-Konvergenz, jedoch sind die numerischen Ergebnisse in der Regel sehr gut.

Die vorangegangenen Beispiele verdeutlichen, dass bisher noch kein optimaler Weg gefunden wurde, den Ansprüchen an Lösbarkeit, FE-Konvergenz und numerische Implementierung gerecht zu werden.

## 5.2. Konzept der Erweiterung

Der Gewichtungsoperator  $G_1$  nach Gleichung (4.2), S. 43, der das SIMP-Modell repräsentiert, sorgt dafür, dass unerwünschte Zwischendichten so unbrauchbar werden, dass sie in Lösungen des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, kaum eine Rolle spielen. Soll mit den Mitteln eines Gewichtungsoperators  $G_2$  auf die Beschränktheitsnebenbedingung, jedoch nicht auf die Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems (4.8) verzichtet werden, hat  $G_2$  dafür zu sorgen, dass keine relativen Dichteverteilungen als Lösung des Optimierungsproblems (4.8) in Frage kommen, deren Ableitungen unbeschränkt hohe Werte annehmen.  $G_2$  hat also das Vorhandensein von Gebieten zu bestrafen, in denen eine relative Dichteverteilung  $h$  im Betrag ihrer Ableitung hohe Werte ausweist.

Um Satz 4.5, S. 46, anwenden zu können, soll  $G_2 : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  die Struktur

$$G_2(h) := \exp(H(h))$$

haben. Es bietet sich an,  $H : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  durch

$$H(h) := -c\|\nabla h\|_2^2$$

zu definieren. Somit wird  $G_2$  definiert durch

$$G_2(h) := \exp(-c\|\nabla h\|_2^2). \quad (5.1)$$

Noch wurde nicht gezeigt, dass  $G_2$  bzw. das Produkt  $G_1G_2$  (zulässige) Gewichtungsoperatoren sind. Der nachfolgende Satz belegt jedoch:

**Satz 5.1** *Es seien Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt und  $G_2$  definiert wie in der vorstehenden Gleichung (5.1). Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i)  $G_2$  ist ein Gewichtungsoperator.
- (ii) Es sei  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ . Das Produkt  $G_1G_2$  ist ein zulässiger Gewichtungsoperator.

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$  und  $q_1, q_2 \in Q$ .

- (i) Der Operator  $h \mapsto H(h) = -c\|\nabla h\|_2^2$  ist zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} H'(h)q_1 &= -2c\langle \nabla h, \nabla q_1 \rangle, \\ H''(h)q_1q_2 &= -2c\langle \nabla q_1, \nabla q_2 \rangle, \end{aligned}$$

5. Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtungsoperatoren

wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt ist. Damit ist auch  $G_2$  zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} G_2'(h)q_1 &= G_2(h)H'(h)q_1, \\ G_2''(h)q_1q_2 &= G_2(h)(H'(h)q_1H'(h)q_2 + H''(h)q_1q_2). \end{aligned}$$

Weil  $h$  in  $Q$  beschränkt ist, existiert ein  $H_{\min} \leq 0$  mit  $H(h) \geq H_{\min}$ . Damit existiert ein  $G_{\min} := \exp(H_{\min}) > 0$  mit

$$G_{\min} \leq G_2(h) \leq 1.$$

Damit ist  $G_2$  ein Gewichtungsoperator nach Definition 4.2, S. 42.

- (ii) Es gilt  $H''(h)q_1q_1 = -c\|\nabla q_1\|_2^2 \leq 0$ . Mit (i) erfüllt  $H$  die Voraussetzungen aus Satz 4.5, S. 46. Damit ist  $G_1G_2$  ein zulässiger Gewichtungsoperator.

□

Nachfolgend werden Aussagen zur anzunehmenden Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, gemacht, wenn als Gewichtungsoperator  $G = G_1G_2$  verwendet, jedoch auf die Beschränktheitsnebenbedingung verzichtet wird:

**Annahme 5.2** Es seien  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ ,  $G_2$  definiert nach Gleichung (5.1), S. 61,  $G := G_1G_2$ ,  $p_0 > 3$  und Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt. Jedoch werde  $Q_{\text{ad}}$  definiert durch

$$Q_{\text{ad}} \subset \{h \mid h \in Q, \quad h_{\min} \leq h \leq 1, \quad \int_{\Omega} h dx \leq V_0\}.$$

Dann wird angenommen, dass Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  und eine relative Dichteverteilung  $h_* \in Q_{\text{ad}}$  mit  $\|h_*\|_{W^{2,p_0}} \leq c_1$  existieren, so dass  $g_0(u(h)) \geq g_0(u(h_*))$  für jedes  $h \in Q_{\text{ad}}$  mit  $\|h\|_{W^{2,p_0}} \geq c_2$  gilt.

Wenngleich es nicht möglich ist, die Gültigkeit der vorstehenden Annahme 5.2 zu beweisen, erscheint sie aus folgenden Gründen berechtigt:

Der Gewichtungsoperator  $G_2$  bestraft Gebiete, in denen eine relative Dichteverteilung  $h$  im Betrag hohe erste Ableitungen besitzt. Dadurch wird in solchen Gebieten die Nachgiebigkeit der relativen Dichteverteilung  $h$  erhöht. Die Nachgiebigkeit wird umso stärker erhöht, je höher der Betrag der Ableitungen in diesem Gebiet ist. Der Gewichtungsoperator  $G_1$  bestraft Gebiete, in denen eine relative Dichteverteilung  $h$  Zwischendichten aufweist. In Gebieten mit im Betrag hohen zweiten, jedoch niedrigen ersten Ableitungen liegen aufgrund der Definition von  $Q_{\text{ad}}$  größtenteils Zwischendichten vor. Auch in solchen Gebieten wird die Nachgiebigkeit der relativen Dichteverteilung  $h$  erhöht. Das Zielfunktional  $g_0$  errechnet gerade diese Nachgiebigkeit. Relative Dichteverteilungen  $h$ , die in größeren Gebieten im Betrag hohe Ableitungen besitzen, deren Norm  $\|h\|_{W^{2,p_0}}$  also hoch ist, dürften daher nicht als relative Dichteverteilungen mit einer niedrigen Nachgiebigkeit  $g_0(u(h))$  in Frage kommen.

Bei Annahme 5.2 ist das Optimierungsproblems (4.8), S. 49, wohlgestellt:

### 5.3. Umsetzung der Erweiterung im Falle abschnittsweise konstanter relativer Dichteverteilungen

**Satz 5.3** *Es seien  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ ,  $G_2$  definiert nach Gleichung (5.1), S. 61,  $G := G_1 G_2$  und Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt. Jedoch werde  $Q_{\text{ad}}$  definiert durch*

$$Q_{\text{ad}} \subset \{h \mid h \in Q, \quad h_{\min} \leq h \leq 1, \quad \int_{\Omega} h dx \leq V_0\}.$$

*Weiterhin seien  $a(h)$  sowie  $\ell$  definiert wie in den Gleichungen (4.3), (4.4), S. 48, und  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  wie in Gleichung (4.7), S. 49.*

*Bei Annahme 5.2 besitzt das Optimierungsproblem (4.8), S. 49, eine Lösung  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .*

*Beweis:* Es seien  $g_*$  und  $\{(h_n, u_n)\} \subset \mathcal{U}_{\text{ad}}$  definiert wie im Beweis von Satz 4.8, S. 49, und  $p_0 > 3$  sowie  $c_1, c_2 > 0$  wie in Annahme 5.2, S. 62. Um den Beweis von Satz 4.8, S. 49, anwenden zu können, muss die Folge  $\{h_n\}$  in  $W^{2,p_0}(\Omega)$  beschränkt sein. Aufgrund der Definition von  $Q_{\text{ad}}$  muss dies jedoch nicht der Fall sein. Mit Hilfe der Annahme 5.2 kann jedoch jedes Folgeelement  $h_n$  mit  $\|h_n\|_{W^{2,p_0}} \geq c_2$  durch ein geeignetes ersetzt werden, dessen Norm in  $W^{2,p_0}(\Omega)$  kleiner als  $c_1$  ist. Diese Folge wird wieder mit  $\{h_n\}$  bezeichnet und ist in  $W^{2,p_0}(\Omega)$  beschränkt.  $\square$

## 5.3. Umsetzung der Erweiterung im Falle abschnittsweise konstanter relativer Dichteverteilungen

In der praktischen Anwendung interessiert die Verwendung des im vorstehenden Kap. 5.2, S. 61, definierten Gewichtungsoptimierungsoperators  $G_2$  innerhalb des endlichdimensionalen Optimierungsproblems. Hierzu ist die Berechnung der (schwachen) Ableitung einer relativen Dichteverteilung  $h$  in  $\Omega$  nötig. Diese ist jedoch bei abschnittsweise konstanten relativen Dichteverteilungen, wie sie in der Anwendung der Topologieoptimierung üblicherweise verwendet werden, nicht definiert. Im Folgenden soll ein Vorschlag entwickelt werden, mit dem der Gewichtungsoptimierungsoperator  $G_2$  auch bei abschnittsweise konstanten relativen Dichteverteilungen verwendet werden kann.

Hierzu sei  $\Omega_l \subset \mathbb{R}^3$  das umgebende Band der Dicke  $l$  um  $\Omega$ , d.h.  $\Omega_l$  ist offen,  $\Omega_l \cap \Omega = \emptyset$  und

$$\min_{y \in \bar{\Omega}} \|x - y\|_{\infty} \leq l, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_l,$$

vgl. [Pete98, Abschnitt 4.2.1]. Eine relative Dichteverteilung  $h \in Q_l$  ( $Q_l$  ist der Raum der diskretisierten relativen Dichten) werde nun auf  $\Omega \cup \Omega_l$  erweitert, indem  $h$  in einem Punkt in  $\Omega_l$  den Wert zugewiesen bekommt, den  $h$  im nächstgelegenen Punkt (bzw. Würfel, vgl. Diskretisierung 6.2, S. 75) in  $\Omega$  hat.

Der Operator  $h \mapsto \|\nabla h\|_2^2$  ist für eine abschnittsweise konstante, nicht-stetige relative Dichteverteilung  $h$  nicht definiert, da diese keine schwache Ableitung besitzt. In diesem Fall kann dieser Operator durch den Operator

$$\|\nabla_l h\|_2^2(x) := \frac{1}{2l^2} \sum_{i=1}^3 ((h(x + le_i) - h(x))^2 + (h(x) - h(x - le_i))^2), \quad x \in \Omega \quad (5.2)$$

## 5. Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtsoperatoren

ersetzt werden, wobei  $e_i$  der  $i$ -te kanonische Basisvektor des  $\mathbb{R}^3$  sei. Grundlage der vorstehenden Definition (5.2) sind folgende Umstände:

Es sei  $h$  eine abschnittsweise konstante relative Dichteverteilung. Gebiete, in denen  $h$  ihren Wert häufig stark ändert, entsprechen solchen, in denen schwach differenzierbare relative Dichteverteilungen eine im Betrag hohe Ableitung aufweisen. In solchen Gebieten gilt oft

$$\begin{aligned} h(x + le_i) - h(x) &\not\approx h(x) - h(x - le_i), \\ h(x + le_i) - h(x - le_i) &\approx 0. \end{aligned}$$

In der praktischen Anwendung stellt sich heraus, dass anstelle von  $\|\nabla_l h\|_2^2$  durch die Verwendung des Operators

$$(\Delta_l h)^2(x) := \frac{1}{l^4} \sum_{i=1}^3 (h(x + le_i) - 2h(x) + h(x - le_i))^2, \quad x \in \Omega$$

ähnliche, jedoch im Hinblick auf die Nachgiebigkeit etwas bessere Ergebnisse erzielt werden. Hierbei approximiert  $\Delta_l$  den Laplace-Operator  $\Delta$ . Im Folgenden wird  $G_2$  daher im Falle abschnittsweise konstanter relativer Dichteverteilungen  $h$  berechnet durch

$$G_2(h) := \exp(-c(\Delta_l h)^2), \quad (5.3)$$

wobei  $c > 0$ .

### 5.4. Vergleich der Erweiterung mit dem mesh-independence filter

Im Folgenden soll der in diesem Kapitel entwickelte Gewichtsoperator  $G_2$  numerisch angewandt und die mit seiner Verwendung erzielten Ergebnisse mit denen des mesh-independence filters verglichen werden. Dies geschieht mit Hilfe von zwei numerisch zu behandelnden, exemplarischen Probegeometrien:

- a) Der Designraum  $\Omega$  sei zweidimensional mit einer Breite von 4m und einer Höhe von 80cm. Die Unterseite des Designraums sei versehen mit einer 8cm dicken Wirkfläche, d.h. die relative Dichteverteilung nehme dort den Wert 1 an. Auf die Unterseite der Wirkfläche wirke eine homogene Kantenpressung von 5N/mm in Richtung  $(0, 1)^T$ . Die Oberseite des Designraums werde gehalten, d.h. die Verschiebung  $u$  sei dort 0. Es werden die Material- und Volumen Nebenbedingung mit  $V_0 = \mu_2(\Omega)/2$  verwendet, vgl. nachfolgende Abbildung 5.1a).
- b) Der Designraum  $\Omega$  sei dreidimensional mit einer Breite von 4m, einer Länge von 2m und einer Höhe von 64cm. Die Unterseite des Designraums sei versehen mit einer 8cm dicken Wirkfläche. Auf die Unterseite der Wirkfläche wirke ein homogener Druck von 5MPa in Richtung  $(0, 0, 1)^T$ . Die Oberseite des Designraums werde gehalten. Es werden die Material- und Volumen Nebenbedingung mit  $V_0 = \mu_3(\Omega)/2$  und die Entformungsrichtung  $r_e = -(0, 0, 1)^T$  verwendet, vgl. Abbildung 5.1b).



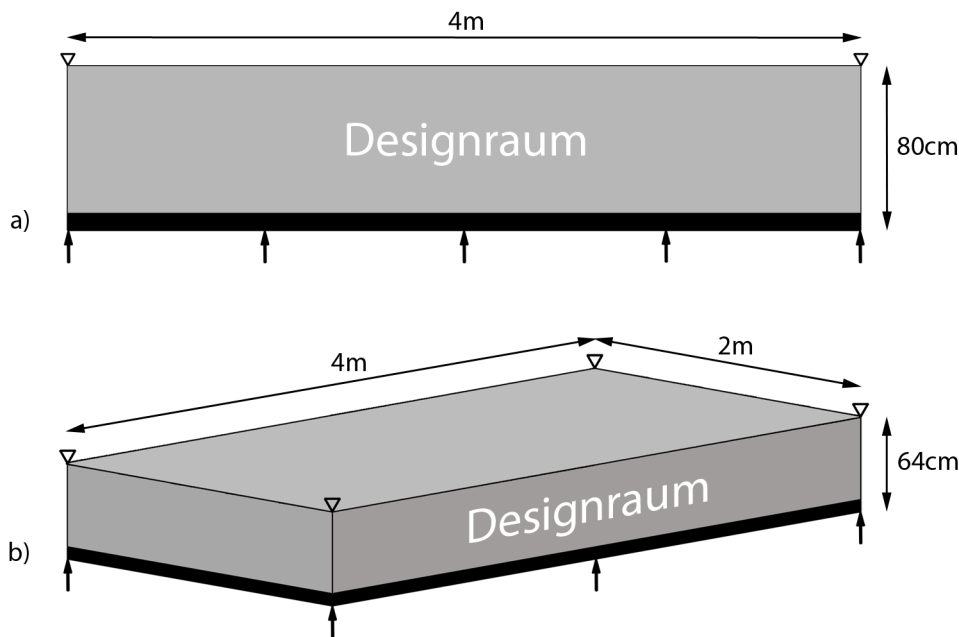


Abbildung 5.1.: Darstellung der Probegeometrien a) und b) nach Kap. 5.4, S. 64.

Zur numerischen Behandlung der Probegeometrien werden die Diskretisierung 6.2, S. 75, und der in Kap. 6.1.5, S. 79, formulierte Algorithmus verwendet. Beide Probegeometrien werden sowohl mit dem mesh-independence filter nach Kap. 5.1, S. 59, als auch mit  $G_2$  nach Gleichung (5.3), S. 64, unter einer jeweils feiner werdenden Diskretisierung bearbeitet. Beide Methoden (der mesh-independence filter und  $G_2$ ) werden dabei stets mit dem das SIMP-Modell repräsentierenden Gewichtungoperator  $G_1$  nach Gleichung (4.2), S. 43, und  $p = 3$  kombiniert. In sämtlichen Fällen werden dem verwendeten Algorithmus 100 Iterationen zur numerischen Behandlung der Probegeometrien vorgegeben. Als Startwert dient dabei die relative Dichteverteilung, die im Bereich der Wirkfläche den Wert 1 einnimmt und ansonsten konstant ist mit dem Wert, der die Volumen Nebenbedingung aktiv werden lässt. Die Ergebnisse werden hinsichtlich Nachgiebigkeit, Netzunabhängigkeit und Zwischendichten ausgewertet.

### 5.4.1. Probegeometrie a)

Probegeometrie a) wird mit fünf Diskretisierungseinheiten ( $l = 8, 4, 2, 1, 1/2$  cm) bearbeitet. Der Designraum  $\Omega$  wird also in 500, 2000, 8000, 32000 und 128000 Vierecke zerlegt.<sup>5</sup>  $G_2$  rechnet mit  $c = l^4/4$ , der mesh-independence filter mit dem Radius  $c = 6$ cm. Die durch den Algorithmus errechneten relativen Dichteverteilungen sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

<sup>5</sup>Die Diskretisierung des zweidimensionalen Designraums  $\Omega$  erfolgt hierbei äquivalent zu der in Diskretisierung 6.2, S. 75, beschriebenen Diskretisierung eines dreidimensionalen Designraums. Anstelle von Würfeln wird  $\Omega$  in Vierecke zerlegt.

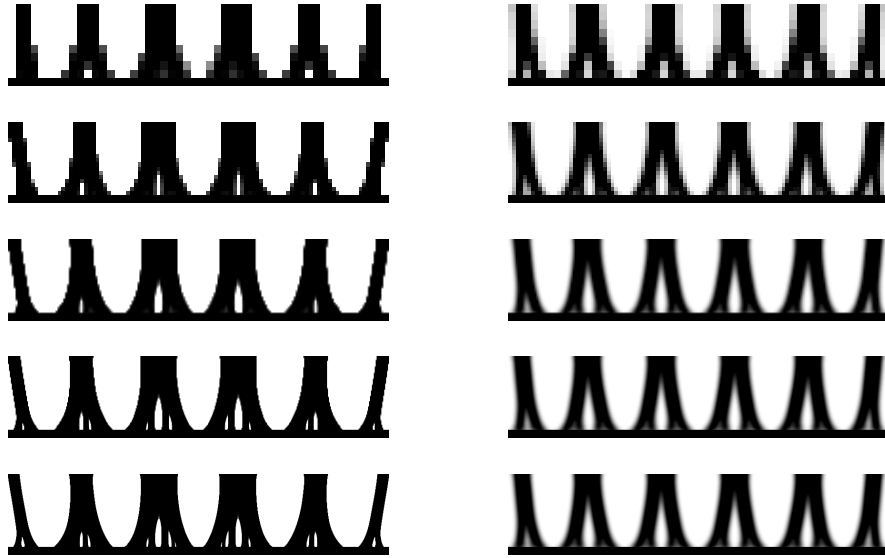


Abbildung 5.2.: Darstellung der relativen Dichteverteilungen als Ergebnis von Probegeometrie a): Von oben nach unten erhöht sich die Feinheit der Diskretisierung. Links wird  $G_2$ , rechts der mesh-independence filter verwendet. Stets wird die relative Dichteverteilung gegen  $\Omega$  abgebildet. Schwarz steht hierbei für den Wert 1 der relativen Dichteverteilung, weiß für den Wert  $h_{\min}$ .

### Mesh-independence filter

Es sei  $h_i \in Q_{ad,l}$  die durch den verwendeten Algorithmus zur  $i$ -ten Diskretisierung,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , errechnete relative Dichteverteilung nach 100 Iterationen. Der Wert  $i = 1$  steht hierbei für die am wenigsten feine Diskretisierung. Die errechnete Nachgiebigkeit beträgt durchschnittlich 977,56J. Die Nachgiebigkeit sinkt nicht bei feiner werdender Diskretisierung und weicht durchschnittlich nur um 3,84J von diesem Wert ab. Eine relative Dichteverteilung ändert sich bei feiner werdender Diskretisierung um durchschnittlich 4,15%, d.h.

$$\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 \frac{\|h_i - h_{i-1}\|_{L^1(\Omega)}}{\mu_2(\Omega)} = 0,0415.$$

Diese Änderung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 8,66% auf 0,98%. Es liegt also ein hohes Maß an Netzunabhängigkeit vor (dies ist i.ü. namensgebend für den mesh-independence filter). Die mittlere Abweichung der relativen Dichteverteilungen von  $h_{\max} = 1$  oder  $h_{\min} = 10^{-3}$  beträgt im Durchschnitt 6,2%, d.h.

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{\|\min(h_i - 10^{-3}, 1 - h_i)\|_{L^1(\Omega)}}{\mu_2(\Omega)} = 0,062.$$

Diese Abweichung wächst bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 5,46% auf 6,52%. Zwischendichten liegen also in geringem Maße vor und nehmen bei feiner werdender Diskretisierung zu.

### Gewichtungsoperator $G_2$

Die errechnete Nachgiebigkeit beträgt durchschnittlich 939,28J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1042,02J auf 885,11J. Damit ist  $G_2$  dem mesh-independence filter im Hinblick auf die Nachgiebigkeit überlegen. Eine relative Dichteverteilung ändert sich bei feiner werdender Diskretisierung um durchschnittlich 5,28%. Diese Änderung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 11,17% auf 2,19%. Damit liegt ein hohes Maß an Netzunabhängigkeit vor, jedoch liefert der mesh-independence filter in dieser Hinsicht ein geringfügig besseres Resultat. Die mittlere Abweichung der relativen Dichteverteilungen von  $h_{\max} = 1$  oder  $h_{\min} = 10^{-3}$  beträgt im Durchschnitt 0,84%. Diese Abweichung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1,61% auf 0,25%. Damit ist  $G_2$  dem mesh-independence filter im Hinblick auf Zwischendichten deutlich überlegen. Dieses Ergebnis ist auch in der vorstehenden Abbildung 5.2 zu erkennen: Die dort links abgebildeten, von  $G_2$  erzeugten relativen Dichteverteilungen weisen wesentlich schärfere Ränder auf als die rechts abgebildeten.

Tabelle 5.1 fasst die Ergebnisse zusammen:

Methode	Kriterium	Diskretisierungsindex					Einheit
		1	2	3	4	5	
$G_2$	Nachgiebigkeit	1042,02	960,08	923,71	885,5	885,11	[J]
	Netzunabh.	–	11,17	5,21	2,54	2,19	[%]
	Zwischendichten	1,61	1,13	0,81	0,4	0,25	[%]
mif	Nachgiebigkeit	983,32	974,06	973,98	978	978,42	[J]
	Netzunabh.	–	8,66	4,99	1,98	0,98	[%]
	Zwischendichten	5,46	6,1	6,41	6,51	6,52	[%]

Tabelle 5.1.: Darstellung der mit den Methoden  $G_2$  und mesh-independence filter (mif) erzielten Ergebnisse unter Probegeometrie a).

#### 5.4.2. Probegeometrie b)

Probegeometrie b) wird mit drei Diskretisierungseinheiten ( $l = 8, 4, 2$  cm) bearbeitet. Der Designraum  $\Omega$  wird also in 10000, 80000 und 640000 Würfel zerlegt.  $G_2$  rechnet mit  $c = l^4/4$ , der mesh-independence filter mit dem Radius  $c = 12$ cm. Die Festkörper, die durch die errechneten relativen Dichteverteilungen definiert werden, sind in der nachfolgenden Abbildung 5.3 dargestellt.

#### Mesh-independence filter

Es sei  $h_i \in Q_{ad,l}$  die durch den verwendeten Algorithmus zur  $i$ -ten Diskretisierung,  $i \in \{1, \dots, 3\}$ , errechnete relative Dichteverteilung nach 100 Iterationen. Der Wert  $i = 1$

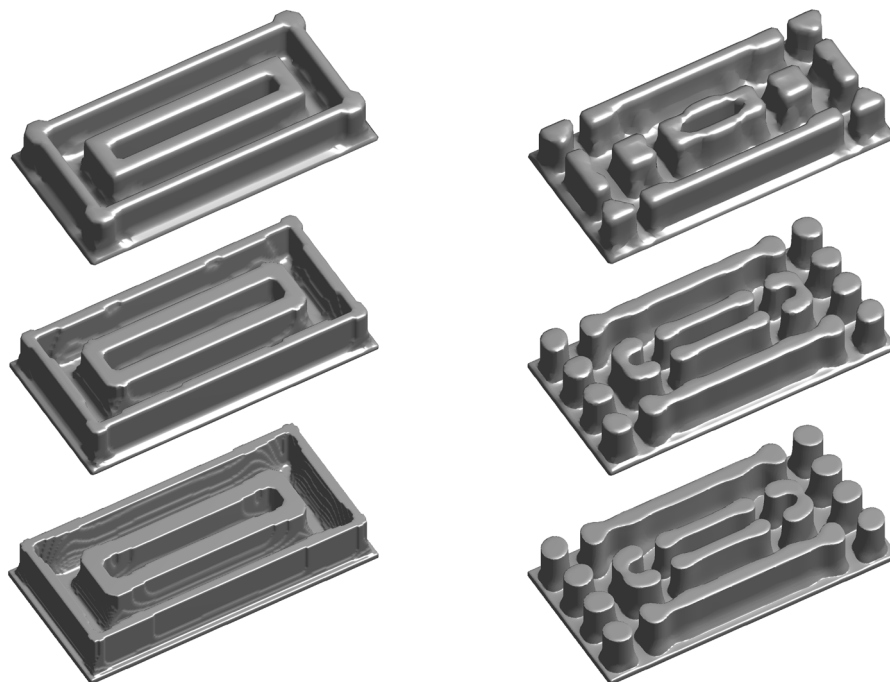


Abbildung 5.3.: Darstellung der durch die relativen Dichteverteilungen definierten Festkörper als Ergebnis von Probegeometrie b): Von oben nach unten erhöht sich die Feinheit der Diskretisierung. Links wird  $G_2$  verwendet, rechts der mesh-independence filter.

steht hierbei für die am wenigsten feine Diskretisierung. Die errechnete Nachgiebigkeit beträgt durchschnittlich 1981,55J. Die Nachgiebigkeit steigt dabei bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1901,45J auf 2037,7J an. Eine relative Dichteverteilung ändert sich bei feiner werdender Diskretisierung um durchschnittlich 8,09%, d.h.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \frac{\|h_i - h_{i-1}\|_{L^1(\Omega)}}{\mu_3(\Omega)} = 0,0809.$$

Diese Änderung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung von 12,76% auf 3,43%. Damit liegt ein hohes Maß an Netzunabhängigkeit vor. Die mittlere Abweichung der relativen Dichteverteilungen von  $h_{\max} = 1$  oder  $h_{\min} = 10^{-3}$  beträgt im Durchschnitt 10,78%, d.h.

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\|\min(h_i - 10^{-3}, 1 - h_i)\|_{L^1(\Omega)}}{\mu_3(\Omega)} = 0,1078.$$

Diese Abweichung wächst bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 9,73% auf 11,47%. Zwischendichten liegen also in geringem Maße vor und nehmen bei feiner werdender Diskretisierung zu.

### Gewichtungsoperator $G_2$

Die errechnete Nachgiebigkeit beträgt durchschnittlich 1628,76J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1785,73J auf 1511,34J. Damit ist  $G_2$  dem mesh-

#### 5.4. Vergleich der Erweiterung mit dem mesh-independence filter

independence filter im Hinblick auf die Nachgiebigkeit deutlich überlegen. Eine relative Dichteverteilung ändert sich bei feiner werdender Diskretisierung um durchschnittlich 9,54%. Diese Änderung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung von 14,16% auf 4,93%. Damit liegt ein hohes Maß an Netzunabhängigkeit vor, jedoch liefert der mesh-independence filter in dieser Hinsicht ein geringfügig besseres Resultat. Die mittlere Abweichung der relativen Dichteverteilungen von  $h_{\max} = 1$  oder  $h_{\min} = 10^{-3}$  beträgt im Durchschnitt 0,91%. Diese Abweichung sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1,48% auf 0,49%. Damit ist  $G_2$  dem mesh-independence filter im Hinblick auf Zwischendichten deutlich überlegen.

Tabelle 5.2 fasst die Ergebnisse zusammen:

Methode	Kriterium	Diskretisierungsindex			Einheit
		1	2	3	
$G_2$	Nachgiebigkeit	1785,73	1589,23	1511,34	[J]
	Netzunabhängigkeit	–	14,16	4,93	[%]
	Zwischendichten	1,48	0,76	0,49	[%]
mif	Nachgiebigkeit	1901,45	2005,5	2037,7	[J]
	Netzunabhängigkeit	–	12,76	3,43	[%]
	Zwischendichten	9,73	11,13	11,47	[%]

Tabelle 5.2.: Darstellung der mit den Methoden  $G_2$  und mesh-independence filter (mif) erzielten Ergebnisse unter Probegeometrie b).

#### 5.4.3. Fazit

Die in diesem Kap. 5.4 betrachteten Probegeometrien a) und b) liefern folgende Bewertungen der verglichenen Methoden: Während der mesh-independence filter eine geringfügig bessere Netzunabhängigkeit vorweist als  $G_2$ , liefert  $G_2$  bessere Ergebnisse im Hinblick auf die Nachgiebigkeit und insbesondere die Zwischendichten.

Allerdings hat der mesh-independence filter theoretische Nachteile. Die Methode ist heuristisch und es ist nicht bekannt, was genau berechnet bzw. gelöst wird. Demgegenüber besagt Satz 5.3, S. 63, dass  $G_2$  unter Annahme 5.2, S. 62, die Wohlgestelltheit des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, sicherstellt. Da die numerische Implementierung beider Methoden einfach und ihre Berechnungsdauer gering ist, erscheint die Feststellung berechtigt, dass der Gewichtungoperator  $G_2$  dem mesh-independence filter aufgrund seiner überwiegend besseren Ergebnisse vorzuziehen ist.



# 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren auf Basis der notwendigen Optimalitätsbedingungen

In der Topologieoptimierung haben sich zwei Lösungsmethoden zur numerischen Behandlung von Optimierungsproblemen etabliert: die *Method of Moving Asymptotes* Methodik (MMA) und die *optimality criteria* Methodik (OC). MMA approximiert das Optimierungsproblem in jedem Iterationsschritt durch ein vereinfachtes, konvexes Unterproblem und bearbeitet dieses. OC leitet ihre Iterationsvorschrift für eine gegebene Problemstellung aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen derselben ab. Während die OC Methodik vor allem bei einfach zu bearbeitenden Nebenbedingungen, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden, aufgrund von Geschwindigkeitsvorteilen vorzuziehen ist, hat die MMA Methodik gerade bei komplexeren Problemstellungen ihre Vorteile, [Bend04, S. 18ff].

In Kap. 6.1 wird ein in der Topologieoptimierung neuer OC Algorithmus für „large-scale“ Probleme entwickelt. Sodann wird in Kap. 6.2, S. 82, dieser Algorithmus mit dem gängigen Algorithmus [Bend95] verglichen, welcher in [Sigm01] mit Hilfe der Programmiersprache *Matlab* realisiert wird.

## 6.1. Entwicklung des Algorithmus

Zunächst wird in Kap. 6.1.1 dargestellt, mit welcher Problemstellung der Algorithmus in jedem Iterationsschritt konfrontiert ist. Sodann werden in Kap. 6.1.2, S. 73, die notwendigen Optimalitätsbedingungen approximiert und in Kap. 6.1.3, S. 74, diskretisiert. In Kap. 6.1.4, S. 77, werden Vereinfachungen, die notwendig sind, um „large-scale“ Probleme behandeln zu können, vorgenommen und diskutiert. Schließlich wird in Kap. 6.1.5, S. 79, der Algorithmus formuliert.

### 6.1.1. Problemstellung

In Satz 4.9, S. 56, wurden notwendige Bedingungen an eine Lösung des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, vorgestellt. Ziel ist es, iterativ ein Paar  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$  zu finden bzw. hinreichend gut zu approximieren, welches die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfüllt. Dabei seien im folgenden Abschnitt stets die Voraussetzungen von Satz 4.9

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

erfüllt. Nachfolgend werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen umgerechnet, um darstellen zu können, welche Bedingungen im  $n$ -ten Iterationsschritt zu erfüllen sind. Hierbei ist als Startwert  $h_1 \in Q_{\text{ad}}$  üblicherweise

$$h_1 = \frac{V_0}{\int_{\Omega} dx}$$

geeignet.

Es erfülle  $(h_*, u_*, v_*, \Lambda_*)$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen (4.16), S. 56. Dann folgt aus den Gleichungen (4.16)<sub>5,4</sub>, S. 56,

$$\begin{aligned} u_* &= u(h_*), \\ v_* &= -u(h_*). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Damit lautet das Ziel eines Iterationsschrittes:

Finde für gegebenes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n \in Q_{\text{ad}}$  den *Korrekturterm*  $\Delta h_n \in Q$  und die Lagrange-Multiplikatoren  $\Lambda_n := (\Lambda_{ni}) \in \mathbb{R}^m$ , so dass  $(h_n + \Delta h_n, u(h_n + \Delta h_n), -u(h_n + \Delta h_n), \Lambda_n)$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen (4.16), S. 56, erfüllt. Dabei ist  $h_{n+1} := h_n + \Delta h_n$ . Im weiteren Verlauf wird deshalb gleichbedeutend als Ziel eines Iterationsschrittes formuliert, dass das gesuchte Paar  $(\Delta h_n, \Lambda_n)$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen erfülle.

Mit den Gleichungen (6.1) lautet Gleichung (4.16)<sub>3</sub>, S. 56,

$$\sum_{i=1}^m \Lambda_{*i} g'_i(h_*) q = a'(h_*) q(u(h_*), u(h_*)), \quad \forall q \in Q.$$

Laut Gleichung (4.12)<sub>1</sub>, S. 53, gilt

$$a(h)' q(u(h), v) = -a(h)(u'(h)q, v), \quad \forall h \in Q_G, q \in Q, v \in V$$

und damit auch

$$a(h_*)' q(u(h_*), u(h_*)) = -a(h_*)(u'(h_*)q, u(h_*)).$$

Weiterhin ist mit Gleichung (4.5), S. 48,

$$\begin{aligned} a(h + \Delta h)(u(h + \Delta h), v) &= a(h)(u(h), v) \\ &= (\ell, v), \quad \forall h, h + \Delta h \in Q_G, v \in V. \end{aligned}$$

Damit gilt für  $v = u'(h_n + \Delta h_n)q$  auch

$$a(h_n + \Delta h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n + \Delta h_n)) = a(h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n)).$$

Somit erfüllt  $(\Delta h_n, \Lambda_n)$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen (4.16), S. 56, genau dann, wenn für sämtliche  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} g_i(h_n + \Delta h_n) &\leq 0, \\ \Lambda_{ni} &\geq 0, \\ \Lambda_{ni} g_i(h_n + \Delta h_n) &= 0, \\ \sum_{i=1}^m \Lambda_{ni} g'_i(h_n + \Delta h_n) q &= -a(h_n)(u'(h_n + \Delta h_n)q, u(h_n)), \quad \forall q \in Q \end{aligned} \tag{6.2}$$

gilt.



### 6.1.2. Approximation der notwendigen Optimalitätsbedingungen

Ziel des  $n$ -ten Iterationsschrittes mit gegebenem  $h_n \in Q_{\text{ad}}$  ist, dass  $h_n + \Delta h_n \in Q$  und  $\Lambda_n \in \mathbb{R}^m$  die notwendigen Optimalitätsbedingungen (6.2), S. 72, erfüllen. Um hieraus einen Algorithmus entwickeln zu können, müssen die notwendigen Optimalitätsbedingungen approximiert werden:

Die Taylorentwicklung der rechten Seite von (6.2)<sub>4</sub>, S. 72, lautet

$$\begin{aligned}
 -a(h_n)(u(h_n), u'(h_n + \Delta h_n)q) &\approx -a(h_n)(u(h_n), u'(h_n)q + u''(h_n)\Delta h_n q) \\
 &= a'(h_n)q(u(h_n), u(h_n)) + a''(h_n)\Delta h_n q(u(h_n), u(h_n)) \\
 &\quad + 2a'(h_n)q(u'(h_n)\Delta h_n, u(h_n)) \\
 &= \int_{\Omega} G'(h_n)q \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} G''(h_n)\Delta h_n q \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\
 &\quad + 2 \int_{\Omega} G'(h_n)q \sigma(u'(h_n)\Delta h_n) \cdot e(u(h_n)) \, dx.
 \end{aligned}$$

Dabei wurden die Gleichungen (4.12)<sub>1</sub> und (4.13)<sub>1</sub>, S. 53, sowie die entsprechenden Definitionen aus Kap. 4.3, S. 51, verwendet.

Die die Nebenbedingungen definierenden Funktionale  $g_i$  haben im weiteren Verlauf der Arbeit die nachfolgend definierte Voraussetzung 6.1 zu erfüllen, so dass die  $g_i$  nicht approximiert werden müssen und damit „einfach“ zu behandeln sind:

**Voraussetzung 6.1** Es sei Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt. Die verwendeten Nebenbedingungen seien derart, dass  $Q_{\text{ad}} \neq \emptyset$ . Für sämtliche  $i \in \{1, \dots, m\}$  sei  $g_i : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und affin. Damit ist  $g_i$  F-differenzierbar und die Ableitung  $g'_i$  nicht von  $h$  abhängig. Es gibt also  $g'_i \in Q^*$ , so dass  $g'_i(h)q := \langle g'_i, q \rangle_{Q^*, Q}$  für beliebige  $h, q \in Q$ .

**Bemerkung** Es sei darauf hingewiesen, dass die Beschränktheitsnebenbedingung die vorstehende Voraussetzung 6.1 nicht erfüllt. Sie wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht verwendet. Kapitel 5, S. 59, behandelte die alternativen Vorgehensweisen.

Definiere nun  $c \in Q$ ,  $D \in \mathcal{L}(Q, Q)$  und  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, Q)$  durch

$$\begin{aligned}
 (q^T, c) &:= \int_{\Omega} G'(h_n)q \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \\
 (q^T, D\Delta h_n) &:= - \int_{\Omega} G''(h_n)\Delta h_n q \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\
 &\quad - 2 \int_{\Omega} G'(h_n)q \sigma(u'(h_n)\Delta h_n) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \\
 (q^T, M\Lambda_n) &:= \sum_{i=1}^m \Lambda_{ni} \langle g'_i, q \rangle_{Q^*, Q} =: \sum_{i=1}^m (q^T, M_i \Lambda_{ni}),
 \end{aligned}$$

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren

wobei  $M_i := (g'_i)^T$ . Dann erfüllt  $(\Delta h_n, \Lambda_n)$  die approximierten notwendigen Optimalitätsbedingungen genau dann, wenn für sämtliche  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} g_i(h_n) + M_i^T \Delta h_n &\leq 0, \\ \Lambda_{ni} &\geq 0, \\ \Lambda_{ni}(g_i(h_n) + M_i^T \Delta h_n) &= 0, \\ D \Delta h_n &= c - M \Lambda_n \end{aligned} \tag{6.3}$$

gilt.

Offensichtlich ist  $D$  symmetrisch. Wir nehmen zusätzlich an, dass  $D$  invertierbar ist. Dann folgt  $\Delta h_n = D^{-1}(c - M \Lambda_n)$ . Somit erfüllt  $\Lambda_n$  die approximierten notwendigen Optimalitätsbedingungen genau dann, wenn für sämtliche  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} g_i(h_n) + M_i^T D^{-1}(c - M \Lambda_n) &\leq 0, \\ \Lambda_{ni} &\geq 0, \\ \Lambda_{ni}(g_i(h_n) + M_i^T D^{-1}(c - M \Lambda_n)) &= 0 \end{aligned}$$

gilt.

### 6.1.3. Diskretisierung der approximierten notwendigen Optimalitätsbedingungen

Anstelle der Räume  $Q$  und  $V$  werden nun die endlichdimensionalen Räume  $Q_l$  und  $V_l$  betrachtet. Zunächst wird dargestellt, welches Gleichungs- und Ungleichungssystem sich aus der Diskretisierung der vorstehenden Approximation (6.3) ergibt. Anschließend wird in Diskretisierung 6.2, S. 75, vorgestellt, wie die Räume  $Q_l$  und  $V_l$  definiert sind und aufgezeigt, warum diese Definitionen sinnvoll sind.

Für  $r \in \mathbb{N}$  sei  $\{\psi_i\}_{i=1}^r$  eine Basis von  $Q_l$ . Die relative Dichteverteilung  $\Delta h_n$  errechnet sich also durch

$$\Delta h_n := \sum_{j=1}^r \Delta h_{nj} \psi_j, \quad \Delta h_{nj} \in \mathbb{R}.$$

Es seien  $Q_{ad,l} \subset Q_l$  der Raum der diskretisierten zulässigen relativen Dichteverteilungen und  $h_n \in Q_{ad,l}$ . Werden entsprechend dem vorangegangenen Kap. 6.1.2  $(g'_k)^T := g'_k(h_n)^T \in \mathbb{R}^r$  sowie  $c := (c_i) \in \mathbb{R}^r$ ,  $D := (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  und  $M := (m_{ik}) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  durch

$$c_i := \int_{\Omega} G'(h_n) \psi_i \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &:= - \int_{\Omega} G''(h_n) \psi_i \psi_j \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} G'(h_n) \psi_i \sigma(u'(h_n) \psi_j) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \end{aligned}$$

$$m_{ik} := (g'_k)_i \tag{6.5}$$

mit  $e_i$  als dem  $i$ -ten kanonischen Basisvektor des  $\mathbb{R}^r$  definiert, so erfüllen der Korrekturterm  $\Delta h_{n,l} := (\Delta h_{nj}) \in \mathbb{R}^r$  und der Multiplikator  $\Lambda_n \in \mathbb{R}^m$  genau dann die Diskretisierung der approximierten notwendigen Optimalitätsbedingungen (kurz: die diskretisierten

Optimalitätsbedingungen), wenn für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} g_i(h_n) + M_i^T \Delta h_{n,l} &\leq 0, \\ \Lambda_{ni} &\geq 0, \\ \Lambda_{ni}(g_i(h_n) + M_i^T \Delta h_{n,l}) &= 0, \\ D \Delta h_{n,l} &= c - M \Lambda_n \end{aligned} \tag{6.6}$$

gilt, wobei  $M_i$  die  $i$ -te Spalte von  $M$  sei. Falls die Matrix  $M^T D^{-1} M$  eine P-Matrix ist, also alle prinzipalen Minoren positiv sind, existiert eine eindeutige Lösung dieses Gleichungs- und Ungleichungssystems, [Berm94]. In diesem Fall ist eine primal-duale aktive Mengen Strategie eine „extrem effiziente Methode“ zur Lösung von System (6.6), [Hint03, Abschnitt 1].

Nachfolgend wird die im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendete Diskretisierung vorgestellt:

**Diskretisierung 6.2** Als Designraum  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  werde der offene Quader

$$\Omega := (0, n_x l) \times (0, n_y l) \times (0, n_z l)$$

definiert, wobei  $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$  und  $l > 0$  mit der SI-Einheit [m]. Die Konstante  $l$  ist die *Diskretisierungseinheit*. Es wird die Punktmenge  $\Omega_r := \{x_i\}_{i=1}^r \subset \Omega$ ,  $r := n_x n_y n_z$  definiert durch

$$x_i := \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \lfloor (i-1)/(n_y n_z) \rfloor \\ n_y - ((i-1) \bmod n_y) \\ \lfloor ((i-1) \bmod n_y n_z)/n_y \rfloor \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, r\}.$$

$\Omega$  wird durch eine zulässige Zerlegung offener Würfel  $\Omega_{x_i} \subset \Omega$  der Kantenlänge  $l$  diskretisiert, wobei  $\Omega_{x_i} \subset \Omega$  genau dem Würfel mit dem Schwerpunkt  $x_i \in \Omega_r$  entspricht. Der Anschaulichkeit halber wird für  $i \in \{1, \dots, r\}$  einem Würfel  $\Omega_{x_i}$  die Kennung  $i_x \times i_y \times i_z$  zugewiesen, wobei

$$\begin{aligned} i_x &:= \lfloor (i-1)/(n_y n_z) \rfloor + 1 \in \{1, \dots, n_x\}, \\ i_y &:= ((i-1) \bmod n_y) + 1 \in \{1, \dots, n_y\}, \\ i_z &:= \lfloor ((i-1) \bmod n_y n_z)/n_y \rfloor + 1 \in \{1, \dots, n_z\}. \end{aligned}$$

$Q_l$  wird definiert durch die Menge derjenigen Funktionen  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf jedem einzelnen Würfel  $\Omega_{x_i}$  konstant sind. Eine Basis  $\{\psi_i\}_{i=1}^r$  von  $Q_l$  wird definiert durch  $\psi_i = \mathbf{1}_{\Omega_{x_i}}$ . Damit wird  $Q_{ad,l}$  definiert durch

$$Q_{ad,l} := \{h \in Q_l \mid g_i(h) \leq 0 \quad \forall i\}.$$

Der Raum  $V_l$  wird folgendermaßen definiert: Es werde die *Standardbasisfunktion*  $\phi_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\phi_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{8} (\cos \pi x_1/l + 1)(\cos \pi x_2/l + 1)(\cos \pi x_3/l + 1), & \text{falls } \|x\|_\infty \leq l, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren

vgl. nachfolgende Abb. 6.1. Weiterhin werden die Eckpunkte  $\Omega_{r_1} := \{y_j\}_{j=1}^{r_1} \subset \bar{\Omega}$ ,  $r_1 := (n_x + 1)(n_y + 1)(n_z + 1)$ , aller  $\bar{\Omega}_{x_i}$  definiert durch

$$y_j := l \begin{pmatrix} \lfloor (j-1)/((n_y+1)(n_z+1)) \rfloor \\ n_y - ((j-1) \bmod (n_y+1)) \\ \lfloor (((j-1) \bmod (n_y+1)(n_z+1))/(n_y+1)) \rfloor \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, \dots, r_1\}.$$

Dann wird für  $k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $N := 3r_1$ ,  $j = \lceil k/3 \rceil$ ,  $m = ((k-1) \bmod 3) + 1$  und  $e_m$  der  $m$ -te kanonische Basisvektor des  $\mathbb{R}^3$  die Funktion  $\phi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\phi_k(x) := \begin{cases} \phi_0(x - y_j)e_m, & \text{falls } x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen  $\phi_k$  dienen als Basis  $\{\phi_k\}_{k=1}^N$  von  $\hat{V}_l$  und haben die SI-Einheit [m]. All die Funktionen  $\phi_k$ , die überall auf  $\Gamma_0$  den Wert 0 annehmen, bilden nun eine Basis des Raums  $V_l$ . Dann gilt  $V_l \subset V$ .

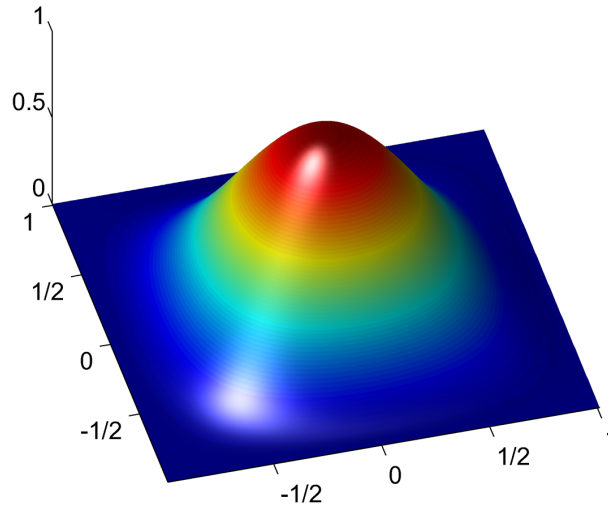


Abbildung 6.1.: Darstellung der Standardbasisfunktion  $\phi_0(x(y)) \in \mathbb{R}$  gegen  $y \in \mathbb{R}^2$ , wobei  $x(y) := (y_1 \ y_2 \ 0)^T$  und  $l = 1$  gilt.

Es seien Voraussetzung 6.1, S. 73, erfüllt und  $h \in Q_{\text{ad},l} \neq \emptyset$ . Dann besitzt die diskretisierte Zustandsgleichung

$$a(h)(u, v) = (\ell, v), \quad \text{für alle } v \in V_l$$

genau eine Lösung  $u = u(h) \in V_l$ . Es sei nun

$$\mathcal{U}_{\text{ad},l} := \{(h, u) \in Q_l \times V_l \mid g_i(h) \leq 0 \quad \forall i, a(h)(u, v) = (\ell, v) \quad \forall v \in V_l\}$$

der Raum der diskretisierten zulässigen Paare. Dann lautet das *diskretisierte minimale Nachgiebigkeitsproblem*

$$\min_{(h,u) \in \mathcal{U}_{\text{ad},l}} g_0(u). \quad (6.7)$$

Dieses besitzt eine Lösung.

Es sei darauf hingewiesen, dass  $Q_l \not\subset Q$  mit  $Q$  aus Voraussetzung 4.1, S. 41, gilt. Trotz dieses Umstandes ist die Definition von  $Q_l$  in der Topologieoptimierung üblich.<sup>6</sup> Der Nachteil  $Q_l \not\subset Q$  wird in Kauf genommen, weil sich die Rechendauer enorm reduziert, ohne dass sich die Beschreibung des Designs stark verändert.<sup>7</sup> Überdies stellt sich in der praktischen Anwendung heraus, dass sich die berechneten relativen Dichteverteilungen nur geringfügig unterscheiden.

Mit den eben beschriebenen Definitionen von  $V_l$  und  $Q_l$  gelten

$$\begin{aligned} u'(h_n)\psi_j &= \sum_{i=1}^N (u'(h_n))_{ij}\phi_i \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ G'(h_n)\psi_j &= \sum_{i=1}^r (G'(h_n))_{ij}\psi_i \in L^\infty(\Omega), \\ G''(h_n)\psi_j\psi_k &= \sum_{i=1}^r (G''(h_n))_{ijk}\psi_i \in L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

wobei  $\psi_j, \psi_k$  beliebige Basisfunktionen von  $Q_l$  seien. Damit sind die diskretisierten Optimalitätsbedingungen (6.6), S. 75, die der Korrekturterm  $\Delta h_n$  und der Lagrangemultiplikator  $\Lambda_n$  erfüllen sollen, wohldefiniert.

#### 6.1.4. Vereinfachung

Es existieren effiziente Verfahren zur Lösung der diskretisierten Optimalitätsbedingungen (6.6), S. 75, wie etwa die *primal-dual active set* Methode (PDAS), [Berg99, Hint03]. Jedoch ist bei „large-scale“ Problemen das Aufstellen der diskretisierten Optimalitätsbedingungen problematisch:

In die Berechnung von  $D$  in Gleichung (6.6)<sub>4</sub>, S. 75, fließt die Ableitung  $u'(h_n)$  ein. Diese muss mit Hilfe eines numerischen Verfahrens approximiert werden. Üblich ist hierbei die Methode der numerischen Differentiation. Ihre Anwendung führte jedoch dazu, dass pro Iterationsschritt nicht eine, sondern  $r + 1$  Zustandsgleichungen (4.5), S. 48, zu lösen wären. Die numerische Lösung der Zustandsgleichung (abgesehen von der numerischen Lösung des Gießvorgangs, vgl. Kap. 8, S. 97) nimmt eindeutig die meiste Zeit innerhalb einer Iteration in Anspruch<sup>8</sup>. Schon für mittelgroße Probleme mit  $r = 10^5$  liegt die Dauer einer einzelnen Berechnung auf aktuellen Desktopsystemen bei knapp einer Minute. Daher ist eine Berechnung von  $D$  durch numerische Differentiation im Falle von „large-scale“ Problemen nicht durchführbar.

<sup>6</sup> „Usually one approximates the density as element-wise constant (...)“, [Sigm98, Abschnitt 1].

<sup>7</sup> „In case one (...) uses bilinear and continuous design approximation (...) the overall computational time would be much higher without substantially improving the design description“, [Pete98, Abschnitt 4].

<sup>8</sup> „Most of the time, about 97 %, is spent on the equilibrium part“, [Borr01, Abschnitt 6].

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

Aus diesem Grund muss  $D$  durch eine mit geringerem Aufwand zu berechnende Matrix ersetzt werden. Ziel ist, auf eine Einbeziehung der Ableitung  $u'(h_n)$  zu verzichten. Nachfolgend wird beschrieben, wie dies geschieht:

Mit Gleichung (4.12)<sub>1</sub>, S. 53, gilt

$$\int_{\Omega} G(h) \sigma(u'(h)q) \cdot e(v) \, dx = - \int_{\Omega} G'(h)q \sigma(u(h)) \cdot e(v) \, dx \quad (6.8)$$

für beliebige  $h \in Q_G$ ,  $q \in Q$  und  $v \in V$ . Darüber hinaus wird vereinfacht durch

$$\left( \frac{1}{\mu_3(\Omega_v)} \int_{\Omega_v} G(h) \sigma(u'(h)q) \cdot e(v) \, dx \right) \mathbf{1}_{\Omega_v} \approx G(h) \sigma(u'(h)q) \cdot e(v), \quad (6.9)$$

wobei  $\Omega_v := \text{supp}(e(v))$ . Es seien  $h_n \in Q_{\text{ad},l}$  und  $\psi_i, \psi_j$  beliebige Basisfunktionen von  $Q_l$ . Mit den vorstehenden Gleichungen (6.8) und (6.9) rechnen wir

$$\begin{aligned} & -2 \int_{\Omega} G'(h_n)\psi_i \sigma(u'(h_n)\psi_j) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\ = & -2 \int_{\Omega} \frac{G'(h_n)\psi_i}{G(h_n)} G(h_n) \sigma(u'(h_n)\psi_j) \cdot e(u(h_n)) \, dx \\ = & -2 \sum_{k=1}^N u(h_n)_k \int_{\Omega} \frac{G'(h_n)\psi_i}{G(h_n)} G(h_n) \sigma(u'(h_n)\psi_j) \cdot e(\phi_k) \, dx \\ \approx & -2 \sum_{k=1}^N u(h_n)_k \int_{\Omega_{\phi_k}} \frac{G'(h_n)\psi_i}{G(h_n)} \left( \frac{1}{\mu_3(\Omega_{\phi_k})} \int_{\Omega_{\phi_k}} G(h_n) \sigma(u'(h_n)\psi_j) \cdot e(\phi_k) \, dy \right) dx \\ = & 2 \sum_{k=1}^N u(h_n)_k \int_{\Omega_{\phi_k}} \frac{G'(h_n)\psi_i}{G(h_n)} \left( \frac{1}{\mu_3(\Omega_{\phi_k})} \int_{\Omega_{\phi_k}} G'(h_n)\psi_j \sigma(u(h_n)) \cdot e(\phi_k) \, dy \right) dx \\ \approx & 2 \sum_{k=1}^N u(h_n)_k \int_{\Omega} \frac{G'(h_n)\psi_i G'(h_n)\psi_j}{G(h_n)} \sigma(u(h_n)) \cdot e(\phi_k) \, dx \\ = & 2 \int_{\Omega} \frac{G'(h_n)\psi_i G'(h_n)\psi_j}{G(h_n)} \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \end{aligned}$$

wobei  $\Omega_{\phi_k} := \text{supp}(e(\phi_k))$ . Mit dieser Rechnung würde  $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  aus den diskretisierten Optimalitätsbedingungen (6.6), S. 75, durch

$$d_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{2G'(h_n)\psi_i G'(h_n)\psi_j}{G(h_n)} - G''(h_n)\psi_i\psi_j \right) \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx$$

errechnet werden. Jedoch stellt sich heraus, dass eine Reduktion dieser Matrix auf die Hauptdiagonale ähnlich gute Resultate bei deutlich geringerem Berechnungsaufwand erzielt. Überdies kann aus einer solchen Reduktion auf einfache Weise ein mit der Struktur von [Bend95, Sigm01] vergleichbarer OC Algorithmus abgeleitet werden. Daher wird zukünftig

$$d_{ij} = \int_{\Omega} \delta_{ij} \left( \frac{2G'(h_n)\psi_i G'(h_n)\psi_j}{G(h_n)} - G''(h_n)\psi_i\psi_j \right) \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \quad (6.10)$$

gerechnet, wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta sei. Dann ist  $D$  symmetrisch positiv definit, wenn  $G$  ein zulässiger Gewichtungsoperator ist, wovon im weiteren Verlauf ausgegangen wird.

### 6.1.5. Formulierung des Algorithmus

Die diskretisierten Optimalitätsbedingungen (6.6), S. 75, mit modifiziertem  $D$  nach der vorstehenden Gleichung (6.10) lassen sich gut mit Algorithmen behandeln, die die bereits erwähnte primal-duale Strategie nach [Berg99, Hint03] verwenden. Bessere Resultate lassen sich jedoch mit einem Algorithmus erreichen, der nur Ungleichung (6.6)<sub>1</sub>, S. 75, exakt erfüllt und sich ansonsten am System (6.6)<sub>2-4</sub>, S. 75, orientiert. Vor der Formulierung dieses Algorithmus werden die verwendeten Nebenbedingungen konkretisiert:

**Voraussetzung 6.3** Es sei Voraussetzung 4.1, S. 41, erfüllt. Es werden nur die Volumen- und Materialnebenbedingung sowie die Entformungsrichtung nach Kap. 4.3, S. 51, verwendet, so dass  $Q_{\text{ad}} \neq \emptyset$ .  $g_1$  sei stets die Volumennebenbedingung,  $m \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Nebenbedingungen.

Im Folgenden wird dargestellt, auf welche Weise sich der anschließend formulierte Algorithmus am System (6.6)<sub>2-4</sub>, S. 75, orientiert:

Es seien  $c \in \mathbb{R}^r$  und  $M \in \mathbb{R}^{r \times m}$  nach den Gleichungen (6.4) und (6.5), S. 74,  $D$  nach der vorstehenden Gleichung (6.10),  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $h \in Q_l$  ( $Q_l$  aus Diskretisierung 6.2, S. 75) und  $\Lambda = 0 \in \mathbb{R}^m$ , d.h.  $\Delta h = D^{-1}c$ . Es sei die  $i$ -te Nebenbedingung verletzt, d.h.  $g_i(h + \Delta h) > 0$ . Dieser Umstand soll korrigiert werden, indem  $\Lambda$  um  $\Delta\Lambda$  geändert wird. Sollen dabei System (6.6)<sub>1-3</sub>, S. 75, für  $i$  und Gleichung (6.6)<sub>4</sub>, S. 75, erfüllt werden, wobei ausschließlich  $\Lambda_i$  um  $\Delta\Lambda_i$  geändert werden darf, so folgt

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda_i &= \frac{g_i(h + \Delta h)}{M_i^T D^{-1} M_i} > 0, \\ \Rightarrow \delta h &= -\frac{g_i(h + \Delta h)}{M_i^T D^{-1} M_i} D^{-1} M_i. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dabei beschreibt  $\delta h$  die Korrektur von  $\Delta h$ .

- (i) Entspricht die verletzte Nebenbedingung  $g_i$  einer Materialnebenbedingung im Punkt  $x_j \in \Omega_r$ ,  $j \in \{1, \dots, r\}$ , so ist  $M_i \in \{\pm e_j\}$ , wobei  $e_j$  der  $j$ -te kanonische Basisvektor des  $\mathbb{R}^r$  ist. O.B.d.A. sei  $M_i = e_j$ , d.h.  $(h + \Delta h)_j$  ist um  $g_i(h + \Delta h)$  größer als zulässig. Dann folgt mit vorstehender Gleichung (6.11)

$$\delta h = -g_i(h + \Delta h)e_j.$$

Durch die oben beschriebene Korrektur ändert sich also nur  $h_j$ , und zwar gerade so, dass Ungleichung (6.6)<sub>1</sub>, S. 75, aktiv wird. Aus diesem Umstand resultieren die Vorschriften 5b) und c) des nachfolgend formulierten Algorithmus.

- (ii) Entspricht die verletzte Nebenbedingung  $g_i$  der Entformungsrichtung in den Punkten  $x_j, x_k \in \Omega_r$ ,  $j, k \in \{1, \dots, r\}$ , so ist  $M_i \in \{\pm e_j \mp e_k\}$ . O.B.d.A. sei  $M_i = e_j - e_k$ ,

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

d.h.  $(h + \Delta h)_j - (h + \Delta h)_k$  ist um  $g_i(h + \Delta h)$  größer als zulässig. Dann folgt mit Gleichung (6.11), S. 79,

$$\delta h = -\frac{g_i(h + \Delta h)(d_{jj}^{-1}e_j - d_{kk}^{-1}e_k)}{d_{jj}^{-1} + d_{kk}^{-1}} = -\frac{g_i(h + \Delta h)(d_{kk}e_j - d_{jj}e_k)}{d_{jj} + d_{kk}}.$$

Durch die oben beschriebene Korrektur ändert sich also nur  $h_j$  und  $h_k$  und es gilt

$$(h + \Delta h + \delta h)_j = (h + \Delta h + \delta h)_k = \frac{(h + \Delta h)_j d_{jj} + (h + \Delta h)_k d_{kk}}{d_{jj} + d_{kk}}.$$

Damit erfolgt die Korrektur gerade so, dass Ungleichung (6.6)<sub>1</sub>, S. 75, aktiv wird. An diesem Umstand orientiert sich die Vorschrift 5a) des nachfolgend formulierten Algorithmus: Diese korrigiert  $\Delta h$  so, als ob  $D$  die Einheitsmatrix wäre, d.h.  $d_{jj} = d_{kk} = 1$ . Dies führt in der Regel zu besseren Ergebnissen.

- (iii) Der Korrekturterm  $\Delta h$  wird im nachfolgend formulierten Algorithmus folgendermaßen erzeugt: Zunächst werden nach Vorschrift 4)  $\Lambda_1$  und  $\Delta h$  initiiert. Sodann wird  $\Delta h$  nach Vorschrift 5) korrigiert, sodass Ungleichung (6.6)<sub>1</sub>, S. 75, für  $i = 2, \dots, m$  erfüllt ist. Schließlich wird überprüft, ob das System (6.6)<sub>1-3</sub>, S. 75, für  $i = 1$  hinreichend gut erfüllt ist. Ist das der Fall, bricht der Algorithmus ab. Falls nicht, wiederholt der Algorithmus die Prozedur mit einem durch Vorschrift 7) modifizierten  $\Lambda_1$ .

Voraussetzung 6.3, S. 79, sei für den weiteren Verlauf dieser Arbeit gültig. Die Struktur des nachfolgend formulierten Algorithmus ist vergleichbar mit der Struktur des in [Bend95] genannten Algorithmus.

### Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

- 1) Initialisiere  $h_1$ , setze  $n = 1$ ,  $\Delta h_{\max} \in (0, 1]$ ,  $\text{TOL}_{1,2} > 0$ ,  $M_1$  als 1. Spalte von  $M$  aus Gl. (6.5), S. 74, sowie ein Abbruchkriterium.
- 2) Berechne  $u(h_n)$  nach Gl. (4.5), S. 48, mit  $V = V_i$ ,  $c$  nach Gl. (6.4), S. 74 und  $D$  nach Gl. (6.10), S. 78.
- 3) Setze  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 10^5$ ,  $k = 0$ .
- 4) Setze und löse

$$\begin{aligned} \Lambda_{n1}^k &= \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}, \\ D\Delta h_n^k &= c - M_1\Lambda_{n1}^k. \end{aligned} \quad (6.12)$$

- 5) a) Für  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  derart, dass ein  $i_0 \in \{2, \dots, m\}$  existiert, so dass

$$g_{i_0}(h_n + \Delta h_n^k) = h_n(x_{i_0}) + \Delta h_n^k(x_{i_0}) - h_n(x_j) - \Delta h_n^k(x_j) > 0,$$

setze  $\Delta h_n^k(x_i)$ ,  $\Delta h_n^k(x_j)$  derart, dass

$$h_n(x_i) + \Delta h_n^k(x_i) = h_n(x_j) + \Delta h_n^k(x_j) = \frac{h_n(x_i) + \Delta h_n^k(x_i) + h_n(x_j) + \Delta h_n^k(x_j)}{2}.$$



b) Für  $j \in \{1, \dots, r\}$  derart, dass ein  $i \in \{2, \dots, m\}$  existiert, so dass

$$g_i(h_n + \Delta h_n^k) = h_n(x_j) + \Delta h_n^k(x_j) - 1 > 0,$$

setze  $\Delta h_n^k(x_j) = 1 - h_n(x_j)$ .

c) Für  $j \in \{1, \dots, r\}$  derart, dass ein  $i \in \{2, \dots, m\}$  existiert, so dass

$$g_i(h_n + \Delta h_n^k) = h_{\min} - h_n(x_j) - \Delta h_n^k(x_j) > 0,$$

setze  $\Delta h_n^k(x_j) = h_{\min} - h_n(x_j)$ .

d) Setze  $\Delta h_n^k = \max(-\Delta h_{\max}, \min(\Delta h_n^k, \Delta h_{\max}))$  (komponentenweise).

6) Falls  $\Lambda_{n1}^k < \text{TOL}_1$  oder  $|g_1(h_n + \Delta h_n^k)| \leq \text{TOL}_2$  setze  $\Delta h_n = \Delta h_n^k$ ,  $\Lambda_{n1} = \Lambda_{n1}^k$  und gehe zu 8), sonst zu 7).

7) Falls  $g_1(h_n + \Delta h_n^k) > 0$ , setze  $\lambda_0 = \Lambda_{n1}^k$ , sonst  $\lambda_1 = \Lambda_{n1}^k$ . Setze  $k = k + 1$  und kehre zurück zu 4).

8) Abbruch, falls Abbruchkriterium erfüllt, sonst setze  $h_{n+1} = h_n + \Delta h_n$ ,  $n = n + 1$  und kehre zurück zu 2).

**Bemerkung** In vorstehender Vorschrift 3) muss sichergestellt sein, dass  $\Lambda_{n1} \leq \lambda_1$ . In unserem Fall hatte  $\Lambda_{n1}$  stets die Größenordnung  $10^{-4} - 10^{-2}$ , weshalb auch ein kleineres  $\lambda_1$  möglich gewesen wäre.

Der in diesem Kapitel entwickelte Algorithmus ist insbesondere durch Gleichung (6.12), S. 80, gekennzeichnet. Diese kann mit der im gängigen OC Algorithmus [Bend95] verwendeten Vorschrift verglichen werden, was im folgenden Kapitel 6.2 geschieht. Da der Algorithmus [Bend95] auf das SIMP-Modell ausgelegt ist, wird im nachfolgenden Beispiel 6.4 errechnet, wie sich Gleichung (6.12), S. 80, bei Verwendung des SIMP-Modells darstellt:

**Beispiel 6.4 (SIMP-Modell)** Es seien Voraussetzung 6.3, S. 79, und Diskretisierung 6.2, S. 75, erfüllt. Nach Satz 4.3, S. 43, ist die das SIMP-Modell beschreibende Abbildung  $G(h_n) = h_n^p$ ,  $p > 1$  ein zulässiger Gewichtungoperator mit

$$\frac{2(G'(h_n)q_1)^2}{G(h_n)} - G''(h_n)q_1q_1 = p(p+1)h_n^{p-2}q_1q_1 \geq 0$$

und  $h_n \in Q_{\text{ad},l}$  sowie  $q_1 \in Q_l$ ,  $q_1 \neq 0$ . Mit den Gleichungen (6.4) und (6.5), S. 74, sowie (6.10), S. 78, errechnet sich für  $i \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} c_i &:= \int_{\Omega_{x_i}} p h_n^{p-1} \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx, \\ m_{i1} &:= l^3, \\ d_{ij} &:= \int_{\Omega_{x_i}} \delta_{ij} p(p+1) h_n^{p-2} \sigma(u(h_n)) \cdot e(u(h_n)) \, dx \end{aligned}$$

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren

und damit

$$d_{ii} = \frac{(p+1)c_i}{h_{ni}} > 0.$$

Setze  $\Lambda_0^k := \Lambda_{n1}^k l^3$ . Gleichung (6.12), S. 80, wird dann gelöst durch

$$\Delta h_n^k(x_i) = \frac{c_i - \Lambda_0^k}{(p+1)c_i} h_n(x_i), \quad x_i \in \Omega_r. \quad (6.13)$$

## 6.2. Vergleich des entwickelten mit einem gängigen Algorithmus

Im Folgenden wird der eben entwickelte Algorithmus mit dem in der Topologieoptimierung gängigen Algorithmus nach [Bend95] verglichen. In Kap. 6.2.1 wird dessen Iterationsregel vorgestellt. In Kap. 6.2.2, S. 83, werden die Iterationsregeln der beiden Algorithmen verglichen. Kap. 6.2.3, S. 84, schließlich vergleicht die Ergebnisse, die aus der Anwendung der beiden Algorithmen resultieren.

### 6.2.1. Die Iterationsregel des gängigen Algorithmus

Der in [Bend95] vorgeschlagene Algorithmus<sup>9</sup> beschränkt sich auf das SIMP-Modell und die Volumen- und Materialnebenbedingung. Gleichwohl ließen sich sowohl die Entformungsrichtung z.B. entsprechend Vorschrift 5a) des in Kap. 6.1.5, S. 79, formulierten neuen Algorithmus, als auch das Konzept der Gewichtsoperatoren in den Algorithmus nach [Bend95] implementieren. Der entscheidende Unterschied zu dem neuen Algorithmus besteht in der Formulierung von Vorschrift 4)<sub>2</sub>, nachfolgend *Iterationsregel* genannt. Diese lautet bei dem Algorithmus nach [Bend95]

$$\Delta h_n^k(x_i) = \left( \left( \frac{c_i}{\Lambda_0^k} \right)^\eta - 1 \right) h_n(x_i), \quad x_i \in \Omega_r. \quad (6.14)$$

Dabei haben  $\Lambda_0^k$ ,  $c_i$ ,  $h_n$  und  $\Omega_r$  dieselbe Definition wie in Beispiel 6.4, S. 81. Weiterhin wird in der Regel  $\eta = 1/2$  gesetzt.

**Bemerkung** Wenn  $c_i \approx \Lambda_0^k > 0$ , so gilt

$$\Delta h_n^k(x_i) \approx \frac{c_i - \Lambda_0^k}{c_i} \eta h_n(x_i), \quad x_i \in \Omega_r, \quad (6.15)$$

sofern  $\Delta h_n^k(x_i)$  durch die vorstehende Iterationsregel (6.14) berechnet wird.

*Beweis:* Über die Taylorentwicklung folgt

$$(1+h)^\eta = 1 + \eta h + O(h^2)$$

---

<sup>9</sup>Der in [Bend95, Kap. 1.2] vorgeschlagene Algorithmus bezieht sich auf die Verwendung von Materialien mit Mikrostrukturen. Die Formulierung und Begründung dieses Algorithmus für die Verwendung von relativen Dichteverteilungen kann z.B. in [Sigm01] oder in [Bend04, Kap. 1.2] gefunden werden.

und damit für  $c_i \approx \Lambda_0^k$

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_i}{\Lambda_0^k}\right)^\eta - 1 &= \left(1 + \frac{c_i - \Lambda_0^k}{\Lambda_0^k}\right)^\eta - 1 \\ &\approx \frac{c_i - \Lambda_0^k}{\Lambda_0^k} \eta \\ &\approx \frac{c_i - \Lambda_0^k}{c_i} \eta. \end{aligned}$$

□

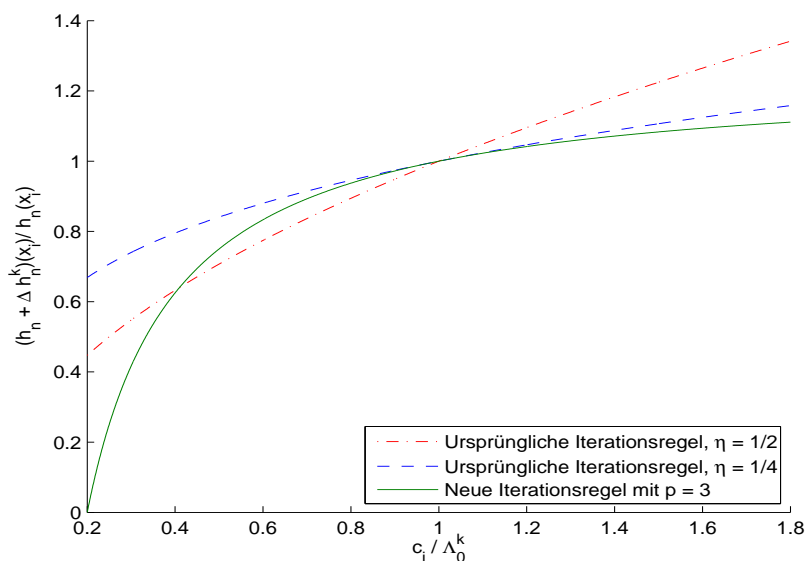


Abbildung 6.2.: Darstellung der unterschiedlichen Iterationsregeln bei Verwendung des SIMP-Modells. Für ein  $x_i \in \Omega_r$  und eine relative Dichteverteilung  $h_n(x_i)$  wird der normierte *Iterationsvorschlag*  $(h_n + \Delta h_n^k)(x_i)/h_n(x_i)$  gegen  $c_i/\Lambda_0^k$  dargestellt.

### 6.2.2. Vergleich der Iterationsregeln

Die Iterationsregel des Algorithmus nach [Bend95] wird durch Gleichung (6.14), S. 82 definiert. Bei Verwendung des SIMP-Modells wird die Iterationsregel des neuen Algorithmus durch Gleichung (6.13), S. 82, definiert. Für  $\eta = 1/(p+1)$  verhalten sich diese Iterationsregeln für  $c_i \approx \Lambda_0^k > 0$  aufgrund von Gleichung (6.15), S. 82, offensichtlich asymptotisch identisch. Dies ist anhand des zweiten und dritten Graphen der vorstehenden Abbildung 6.2 in der Umgebung von  $c_i/\Lambda_0^k = 1$  erkennbar.

Beiden Iterationsregeln gemeinsam ist, dass  $\Delta h_n^k(x_i) = 0$  für  $c_i = \Lambda_0^k$  berechnet wird. Das ist sinnvoll, da in diesem Fall das Optimalitätskriterium bereits erfüllt ist, d.h. die rechte Seite von (6.6)<sub>4</sub>, S. 75, ist in der  $i$ -ten Komponente 0, sofern keine anderen Nebenbedingungen aktiv sind. Weiterhin ist die Ableitung der Funktion  $c_i/\Lambda_0^k \mapsto$

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

$(h_n + \Delta h_n^k)(x_i)/h_n(x_i)$  im Definitionsbereich  $c_i/\Lambda_0^k > 0$  bei beiden Iterationsregeln global positiv, siehe vorstehende Abbildung 6.2. Das macht Sinn, denn die Folge ist, dass in Bereichen, in denen eine Erhöhung der relativen Dichteverteilung  $h_n(x_i)$  eine überproportionale Reduktion der Nachgiebigkeit zur Folge hat ( $c_i > \Lambda_0^k$ ), die relative Dichteverteilung tatsächlich erhöht wird, d.h.  $\Delta h_n^k(x_i) > 0$ . In Bereichen mit gegenteiliger Wirkung ( $c_i < \Lambda_0^k$ ) wird die relative Dichteverteilung  $h_n(x_i)$  jedoch reduziert.

Unterschiedlich ist hierbei jedoch das Ausmaß der Veränderung von  $h_n(x_i)$ . Während die relative Dichteverteilung  $h_n$  bei Verwendung der neuen Iterationsregel nur um den Faktor  $1/(p+1)$  wachsen und sich auch nur in Bereichen mit kleinen  $c_i/\Lambda_0^k$  schnell verringern kann, legt die ursprüngliche Iterationsregel mit  $\eta = 1/2$  die Gewichtung auf ein rasche Veränderung von  $h_n$ .

### 6.2.3. Vergleich der Ergebnisse

Im Folgenden soll der in Kap. 6.1.5, S. 79, formulierte Algorithmus angewandt und die hierbei erzielten Ergebnisse mit denen des Algorithmus [Bend95] verglichen werden. Dabei werden die exemplarischen Probegeometrien a) und b) aus Kap. 5.4, S. 64, numerisch behandelt und die hierbei erzielten Ergebnisse ausgewertet:

Zur numerischen Behandlung der Probegeometrien werden die Diskretisierung 6.2, S. 75, und der Gewichtungsooperator  $G := G_1 G_2$  mit  $G_1$  nach Gleichung (4.2), S. 43, und  $p = 3$  sowie  $G_2$  nach Gleichung (5.3), S. 64, und  $c = l^4/4$  verwendet. Beide Probegeometrien werden sowohl mit dem in Kap. 6.1.5, S. 79, formulierten Algorithmus, als auch mit dem Algorithmus nach [Bend95] unter einer jeweils feiner werdenden Diskretisierung bearbeitet. In allen Fällen werden dem verwendeten Algorithmus 100 Iterationen zur numerischen Behandlung der Probegeometrien vorgegeben. Als Startwert dient dabei die relative Dichteverteilung, die im Bereich der Wirkfläche den Wert 1 einnimmt und ansonsten konstant ist mit dem Wert, der die Volumen Nebenbedingung aktiv werden lässt. Die Ergebnisse werden hinsichtlich ihrer Nachgiebigkeit ausgewertet.

#### Probegeometrie a)

Entsprechend Kap. 5.4, S. 64, wird Probegeometrie a) mit fünf Diskretisierungsfeinheiten ( $l = 8, 4, 2, 1, 1/2$  cm) bearbeitet. Der Designraum  $\Omega$  wird also in 500, 2000, 8000, 32000 und 128000 Vierecke zerlegt. Die durch den Algorithmus errechneten relativen Dichteverteilungen sind in der nachfolgenden Abbildung 6.3 dargestellt.

Die errechnete Nachgiebigkeit der Ergebnisse des Algorithmus nach [Bend95] beträgt durchschnittlich 982, 68J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung von 1117, 31J auf 949, 35J. Demgegenüber beträgt die errechnete Nachgiebigkeit der Ergebnisse des Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, durchschnittlich 939, 28J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1042, 02J auf 885, 11J. Damit ist der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, dem nach [Bend95] im Hinblick auf die unter Probegeometrie a) errechnete Nachgiebigkeit überlegen.

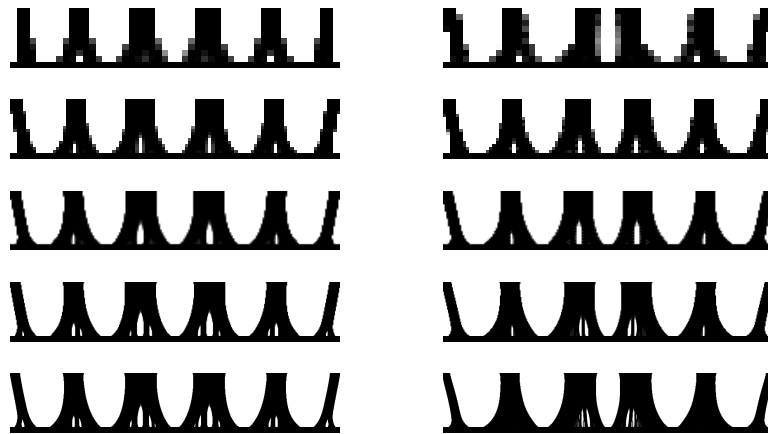


Abbildung 6.3.: Darstellung der relativen Dichteverteilungen als Ergebnis von Probegeometrie a): Von oben nach unten erhöht sich die Feinheit der Diskretisierung. Links wird der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, verwendet, rechts der nach [Bend95]. Stets wird die relative Dichteverteilung gegen  $\Omega$  abgebildet. Schwarz steht hierbei für den Wert 1 der relativen Dichteverteilung, weiß für den Wert  $h_{\min}$ .

### Probegeometrie b)

Wie in Kap. 5.4, S. 64, wird Probegeometrie b) mit drei Diskretisierungseinheiten ( $l = 8, 4, 2$  cm) bearbeitet. Der Designraum  $\Omega$  wird also in 10000, 80000 und 640000 Würfel zerlegt. Die Festkörper, die durch die errechneten relativen Dichteverteilungen definiert werden, sind in der nachfolgenden Abbildung 6.4 dargestellt.

Die errechnete Nachgiebigkeit der Ergebnisse des Algorithmus nach [Bend95] beträgt durchschnittlich 1690,73J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung von 1826,21J auf 1593,04J. Demgegenüber beträgt die errechnete Nachgiebigkeit der Ergebnisse des Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, durchschnittlich 1628,76J. Sie sinkt bei feiner werdender Diskretisierung monoton von 1785,73J auf 1511,34J. Damit ist der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, dem nach [Bend95] im Hinblick auf die unter Probegeometrie b) errechnete Nachgiebigkeit überlegen, vgl. auch die nachfolgenden Tabelle 6.1:

Alg.	Probe- geometrie	Diskretisierungsindex					Einheit
		1	2	3	4	5	
Kap. 6.1.5	a)	1042,02	960,08	923,71	885,5	885,11	[J]
	b)	1785,73	1589,23	1511,34	–	–	
[Bend95]	a)	1117,31	975,61	937,11	934,04	949,35	[J]
	b)	1826,21	1652,95	1593,04	–	–	

Tabelle 6.1.: Darstellung der durch Anwendung der unterschiedlichen Algorithmen erzielten Nachgiebigkeiten.

## 6. Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtsoperatoren

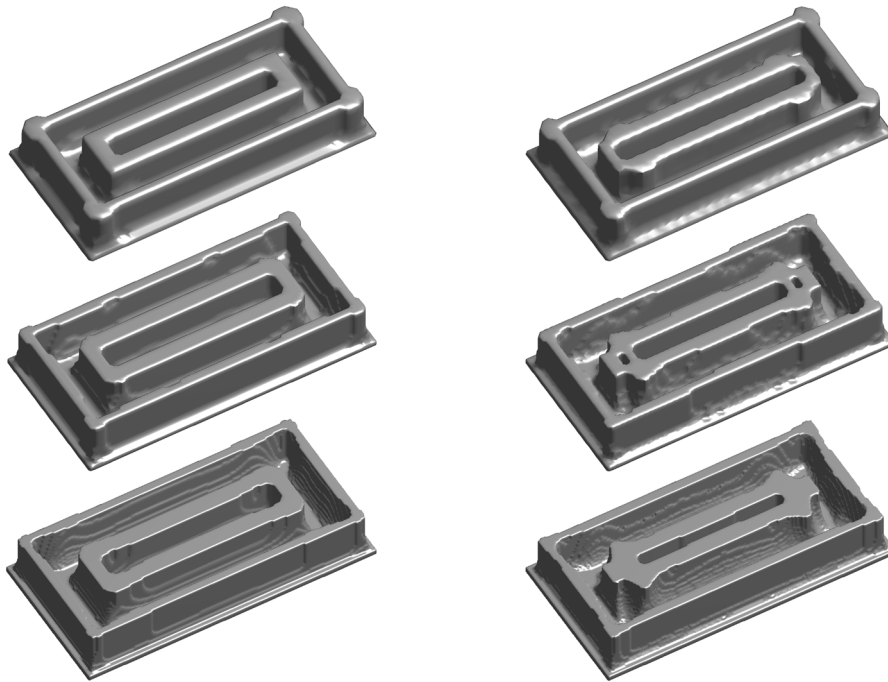


Abbildung 6.4.: Darstellung der durch die relativen Dichteverteilungen definierten Festkörper als Ergebnis von Probegeometrie b): Von oben nach unten erhöht sich die Feinheit der Diskretisierung. Links wird der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, verwendet, rechts der nach [Bend95].

### Fazit

Die in diesem Kap. 6.2.3 betrachteten Probegeometrien a) und b) liefern folgende Bewertungen der verglichenen Algorithmen: In sämtlichen Fällen erzielt der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, eine niedrigere Nachgiebigkeit als der Algorithmus nach [Bend95]. Der Unterschied beträgt im Durchschnitt 4,12%, mindestens 1,43% und maximal 6,77%. Überdies weisen die durch den Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, errechneten relativen Dichteverteilungen in der Regel „glattere“ Strukturen auf als die des Algorithmus nach [Bend95], vgl. die Abbildungen 6.3 und 6.4, S. 85f.

Da die numerische Implementierung beider Algorithmen vergleichbar einfach ist, erscheint die Feststellung berechtigt, dass der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, dem Algorithmus nach [Bend95] aufgrund seiner durchgängig besseren Ergebnisse vorzuziehen ist.

# 7. Anwendung des Algorithmus zur mechanischen Optimierung von Umformwerkzeugen

Große Umformwerkzeuge werden auf der wirkflächenabgewandten Seite mit Verrippungsstrukturen ausgestattet, um eine ausreichend steife Geometrie bei möglichst geringem Werkzeuggewicht zu erhalten. Diese Verrippungen werden streng nach firmeninternen Konstruktionsvorschriften ausgelegt, wobei in der Regel rechteckige oder wabenförmige Anordnungen von Stegen in der Hauptbelastungsrichtung zum Einsatz kommen, [Hoff07, Sieg01]. Die Überprüfung der Verrippungsauslegung über FE-Simulationen findet nicht durchgängig statt. Zudem werden in der Regel zur Berechnung homogene Materialeigenschaften angenommen, da der Herstellungsprozess keine Berücksichtigung findet. Umformwerkzeuge werden überwiegend aus Gusseisen im Verfahren Vollformguss hergestellt, [Doeg07]. Die gießtechnische Auslegung erfolgt über Erfahrungswerte der Gießerei und des Konstrukteurs. Aktuelle Gießsimulationsprogramme, mit denen detaillierte Aussagen über Formfüllung, Erstarrung, Temperaturverteilung, Eigenspannungen, mechanische Eigenschaften und Gießfehler berechnet werden können, werden nur in Einzelfällen angewandt, [Schn08, Schw08], obwohl Anwendungsmöglichkeiten im Gießereibereich grundsätzlich weit verbreitet sind.

Die Topologieoptimierung ermöglicht die ideale mechanische Auslegung großer Umformwerkzeuge. Eine gleichzeitige Berücksichtigung des Fertigungsprozesses Gießen hinsichtlich der Inhomogenität von Materialeigenschaften, der Vermeidung von Gießfehlern und der Gießbarkeit findet dabei allerdings nicht statt, [Hess03, Katz07, Mair05, Tram07]. Die Topologieoptimierung großer Umformwerkzeugen befindet sich in der Industrie noch im Forschungs- und Entwicklungsstadium oder wird nur zur Optimierung von Einzelaspekten herangezogen, [Schn08].

In diesem Kapitel werden neuartige topologieoptimierte Verrippungsstrategien vorgeschlagen, in Hinblick auf Mechanik, Gießtechnik und Fertigungsgerechtigkeit analysiert und mit konventionellen Verrippungsstrategien verglichen. Die Erkenntnisse sind der Ertrag der Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Umformtechnik und Gießereiwesen (utg) der Technischen Universität München im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts „Mathematisch, gießtechnische Optimierung der Verrippung großer Umformwerkzeuge“ und führten zur Veröffentlichung von [Drud09].

Kap. 7.1 beschreibt die entwickelte Software, mit der die Topologieoptimierung durchgeführt wird. In Kap. 7.2, S. 88, werden die zu optimierenden Probegeometrien definiert. Die aus der Anwendung der Software resultierenden optimierten Geometrien werden in Kap. 7.3, S. 89, analysiert und in Kap 7.4, S. 90, mit konventionell gestalteten Geometrien verglichen. Kap. 7.5, S. 95, beschreibt einen Ansatz zur Reduktion von Eigenspannungen

innerhalb der optimierten Geometrien. Kap. 7.6, S. 96, schließlich bewertet die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse.

## 7.1. Entwickelte Software

Basierend auf dem in Kapitel 4, S. 41, beschriebenen Konzept der Gewichtungsooperatoren wurde unter Verwendung des in Kap. 6.1.5, S. 79, entwickelten Algorithmus eine Topologieoptimierungssoftware in den Programmiersprachen C und Matlab (The MathWorks, Inc., USA) programmiert. Die Struktur der Implementierung lehnt sich an den in [Sigm01] empfohlenen Programmcode an. Es wurde eine STL-Schnittstelle geschrieben, wodurch topologieoptimierte Geometrien in der Gießsimulation MAGMASOFT (MAGMA Gießertechnologie GmbH, Aachen) eingelesen und gießtechnisch analysiert werden können. Der Programmcode wurde auf mediaTUM, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Technischen Universität München, gemeinsam mit dieser Arbeit veröffentlicht.

Anstelle des in Kap. 5.2, S. 61, vorgeschlagenen Gewichtungsooperators  $G_2$  kommt in diesem Kapitel noch der in Kap. 5.1, S. 59, beschriebene „mesh-independence filter“ zum Einsatz. Überdies werden weder eine Entformungsrichtung (siehe Kap. 4.3, S. 51), noch der Abkühlverlauf (siehe Kap. 8.2, S. 107) in die Optimierung einbezogen.

## 7.2. Definition der zu optimierenden Probegeometrien

Zur Überprüfung des mathematischen Modells und zum Vergleich von optimierten mit konventionell verrippten Bauteilen durch Gießsimulation und mechanische FE-Analyse werden parametrisch aufgebaute Probegeometrien definiert. Die Auswahl und Festlegung der Parameter orientiert sich an charakteristischen Merkmalen und den Abmessungen realer Umformwerkzeuge. Um gute Experimentierbedingungen und die Ermittlung grundlegender Aussagen zu gewährleisten, werden als zulässige Abstrahierung festgelegt die Reduzierung der Umformwerkzeug-Wirkfläche auf eine homogene, 8cm dicke Deckenplatte und der Verzicht auf Führungsflächen, Tragwangen und seitliche Rippentaschen. Für die konventionellen Verrippungen ergibt sich beispielhaft eine Struktur wie in der nachfolgenden Abbildung 7.1a). Die Konstruktionsparameter zur Variation der Verrippung sind in der nachfolgenden Tabelle 7.1 aufgelistet.

Darüber hinaus ergibt sich für die zu optimierenden Verrippungen ein maximaler Designraum, dessen Grundfläche  $2\text{m} \times 4\text{m}$  misst und dessen Höhe über den Parameter  $H_x$  beschrieben wird. Der Volumenanteil des Designraums, welcher mit Masse zu füllen ist, ist durch  $V_x$  gegeben. Die Bezeichnung einer Probegeometrie ergibt sich aus der Aneinanderreihung der genannten Parametersymbole mit jeweiligem Index.

Tiefzugumformwerkzeuge sind einer großen Anzahl unterschiedlicher Lastbedingungen ausgesetzt. Aus diesem Grund wurden die in der Simulation angesetzten Oberflächenkräfte zu drei unterschiedlichen Typen von Krafteinleitungen abstrahiert: Die *homogene* Flächenpressung (Abb. 7.1b) repräsentiert Umformwerkzeuge für große, flache Teile (z.B. Motorhauben). Die Kräfte, die bei kleineren Teilen mit größeren Zugtiefen entstehen (z.B. B-Säulen), werden durch eine Flächenpressung simuliert, welche in der Mitte der Wirkfläche doppelt so hoch ist wie am Rand, und dies entweder in einem *rechteckigen* oder in



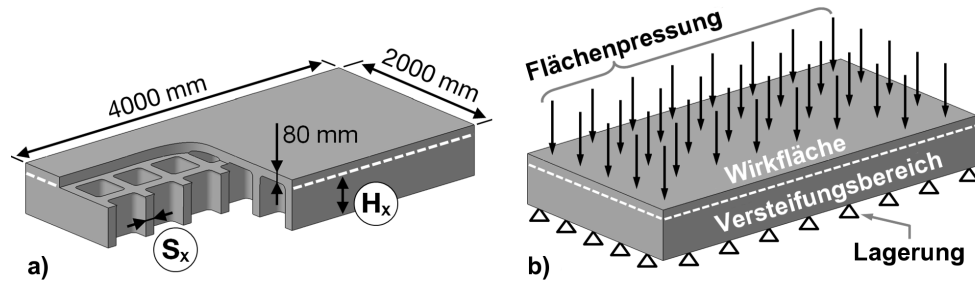


Abbildung 7.1.: a) Konstruktionssparameter der Probegeometrien am Beispiel einer konventionell verrippten Struktur;  $H_x$  = Verrippungshöhe,  $S_x$  = Rippendicke; b) Designraum und Randbedingungen für die Topologieoptimierung.

Variable	Beschreibung	Index ( $x$ )			Einheit
		1	2	3	
$H_x$	Verrippungshöhe	200	400	600	[mm]
$V_x$	Volumenanteil	30	50	70	[%]
$K_x$	Flächenpressung	homogen	zentral	trapezoid	[MPa]
$S_x$	Rippendicke		40-160		[mm]

Tabelle 7.1.: Definition der variablen Konstruktionssparameter der Probegeometrien.

einem *trapezoiden* Gebiet in der Mitte.

### 7.3. Optimierte Verrippungsstrategien als Resultat

Vertikale Querschnitte der optimierten Verrippungsgeometrien weisen für sämtliche Rippen baumähnliche Strukturen auf (vgl. nachfolgende Abb. 7.2). An der Wirkfläche ist die Rippendicke am größten. Die Rippe verjüngt sich zunächst superlinear, um dann bis zum Rand des Designrahmens einen nahezu konstanten Durchmesser aufzuweisen. Die genaue Distanz sowie das Maß der Verjüngung einer Rippe hängen von der Krafteinleitung ab und lassen sich nicht parametrisieren. Äußere Rippen verjüngen sich auf einer kürzeren Distanz als innere. Hohlräume werden häufig durch kleinere Rippen nach demselben Muster gestützt. Die hierfür verwendete Masse wird zu großen Teilen der gestützten Rippe entnommen. Wird das zulässige Gesamtvolumen verändert, so können sich Form und Position einer Rippe ändern, solange sie Hohlräume aufweist.

Horizontale Querschnitte weisen konzentrisch angeordnete Rippen auf. Masse und Wandstärke einer Rippe im Verhältnis zu den übrigen Rippen hängen in erster Näherung linear von der auf die Rippe wirkenden Krafteinleitung ab. Der Abstand zweier Rippen entspricht bei homogener Krafteinleitung in erster Näherung der Wandstärke der angrenzenden Rippen. Bei inhomogener Krafteinleitung verhalten sich die Rippenabstände in erster Näherung umgekehrt proportional zur Krafteinleitung.

Je höher der Designraum ist, desto weniger und stärkere Rippen sind mechanisch optimal. Für  $H_1$  sind vier Rippen optimal, für  $H_2$  drei und für  $H_3$  zwei (vgl. Abb. 7.3).

## 7. Anwendung des Algorithmus zur mechanischen Optimierung von Umformwerkzeugen

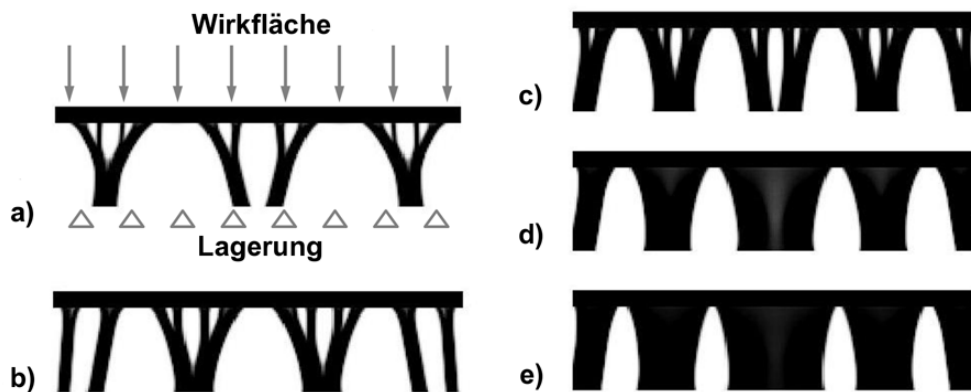


Abbildung 7.2.: Vertikale Querschnitte durch den Designraum (vgl. Abb. 7.1b), S. 89) zeigen die topologieoptimierten Verrippungsstrukturen  $H_2V_xK_1$  mit  $x \in \{1, 3/2, 2, 5/2, 3\}$  und ansteigendem Volumenanteil von a) nach e).

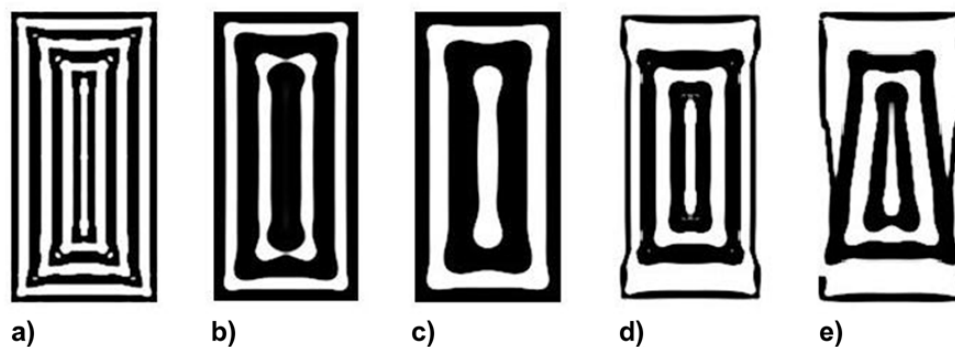


Abbildung 7.3.: Horizontale Querschnitte durch den Designraum an der Lagerung (vgl. Abb. 7.1b), S. 89) zeigen die topologieoptimierten Verrippungsstrukturen a)  $H_1V_2K_1$ ; b)  $H_2V_3K_1$ ; c)  $H_3V_3K_1$ ; d)  $H_2V_2K_2$ ; e)  $H_2V_2K_3$ .

### 7.4. Vergleich mit konventionellen Verrippungsstrategien

Zur nachfolgenden Bewertung von optimierten und konventionellen Verrippungsstrukturen wurde ein Farbsystem verwendet, bei dem weiß für gute, grau für durchschnittliche und schwarz für schlechte Eigenschaften steht.

#### 7.4.1. Mechanische Eigenschaften

Die auftretende Nachgiebigkeit bei Strukturen mit optimierter Verrippungsgeometrie war durchwegs - meist zwischen 5% und 15% - geringer als bei Strukturen mit vergleichbarer konventioneller Verrippungsgeometrie.

Die Verschiebung der Wirkfläche fällt bei optimierter Verrippungsstruktur wesentlich gleichmäßiger aus als bei konventioneller Verrippung. Die durchschnittliche Abweichung von der mittleren Verschiebung der Wirkfläche ist bei konventioneller Verrippung stets deutlich höher, im Schnitt um 370% (vgl. nachfolgende Abb. 7.4a) und Abb. 7.5). Beim

Tiefziehen hat eine gleichmäßige Verschiebung der Wirkfläche den entscheidenden Vorteil, dass die zwischen Stempel und Matrize eingespannte Blechplatte homogenen Flächenpressungen ausgesetzt ist und somit ein gleichmäßiges Fließen ermöglicht wird.

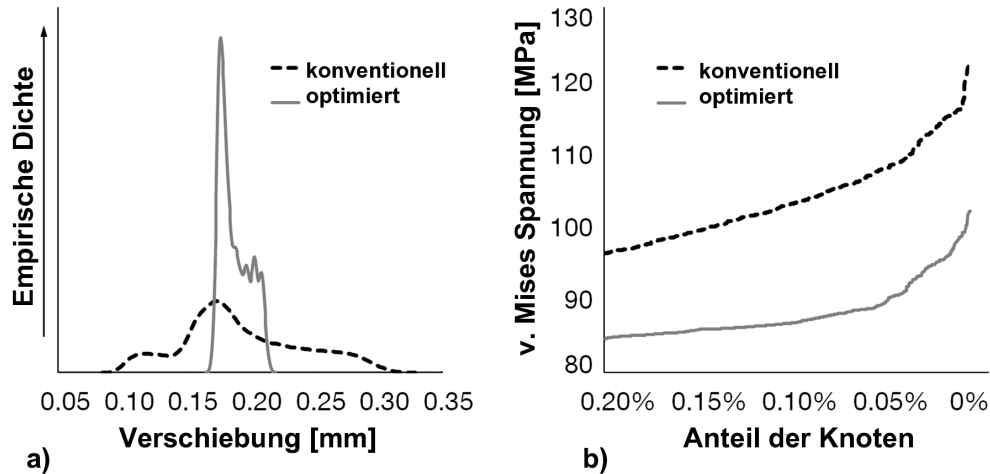


Abbildung 7.4.: a) Vergleich der Wirkflächendurchbiegung: Empirischen Dichte der Verschiebung aller FE-Knoten der Wirkfläche unter Last gegen die Verschiebung dieser Knoten; b) Extremwerte: v. Mises Spannung gegen den Anteil der FE-Knoten, bei welchen die korrespondierende v. Mises Spannung in der Probegeometrie überschritten ist.

In a) und b) wird bei einer Flächenpressung von 30 MPa auf die Wirkfläche die optimierte Geometrie  $H_2V_3K_1$  mit einer Kreuzverrippung des selben Volumenanteils verglichen.

Schließlich sind die Lastspannungsspitzen in einer Struktur mit optimierter Verrippung ausnahmslos geringer, im Durchschnitt um 16% (vgl. obige Abb. 7.4b).

## 7.4.2. Gießtechnische Eigenschaften

### Gießfehler

In Umformwerkzeugen sind in der Regel immer sog. *Lunker* (bei der Erstarrung entstandene Hohlräume) vorhanden, da die entsprechende Speisungstechnik zur vollständigen Vermeidung von Volumenfehlern aufwändig und daher unwirtschaftlich wäre. Lunker und Porosität sind allerdings nur tolerierbar, wenn sie weder in Bereichen mit hohen Lastspannungen, noch in der Nähe von zu bearbeitenden Funktionsflächen liegen. Zur Bewertung der Lunkerposition in den Probegeometrien wird daher in Anlehnung an Vorarbeiten [Hoff07] das in nachfolgender Abbildung 7.6 schematisch dargestellte Bewertungssystem verwendet.

Wie in den Bewertungsdiagrammen der nachfolgenden Abbildung 7.7 zu sehen ist, liegen die Volumenfehler bei dünnen Rippen der konventionellen Verrippungen bzw. bei geringem Volumenanteil der optimierten Strukturen in der Wirkfläche. Dort sind wegen der

## 7. Anwendung des Algorithmus zur mechanischen Optimierung von Umformwerkzeugen

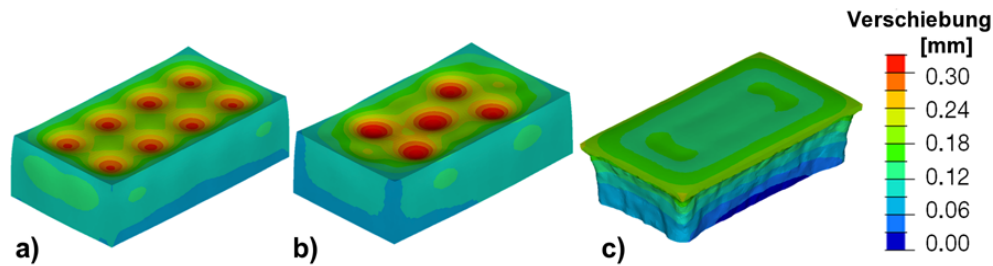


Abbildung 7.5.: Vergleich der Wirkflächendurchbiegung bei einer homogenen Flächenpressung von 30 MPa: a) Kreuzverrippung; b) Hexagonalverrippung; c) Optimierte Probegeometrie  $H_2V_3K_1$ . Alle Strukturen haben den selben Volumenanteil.

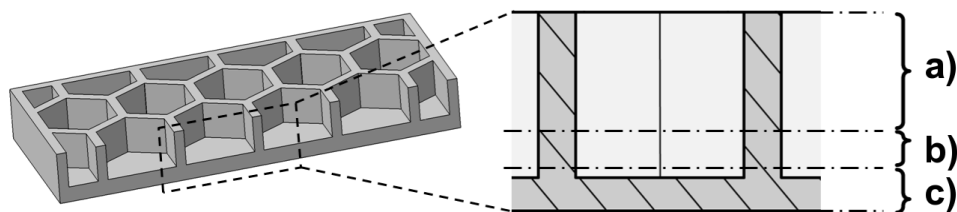


Abbildung 7.6.: Schema zur Bewertung des Einflusses von Lunkern: a) Unkritischer Bereich; b) Übergangsbereich; c) Kritischer Bereich aufgrund hoher Lastspannungen und möglicher Beeinträchtigung der Wirkfläche.

geringen thermischen Masse der Verrippung die geringsten Erstarrungsgeschwindigkeiten festzustellen. Ein Beispiel zeigt die Struktur in der nachfolgenden Abbildung 7.8a).

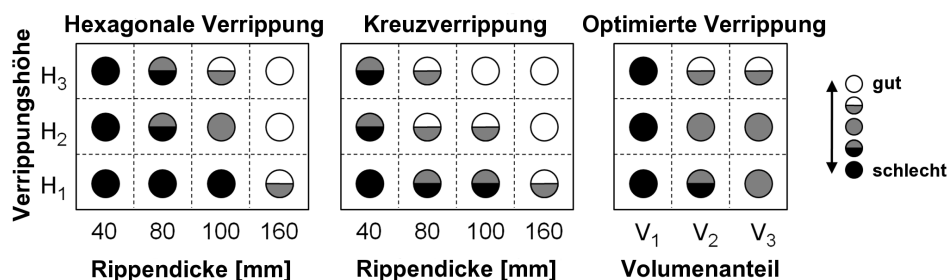


Abbildung 7.7.: Gießtechnische Bewertung der Probegeometrien in Bezug auf Porosität und Lunker.

Bei allen Probegeometrien verbessert sich die Position der Lunker mit steigender Rippendicke bzw. Volumenanteil und steigender Verrippungshöhe (Abb. 7.7 und 7.8). Die Strukturen mit orthogonaler Kreuzverrippung schneiden im Vergleich etwas besser als die Strukturen mit hexagonaler Wabenverrippung ab, da beim Aufeinandertreffen von jeweils vier Rippen eine größere thermische Masse entsteht und die thermischen Zentren somit weiter von der Wirkfläche entfernt sind. Wenn Verrippungshöhe und -volumen identisch

sind, sind die strukturoptimierten Verrippungen in Bezug auf Porosität und Lunker mit den konventionellen vergleichbar (vgl. vorstehende Abb. 7.7).

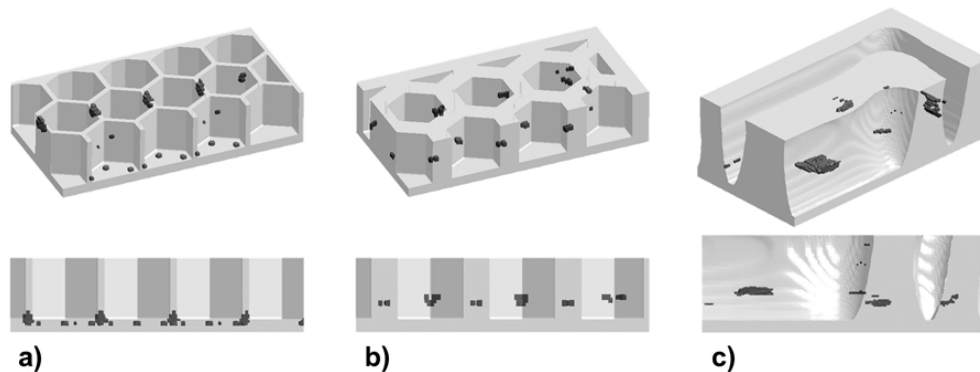


Abbildung 7.8.: Beispiel der Porositätswahrscheinlichkeit in konventionellen und optimierten Geometrien. Fehlerfreie Bereiche (Porosität < 1%) sind transparent dargestellt; a), b) Hexagonale Verrippung mit Rippenstärke 40mm in a) bzw. 160mm in b) und Verrippungshöhe  $H_2$ ; c) Optimierte Struktur  $H_3V_3$ .

Große Verrippungsvolumina ( $V_3$ ) führen allerdings zu offener Porosität an den Rippenbogenflanken. Die schmalen Ballen des Formsandes in diesem Bereich heizen sich beim Abguss schnell auf, so dass die thermischen Zentren im Gegensatz zu den konventionellen Rippen und den optimierten Strukturen mit geringerem Volumenanteil nicht mehr in der Rippe liegen (vorstehende Abb. 7.8c).

### Eigenspannungen

Im Hinblick auf Eigenspannungen sind die konventionellen Verrippungen den optimierten Verrippungen überlegen: Die durchschnittliche Eigenspannung ist in der konventionellen Verrippung im Mittel um 26%, die maximale Eigenspannung um 52% niedriger. Dies zeigt auch die schematische Einordnung der Eigenspannungen in Abbildung der nachfolgenden 7.9.

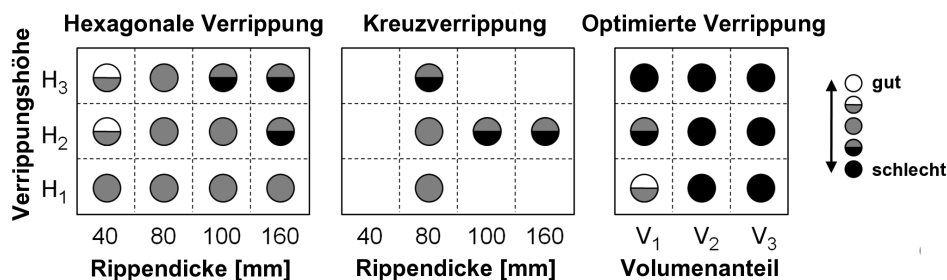


Abbildung 7.9.: Gießtechnische Bewertung der Probegeometrien im Hinblick auf Eigenspannungen.

Die Spannung der konventionellen Verrippungen liegt in allen Fällen unter 160 MPa, was bei einem Werkstoff GJS-700 in etwa der Dauerfestigkeit bei einem Sicherheitsfak-

tor von 2 entspricht. Die höchsten Zugeigenspannungen bilden sich in den Kanten der Rippenkreuzungen, wobei das Spannungsniveau tendenziell mit der Rippendicke und der Verrippungshöhe ansteigt (vgl. Abb. 7.9 und 7.10). Die optimierten Strukturen zeigen Eigenspannungskonzentrationen (nachfolgende Abb. 7.10c) im Rippengrund, die umso höher ausfallen, je größer der Volumenanteil der Verrippung ist (vorstehende Abb. 7.9).

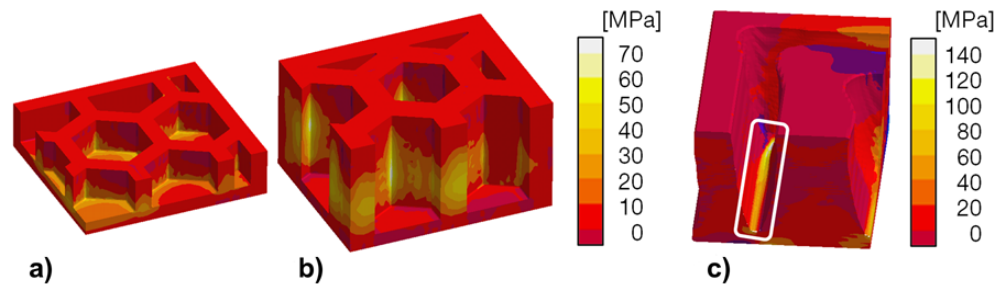


Abbildung 7.10.: a), b) Beispielhafte Eigenspannungssimulationen (maximale Hauptspannungen) von konventionellen Hexagonalverrippungen der Verrippungshöhe  $H_1$  in a) und  $H_3$  in b). Das ermittelte Spannungsniveau steigt mit der Erhöhung von Rippendicke und Verrippungshöhe; c) Optimierte Geometrie  $H_3V_3$  mit Spannungsspitzen im Rippengrund.

### 7.4.3. Fertigungsgerechtigkeit

Für den Vollformguss von großen Umformwerkzeugen wird ein Schaumstoffmodell aus Halbzeugblöcken spanend herausgearbeitet. Mit mehrachsigen CNC Fräsmaschinen können auch gekrümmte Flächen und leichte Hinterschnitte hergestellt werden. Bei ausladenden Hinterschnitten muss das Schaumstoffmodell modular hergestellt und geklebt werden, was mit zusätzlichem Arbeitsaufwand und der Gefahr von Gießfehlern an den Klebestellen verbunden ist. Isolierte Hohlräume sind beim Gießen nur über gestützte Sandkerne zu realisieren und daher im Sinne einer wirtschaftlichen Fertigung zu vermeiden. Konventionelle Kreuz- und Hexagonalverrippungen enthalten überwiegend glatte Geometrieflächen und besitzen somit eine gute Fertigungsgerechtigkeit für die Erstellung des Schaumstoffmodells (nachfolgende Abb. 7.11).

Die mit der Topologieoptimierungssoftware berechneten Geometrien mit geringem Volumenanteil am Verrippungsbauraum ( $V_1$ ) weisen eine sehr verästelte Baumstruktur mit vielen isolierten Hohlräumen und Hinterschnitten auf. Sie können daher nur mit sehr hohem Aufwand gießtechnisch umgesetzt werden. Die optimierten Strukturen mit mittleren Verrippungsvolumina ( $V_2$ ) besitzen noch geringe Hohlräume. Diese müssen nach der Optimierung virtuell aufgefüllt werden, um den Einsatz von Kernen zu vermeiden. Dadurch wird eine mögliche Gewichtsersparnis im Vergleich zu konventionellen Verrippungen vermindert. Insgesamt ist eine durchschnittliche Fertigungsgerechtigkeit festzustellen. Optimierte Geometrien mit großem Volumenanteil ( $V_3$ ) sind massiv ausgestaltet und besitzen nur geringfügige Hinterschnitte. Daher ist ihre Fertigungsgerechtigkeit als gut einzustufen, mit der Einschränkung einer erhöhten Fräszeit aufgrund der Freiformflächen (Abb. 7.11).

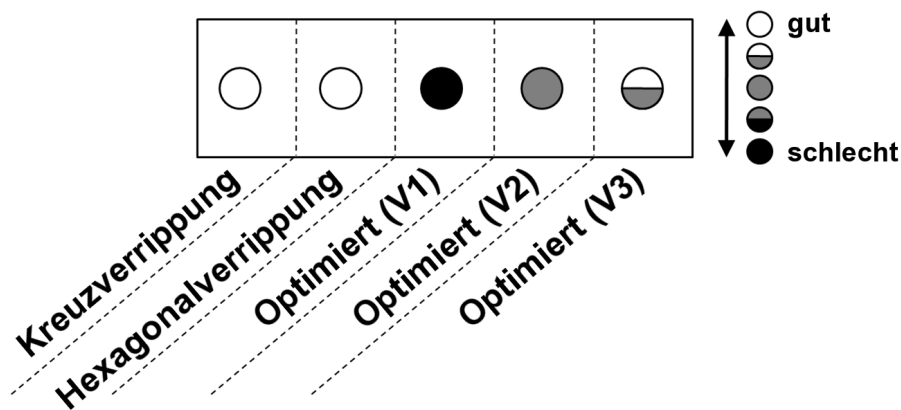


Abbildung 7.11.: Bewertung der Fertigungsgerechtigkeit der Verrippungsstrategien bezüglich der Herstellung des Modells für den Vollformguss.

## 7.5. Reduktion von Eigenspannungen

Aufgrund der unbefriedigenden Ergebnisse der topologisch optimierten Geometrien hinsichtlich ihrer Eigenspannungen wurde ein heuristischer Algorithmus<sup>10</sup> entwickelt, mit dem eine bereits mechanisch topologieoptimierte Verrippungsgeometrie iterativ nachbearbeitet werden kann, um thermisch bedingte Eigenspannungen zu reduzieren.

Je größer die Unterschiede in den Querschnitten eines Gussbauteils sind, desto größer sind üblicherweise die auftretenden Eigenspannungen. In den Probegeometrien wurden die höchsten Eigenspannungen in Gebieten mit kleinen Querschnitten wie dem Rippengrund oder dünnen Verbindungen zwischen einzelnen Rippen gefunden (vgl. nachfolgende Abb. 7.12). Der oben genannte Algorithmus verdickt diese kritischen Regionen, wodurch die Unterschiede in den Querschnitten reduziert werden. Der Algorithmus verteilt das Material glatt und symmetrisch, weshalb keine Masseanhäufungen bzw. scharfe Kanten oder Ecken und damit gießtechnisch zu vermeidende Resultate entstehen.

In sämtlichen Fällen konnte die maximale v. Mises Spannung des Eigenspannungstensors reduziert werden. Der Umfang der Reduzierung hängt jedoch davon ab, ob die Struktur der Verrippung nach Anwendung des Algorithmus' qualitativ identisch bleibt oder sich verändert, also z.B. zwei Rippen zu einer zusammengefügt werden. Bleibt die Struktur qualitativ identisch, reduziert sich die max. v. Mises Spannung um durchschnittlich 18%, verändert sich die Struktur, reduziert sich die max. v. Mises Spannung um durchschnittlich 32%. Die durchschnittliche v. Mises Spannung steigt jedoch in sämtlichen Fällen an. Auch hier hängt der Umfang davon ab, ob sich die Struktur qualitativ ändert. Ist das der Fall, steigt sie durchschnittlich um 39%, sonst um 17%.

Die Gründe für die Erhöhung der durchschnittlichen Eigenspannung bleiben unklar. Die Ergebnisse zeigen, dass eine Modifikation der Geometrie durch den beschriebenen Algorithmus die Eigenspannungen nur teilweise effektiv reduziert. Die höchsten 2-3% der Eigenspannungen einer bereits mechanisch topologieoptimierten Verrippungsgeome-

<sup>10</sup>Der Programmcode wurde auf mediaTUM, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Technischen Universität München, gemeinsam mit dieser Arbeit veröffentlicht.

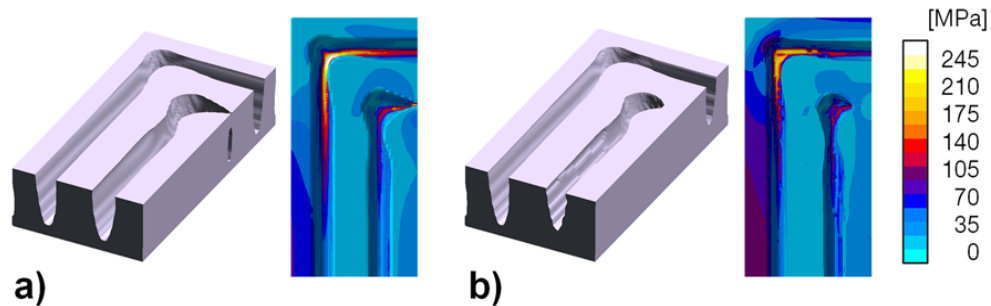


Abbildung 7.12.: Anwendung des in Kap. 7.5 genannten Algorithmus zur Verringerung von Eigenspannungen an der Probegeometrie  $H_2V_3$ : a) Von der Topologieoptimierungssoftware erstellte Originalgeometrie mit hohen Eigenspannungen im Rippengrund; b) Geometrie und Eigenspannungen nach Erhöhung des Volumenanteils um 5 Prozentpunkte durch den Algorithmus.

trie können zuverlässig reduziert werden, jedoch auf Kosten einer durchschnittlich höheren Eigenspannung.

## 7.6. Ergebnis

Die softwareoptimierten Verrippungsgeometrien unterscheiden sich grundlegend von herkömmlichen Verrippungen. Deren rechteckige oder wabenförmige Anordnung von Stegen in der Hauptbelastungsrichtung bietet den Vorteil einer guten Fertigungsgerechtigkeit und einer hohen Parametrisier- sowie Standardisierbarkeit. Die gießtechnische Eignung im Hinblick auf Porosität und Lunkern sowie Eigenspannungen ist jedoch eingeschränkt. Dies wird durch die Verwendung von hohen Sicherheitsfaktoren im Standardkonstruktionsprozess ausgeglichen. Topologieoptimierte Strukturen können dagegen das volle Werkstoffpotential ausnutzen und bieten bei deutlicher Gewichtsreduktion optimierte mechanische Bauteileigenschaften wie höhere Steifigkeit und Homogenität der Wirkflächendurchbiegung. Jedoch treten bei den mechanisch topologieoptimierten Verrippungen hohe Gießspannungen auf, die durch den in Kap. 7.5, S. 95, beschriebenen Ansatz nicht wirkungsvoll reduziert werden können. Daher wird im folgenden Kapitel 8 die Möglichkeit entwickelt, mit Hilfe von Gewichtungsooperatoren den Gießvorgang in die Topologieoptimierung einzubeziehen und damit die auftretenden Gießspannungen deutlich zu reduzieren.



# 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung unter Verwendung von Gewichtungsoperatoren

Das vorangegangene Kapitel hat gezeigt, dass die alleinige Beachtung mechanischer Eigenschaften bei der topologieoptimierten Gestaltung von Umformwerkzeugen nicht ausreichend praktikabel ist. Ansprüchen an die Fertigungsgerechtigkeit kann durch Einbeziehung einer Entformungsrichtung in die Nebenbedingungen genügt werden. Dies fällt bei der Gießtechnik schwerer, vgl. Kap. 7.5, S. 95. Insbesondere hohe Eigenspannungen haben sich bei mechanisch topologieoptimierten Umformwerkzeugen als problematisch herausgestellt, vgl. Kap. 7.4.2, S. 91. Hohe Eigenspannungen treten vor allem dann auf, wenn stark unterschiedliche Abkühlverläufe beim Guss eines Umformwerkzeuges auftreten. Es gelänge, Eigenspannungen zu reduzieren oder sogar zu vermeiden, wenn Umformwerkzeuge so gestaltet würden, dass die Abkühlverläufe beim Guss möglichst gleichmäßig verliefen. Die Beachtung dieses Umstands erfordert die Einbeziehung des Gießvorgangs eines Umformwerkzeuges in die Topologieoptimierung.

Daran orientiert sich der Aufbau dieses Kapitels. In Kap. 8.1 wird das Stefan-Problem, ein Modell zur Berechnung von Erstarrungsvorgängen, vorgestellt und vorgeschlagen, wie dieses im Kontext der Topologieoptimierung genutzt werden kann. In Kap. 8.2, S. 107, wird ein neuartiger Gewichtsoperator entwickelt, anhand dessen der Abkühlverlauf und damit die Gießtechnik in die Topologieoptimierung einbezogen werden kann. Zuletzt werden in Kap. 8.3, S. 118, die Ergebnisse dieser neuartigen parallelen Optimierung von Mechanik, Fertigungsgerechtigkeit und Gießtechnik ausgewertet.

## 8.1. Modellierung des Gießvorgangs

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie für eine gegebene relative Dichteverteilung  $h \in Q_{ad} \cup Q_{ad,l}$  der Erstarrungs- und Abkühlverlauf im Verfahren Vollformguss simuliert und somit in die Topologieoptimierung integriert werden kann.

In Kap. 8.1.1 wird das Stefan-Problem beleuchtet, ein Modell der Wärmeleitung mit Phasenübergang, womit Erstarrungsvorgänge berechnet werden können. Kap. 8.1.2, S. 98, schlägt als Modell das *Stefan-Problem der Topologieoptimierung* vor, mit dem der aus dem Gießvorgang resultierende Abkühlverlauf in der Topologieoptimierung genutzt werden kann. In Kap. 8.1.3, S. 100, werden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zum Stefan-Problem gemacht und Kap. 8.1.4, S. 104, beschreibt die Realisierung dieses Modells. In

Kap. 8.1.5, S. 106, schließlich wird das Ergebnis der Realisierung diskutiert.

### 8.1.1. Das Stefan-Problem

Mit dem Stefan-Problem werden Wärmeleitungsprobleme mit Phasenübergang modelliert. Damit können Schmelz- und Erstarrungsvorgänge eines Materials mathematisch beschrieben werden. Auf einem Gebiet  $\Omega_T := (0, t_0) \times \Omega$  mit  $t_0 > 0$  und einem beschränkten Lipschitzgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  lautet die klassische Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c_V \partial_t T = \kappa \Delta T \quad \text{auf } \Omega_T.$$

Dabei sind in SI-Einheiten

$$\begin{aligned} T(t, x) & \quad [^\circ\text{C}] : & \text{Temperatur,} \\ \rho(x, T) & \quad \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] : & \text{Materialdichte,} \\ c_V(x, T) & \quad \left[ \frac{\text{W s}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} \right] : & \text{Wärmekapazität,} \\ \kappa(x, T) & \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m } ^\circ\text{C}} \right] : & \text{Wärmeleitfähigkeit,} \end{aligned}$$

wobei  $x \in \Omega$ . Hierbei müssen noch Anfangsbedingungen für  $T$  und Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  gesetzt werden. Üblich sind Nebenbedingungen der Form

$$\begin{aligned} T(0) & = T_0 & \text{auf } \Omega, \\ \kappa \nabla T \cdot n + g & = 0 & \text{auf } \Sigma := (0, t_0) \times \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es sei  $T_M > 0$  die Schmelztemperatur. Dann wird das Stefan-Problem für Schmelz- und Erstarrungsvorgänge (mit konstanten Daten  $\rho, c_V, \kappa$ ) in seiner Enthalpieformulierung definiert durch

$$\partial_t(\rho(c_V T + L \mathbf{1}_{\{T > T_M\}})) = \kappa \Delta T \quad \text{auf } \Omega_T, \quad (8.1)$$

siehe z.B. [Eck08, S. 448]. Hierbei ist  $\mathbf{1}_{\{T > T_M\}}$  die charakteristische Funktion der Menge  $\{(t, x) : T(t, x) > T_m\}$  und

$$L(x) \quad \left[ \frac{\text{W s}}{\text{kg}} \right] : \text{Schmelzwärme.}$$

Weil  $\mathbf{1}_{\{T > T_M\}}$  nicht differenzierbar ist, wird die oben genannte Gleichung im Distributionssinn aufgefasst, d.h. für alle  $\eta \in C_c^\infty(\Omega_T)$  soll gelten

$$\int_{\Omega_T} (\rho(c_V T + L \mathbf{1}_{\{T > T_M\}})) \partial_t \eta + \kappa T \Delta \eta \, dx dt = 0.$$

### 8.1.2. Verwendung des Stefan-Problems in der Topologieoptimierung

Nachfolgend wird ein Modell vorgeschlagen, mit dem die Wärmeleitungsgleichung mit Phasenübergang in die Topologieoptimierung einbezogen werden kann. Ziel dieses Modells ist es, den (oftmals nur theoretisch möglichen) Abkühl- und Erstarrungsverlauf eines beliebigen, durch eine zulässige relative Dichteverteilung  $h$  definierten Werkzeugs sinnvoll zu beschreiben. Das Modell sieht vor, dem Werkzeug Materialeigenschaften sowie Anfangs-

und Randbedingungen abhängig von der relativen Dichteverteilung  $h$  zuzuweisen. Es sei  $h \in Q_{\text{ad}} \cup Q_{\text{ad},l}$  mit  $Q_{\text{ad}}$  nach Voraussetzung 4.1, S. 41, und  $Q_{\text{ad},l}$  nach Diskretisierung 6.2, S. 75.

Die von uns betrachteten Umformwerkzeuge werden überwiegend im Verfahren Vollformguss hergestellt. Die Schmelze wird hierbei auf etwa  $1400^\circ\text{C}$  erhitzt und in eine Sandform gegossen, in der ein dem Werkstück entsprechendes Modell aus Polystyrol (EPS) enthalten ist. Die Schmelze vergast das EPS vollständig und nimmt den frei werdenden Raum ein, vgl. [Hass00, S. 1374ff]. Diesen nun gegebenen Zustand sollen die Anfangsbedingungen und Materialeigenschaften des im Folgenden vorgeschlagenen Modells widerspiegeln. Daher werden Bereiche des Designraums mit hoher relativer Dichteverteilung  $h$  vornehmlich mit den Materialeigenschaften des verwendeten Werkstoffs GJS-600 versehen. Dagegen werden Bereiche, deren relative Dichteverteilung  $h$  nahe dem Minimum  $h_{\text{min}}$  ist, vornehmlich mit Materialeigenschaften des Formsands ausgestattet.

Die Anfangstemperaturen für Bereiche reiner Schmelze ( $h = 1$ ) bzw. reinen Sandes ( $h = 0$ ) werden auf  $T_{\text{max}} := 1400^\circ\text{C}$  bzw.  $T_{\text{min}} := 20^\circ\text{C}$  gesetzt, die Schmelztemperatur  $T_M$  auf  $1166,75^\circ\text{C}$ . Die übrigen Starttemperaturen  $T_0$  werden so gebildet, dass

$$\begin{aligned} w_{G,0} &:= \int_{T_{\text{min}}}^{T_{\text{max}}} \rho_G(\tau) c_{V,G}(\tau) d\tau + \rho_G(T_M) L_G, \\ hw_{G,0} &= \int_{T_{\text{min}}}^{T_0} \rho_M(\tau) c_{V,M}(\tau) d\tau + \rho_M(T_M) L_M \mathbb{1}_{\{T_0 > T_M\}}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

wobei die Indizes  $G, S, M$  für GJS-600, Sand und Mischung stehen und

$$\begin{aligned} \rho_M &:= h\rho_G + (1-h)\rho_S, \\ c_{V,M} &:= hc_{V,G} + (1-h)c_{V,S}, \\ L_M &:= hL_G. \end{aligned}$$

Falls allerdings

$$\int_{T_{\text{min}}}^{T_M} \rho_M(\tau) c_{V,M}(\tau) d\tau < hw_{G,0} < \int_{T_{\text{min}}}^{T_M} \rho_M(\tau) c_{V,M}(\tau) d\tau + \rho_M(T_M) L_M$$

gilt, wird  $T_0 = T_M$  gesetzt.

Die Randbedingungen sollen ein realistisches Abkühlverhalten widerspiegeln. Daher wird als Randbedingung

$$\kappa_M(T) \nabla T \cdot n + q_M(T)(T - T_\infty) = 0 \quad \text{auf } \Sigma \quad (8.3)$$

verwendet, was dem Newtonschen Abkühlungsgesetz entspricht, vgl. [Eck08, S. 342]. Es werden definiert

$$\begin{aligned} \kappa_M &:= h\kappa_G + (1-h)\kappa_S, \\ q_M &:= hq_G + (1-h)q_S, \\ T_\infty &:= 20^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Hierbei sind

$$\begin{aligned} T_\infty & \quad [^\circ\text{C}] : && \text{Umgebungstemperatur,} \\ q(x, T) & \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right] : && \text{Wärmeübergangskoeffizient} \end{aligned}$$

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsoperatoren

mit  $x \in \partial\Omega$ . Die Wärmeleitungsgleichung mit Phasenübergang wird daraufhin durch

$$(\rho_M(T)c_{V,M}(T) + \rho_M(T_M)L_M\delta_{T_M}) \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa_M(T)\Delta T \quad \text{auf } \Omega_T \quad (8.4)$$

aufgestellt, wobei  $\delta_{T_M}$  das Dirac-Maß in  $T_M$  ist.

### 8.1.3. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Dieser Abschnitt stellt die für unsere Zwecke wesentlichen Ergebnisse aus [Roub89] vor. Zunächst soll das Stefan-Problem in seiner schwachen Formulierung aufgestellt werden. Anschließend werden Ergebnisse zur Existenz einer Lösung zu der von uns verwendeten Problemstellung genannt. Aussagen zur Eindeutigkeit dieser Lösung können nicht getätigt werden, es besteht jedoch kein Grund zu der Annahme, dass keine Eindeutigkeit vorliegt.<sup>11</sup> In [Niez83] konnten unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten eine höhere Glätte haben als in unserem Fall, zusätzlich Aussagen zur Eindeutigkeit, Regularität sowie zur stetigen und monotonen Abhängigkeit von den Koeffizienten gemacht werden. Eine eingehende Behandlung des Stefan-Problems kann z.B. auch in [Visi96] gefunden werden.

#### Problemformulierung

Der Designraum  $\Omega$  sei wie in Diskretisierung 6.2, S. 75, zerlegt. Gleichung (8.1), S. 98, wird nun umformuliert zu

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad \text{auf } \Omega_T. \quad (8.5)$$

Hierbei gelte

$$c(x, T) = c_i(T), \quad \kappa(x, T) = \kappa_i(T) \quad \text{für } x \in \Omega_{x_i}$$

sowie insbesondere

$$c_i(T) = c_i^0(T) + L_i \delta_{T_M}.$$

Für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$  werden die Funktionen  $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derart definiert, dass

$$c_i(T) = \frac{d\alpha_i^{-1}}{dT}, \quad \kappa_i(T) = \frac{d\beta_i \circ \alpha_i^{-1}}{dT}. \quad (8.6)$$

Aufgrund der Definition von  $c_i$  sind die Gleichungen (8.6) im Distributionssinn zu verstehen. Dann kann Gleichung (8.5) umgeschrieben werden zu

$$\left. \begin{aligned} T(t, x) &= \alpha_i(w(t, x)), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \Delta \beta_i(w) \end{aligned} \right\} \quad \text{auf } \Omega_i := (0, t_0) \times \Omega_{x_i}. \quad (8.7)$$

Dabei ist  $w = w(t, x)$  eine unbekannte Enthalpie,  $\alpha_i(w)$  die Temperatur und  $\beta_i(w)$  die Temperatur nach der Kirchhoff Transformation, kurz die Kirchhoff Temperatur ( $\beta_i \circ \alpha_i^{-1}$

<sup>11</sup>„Unfortunately, in general the uniqueness remains as an open problem, though it does not seem that there is any actual reason for the weak solution not to be unique.“ [Roub89, Abschnitt 4]

heißt Kirchhoff Transformation und  $\alpha_i^{-1}$  Enthalpie Transformation). Enthalpie und Kirchhoff Temperatur haben die SI-Einheiten  $[\text{W s m}^{-3}]$  und  $[\text{W m}^{-1}]$ . Die Randbedingungen werden definiert durch

$$\nabla\beta_i(w) \cdot n + g(t, x, \alpha_i(w)) = 0 \quad \text{auf } \Sigma_i := (0, t_0) \times \partial\Omega_{x_i}. \quad (8.8)$$

Weil Lösungen der obigen Gleichungen (8.7) für  $i = 1, \dots, r$  auch die Randbedingungen (8.3), S. 99, (bzw. die allgemeinen Randbedingungen nach Kap. 8.1.1, S. 98) zu erfüllen haben, müssen wir folgende Kontaktbedingungen einführen:

$$\left. \begin{aligned} \nabla\beta_i(w) \cdot n &= \nabla\beta_j(w) \cdot n, \\ \alpha_i(w) &= \alpha_j(w) \end{aligned} \right\} \quad \text{auf } \Sigma_i \cap \Sigma_j. \quad (8.9)$$

Bedingung (8.9) ist der Notwendigkeit geschuldet, dass der Wärmefluss keine Sprünge hat. Als Anfangsbedingung wird

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{auf } \Omega \quad (8.10)$$

gesetzt. Während im Problem (8.2)-(8.4), S. 99f, (bzw. im allgemeinen Stefan-Problem aus Kap. 8.1.1, S. 98) die Temperatur unbekannt ist, ist im System (8.7)-(8.10), S. 100f, die Enthalpie unbekannt.

Es soll für dieses System die schwache Formulierung aufgestellt werden. Es sei hierfür  $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$  das Skalarprodukt des Hilbertraumes  $L^2(\Xi)$ . Für jedes  $z \in H^1(\Omega_T)$  folgt aufgrund der Gleichungen (8.7), S. 100,

$$\sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\beta_i(w), z \right)_{\Omega_i} = 0.$$

Die Bedingungen (8.8)-(8.10) liefern

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \left( \left( w, \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\Omega_i} - (\nabla\beta_i(w), \nabla z)_{\Omega_i} - (g(\alpha_i(w)), z)_{\Sigma_i} \right. \\ & \left. + (w_0, z(\cdot, 0))_{\Omega_{x_i}} - (w(\cdot, t_0), z(\cdot, t_0))_{\Omega_{x_i}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nun wird folgende Konvention verwendet:  $\alpha(w)$  bezeichnet die fast überall auf  $\Omega_T$  durch

$$\alpha(w)(t, x) := \alpha_i(w(t, x)), \quad \text{falls } x \in \Omega_{x_i}$$

definierte Funktion. Entsprechend wird  $\beta(w)$  auf  $\Omega_T$  definiert. Hieraus resultiert nachfolgende Definition:

**Definition 8.1 (Schwache Lösung)** *Eine Funktion  $w \in L^2(\Omega_T)$  heißt schwache Lösung des Stefan-Problems in heterogenem Material, d.h. des Problems (8.7) – (8.10), S. 100f, falls*

$$\alpha(w) \in L^2(0, t_0; H^1(\Omega))$$

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsoperatoren

und die Integralidentität

$$\left( w, \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\Omega_T} - (\nabla \beta(w), \nabla z)_{\Omega_T} - (g(\alpha(w)), z)_{\Sigma} + (w_0, z(\cdot, 0))_{\Omega} = 0$$

für jedes  $z \in H^1(\Omega_T)$  mit  $z(\cdot, t_0) = 0$  gültig ist.

Aufgrund dieser Definition gilt  $\alpha(w)|_{\Sigma} \in L^2(0, t_0; H^{1/2}(\partial\Omega))$  und damit auch  $\alpha(w)|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma)$ .  $H^{1/2}$  bezeichnet hierbei den entsprechenden Sobolev-Slobodeckii Raum.

### Existenz schwacher Lösungen

Zum Nachweis der Existenz schwacher Lösungen des Stefan-Problems nach vorstehender Definition 8.1 werden Voraussetzungen an die Daten  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $g$  und  $w_0$  gestellt:

**Voraussetzung 8.2** Es gebe Konstanten  $T_{\min} \leq T_{\max}$ ,  $0 < \kappa_{\min} \leq \kappa_{\max}$  und  $g_{\max} > 0$ . Mit diesen Konstanten gelte:

- 1) Für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  seien  $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige, nicht abnehmende Funktionen, so dass  $\beta_i \circ \alpha_i^{-1}$  eine absolut-stetige Funktion ist, ferner Gleichung (8.6), S. 100, im Distributionensinn bzw. fast überall gilt,  $c_i(T) \geq 0$  und  $\kappa_{\min} \leq \kappa_i(T) \leq \kappa_{\max}$  für fast alle  $T \in \mathbb{R}$  gelten und schließlich  $\lim_{|w| \rightarrow \infty} |\alpha_i(w)| = \infty$ .
- 2) Die Funktion  $g : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar,  $|g(t, x, T)| \leq g_{\max}$  für fast alle  $(t, x, T) \in \Sigma \times [T_{\min}, T_{\max}]$ . Die Funktion  $g(t, x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und nicht abnehmend für fast alle  $(t, x) \in \Sigma$ . Ferner ist  $g(\cdot, \cdot, T_{\min}) \leq 0$  sowie  $g(\cdot, \cdot, T_{\max}) \geq 0$  fast überall auf  $\Sigma$ .
- 3) Es gelte  $g(t, x, T) = \sum_{l=1}^L \mathcal{G}_l(t, x, T)$  mit  $L \in \mathbb{N}$ . Für alle  $l \in \{1, \dots, L\}$  existiere eine Funktion  $\sigma_l : [T_{\min}, T_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ , die streng monoton wächst und Lipschitz-stetig ist, so dass  $\mathcal{G}_l(t, x, \sigma_l^{-1}(\cdot)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  affin linear für fast alle  $(t, x) \in \Sigma$  ist.
- 4) Es gelte  $w_0 \in L^\infty(\Omega)$  und  $T_{\min} \leq \alpha(w_0) \leq T_{\max}$  fast überall auf  $\Omega$ .

**Satz 8.3 (Existenz schwacher Lösungen)** *Es seien Diskretisierung 6.2, S. 75, und Voraussetzung 8.2 erfüllt. Dann existiert mindestens eine Lösung des Stefan-Problems nach Definition 8.1, S. 101.*

*Beweis:* Siehe [Roub89, Proposition 4.1, 4.2 und Corollary 4.1]. □

Nachfolgend sollen Voraussetzungen an die Materialeigenschaften des Stefan-Problems der Topologieoptimierung (8.2) – (8.4), S. 99f, genannt werden. Diese Voraussetzungen sind in physikalischer Hinsicht sinnvoll und schränken die Problemstellung nicht ein:

**Voraussetzung 8.4** Für beliebige  $T$  gelte

$$\begin{aligned} \rho_{\max} \geq \rho_G(T), \rho_S(T) &\geq \rho_{\min} > 0, \\ c_{V, \max} \geq c_{V, G}(T), c_{V, S}(T) &\geq c_{V, \min} > 0, \\ L_G &> 0, \\ \kappa_{\max} \geq \kappa_G(T), \kappa_S(T) &\geq \kappa_{\min} > 0, \\ q_{\max} \geq q_G(T), q_S(T) &\geq q_{\min} > 0, \\ T \mapsto q_M(T)(T - T_\infty) &\text{ Lipschitz-stetig, streng monoton wachsend.} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Darüber hinaus erfülle  $w_{G,0}$  nach Gleichung (8.2)<sub>1</sub>, S. 99, die Ungleichung

$$w_{G,0} \leq \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} (\rho_G(\tau)c_{V,S}(\tau) + \rho_S(\tau)c_{V,G}(\tau)) d\tau + \rho_S(T_M)L_G.$$

**Satz 8.5** *Es seien Diskretisierung 6.2, S. 75, und Voraussetzung 8.4, S. 102, erfüllt und  $h \in Q_{\text{ad},l}$ . Dann besitzt das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) – (8.4), S. 99f, mindestens eine Lösung  $T \in L^2(0, t_0; H^1(\Omega))$ .*

*Beweis:* Es sei  $h \in Q_{\text{ad},l}$ . Sämtliche Daten seien definiert wie in Kap. 8.1.2, S. 98. Wir wollen zeigen, dass Voraussetzung 8.2, S. 102, erfüllt ist. Die Aussage des Satzes 8.5 folgt dann mit Satz 8.3, S. 102.

Die mengenwertige Abbildung  $\alpha_i^{-1}$  definieren wir durch

$$\alpha_i^{-1}(T) := \begin{cases} \left\{ \int_{T_{\min}}^T \rho_M(x_i, \tau)c_{V,M}(x_i, \tau)d\tau + \rho_M(x_i, T_M)L_M(x_i)\mathbb{1}_{\{T > T_M\}} \right\}, & T \neq T_M, \\ \int_{T_{\min}}^{T_M} \rho_M(x_i, \tau)c_{V,M}(x_i, \tau)d\tau + [0, \rho_M(x_i, T_M)L_M(x_i)], & T = T_M. \end{cases}$$

Weil  $\alpha_i^{-1}$  für  $T < T_M$  und  $T > T_M$  einer streng monoton wachsenden Funktion entspricht, existiert  $\alpha_i$  und ist eine stetige, nicht abnehmende Funktion. Definiere nun

$$\beta_i(w) := \int_{T_{\min}}^{\alpha_i(w)} \kappa_M(x_i, \tau)d\tau.$$

Mit Gleichung (8.11)<sub>4</sub>, S. 102, ist  $\beta_i$  eine stetige, nicht abnehmende und  $\beta_i \circ \alpha_i^{-1}$  eine absolut-stetige Funktion. Weiterhin gelten  $\lim_{|w| \rightarrow \infty} |\alpha_i(w)| = \infty$  und Gleichung (8.6), S. 100, im Distributionensinn bzw. fast überall.

Es gilt  $g(t, x, T) = q_M(T)(T - T_\infty)$ . Setze ebenfalls  $\sigma_1(T) := q_M(T)(T - T_\infty)$ . Nach Gleichung (8.11)<sub>6</sub>, S. 102, ist  $\sigma_1$  streng monoton wachsend und Lipschitz-stetig auf  $[T_{\min}, T_{\max}]$ . Weiterhin gilt

$$g(t, x, \sigma_1^{-1}(T)) = T.$$

Damit ist  $g(t, x, \cdot)$  auch stetig und nicht abnehmend. Mit Gleichung (8.11)<sub>5</sub>, S. 102, gelten

$$\begin{aligned} |g(t, x, T)| &\leq q_{\max}(T_{\max} - T_{\min}), & T \in [T_{\min}, T_{\max}], \\ g(t, x, T_{\min}) &= 0, \\ g(t, x, T_{\max}) &> q_{\min}(T_{\max} - T_{\min}) > 0. \end{aligned}$$

Definiere  $w_0 := hw_{G,0}$  mit  $w_{G,0}$  nach Gleichung (8.2)<sub>1</sub>, S. 99. Mit den Gleichungen (8.11)<sub>1-3</sub>, S. 102, gilt  $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ . Weil  $h \geq 0$  und  $w_{G,0} > 0$ , gilt  $w_0 \geq 0$  und damit  $T_0 \geq T_{\min}$  mit  $T_0$  nach Gleichung (8.2)<sub>2</sub>, S. 99. Definiere nun

$$\begin{aligned} w_{S,0} &:= \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \rho_S(\tau)c_{V,S}(\tau)d\tau, \\ w_{S,G} &:= \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} (\rho_S(\tau)c_{V,G}(\tau) + \rho_G(\tau)c_{V,S}(\tau)) d\tau + \rho_S(T_M)L_G. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \rho_M(\tau) c_{V,M}(\tau) d\tau + \rho_M(T_M) L_M = h^2 w_{G,0} + (1-h)^2 w_{S,0} + h(1-h) w_{S,G}.$$

Definiere die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(h) := h^2(w_{G,0} + w_{S,0} - w_{S,G}) + h(w_{S,G} - w_{G,0} - 2w_{S,0}) + w_{S,0}.$$

Um sicherzustellen, dass in Gleichung (8.2)<sub>2</sub>, S. 99,  $T_0 \leq T_{\max}$  gilt, muss  $f(h) \geq 0$  für jedes  $h \in [0, 1]$  gelten. Es gelten bereits  $f(0) = w_{S,0} > 0$  und  $f(1) = 0$ . Weil  $f$  ein Polynom 2. Grades ist, reicht es, zu zeigen, dass  $f'(1) \leq 0$  ist. Es gilt gerade

$$f'(1) = w_{G,0} - w_{S,G} \leq 0$$

mit Voraussetzung 8.4, S. 102. Damit ist Voraussetzung 8.2, S. 102, erfüllt.  $\square$

### Bemerkung

- (i) Im vorstehenden Satz 8.5, S. 103, wurde  $h \in Q_{ad,l}$  aus Diskretisierung 6.2, S. 75, verlangt. Es ist davon auszugehen, dass die Aussagen von Satz 8.5 auch für  $h \in Q_{ad}$  aus Voraussetzung 4.1, S. 41, gelten. In diesem Fall hat  $h$  und haben somit  $\alpha$  und  $\beta$  eine höhere Glattheit in  $\Omega$ .
- (ii) Überdies kann davon ausgegangen werden, dass die Aussagen von Satz 8.5 auch auf  $h \in Q_G$  verallgemeinert werden können. Hierbei würde  $w_{G,0}$  aus Gleichung (8.2)<sub>1</sub>, S. 99, definiert durch

$$w_{G,0} := \int_{T_{\min}}^{1400^\circ\text{C}} \rho_G(\tau) c_{V,G}(\tau) d\tau + \rho_G(T_M) L_G.$$

Ferner müsste  $T_{\max} > 1400^\circ\text{C}$  geeignet gewählt und in Voraussetzung 8.4, S. 102,

$$w_{G,0} \leq \int_{T_{\min}}^{1400^\circ\text{C}} (\rho_G(\tau) c_{V,S}(\tau) + \rho_S(\tau) c_{V,G}(\tau)) d\tau + \rho_S(T_M) L_G$$

sichergestellt werden.

### 8.1.4. Numerische Implementierung

Die Wärmeleitungsgleichung wird mit der vertikalen Linienmethode diskretisiert, siehe hierzu [Gros05, Kapitel 5]. Die Ortsdiskretisierung wird entsprechend der nachfolgend vorgestellten Diskretisierung 8.6, S. 105, vorgenommen und führt zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Der Designraum  $\Omega$  wird von einer Hülle der Dicke  $r_0 := (R - 1/2)l$ ,  $R \in \mathbb{N}$  umgeben, der die relative Dichteverteilung  $h = 0$  und damit die Materialeigenschaften des Formsandes nach Kap. 8.1.2, S. 98, zugewiesen werden. Dieses Vorgehen ist der Tatsache geschuldet, dass bei dem Vollformguss das EPS Modell mit Formsand ummantelt ist. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird mittels eines adaptiven Extrapolationsverfahrens diskretisiert, welches das linear-implizite



Euler-Verfahren als Basisverfahren hat, siehe hierzu [Born02, Kap. 6.4.2]. Die auftretenden Steifigkeits- und Massenmatrizen sowie der Lastvektor werden mit der Gauß-Legendre-Quadratur aufgestellt, siehe hierzu [Deuf02, Kap. 9.3]. Lösungen der resultierenden Gleichungssysteme werden mit Hilfe eines pcg-Verfahrens approximiert, siehe hierzu [Deuf02, Kapitel 8]. Die Temperaturen werden solange berechnet, bis die berechnete maximale Temperatur geringer als 30°C ist.<sup>12</sup> Die Kennwerte des verwendeten Materials GJS-600 sind hierbei der Gießsimulation MAGMASOFT entnommen. Der Programmcode wurde auf mediaTUM, dem Dokumenten- und Publikationsserver der Technischen Universität München, gemeinsam mit dieser Arbeit veröffentlicht.

**Diskretisierung 8.6** Es sei Diskretisierung 6.2, S. 75, erfüllt. Definiere mit  $R \in \mathbb{N}$  und  $r_0 := (R - 1/2)l$  den offenen Quader

$$\Omega_{\Xi} := (-r_0, n_x l + r_0) \times (-r_0, n_y l + r_0) \times (-r_0, n_z l + r_0).$$

Der Raum  $\Omega_{\Xi}$  ist die Erweiterung des Raumes  $\Omega$  um die oben beschriebene Hülle der Dicke  $r_0$ , welcher die relative Dichteverteilung  $h = 0$  zugewiesen wird. Weiterhin definieren wir  $\Omega_T := (0, t_0) \times \Omega_{\Xi}$  als den Raum und  $\Sigma := (0, t_0) \times \partial\Omega_{\Xi}$  als den Rand, in und auf dem das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99, zu lösen ist. Mit Satz 8.5, S. 103, ist  $\Xi := L^2(0, t_0; H^1(\Omega_{\Xi}))$  der Raum der zulässigen Temperaturen. Der Raum der diskretisierten zulässigen Temperaturen  $\Xi_l$  wird folgendermaßen definiert:

Es seien  $s \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Zeitpunkte und  $t_1 := 0, \dots, t_s := t_0$  die Zeitpunkte, zu denen die Temperatur gemessen wird. Definiere die Funktion  $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\gamma_0(t) := \begin{cases} 1 - |t|, & \text{falls } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie für  $j \in \{1, \dots, s\}$  die Funktion  $\gamma_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $t_{s+1} = t_s = t_0$ ) durch

$$\gamma_j(t) := \gamma_0 \left( \frac{t - t_j}{t_{j+1} \mathbb{1}_{\{t > t_j\}} + t_{j-1} \mathbb{1}_{\{t < t_j\}} - t_j} \right).$$

Überdies werden die Temperaturen an den Ortspunkten  $x_i \in \Omega_{\xi}$ ,  $i \in \{1, \dots, \xi\}$ ,  $\xi := (n_x + 2R)(n_y + 2R)(n_z + 2R)$  berechnet. Die Punktmenge  $\Omega_{\xi}$  ist eine Erweiterung der Punktmenge  $\Omega_r$  um Punkte in der oben beschriebenen Hülle aus Formsand. Es wird die Punktmenge  $\Omega_{\xi} := \{x_i\}_{i=1}^{\xi} \subset \Omega_{\Xi}$  für  $i \in \{1, \dots, \xi\}$  definiert durch

$$x_i := r_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} \lfloor (i-1)/((n_y + 2R)(n_z + 2R)) \rfloor \\ n_y - ((i-1) \bmod (n_y + 2R)) \\ \lfloor ((i-1) \bmod ((n_y + 2R)(n_z + 2R)))/(n_y + 2R) \rfloor \end{pmatrix}.$$

Es sollen nun  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N_2}$  mit  $N_2 := s\xi$  eine Basis von  $\Xi_l$  bilden. Hierfür sei  $\phi_0$  nach Diskretisierung 6.2, S. 75, definiert und  $k \in \{1, \dots, N_2\}$ . Dann setzen wir  $i = (k-1) \bmod (\xi) + 1$ ,  $x_i \in \Omega_{\xi}$  sowie  $j = \lfloor (k-1)/\xi \rfloor + 1$  und definieren  $\varphi_k : \bar{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi_k(t, x) := \begin{cases} \phi_0(x - x_i) \gamma_j(t), & \text{falls } (t, x) \in \bar{\Omega}_T, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>12</sup>Zu diesem Zeitpunkt stehen die gießtechnische Eigenschaften eines Umformwerkzeugs fest. Eine darüber hinaus gehende Simulation des Temperaturverlaufs ist überflüssig.

$\varphi_k$  hat die SI-Einheit  $[\text{°C}]$ . Aufgrund der vorstehenden Definitionen gilt  $\Xi_l \subset \Xi$ .

### 8.1.5. Ergebnis

Nachfolgend wird mit Hilfe der Diskretisierung 8.6, S. 105, und des in Kap. 8.1.4, S. 104, beschriebenen Algorithmus exemplarisch der Erstarrungs- und Abkühlverlauf einer gegossenen einfachen Probegeometrie aus dem Material GJS-600 berechnet und die Ergebnisse mit denen der Gießsimulation MAGMASOFT verglichen.

Die gegossene Probegeometrie  $\Omega$  sei ein Quader der Größe  $9\text{cm} \times 9\text{cm} \times 18\text{cm}$ , d.h.  $\Omega := (0, 9/100) \times (0, 9/100) \times (0, 18/100) \subset \mathbb{R}^3$ . Der Quader wird durch die relative Dichteverteilung definiert, die auf ganz  $\Omega$  den Wert 1 einnimmt. Es wird die Diskretisierung 8.6, S. 105, mit  $R = 15$  und  $l = 2\text{mm}$  verwendet. Der Designraum  $\Omega$  wird also in 182250 Würfel zerlegt. Ferner wird der Quader beim Guss mit einer Hülle aus Formsand der Dicke  $2,9\text{cm}$  ummantelt. Die nachfolgende Abbildung 8.1 vergleicht die durch den Algorithmus nach Kap. 8.1.4, S. 104, errechnete Temperaturverteilung innerhalb des Quaders zum Zeitpunkt  $t = 2000\text{s}$  mit der durch MAGMASOFT errechneten Temperaturverteilung. Demgegenüber vergleicht die auf der nächsten Seite folgende Abbildung 8.2 den durch den Algorithmus nach Kap. 8.1.4, S. 104, errechneten Abkühlverlauf des Punktes  $(45, 45, 90)/1000 \in \Omega$ , welcher der Mittelpunkt des gegossenen Quaders ist, mit dem durch MAGMASOFT errechneten Abkühlverlauf.

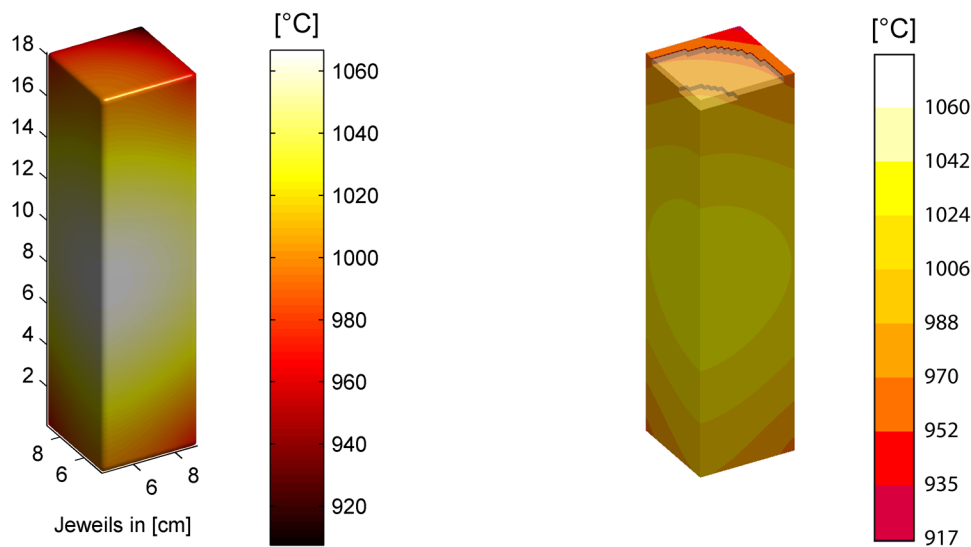


Abbildung 8.1.: Errechnete Temperaturverteilung des gegossenen Quaders  $\Omega$  nach Kap. 8.1.5 in dem Teilgebiet  $[9/200, 9/100] \times [9/200, 9/100] \times [0, 18/100] \subset \bar{\Omega}$  zum Zeitpunkt  $t = 2000\text{s}$ : Links wird der Algorithmus nach Kap. 8.1.4, S. 104, zur Errechnung der Temperaturverteilung verwendet, rechts die Gießsimulation MAGMASOFT.

Die Abbildungen 8.1 und 8.2 weisen eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse des in Kap. 8.1.4, S. 104, beschriebenen Algorithmus mit denen der Gießsimulation MAG-

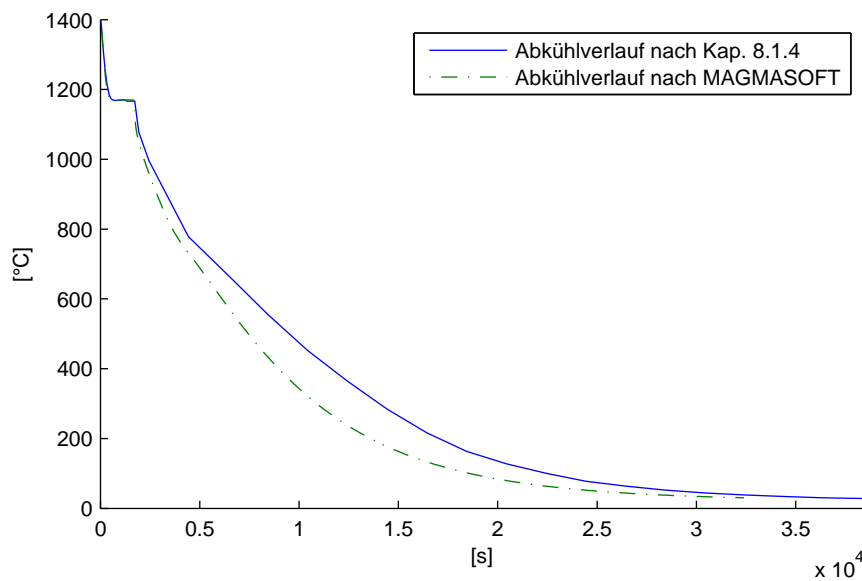


Abbildung 8.2.: Errechneter Abkühlverlauf des Mittelpunkts des gegossenen Quaders  $\Omega$  nach Kap. 8.1.5, S. 106.

MASOFT aus. Somit ist davon auszugehen, dass eine gute Anwendbarkeit des Algorithmus nach Kap. 8.1.4, S. 104, zur Ermittlung des Erstarrungs- und Abkühlverlaufs von zu gießenden Umformwerkzeugen, die durch relative Dichteverteilungen definiert sind, gewährleistet ist.

## 8.2. Einbeziehung des Gießvorgangs

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt 8.1, S. 97, entwickelt wurde, wie mit Hilfe des Stefan-Problems der Gießvorgang eines durch eine relative Dichteverteilung definierten Umformwerkzeuges modelliert werden kann, wird im Folgenden dargestellt, wie der Gießvorgang innerhalb der Topologieoptimierung tatsächlich genutzt werden soll. Dies soll, wie im bisherigen Verlauf dieser Arbeit, mit Hilfe eines Gewichtungsopeators  $G_3$  geschehen. Dieser Gewichtungsopeator hat die Aufgabe, das Vorhandensein ungleicher Abkühlverläufe zu bestrafen und damit in der Optimierung zu vermeiden. Hiermit soll erreicht werden, dass Lösungen des Optimierungsproblems (4.8), S. 49, durch die Einbeziehung von  $G_3$  in die Topologieoptimierung homogenere Abkühlverläufe erzielen als ohne dessen Einbeziehung.

In Kap. 8.2.1 wird der Gewichtungsopeator  $G_3$  entwickelt, mit dessen Hilfe der aus dem Gießvorgang resultierende Abkühlverlauf in die Topologieoptimierung einbezogen werden kann. Ferner wird diskutiert, ob  $G_3$  ein zulässiger Gewichtungsopeator nach Definition 4.2, S. 42, ist. In Kap. 8.2.2, S. 112, wird dargestellt, wie die Ableitungen des Abkühlverlaufs errechnet werden können, ohne ein weiteres Mal das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99f, auswerten zu müssen.

### 8.2.1. Entwicklung eines Gewichtungsoperators zur Berücksichtigung des Abkühlverlaufs

Aufgrund der Bemerkung nach Satz 8.5, S. 103, ist davon auszugehen, dass für jedes  $h \in Q_G$  eine Temperaturverteilung  $T \in \Xi$  ( $\Xi$  wie in Diskretisierung 8.6, S. 105) existiert, die das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99f, löst. Laut Fußnote 11, S. 100, kann davon ausgegangen werden, dass diese Lösung eindeutig ist. Daher bilde nachfolgend  $T : Q_G \rightarrow \Xi$  eine relative Dichteverteilung  $h \in Q_G$  auf die Lösung des Stefan-Problems der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99f, ab. Wir schreiben  $T(h, t)$  für die Temperatur in  $\Omega_\Xi$  zum Zeitpunkt  $t$ , welche aus der relativen Dichteverteilung  $h \in Q_G$  resultiert.

Definiere nun  $a_{kv} : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  durch

$$a_{kv}(h) := \int_0^{t_0} (T(h, t) - T_\infty) dt \quad (8.12)$$

als den *Abkühlverlauf* der relativen Dichteverteilung  $h \in Q_G$ .<sup>13</sup> Der Abkühlverlauf soll anhand eines geeigneten Gewichtungsoperators  $G_3$  in die Topologieoptimierung einbezogen werden. Um Satz 4.6, S. 46, anwenden zu können, soll der Gewichtungsoperator  $G_3 : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  für  $h \in Q_G$  die Form

$$G_3(h) := \exp(-C_0 f^2(h))$$

mit  $C_0 > 0$  und einem geeigneten  $f : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  haben. Dieser Gewichtungsoperator hat die Aufgabe, den Abkühlverlauf einer relativen Dichteverteilung  $h$  zu bewerten und inhomogene Abkühlverläufe zu bestrafen und damit innerhalb der Optimierung unbrauchbar zu machen. Ein Abkühlverlauf wird dabei vereinfacht gesagt als homogen angesehen, wenn er über weite Teile von  $\Omega$  Werte nahe dem durchschnittlichen Abkühlverlauf vorweist. Daher soll  $(f(h))(x)$  Werte nahe 0 einnehmen, wenn  $x \in \Omega$  in einem Bereich mit einem Abkühlverlauf nahe dem Durchschnitt liegt. In Bereichen, deren Abkühlverlauf unter dem Durchschnitt liegt, die also überdurchschnittlich schnell abkühlen, soll  $f(h)$  kleiner als 0 sein und in Bereichen, deren Abkühlverlauf über dem Durchschnitt liegt, soll  $f(h)$  größer als 0 sein.

Aus diesem Grund wird der Abkühlverlauf  $a_{kv}$  geeignet zentriert. Hierzu werden der (*gewichtete*) *durchschnittliche Abkühlverlauf*  $d_{av} : Q_G \rightarrow \mathbb{R}$  und der *zentrierte Abkühlverlauf*  $z_{av} : Q_G \rightarrow L^\infty(\Omega)$  definiert durch

$$d_{av}(h) := \frac{\int_\Omega h a_{kv}(h) dx}{\int_\Omega h dx}$$

sowie

$$z_{av}(h) := \frac{a_{kv}(h)}{d_{av}(h)} - 1.$$

$d_{av}$  wird deshalb gewichtet, weil uns vor allem der Abkühlverlauf in Bereichen hoher relativer Dichteverteilung mit Werten nahe 1 interessiert. Wegen  $0 < e_1 < h < e_2$  gilt

<sup>13</sup>Der Abkühlverlauf in der Hülle aus Formsand  $\Omega_\Xi \setminus \Omega$  interessiert hierbei nicht.

$T_0(h) > T_{\min}$  auf  $\Omega$  mit  $T_0(h) = T_0$  aus der Anfangsbedingung (8.2), S. 99. Damit existiert ein  $d_{av,\min} > 0$ , so dass wegen Randbedingung (8.3), S. 99,  $d_{av}(h) \geq d_{av,\min}$  gilt,  $z_{av}$  ist also wohldefiniert. In Gebieten, die schneller abkühlen als der Durchschnitt, gilt  $z_{av}(h) < 0$ , in Gebieten, die langsamer abkühlen als der Durchschnitt, gilt  $z_{av}(h) > 0$ . Daher definieren wir  $f := z_{av}$  und die Abbildung  $G_3$  durch

$$G_3(h) := \exp(-C_0 z_{av}^2(h)). \quad (8.13)$$

Nachfolgend werden einige Annahmen zusammengefasst:

**Annahme 8.7** Es seien die Voraussetzungen 4.1, S. 41, und 8.4, S. 102, erfüllt. Das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99, sei für jedes  $h \in Q_G$  eindeutig lösbar. Der Abkühlverlauf  $a_{kv}$  sei zweimal stetig F-differenzierbar.<sup>14</sup>

Mit Annahme 8.7 sind auch  $d_{av}$  und  $z_{av}$  zweimal stetig F-differenzierbar. Nun werden Vereinfachungen formuliert, die vor allem der numerischen Implementierbarkeit geschuldet sind:

**Vereinfachung 8.8** Es seien  $h \in Q_G$  und  $q_1, q_2 \in Q$ . Es sei  $d'_{av}(h)q_1 = 0$  und damit auch  $d''_{av}(h)q_1q_2 = 0$  (im Falle von  $\int_{\Omega} q_1 dx \approx \int_{\Omega} q_2 dx \approx 0$  ist der durch diese Vereinfachung entstehende relative Fehler gering). Überdies sei  $a''_{kv}(h)q_1q_2 = 0$ .

Der nachfolgende Satz 8.9 besagt, dass mit vorstehender Annahme 8.7 (und Vereinfachung 8.8)  $G_3$  und  $G_1G_2G_3$  (zulässige) Gewichtungsooperatoren nach Definition 4.2, S. 42, sind:

**Satz 8.9** *Es sei Annahme 8.7 erfüllt,  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ ,  $G_2$  definiert nach Gleichung (5.1), S. 61, und  $G_3$  definiert wie in der vorstehenden Gleichung (8.13). Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i)  $G_3$  und  $G_1G_2G_3$  sind Gewichtungsooperatoren.
- (ii) *Es sei Vereinfachung 8.8 gültig. Dann sind  $G_3$  und  $G_1G_2G_3$  zulässige Gewichtungsooperatoren.*

*Beweis:* Es seien  $h \in Q_G$  und  $q_1, q_2 \in Q$ .

- (i) Der Operator  $h \mapsto H(h) := -C_0 z_{av}(h)^2$  ist zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} H'(h)q_1 &= -2C_0 z_{av}(h)z'_{av}(h)q_1, \\ H''(h)q_1q_2 &= -2C_0(z'_{av}(h)q_1z'_{av}(h)q_2 + z_{av}(h)z''_{av}(h)q_1q_2). \end{aligned}$$

Damit ist auch  $G_3$  zweimal stetig F-differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} G'_3(h)q_1 &= G_3(h)H'(h)q_1, \\ G''_3(h)q_1q_2 &= G_3(h)(H'(h)q_1H'(h)q_2 + H''(h)q_1q_2). \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Für letztgenannte Annahme wären evtl. Veränderungen der Materialeigenschaften in Voraussetzung 8.4, S. 102, nötig.

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

Wegen  $0 < e_1 < h < e_2$  gilt aufgrund der Anfangs- und Randbedingungen (8.2) und (8.3), S. 99 ,

$$0 < a_{kv}(h) \leq C_1 d_{av}(h)$$

mit  $1 \leq C_1 \leq T_{\max} t_0 / d_{av, \min}$ . Damit gilt

$$-1 \leq z_{av}(h) \leq C_1 - 1.$$

Mit  $C_2 := \max(1, (C_1 - 1)^2) \geq 1$  gilt

$$-C_0 C_2 \leq H(h) \leq 0.$$

Es sei  $G_{\min} := \exp(-C_0 C_2) > 0$ . Dann gilt  $G_{\min} \leq G_3(h) \leq 1$ . Damit ist  $G_3$  ein Gewichtungsooperator. Weil  $G_1$  und  $G_2$  nach den Sätzen 4.3, S. 43, und 5.1, S. 61, Gewichtungsooperatoren sind, ist auch  $G_1 G_2 G_3$  ein Gewichtungsooperator.

(ii) Mit vorstehender Vereinfachung 8.8, S. 109, ist

$$(z'_{av}(h)q_1)^2 + z_{av}(h)z''_{av}(h)q_1q_1 = (z'_{av}(h)q_1)^2 \geq 0$$

und echt größer 0, wenn  $q_1 \neq 0$ . Damit erfüllt  $G_3$  die Voraussetzungen von Satz 4.6(i), S. 46, und ist somit ein zulässiger Gewichtungsooperator. Weil  $G_2$  und  $G_3$  die Voraussetzungen von Satz 4.5 , S. 46, erfüllen, ist  $G_1 G_2 G_3$  nach Satz 4.6(ii), S. 46, ein zulässiger Gewichtungsooperator.  $\square$

Ist Annahme 5.2, S. 62, für  $G := G_1 G_2 G_3$  gültig, so kann unter Verwendung des Gewichtungsooperators  $G$  auf die Beschränktheitsnebenbedingung verzichtet werden, ohne dass das Optimierungsproblem (4.8), S. 49, seine Wohlgestelltheit einbüßt:

**Annahme 8.10** Annahme 5.2, S. 62, sei gültig für  $G := G_1 G_2 G_3$  mit  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ ,  $G_2$  definiert nach Gleichung (5.1), S. 61 und  $G_3$  definiert nach Gleichung (8.13), S. 109.

**Satz 8.11** *Es seien  $G_1$  definiert nach Gleichung (4.2), S. 43, mit einem  $p > 1$ ,  $G_2$  definiert nach Gleichung (5.1), S. 61,  $G_3$  definiert nach Gleichung (8.13), S. 109,  $G := G_1 G_2 G_3$  und Voraussetzung 4.1, S. 41, sowie Annahme 8.7, S. 109, erfüllt. Jedoch werde  $Q_{\text{ad}}$  definiert durch*

$$Q_{\text{ad}} \subset \{h \mid h \in Q, \quad h_{\min} \leq h \leq 1, \quad \int_{\Omega} h dx \leq V_0\}.$$

Weiterhin seien  $a(h)$  sowie  $\ell$  definiert wie in den Gleichungen (4.3), (4.4), S. 48, und  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  wie in Gleichung (4.7), S. 49.

Bei Annahme 8.10 besitzt das Optimierungsproblem (4.8), S. 49, eine Lösung  $(h_*, u_*) \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ .

*Beweis:* Siehe den Beweis des Satzes 5.3, S. 63.  $\square$

**Beispiel 8.12 (Spannungsgitter)** Nachfolgend soll der Abkühlverlauf eines gegossenen *Spannungsgitters* der Größe  $18\text{cm} \times 24\text{cm} \times 1,5\text{cm}$  aus dem Material GJS-600 berechnet und bewertet werden. Das Spannungsgitter wird durch eine geeignet definierte relative Dichteverteilung definiert. Der errechnete Abkühlverlauf soll mit dem wohlbekanntem Abkühlverlauf eines gegossenen Spannungsgitters verglichen werden: „Bei der Abkühlung einer solchen gegossenen Probe erstarren erst die seitlichen Stäbe (...), dann die beiden Querbalken und zuletzt der mittlere Stab (...). Im erkalteten Zustand sind die beiden Querbalken auf Biegung, die seitlichen Stäbe auf Druck und der Mittelstab auf Zug beansprucht“, [Hass00, S. 1177].

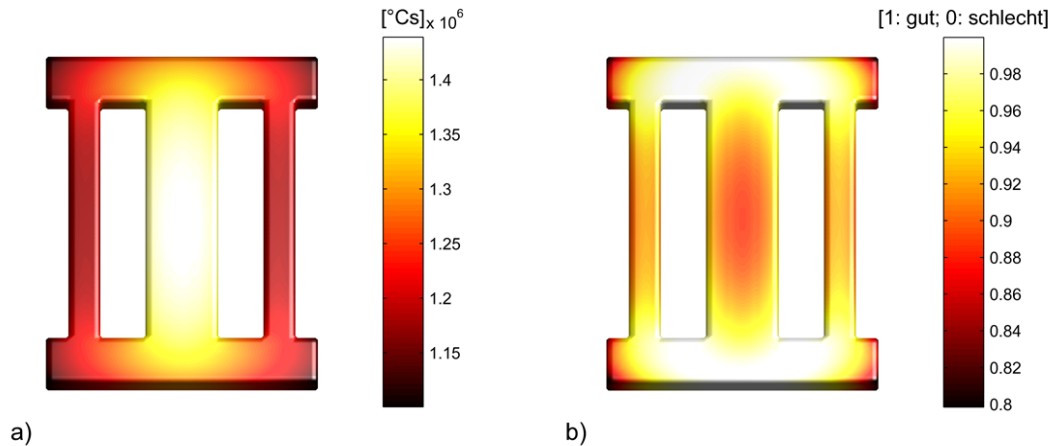


Abbildung 8.3.: Errechneter Abkühlverlaufs eines gegossenen Spannungsgitters und Bewertung desselben:

- Nach Gleichung (8.12), S. 108, errechneter Abkühlverlauf des gegossenen Spannungsgitters nach Beispiel 8.12 gegen die Oberfläche des Spannungsgitters;
- Bewertung des errechneten Abkühlverlaufs durch den Gewichtungsoperator  $G_3$  nach Gleichung (8.13), S. 109, mit  $C_0 = 10$  gegen die Oberfläche des Spannungsgitters.

Wie in Abbildung 8.3a) dargestellt, kühlen bei dem nach Gleichung (8.12), S. 108, errechneten Abkühlverlauf - abgesehen von den äußeren Ecken der beiden Querbalken - die seitlichen Stäbe des Spannungsgitters am schnellsten ab, dann folgen die Querbalken und zuletzt der mittlere Stab. Dies stimmt mit dem bekannten, oben zitierten Abkühlverlauf eines gegossenen Spannungsgitters überein und führt zu der in Abbildung 8.3b) dargestellten Bewertung des Abkühlverlaufs durch den Gewichtungsoperator  $G_3$  nach Gleichung (8.13), S. 109, mit  $C_0 = 10$ : Weite Teile der Querbalken werden mit einem Wert nahe 1 gewichtet, da der dort errechnete Abkühlverlauf nahezu dem durchschnittlich errechneten Abkühlverlauf entspricht. Sowohl die seitlichen Stäbe, als auch der mittlere Stab werden mit einem niedrigeren Wert gewichtet. Erstere kühlen schneller ab als der Durchschnitt, letzterer langsamer.

Der Gewichtungsoperator  $G_3$  ist also in der Lage, die Inhomogenität des Abkühlverlaufs korrekt zu bewerten und somit eine sinnvolle Gewichtung der das Spannungsgitter definierenden relativen Dichteverteilung zu ermitteln.

## 8.2.2. Ermittlung der Ableitungen des Abkühlverlaufs

### Problemstellung

In Annahme 8.7, S. 109, gehen wir davon aus, dass  $a_{kv}$  zweimal F-differenzierbar ist. Die Ableitungen von  $a_{kv}$  fließen in die Berechnung der Ableitungen von  $G_3$  nach Gleichung (8.13), S. 109, ein. Die Ableitungen von  $G_3$  müssen bei Anwendung des Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, errechnet werden. Im endlichdimensionalen Fall mit Diskretisierung 8.6, S. 105, ließen sich  $a'_{kv}(h)$  und  $a''_{kv}(h)$  sinnvoll durch numerische Differentiation approximieren. Doch ähnlich wie bei der Berechnung der Verschiebungsableitung  $u'(h_n)$  in Kap. 6.1.4, S. 77, müsste hierfür das Stefan-Problem der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99, nicht einmal, sondern  $2r + 1$  Mal gelöst werden. Jedoch ist die Berechnung einer Lösung des Stefan-Problems der Topologieoptimierung üblicherweise zeitaufwändiger als die Berechnung einer Lösung der Zustandsgleichung (4.5), S. 48. Daher ist die Berechnung von  $a'_{kv}(h)$  und  $a''_{kv}(h)$  durch numerische Differentiation im Falle von „large-scale“ Problemen aus den bereits in Kap. 6.1.4, S. 77, genannten Gründen nicht praktikabel.

Ziel ist daher, eine sinnvolle Schätzung der Ableitung  $a'_{kv}(h)q$  bzw. der Differenz  $a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h)$  zu entwickeln, ohne dass eine weitere Auswertung des Stefan-Problems der Topologieoptimierung (8.2) - (8.4), S. 99, nötig ist. Wir betrachten hierbei nur relative Dichteverteilungen  $h \in Q_{\text{ad},l}$  mit  $\int_{\Omega} h dx = V_0$  und  $q = c\psi_i$ ,  $0 < c \leq 1$ , da nur solche relativen Dichteverteilungen in der praktischen Anwendung relevant sind. Mit Vereinfachung 8.8, S. 109, rechnen wir überdies  $a''_{kv}(h)q_1q_2 = 0$ .

### Vorgehen

Für unser Vorhaben betrachten wir die Fundamentallösung. Diese beschreibt eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}^d,$$

wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  dem Ursprung die Wärmemenge 1 zugefügt wird. Die Fundamentallösung lautet

$$u(t)(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right),$$

vgl. [Eck08, Kap. 6.2.5]. Es gelte nun  $d = 3$ . Dann wird mit der Transformation  $z = \|x\|_2(2t)^{-1/2}$ ,  $dz = -\|x\|_2(2t)^{-3/2} dt$  der *Abkühlverlauf der Fundamentallösung* für ein  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^3$  durch

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right) dt &= - \int_\infty^0 \frac{(2t)^{3/2}}{\|x\|_2(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\|x\|_2(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \frac{1}{4\pi\|x\|_2} \end{aligned} \tag{8.14}$$

errechnet. An diesem Ergebnis wollen wir uns bei der Schätzung von  $a'_{kv}(h)q$  orientieren: Wir nehmen an, dass die Änderung des Abkühlverlaufs in einem Punkt  $x_i \in \Omega$  in etwa



umgekehrt proportional zur Distanz zu einem Punkt  $x_j \in \Omega$  sein muss, sofern sich in  $x_j$  die zugeführte anfängliche Wärmemenge durch eine veränderte relative Dichteverteilung geändert hat, also

$$(a'_{kv}(h)\psi_j)(x_i) \approx O(\|x_i - x_j\|_2^{-1}).$$

Zur weiteren Konkretisierung benötigen wir eine Schätzung für  $\int_{\Omega} a'_{kv}(h)qdx$ , welche wir mit  $M_0(h, q) \in \mathbb{R}$  bezeichnen wollen. Es bietet sich an,

$$M_0(h, q) := \int_{\Omega} a_{kv}(h)dx \frac{\int_{\Omega} qdx}{\int_{\Omega} hdx}$$

zu setzen.

Zuletzt wollen wir die Berechnung von  $a'_{kv}(h)q$  parametrisieren. Hierbei bietet sich an, mit geeigneten Dichtefunktionen  $f_X$  von Zufallsvariablen  $X$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  zu arbeiten, da für diese stets  $\int_{\mathbb{R}^3} f_X(x)dx = 1$  gilt. Dann gilt

$$\int_{\Omega} a'_{kv}(h)qdx \approx \int_{\mathbb{R}^3} M_0(h, q)f_X(x)dx.$$

Wenn  $x_j \in \Omega$  die zusätzliche Wärmemenge zugeführt würde, die  $\Omega$  auch durch die Veränderung der relativen Dichteverteilung um  $\psi_j$  zusätzlich zugeführt würde, ließe sich die Veränderung von  $a_{kv}(h)$  in  $x_i \in \Omega$  durch

$$(a_{kv}(h + \psi_j) - a_{kv}(h))(x_i) \approx M_0(h, q)f_X(x_i - x_j)$$

schätzen.

Nun gilt es, ein geeignetes  $f_X$  zu finden. Geeignet heißt hierbei, dass  $f_X(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^3$  in etwa die Asymptotik von Gleichung (8.14) haben sollte. Als Ausgangspunkt bietet sich die Dichtefunktion  $f_X$  einer Pareto-verteilten Zufallsvariable  $X$  an. Diese wird berechnet durch

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{b} \left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma+1}, \quad x \geq b$$

für  $\gamma, b > 0$ , vgl. [John94, Kapitel 20]. Die Verallgemeinerung auf  $\mathbb{R}$  lautet

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{2b} \left(\frac{b}{|x| + b}\right)^{\gamma+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nun soll  $f_X$  auf  $\mathbb{R}^3$  verallgemeinert werden, wobei  $f_X(x) = f_X(\|x\|_2)$  gelten soll. Hierbei stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} c \left(\frac{1}{\|x\|_2 + b}\right)^{\gamma+1} dx &= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} c \left(\frac{1}{r + b}\right)^{\gamma+1} r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^{\infty} 4\pi c \left(\frac{1}{r + b}\right)^{\gamma+1} r^2 dr \\ &= \int_0^{\infty} 4\pi c ((r + b)^{1-\gamma} - 2b(r + b)^{-\gamma} + b^2(r + b)^{-\gamma-1}) dr \\ &= 4\pi b^{2-\gamma} c \left(\frac{1}{\gamma - 2} - \frac{2}{\gamma - 1} + \frac{1}{\gamma}\right) \\ &= \frac{8\pi b^{2-\gamma} c}{(\gamma - 2)(\gamma - 1)\gamma} \end{aligned}$$

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

gilt, falls  $c \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ ,  $\gamma > 2$ . Wird nun

$$c_0 := \frac{(\gamma - 2)(\gamma - 1)\gamma}{8\pi b^3} \quad (8.15)$$

gesetzt, so ist  $f_X$  mit

$$f_X(x) := c_0 \left( \frac{b}{\|x\|_2 + b} \right)^{\gamma+1}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (8.16)$$

für  $\gamma > 2$ ,  $b > 0$  die Dichtefunktion einer Zufallsvariable  $X$ . Es ist jedoch festzustellen, dass die Asymptotik von  $f_X$  nicht derjenigen aus Gleichung (8.14), S. 112, entspricht. Dennoch behalten wir diesen Ansatz bei, denn es stellt sich heraus, dass in der praktischen Umsetzung für experimentell ermittelte Werte von  $\gamma$  und  $b$  sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Welche Werte hierbei geeignet sind, wird nachfolgend ausgeführt.

Mit Diskretisierung 8.6, S. 105, definieren wir  $a'_{kv}(h)$  für  $h \in Q_{ad,l}$ ,  $\int_{\Omega} h dx = V_0$  und  $\psi_j := \mathbf{1}_{\Omega_{x_j}}$  durch

$$(a'_{kv}(h)\psi_j)(x_i) := M_0(h)f_X(x_i - x_j), \quad i, j \in \{1, \dots, r\}, \quad (8.17)$$

wobei  $f_X$  nach vorstehender Gleichung (8.16) definiert ist,  $V_0$  aus Voraussetzung 4.1, S. 41, stammt und

$$M_0(h) := \int_{\Omega} a_{kv}(h) dx \frac{l^3}{V_0}.$$

### Automatisierung

Um in der praktischen Anwendung die Berechnung geeigneter Werte  $\gamma, b$  zu automatisieren, werden innerhalb einer Testreihe von 18 Testgeometrien folgende Einflussgrößen auf die Differenz  $a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h)$  getestet:

- (i) der Einfluss der Kantenlänge eines Würfels  $l$ ;
- (ii) der Einfluss der Größe des Designraums  $\Omega$ ;
- (iii) der Einfluss der Geometrie des Designraums;
- (iv) der Einfluss der relativen Dichteverteilung  $h$  (homogen vs. inhomogen);
- (v) der Einfluss der Lage eines betrachteten Würfels im Designraum (mittig vs. am Rand);
- (vi) der Einfluss der Stärke der Veränderung der relativen Dichteverteilung in einem Würfel.

In allen Testfällen wird die relative Dichteverteilung  $h$  derart gewählt, dass  $\int_{\Omega} h dx = V_0$ . Ferner wird  $h$  nur in einem Würfel  $\Omega_{x_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ , geändert, d.h.  $q = c\mathbf{1}_{\Omega_{x_i}}$  und  $c > 0$ . Zunächst sollen geeignete Werte für  $\gamma$  und  $b$  experimentell ermittelt werden, um hieraus Vorschriften ableiten zu können, anhand derer die beiden Parameter automatisch

berechnet werden können. Also werden die Parameter  $\gamma$  und  $b$  gerade so gewählt, dass sich  $c(a'_{kv}(h)\psi_i)(x_i) = (a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h))(x_i)$  (mit jeweils simulierten  $a_{kv}$ ) ergibt. Deshalb wird stets erst  $\gamma > 0$  festgelegt, dann

$$c_0 = \frac{(a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h))(x_i)}{M_0(h)} \quad (8.18)$$

und zuletzt  $b$  nach Gleichung (8.15), S. 114.

Es stellt sich heraus, dass mit  $\gamma = 1/2$  ein brauchbarer Wert gefunden ist, vgl. nachfolgende Abbildung 8.4, S. 116. Das hat zwar zur Konsequenz, dass  $f_X$  keine Dichtefunktion einer Zufallsvariable mehr ist. Jedoch lässt sich  $a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h)$  auf einem beschränkten Gebiet wie  $\Omega$  am besten mit diesem Wert annähern. Mit Werten  $\gamma > 2$  wird der Asymptotik (8.14), S. 112, deutlich weniger genügt.

**Beispiel 8.13** Es sei Diskretisierung 6.2, S. 75, mit folgenden Parametern erfüllt: Die Diskretisierungseinheit betrage  $l = 8\text{cm}$  und es gelte  $n_x := 50$ ,  $n_y := 25$ ,  $n_z := 7$ . Damit hat der Designraum  $\Omega$  die Abmessung  $4\text{m} \times 2\text{m} \times 56\text{cm}$ , d.h.  $\Omega := (0, 4) \times (0, 2) \times (0, 14/25) \subset \mathbb{R}^3$ . Es gelte  $h = 1/2$  auf  $\Omega$  und  $q = 1/10$  auf dem Würfel  $\Omega_{x_i}$  mit der Kennung  $25 \times 13 \times 4$  und  $q = 0$  sonst. Damit gilt  $i = 4288$  und

$$x_i = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Anhand der in Kap. 8.1.4, S. 104, beschriebenen Methode werden die Abkühlverläufe  $a_{kv}(h+q)$  und  $a_{kv}(h)$  errechnet. Ferner wird  $\gamma = 1/2$  gesetzt, dann  $c_0$  durch Gleichung (8.18), S. 115, und zuletzt  $b$  durch Gleichung (8.15), S. 114, berechnet. Auf diese Weise wird  $a'_{kv}(h)q$  nach Gleichung (8.17), S. 114, ermittelt. Abbildung 8.4 schließlich vergleicht  $a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h)$  mit  $a'_{kv}(h)q$ . Es ist zu erkennen, dass mit der in diesem Kap. 8.2.2 beschriebenen Methode zur Schätzung von  $a_{kv}(h+q) - a_{kv}(h)$  durch  $a'_{kv}(h)q$  gute Resultate erzielt werden.

Aus der auf S. 114 erwähnten Testreihe sollen nun Vorschriften abgeleitet werden, anhand derer  $b$  automatisch und ohne Auswertung von  $a_{kv}(h+q)$  berechnet werden kann.  $c_0$  wird anschließend wieder mit Formel (8.15), S. 114, berechnet. Die aus der Testreihe abgeleiteten Erkenntnisse lauten:

- (i) Bei gleich bleibender Diskretisierungseinheit (gleich bleibenden  $n_x, n_y, n_z$  nach Beispiel 8.13, S. 115) hat der Parameter  $l$  keine signifikanten Auswirkungen auf  $b$ ;
- (ii) bei gleich bleibendem Designraum  $\Omega$  führt eine feinere Diskretisierung (führen größer werdende  $n_x, n_y, n_z$ ) zu einem größeren  $b$ ;
- (iii) je gleichmäßiger die Geometrie (gleich große  $n_x, n_y, n_z$ ) des Designraums ist, desto größer ist  $b$ ;
- (iv) je homogener die relative Dichteverteilung  $h$  ist, desto größer ist  $b$ ;

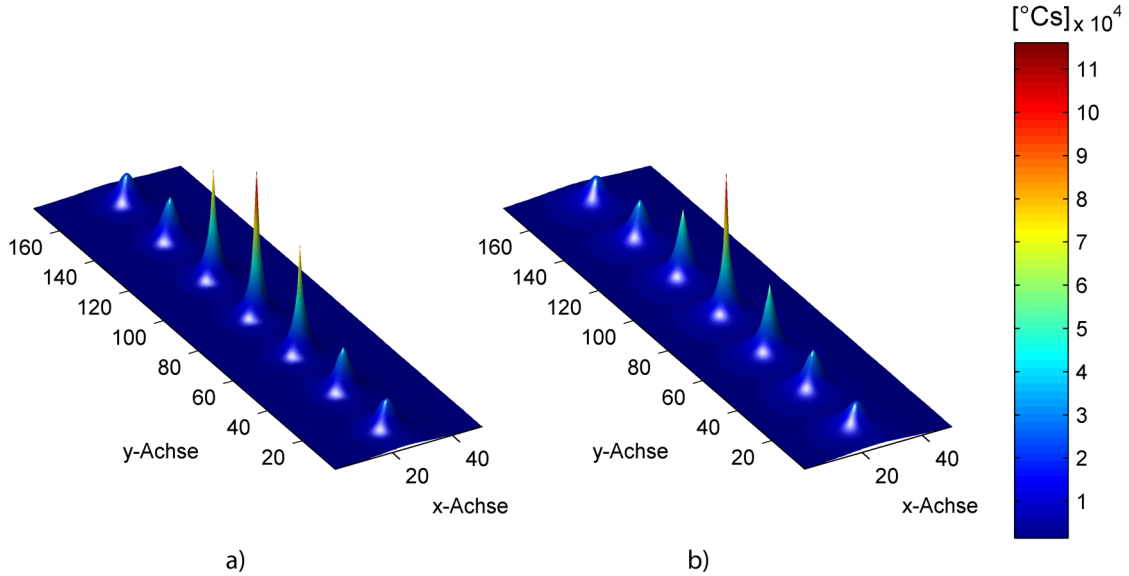


Abbildung 8.4.: Vergleich von  $a_{kv}(h + q) - a_{kv}(h)$  mit  $a'_{kv}(h)q$  nach Beispiel 8.13, S. 115:  
 a) Darstellung von  $a_{kv}(h + q) - a_{kv}(h)$  gegen nebeneinander aufgetragene horizontale Querschnitte des Designraums  $\Omega$ . Die Anzahl der horizontalen Querschnitte beträgt gerade  $n_z = 7$ . Der  $i$ -te Querschnitte schneidet  $\Omega$  in der Höhe  $(2i + 1)l/2$ . Das ist auf Höhe der  $z$ -Koordinate der Mittelpunkte der Würfel in der zugehörigen  $i$ -ten Schicht von Würfeln. Ein Element  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  der dargestellten  $(x, y)$ -Achsen entspricht dabei dem Mittelpunkt des Würfels mit der Kennung  $i_x \times i_y \times i_z$ . Dabei sind  $i_x = x$ ,  $i_y = ((y - 1) \bmod n_y) + 1$  und  $i_z = \lfloor (y - 1)/n_y \rfloor + 1$ ;  
 b) Darstellung von  $a'_{kv}(h)q$  gegen (wie bei a)) nebeneinander aufgetragene horizontale Querschnitte des Designraums  $\Omega$ .

- (v) die Auswirkungen der Inhomogenität einer relativen Dichteverteilung lassen sich nicht parametrisieren;
- (vi) am Rand des Designraums  $\Omega$  ist  $b$  größer als in seiner Mitte (jedoch nicht signifikant);
- (vii) es ist bei  $b$  keine klare Abhängigkeit von der Stärke der Veränderung der relativen Dichteverteilung in einem Würfel erkennbar.

Die Resultate (ii) - (iv) haben sich als relevant herausgestellt. Entsprechend soll eine Vorschrift zur Berechnung von  $b$  aus diesen drei Resultaten abgeleitet werden. Es werde  $\text{Var} : Q_G \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\text{Var}(h) := \frac{\int_{\Omega} (h - V_0/\mu_3(\Omega))^2 dx}{\mu_3(\Omega)}.$$

$\text{Var}(h)$  nimmt für  $h \in Q_{\text{ad}} \cup Q_{\text{ad},l}$  mit  $\int_{\Omega} h dx = V_0$  nur Werte in  $[0, 1/4]$  an und ist ein Maß für die Inhomogenität von  $h$ . Definiere weiterhin  $\zeta \in \mathbb{R}^3$  durch

$$\zeta := \frac{10}{89} \left( \log_2 \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} - \log_2(9/2) \right) - \frac{\text{Var}(h)}{2} + 1.$$

Dann lautet die Vorschrift zur Berechnung von  $b$

$$b = \prod_{k=1}^3 \zeta_k. \quad (8.19)$$

Wegen  $n_x, n_y, n_z \geq 1$  gilt  $\zeta_k \geq -10 \log_2(9/2)/89 + 7/8 \geq 1/2$  für  $h \in Q_{\text{ad}} \cup Q_{\text{ad},l}$  mit  $\int_{\Omega} h dx = V_0$  und damit  $b \geq 1/8 > 0$ . Entsprechend ist ein derart berechnetes  $b$  zulässig.

### Ergebnisse

In der nachfolgenden Abbildung 8.5 werden die aus der oben erwähnten Testreihe stammenden, experimentell ermittelten  $b$  (d.h. zunächst wird  $\gamma = 1/2$  gesetzt, dann  $c_0$  durch Gleichung (8.18), S. 115, und zuletzt  $b$  durch Gleichung (8.15), S. 114, berechnet) mit den automatisch berechneten  $b$  (d.h. zunächst wird  $\gamma = 1/2$  gesetzt, dann  $b$  durch Gleichung (8.19), S. 117, und zuletzt  $c_0$  durch Gleichung (8.15), S. 114, berechnet) verglichen. Die relative Abweichung der automatisch berechneten  $b$  von den experimentell ermittelten  $b$  beträgt durchschnittlich 8,28% und ist damit gering.

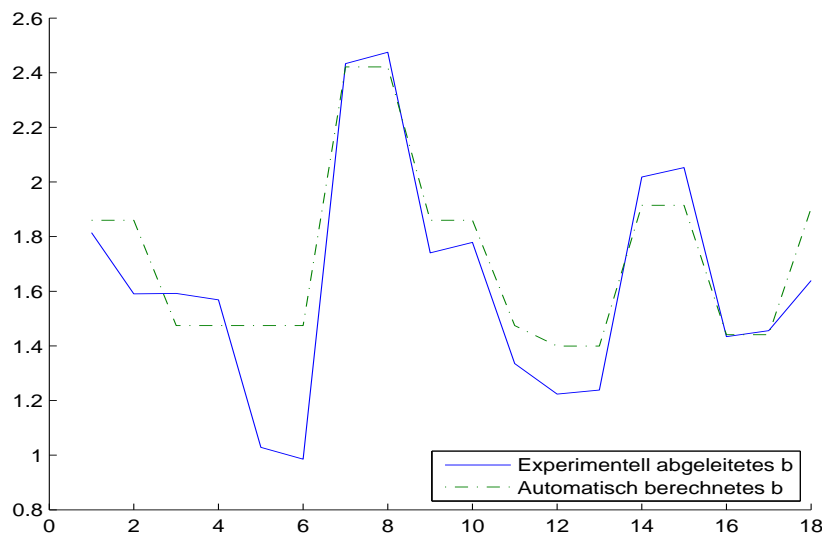


Abbildung 8.5.: Vergleich von experimentell und automatisch berechnetem  $b$  mit Hilfe der 18 Testgeometrien aus der oben erwähnten Testreihe: Es wird  $b$  gegen die jeweilige Testgeometrie abgebildet.

### 8.3. Anwendung des entwickelten Gewichtungsooperators

Nachfolgend wird der in Kap. 8.2.1, S. 108, entwickelte Gewichtungsooperator  $G_3$  numerisch angewandt. Die hierbei erzeugten Umformwerkzeuge sollen mit rein mechanisch optimierten sowie mit konventionell gestalteten Umformwerkzeugen verglichen werden. Dies geschieht mit Hilfe einer exemplarischen Probegeometrie:

Der Designraum  $\Omega$  sei dreidimensional mit einer Breite von 100cm, einer Länge von 50cm und einer Höhe von 17cm. Die Unterseite des Designraums sei versehen mit einer 2cm dicken Wirkfläche. Auf die Unterseite der Wirkfläche wirke ein homogener Druck von 5MPa in Richtung  $(0, 0, 1)^T$ . Die Oberseite des Designraums werde gehalten, d.h. die Verschiebung  $u$  sei dort 0. Es werden die Material- und Volumen Nebenbedingung mit  $V_0 = \mu_3(\Omega)/2$  und die Entformungsrichtung  $r_e = -(0, 0, 1)^T$  verwendet, vgl. Abbildung 8.6:

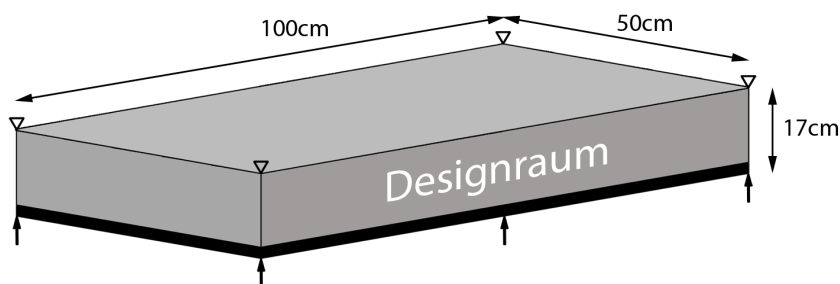


Abbildung 8.6.: Darstellung der Probegeometrie nach Kap. 8.3.

Zur numerischen Behandlung der Probegeometrie werden der Algorithmus nach Kap. 6.1.5, S. 79, und die Diskretisierung 8.6, S. 105, mit  $R = 2$  und  $l = 1/2$  cm verwendet, der Designraum  $\Omega$  wird also in 680000 Würfel zerlegt. Als Gewichtungsooperator wird zum einen  $G := G_1 G_2$  mit  $G_1$  nach Gleichung (4.2), S. 43, und  $p = 3$ , sowie  $G_2$  nach Gleichung (5.3), S. 64, mit  $c = l^4/4$  verwendet, zum anderen  $G := G_1 G_2 G_3$  mit  $G_1$  und  $G_2$  wie eben und  $G_3$  nach Gleichung (8.13), S. 109, mit  $C_0 \in \{30, 60, 90\}$ . In allen Fällen werden dem Algorithmus 100 Iterationen zur numerischen Behandlung der Probegeometrien vorgegeben.

Den derart erzeugten Umformwerkzeugen wird in der eben genannten Reihenfolge die Kennung c) – f) zugewiesen: Kennung c) entspricht dem rein mechanisch optimierten Umformwerkzeug, d) – f) entsprechen den mechanisch und gießtechnisch optimierten Umformwerkzeugen mit steigendem  $C_0$ . Als Startwert dient den Umformwerkzeugen c) – e) die relative Dichteverteilung, die im Bereich der Wirkfläche den Wert 1 einnimmt und ansonsten konstant ist mit dem Wert, der die Volumen Nebenbedingung aktiv werden lässt. Umformwerkzeug f) verwendet einen Startwert, welcher sich an den mechanischen und gießtechnischen Erkenntnissen der Kapitel 7, S. 87, und 8 orientiert. Ferner werden zum Vergleich je ein kreuz- und ein hexagonalverripptes Umformwerkzeug mit den Kennungen a) und b) erzeugt. Alle Umformwerkzeuge werden hinsichtlich ihrer mechanischen und gießtechnischen Eigenschaften ausgewertet. Mechanische Bewertungskriterien sind hierbei die Nachgiebigkeit und die Homogenität der Wirkflächendurchbiegung. Das gießtechnische

Bewertungskriterium ist die (*gewichtete*) *Bewertung der Gießtechnik*  $b_{gt} : Q_G \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese wird definiert durch

$$b_{gt}(h) := \frac{\int_{\Omega} h G_3(h) dx}{\int_{\Omega} h dx} \in [0, 1],$$

wobei  $G_3$  mit dem Parameter  $C_0 = 10$  errechnet wird. In Prozent ausgedrückt lautet die gießtechnische Bewertung  $100b_{gt}(h)\%$ . Überdies werden die errechneten Eigenspannungen und Lunkerwahrscheinlichkeiten aller Umformwerkzeuge verglichen.

### 8.3.1. Auswertung der Ergebnisse

Die errechnete Nachgiebigkeit der topologieoptimierten Umformwerkzeuge ist stets deutlich geringer als die der konventionell verrippten Umformwerkzeuge: Durchschnittlich beträgt der Unterschied 17,5%, wenigstens 11,43% und höchstens 22,29%. Dabei stellt sich heraus, dass durch Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung die Nachgiebigkeit in allen Fällen sinkt, im Durchschnitt um 4,14%. Die Nachgiebigkeit des hexagonal verrippten Umformwerkzeugs ist um 7,45% geringer als die Nachgiebigkeit des kreuzverrippten Umformwerkzeugs.

Ferner ist die Wirkflächendurchbiegung der topologieoptimierten Umformwerkzeuge wesentlich homogener als die der konventionell verrippten Umformwerkzeuge: Die *Standardabweichung* von der mittleren Wirkflächendurchbiegung in z-Richtung beträgt bei den topologieoptimierten Umformwerkzeugen im Durchschnitt  $10,64 \cdot 10^{-7}$ m. Sie ist damit um 69,08% geringer als die vergleichbare Standardabweichung der konventionell verrippten Umformwerkzeuge, die  $34,4 \cdot 10^{-7}$ m beträgt. Dieses Resultat kann in Abbildung 8.8, S. 120, nachvollzogen werden.

Die gießtechnische Bewertung der topologieoptimierten Umformwerkzeuge steigt bei größer werdendem  $C_0$  monoton von 78,4% auf 95,52%. Eine stärkere Gewichtung des Gewichtungsoperators  $G_3$  im Optimierungsprozess führt also beständig zu einer höheren gießtechnischen Bewertung. Überdies weist das hexagonal verrippte Umformwerkzeug mit 91,47% eine höhere gießtechnische Bewertung aus das kreuzverrippte Umformwerkzeug, dessen gießtechnische Bewertung bei 85,34% liegt. Damit fällt die gießtechnische Bewertung von topologieoptimierten Umformwerkzeugen besser aus als die gießtechnische Bewertung von konventionell verrippten Umformwerkzeugen, wenn der Parameter  $C_0$  des Gewichtungsoperators  $G_3$  hinreichend hoch gewählt wird. Die gießtechnische Bewertung der Umformwerkzeuge kann in Abbildung 8.7, S. 120, nachvollzogen werden.

Sämtliche Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle 8.1 zusammengefasst:

Kriterium	Kennung des Umformwerkzeugs						Einheit
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	
Nachgiebigkeit	28,19	26,09	23,11	22,36	22,19	21,91	[J]
Homog. Durchbiegung WF	36,32	32,49	13,01	9,94	7,37	12,24	$10^{-7}$ [m]
Bewert. Gießtechnik	85,34	91,47	78,4	84,42	91,67	95,52	[%]

Tabelle 8.1.: Mechanische und gießtechnische Auswertung der Umformwerkzeuge a) – f) nach Kap. 8.3, S. 118.

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

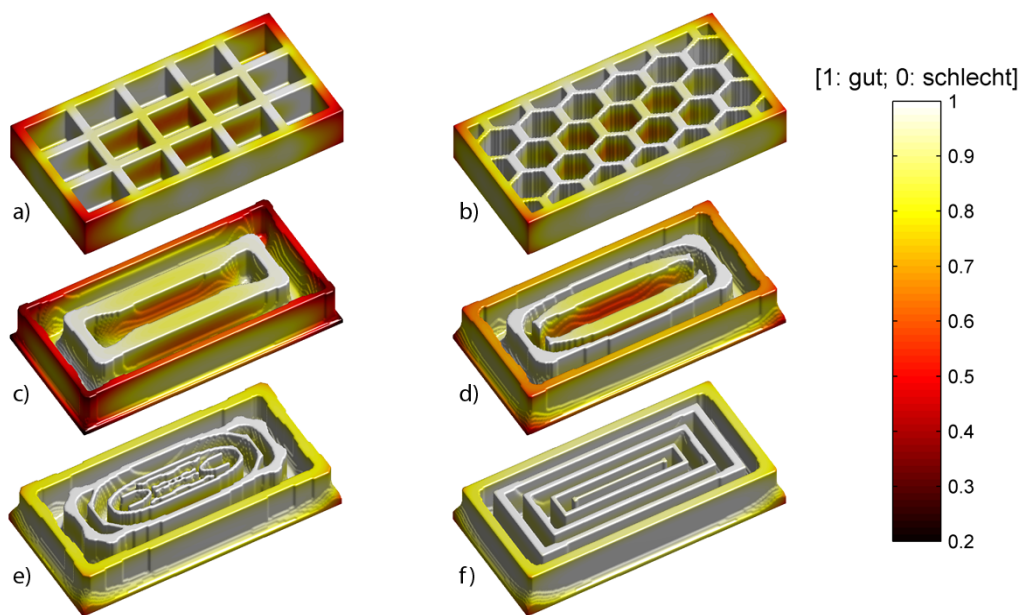


Abbildung 8.7.: Gießtechnische Bewertung der Umformwerkzeuge a) – f) nach Kap. 8.3, S. 118, durch den Gewichtungsooperatoren  $G_3$  nach Gleichung (8.13), S. 109, mit  $C_0 = 10$  gegen die Oberfläche dieser Umformwerkzeuge.

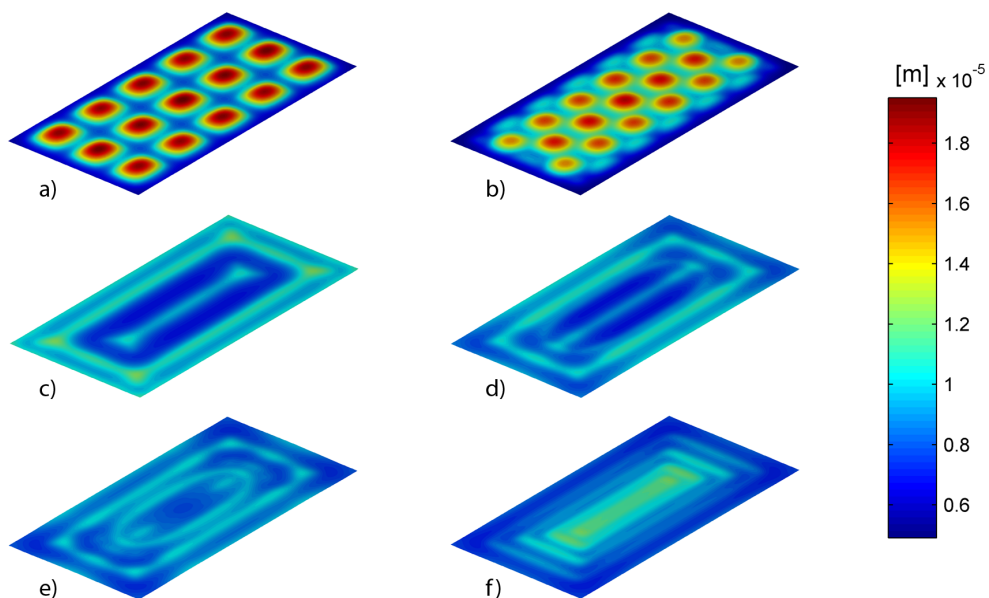


Abbildung 8.8.: Errechnete Verschiebung der Unterseite der Wirkfläche der Umformwerkzeuge a) – f) nach Kap. 8.3, S. 118, in z-Richtung.



### 8.3. Anwendung des entwickelten Gewichtungsopeators

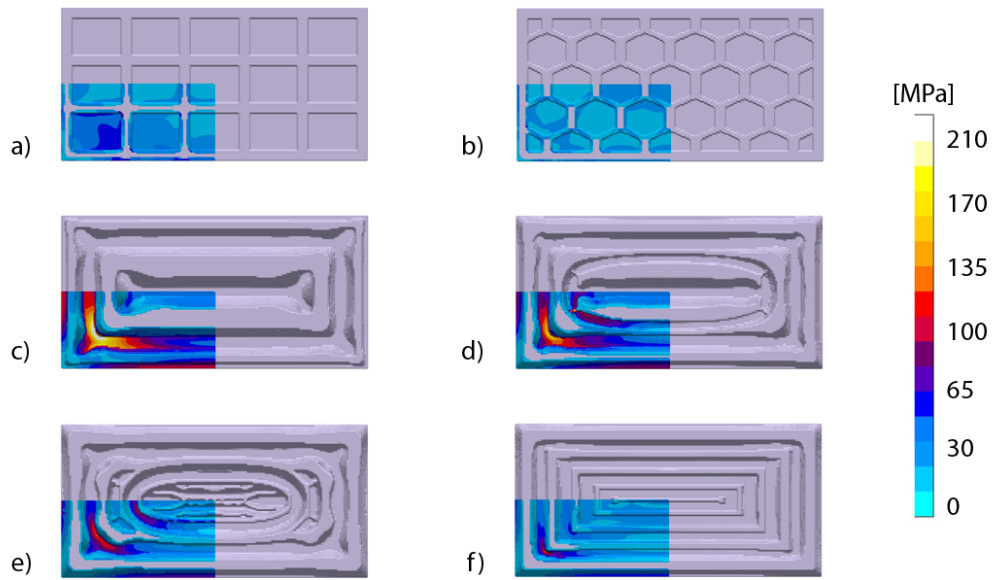


Abbildung 8.9.: Durch MAGMASOFT errechnete von Mises Eigenspannungen in den Umformwerkzeugen a) – f) nach Kap. 8.3, S. 118, in der Draufsicht. Aufgrund der vorhandenen Symmetrien wird die Eigenspannung nur in dem dargestellten linken, unteren Viertel der Bauteile abgebildet.

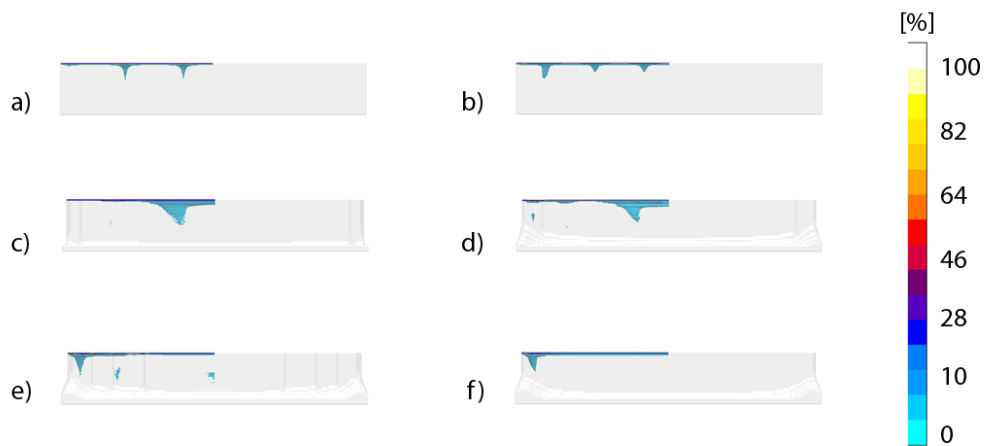


Abbildung 8.10.: Durch MAGMASOFT errechnete Wahrscheinlichkeit für Porosität in den Umformwerkzeugen a) – f) nach Kap. 8.3, S. 118, in der Seitenansicht. Bereiche mit einer Porositätswahrscheinlichkeit unter 0,5% sind transparent dargestellt. Aufgrund der vorhandenen Symmetrien wird die Porositätswahrscheinlichkeit nur in der dargestellten linken Hälfte der Bauteile abgebildet.

## 8. Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung mit Gewichtungsooperatoren

In der vorstehenden Abbildung 8.9 ist die Wirksamkeit des Gewichtungsooperators  $G_3$  innerhalb des Optimierungsprozesses zu erkennen. Die errechneten Eigenspannungen in den topologieoptimierten Umformwerkzeugen sind umso niedriger, je stärker  $G_3$  gewichtet wird. Die Eigenspannungen des Umformwerkzeugs f) erreichen das Niveau der Eigenspannungen der konventionell verrippten Umformwerkzeuge.

Die vorstehende Abbildung 8.10 zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für Porosität bei konventionell verrippten Bauteilen etwas geringer ist als bei topologieoptimierten Bauteilen. Jedoch liegen die möglichen Positionen dieser Lunker in sämtlichen Fällen im unkritischen Bereich, vgl. Abb. 7.6, S. 92. Daher ist die Bewertung der Umformwerkzeuge a) – f) in Bezug auf Porosität und Lunker identisch gut.

### 8.3.2. Fazit

Die Verwendung des Gewichtungsooperators  $G_3$  in der Topologieoptimierung hat signifikant positive Auswirkungen auf die gießtechnischen Eigenschaften der derart optimierten Umformwerkzeuge. Die gießtechnische Bewertung mechanisch-gießtechnisch optimierter Umformwerkzeuge ist deutlich höher als die gießtechnische Bewertung rein mechanisch optimierter Umformwerkzeuge. Bei hinreichend hoher Gewichtung der Gießtechnik übertrifft diese gießtechnische Bewertung sogar diejenige konventionell verrippter Umformwerkzeuge. Da die Verwendung von  $G_3$  keine negativen Auswirkungen auf die mechanischen Eigenschaften der Umformwerkzeuge hat, sind sowohl die rein mechanisch optimierten, als auch die mechanisch-gießtechnisch optimierten Umformwerkzeuge den konventionell verrippten Umformwerkzeugen in ihren mechanischen Eigenschaften deutlich überlegen.

Durch die Entwicklung des Gewichtungsooperators  $G_3$  ist es wirkungsvoll gelungen, den Gießvorgang in die Topologieoptimierung einzubeziehen.

# A. Notation

Die einzelnen Bezeichnungen sind den Kapiteln zugeordnet, in denen sie zum ersten Mal genannt werden.

## Grundlagen

$\Omega$	Designraum, in der Regel ein offenes, beschränktes Lipschitz-Gebiet des $\mathbb{R}^3$
$\partial_i$	Partielle Ableitung $\partial/\partial x_i$
$D^\alpha$	Partielle Ableitung der Ordnung $\alpha$
$C^k(\Omega)$	Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen der Ordnung $k$
$C_c^k(\Omega)$	Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger
$\mathcal{L}(X, Y)$	Raum aller linearen Operatoren von $X$ nach $Y$
$X^*$	Dualraum von $X$
$\mathcal{B}_d$	Borelsche $\sigma$ -Algebra auf dem $\mathbb{R}^d$
$\mu_d$	Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^d$
$L^p(\Omega)$	Raum der Funktionen auf $\Omega$ , deren $p$ -te Potenz Lebesgue-integrierbar ist
$n$	Äußere Normale
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum von $L^p$ -Funktionen mit $L^p$ -integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung $m$
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum von $L^2$ -Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung $m$
$H_0^m(\Omega)$	Unterraum von $H^m(\Omega)$ der Funktionen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen
$\nabla$	Nabla-Operator
$X \hookrightarrow Y$	$X$ ist stetig in $Y$ eingebettet
$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$	$X$ ist kompakt in $Y$ eingebettet
$x_k \rightharpoonup x$	$x_k$ konvergiert schwach gegen $x$

## Linear elastisches Material unter Einwirkung von Kräften

$\phi$	Deformation
$u$	Verschiebung
$\det$	Determinante
$e$	Symmetrisierte Verzerrung
$f$	Volumenkraft
$g$	Flächenkraft
$\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor
$\operatorname{div}$	Divergenzoperator

## A. Notation

$\mathcal{C}$	Elastizitätstensor
$\lambda, \mu$	Lamé-Konstanten
$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	Poissonzahl
$\Gamma_0$	Mit Dirichlet-Bedingungen versehener Teil des Randes von $\Omega$
$\Gamma_1$	Mit Neumann-Bedingungen versehener Teil des Randes von $\Omega$
$\sigma \cdot e$	$= \text{tr}(\sigma^T e)$
$J$	Variationsfunktional
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform im Variationsproblem
$(\ell, \cdot)$	Lineares Funktional im Variationsproblem
$\mathcal{T}_l$	Zerlegung von $\Omega$

### Topologieoptimierung von linear elastischem Material

$Q$	Raum der relativen Dichteverteilungen
$h$	Relative Dichteverteilung
$V$	Raum der Verschiebungen
$Q_{\text{ad}}$	Raum der zulässigen relativen Dichteverteilungen
$\mathcal{U}_{\text{ad}}$	Raum der zulässigen Paare
$G_1$	Der das SIMP-Modell repräsentierende Gewichtungoperator
$p$	Strafexponent im SIMP-Modell
$\Omega_r$	Menge der Mittelpunkte der Zerlegung von $\Omega$
$g_0$	Zielfunktional
$\Phi_0$	Reduziertes Zielfunktional
$g_1$	Volumen Nebenbedingung
$r_e$	Entformungsrichtung
$m$	Anzahl der Nebenbedingungen
$\mathcal{L}$	Lagrangefunktional
$\Lambda$	Lagrange Multiplikatoren

### Erweiterung des SIMP-Modells der Topologieoptimierung durch Gewichtungoperatoren

$G_2$	Gewichtungoperator zur Erweiterung des SIMP-Modells
$\Delta$	Laplace-Operator
$\Delta_l$	Numerische Approximation des Laplace-Operators

### Algorithmus zur Topologieoptimierung mit Gewichtungoperatoren auf Basis der notwendigen Optimalitätsbedingungen

$Q_l$	Raum der relativen diskretisierten Dichteverteilungen
$\psi_i$	Basisfunktion von $Q_l$
$r$	Dimension von $Q_l$
$Q_{\text{ad},l}$	Raum der diskretisierten zulässigen relativen Dichteverteilungen
$V_l$	Raum der diskretisierten Verschiebungen
$\phi_i$	Basisfunktion von $V_l$

$N$	Maximal mögliche Dimension von $V_l$
$l$	Diskretisierungsfineinheit
$\mathcal{U}_{ad,l}$	Raum der diskretisierten zulässigen Paare

### **Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung unter Verwendung von Gewichtsoperatoren**

$\Omega_{\Xi}$	Der mit einer Hülle der Dicke $r_0 > 0$ ummantelte Designraum $\Omega$
$\Xi$	Raum der zulässigen Temperaturen
$\Xi_l$	Raum der diskretisierten zulässigen Temperaturen
$a_{kv}$	Abkühlverlauf
$d_{av}$	Durchschnittlicher Abkühlverlauf
$z_{av}$	Zentrierter Abkühlverlauf
$G_3$	Gewichtungsoperator zur Einbeziehung des Gießvorgangs in die Topologieoptimierung
$b_{gt}$	Bewertung der Gießtechnik



## B. Literaturverzeichnis

- [Alt06] H.W. ALT: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 5. Auflage, 2006.
- [Bend89] M. BENDSØE: *Optimal shape design as a material distribution problem*. Struct. Optim. 1: 193-202, 1989.
- [Bend95] M. BENDSØE: *Optimization of structural topology, shape and material*. Springer Verlag, 1995.
- [Bend04] M. BENDSØE und O. SIGMUND: *Topology optimization*. Springer Verlag, 2004.
- [Berg99] M. BERGOUNIOUX, K. ITO und K. KUNISCH: *Primal-dual strategy for constrained optimal control problems*. SIAM J. Control Optim. 37(4): 1176-1194, 1999.
- [Berm94] A. BERMAN und R. PLEMMONS: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. SIAM, 1994.
- [Born02] F. BORNEMANN und P. DEUFLHARD : *Numerische Mathematik II. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Walter de Gruyter, 2. Auflage, 2002.
- [Borr01] T. BORRVALL und J. PETERSSON: *Large-scale topology optimization in 3D using parallel computing*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190: 6201-6229, 2001.
- [Bour01] B. BOURDIN: *Filters in topology optimization*. Int. J. Numer. Meth. Engng 50: 2143-2158, 2001.
- [Brae03] D. BRAESS: *Finite Elemente*. Springer Verlag, 3. Auflage, 2003.
- [Ciar78] Ph. CIARLET: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978.
- [Deuf02] P. DEUFLHARD und A. HOHMANN : *Numerische Mathematik I*. Walter de Gruyter, 3. Auflage, 2002.
- [Doeg07] E. DOEGE und B. BEHRENS: *Handbuch Umformtechnik*. Springer Verlag, 2007.
- [Drud09] N. DRUDE et al: *Model based strategies for an optimised ribbing design of large forming tools*. Prod. Eng. Res. Devel. 3:435-440, 2009.
- [Eck08] C. ECK, H. GARCKE und P. KNABNER: *Mathematische Modellierung*. Springer Verlag, 2008.
- [Gros05] C. GROSSMANN und H.-G. ROOS : *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, 3. Auflage, 2005.

## B. Literaturverzeichnis

- [Gurt72] M. GURTIN: *The Linear Theory of Elasticity*. Handbuch der Physik VIa/2. Springer Verlag, 1972.
- [Harz07] L. HARZHEIM: *Strukturoptimierung*. Verlag Harri Deutsch, 2007.
- [Hass98] B. HASSANI und E. HINTON: *A review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria*. Computers and Structures 69: 739-756, 1998.
- [Hass00] S. HASSE: *Giesserei Lexikon*. Schiele & Schön, 18. Auflage, 2000.
- [Hess03] C. HESSEL: *Integration der Topologieoptimierung in den CAD-gestützten Entwicklungsprozess*. Dissertation RWTH Aachen, 2003.
- [Hint03] M. HINTERMÜLLER, K. ITO und K. KUNISCH: *The Primal-Dual Active Set Strategy as a Semismooth Newton Method*. SIAM J. Optim. 13(3): 865-888, 2003.
- [Hinz09] M. HINZE et al: *Optimization with PDE Constraints*. Springer Verlag, 2009.
- [Hoff07] H. HOFFMANN et al: *Untersuchungen über optimale Rippenstrukturen von Umformwerkzeugen mit Hilfe der Gießsimulation*. konstr + giess 32(3):38-39, 2007.
- [John94] N. L. JOHNSON, S. KOTZ und N. BALAKRISHNAN: *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*. John Wiley & Sons, 1994.
- [Katz07] C. KATZENSCHWANZ und C. FRIEDRICH: *Angewandte Strukturoptimierung zur methodischen Leichtbaukonstruktion*. Landshuter Leichtbau Colloquium, 2007.
- [Litv00] W. G. LITVINOV: *Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics of Deformable Bodies and Fluid Mechanics*. Operator Theory Advances and Applications Vol. 119. Birkhäuser, 2000.
- [Mair05] E. DU MAIRE und T. SCHMIDT: *Von der Natur lernen - kraftflussgerechte, neuartige Gestaltung gegossener Komponenten*. Proc. of the 2nd Newcastle-Forum, 2005.
- [Mlej92] H.P. MLEJNEK: *Some aspects of the genesis of structures*. Struct. Optim. 5: 64-69, 1992.
- [Mura77] F. MURAT: *Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients*. Annali di Matematica 4: 49-68, 1977.
- [Niez83] M. NIEZGÓDKA und I. PAWLOW: *A Generalized Stefan Problem in Several Space Variables*. Appl. Math. Optim. 9: 193-224, 1983.
- [Pete98] J. PETERSSON und O. SIGMUND: *Slope constrained topology optimization*. Int. J. Numer. Meth. Engng 41: 1417-1434, 1998.
- [Roub89] T. ROUBÍČEK: *The Stefan problem in heterogeneous media*. Annales de l'I. H. P. (C) 6: 481-501, 1989.



- [Rozv92] G.I.N. ROZVANY, M. ZHOU und T. BIRKER: *Generalized shape optimization without homogenization*. Struct. Optim. 4: 250-252, 1992.
- [Ruzi04] M. RUZICKA: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 2004.
- [Scha99] M. SCHÄFER: *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag, 1999.
- [Schn08] K. SCHNEIDER: *Simulationsgestützte Untersuchung der Werkzeugbelastung beim Tiefziehen höchstfester Stähle*. Dissertation TU München, 2008.
- [Schw08] M. v. SCHWERIN: *Entwicklung einer Methodik zur optimierten Gestaltung von Umformwerkzeugen*. Dissertation TU München, 2008.
- [Sieg01] K. SIEGERT und M. HÄUSSERMANN: *Weiterführende Untersuchungen zur Optimierung der Gestaltung von Umformwerkzeugen*. EFB-Forschungsbericht Nr. 152, EFB e.V. Hannover, 2001.
- [Sigm94] O. SIGMUND: *Design of material structures using topology optimization*. Dissertation TU Dänemark, 1994.
- [Sigm97] O. SIGMUND: *On the design of compliant mechanisms using topology optimization*. Mech. Struct. Mach. 25: 495-526, 1997.
- [Sigm98] O. SIGMUND und J. PETERSSON: *Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima*. Struct. Optim. 16: 68-75, 1998.
- [Sigm01] O. SIGMUND: *A 99 line topology optimization code written in Matlab*. Struct. Multidisc. Optim. 21: 120-127, 2001.
- [Svan87] K. SVANBERG: *The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization*. Int. J. Numer. Meth. Engng 24: 359-373, 1987.
- [Svan95] K. SVANBERG: *A globally convergent version of MMA without linesearch*. Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization: 9-16, 1995.
- [Thie03] J. THIELE: *A Posteriori Finite Element Analysis für die lineare Elastizitätstheorie*. Diplomarbeit TU München, 2003.
- [Tram07] S. TRAMPERT, R. BEYKIRCH und B. LAUBER: *Vorsprung durch Strukturoptimierung bei der Motorenentwicklung*. Automot Eng Partn, Special Issue 74, 2007.
- [Visi96] A. VISINTIN: *Models of Phase Transitions*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 28, Birkhäuser, 1996.
- [Zhou92] M. ZHOU und G.I.N. ROZVANY: *DCOC: an optimality criteria method for large systems. Part I: theory*. Struct. Optim. 5: 12-25, 1992.
- [Zuo07] K.-T. ZUO et al: *Study of key algorithms in topology optimization*. Int. J. Adv. Manuf. Technol 32: 787-796, 2007.