TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik
TUM School of Education

Mathematisches Fachwissen von gymnasialen Mathematiklehrkräften

Eine empirische Analyse des Konstrukts und dessen Korrelation mit Personen- und Unterrichtsvariablen

Stephan J. Kessler

Vollständiger Abdruck der von der TUM School of Education der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie genehmigten Dissertation.

Vorsitzende:
Univ.-Prof. Dr. Claudia Nerdel

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Kristina Reiss
2. Univ.-Prof. Dr. Christina Seidel

Die Dissertation wurde am 02.05.2011
bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät
TUM School of Education am 13.07.2011 angenommen.

Danksagung

Im Entstehungsprozess dieser Arbeit haben mich zahlreiche Personen auf vielfältige Weise unterstützt. Besonders zu Dank verpflichtet bin ich:

Frau Prof. Dr. Kristina Reiss für die Gelegenheit zur Promotion, die freundliche Aufnahme in ihre Arbeitsgruppe, den mir gewährten Einblick in die mathematikdidaktische Forschung und die intensive Betreuung;
Frau Prof. Dr. Tina Seidel für das Interesse an meiner Arbeit und die unterstützenden Gespräche;
den Mitgliedern der Arbeitsgruppen an den Lehrstühlen für Didaktik der Mathematik an der Universität Augsburg, der Ludwig-Maximilians-Universität München und der TUM School of Education, München für ihre wertvollen Hinweise und Anregungen;
allen Schülerinnen und Schülern sowie Lehrerinnen und Lehrern, die an dieser Studie teilgenommen haben, für ihre Kooperation;
meinen Eltern für ihre jahrzehntelange Unterstützung und den mir gewährten Rückhalt;
all meinen Freundinnen und Freunden für ihr Verständnis, dass ich sie im Zuge dieser Arbeit häufig vernachlässigen musste.

Einleitender Überblick

Es herrscht inzwischen weitgehend Konsens darüber, dass das mathematische Fachwissen von Mathematiklehrkräften maßgeblich zu einem erfolgreichen Unterricht beiträgt. Angesichts dieser Bedeutung ist es verwunderlich, wie wenig valide Instrumente für die Messung von mathematischem Fachwissen vorliegen – diese erfolgt in der Forschung oft über Selbsteinschätzungen oder die Anzahl an besuchten Universitätsveranstaltungen. Das direkte Messen über Items, die Fachwissen abfragen, wird hingegen häufig vermieden. Aus diesem Grund sind viele Fragen über den konkreten Inhalt, den Umfang oder auch die Struktur des Fachwissens, über das ein Mathematiklehrender verfügt, nicht gänzlich beantwortet. In der vorliegenden Arbeit sollen neue Erkenntnisse zu diesen Themen gewonnen werden, indem das mathematische Fachwissen von gymnasialen Mathematiklehrkräften theoretisch analysiert, empirisch erhoben und in Korrelation zu Personen- und Unterrichtsvariabeln gesetzt wird.

Zu Beginn steht die Definition eines Wissensbegriffs im Mittelpunkt (Kapitel 1). In Anbetracht der Schwierigkeit einer allgemeingültigen Definition von Wissen wird eine im Rahmen dieser Arbeit sinnvolle Definition erörtert. Nach dieser Festlegung wird ausgeführt, warum dem Wissen eine zentrale Rolle für den Lehrerberuf zukommt (Kapitel 2). Die Expertiseforschung, also der Vergleich von erfahrenen Lehrern mit Anfängern, lässt darauf schließen, dass das Wissen der wesentliche Faktor für die Ausbildung zu Experten ist. Im anschließenden Abschnitt (Kapitel 3) wird das Lehrerwissen genauer analysiert. Diese Analyse beruht auf der Annahme, dass Lehrerwissen aus verschiedenen Anteilen aufgebaut ist: Beispielsweise besteht das Wissen eines Lehrers aus dem Fachwissen in Pädagogik, in Didaktik und dem in seinem Unterrichtsfach. Obschon sich die Isolierung dieser drei Wissensbestandteile nicht immer einfach gestaltet, hat sich diese Aufteilung in der mathematikdidaktischen Forschung durchgesetzt – auch im Studium wird zwischen Pädagogik, inhaltlichem Fachstudium und Didaktik unterschieden. Bis zu diesem Punkt der Arbeit wird das Lehrerfachwissen überwiegend allgemein erörtert. Im folgenden Kapitel werden Erkenntnisse speziell über das mathematische Fachwissen von Lehrkräften behandelt und einige empirische Studien zum Thema näher beleuchtet (Kapitel 4). Dabei wird deutlich: Im deutschsprachigen Raum existieren bislang eher wenige Untersuchungen zum Thema und in der internationalen Forschung führen gegensätzliche Vorstellungen zum Fachwissen – zum Beispiel in der Messung des Mathematikfachwissens – zu sehr unterschiedlichen, vielfach sogar widersprüchlichen Ergebnissen. Es werden die Defizite in der Forschung aufgezeigt und erfolgversprechende Ansätze aufgegriffen, welche als Basis für die folgende Untersuchung dienen. Die Forschungsfragen leiten sich direkt aus diesen Ausführungen ab (Kapitel 5Im Mittelpunkt stehen die Fragen, ob und auf welche Weise das mathematische Fachwissen bei Lehrkräften gemessen werden kann (Kapitel 6) und wie dieses Fachwissen mit anderen Personen- und Unterrichtsvariablen zusammenhängt (Kapitel 7). Zur Messung des Fachwissens wird ein Modell entwickelt, dass das Fachwissen in drei Ebenen aufgliedert, und zwar in Ebene 1: Schulmathematikwissen, Ebene 2: Universitäres Wissen mit Schulbezug und Ebene 3: Universitäres Wissen ohne Schulbezug. Hauptsächlich aufbauend auf den Ebenen 1 und 2 werden zwei Fachwissensauffassungen vertreten: zum einen der klassische Ansatz über fachliche Fragestellungen wie sie an einer Universität gestellt werden könnten, und zum anderen schulkontextnahe Aufgaben, die zur Beantwortung einen höheren mathematischen Hintergrund erfordern. Für beide Tests werden Items entwickelt und ihre Bedeutung für das jeweilige Konstrukt begründet. Da Unterricht noch von sehr viel mehr Faktoren als vom Fachwissen der Lehrkraft abhängt, werden weitere Variablen vorgestellt, die mit dem Fachwissen in Beziehung stehen könnten. Um diese komplexen Zusammenhänge abzubilden, wird als grundlegendes Modell das Prozess-Mediations-Produkt-Modell eingeführt. Ausgewählte Variablen wie beispielsweise die Schülerkompetenz werden definiert und es wird aufgezeigt, wie diese Variablen in das Prozess-Mediations-Produkt-Modell integriert sind und warum sie mit dem Fachwissen in Verbindung stehen könnten. Im anschließenden Teil der Arbeit werden das Design und die Durchführung der Untersuchung erläutert (Kapitel 8). Die Datenerhebung erfolgte im Rahmen eines DFG-Projekts mit 33 beteiligten Lehrkräften und mehr als 1000 Schülerinnen und Schülern. Die Auswertung im nächsten Abschnitt gibt zunächst einen ausführlichen Überblick, wie die Tests von den Lehrkräften bearbeitet wurden und nach welchen Kriterien daraus das mathematische Fachwissen extrahiert wurde (Kapitel 9). Darauf folgt die Untersuchung, ob Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Fachwissen und anderen Unterrichtsvariablen im Prozess-Mediations-Produkt-Modell bestehen. Exemplarisch seien die Korrelationen zwischen Fachwissen und der Schülerkompetenz sowie einer rezeptiven Sichtweise der Lehrkraft genannt. Während keine Korrelation zwischen dem mathematischen Fachwissen einer Lehrkraft und der Schülerkompetenz gefunden werden kann, ergeben sich signifikante negative Korrelationen zwischen dem Fachwissen und einer rezeptiven Sichtweise der Lehrerin oder des Lehrers. Im nächsten Abschnitt werden die im vorangegangenen Kapitel erarbeiteten Ergebnisse wiederholt und in Verbindung zu den Forschungsfragen gebracht (Kapitel 10). Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit interpretiert und ihre Bedeutung für mögliche zukünftige Forschungsvorhaben aufgezeigt (Kapitel 11).

Inhaltsverzeichnis

1 Wissensdefinitionen

Wer nichts weiß, muss alles glauben.

Marie von Ebner-Eschenbach

Im Mittelpunkt der vorliegenden Studie steht die Analyse des mathematischen Fachwissens von Lehrkräften. In diesem ersten Kapitel sollen daher zunächst die Begriffe „Wissen“ und „Fachwissen“ näher beschrieben werden. Es wird sich zeigen, dass die Definition von Wissen zu einem breitgefächerten philosophischen Problem führt, auf dessen Komplexität im Rahmen dieser Arbeit nur ansatzweise eingegangen werden kann. In der Literatur findet sich keine präzise und übergreifend anerkannte Definition von Wissen. Stattdessen stößt man auf zahlreiche, häufig ähnlich klingende Festlegungen, die jeweils abhängig vom Fachgebiet des Definierenden formuliert werden. Während beispielsweise in der Informatik die Vernetzung von Informationen als Wissen bezeichnet wird (North, 2005; Albrecht, 1993), betonen psychologische Definitionen die Rolle des Individuums. Wissen besteht demnach aus dynamischen Strukturen, die die subjektive Bewältigung konkreter Handlungsanforderungen unterstützen (Waibel, 1997). Die verbreitete Auffassung, dass es sich bei Wissen nur um eine Abbildung von Sachverhalten der äußeren Welt im Gedächtnis handle (Klix, 1984; Rubinstein, 1983), wird in der neueren Erkenntnistheorie – insbesondere von Vertretern einer konstruktivistischen Sichtweise – als unhaltbar angesehen (Seel, 1991). Wissen wird heute überwiegend als Prozess gekennzeichnet, der die Aufnahme von Informationen, deren Verarbeitung, Speicherung im Gedächtnis, Wiederauffindung und Nutzung beinhaltet (Aebli, 1980; Lenzen, 1980; Oeser & Seitelberger, 1988). In der vorliegenden Arbeit wird ein eher pragmatischer Standpunkt des Wissensbegriffs herangezogen, der sich in der mathematikdidaktischen Diskussion durchgesetzt hat (Lindgren, 1999). Er ist durch zwei wesentliche Aspekte gekennzeichnet: „Wissen muss, um Wissen zu sein, irgendwie begründet sein“, formuliert An der Heiden (1985). Ansonsten sei das Wissen nur eine Vermutung oder ein Glaube. Und: „Wissen kann man nur, wovon man fest überzeugt ist, was man für wahr hält.“ (Seel, 1991). Diese Ansprüche finden sich bereits in der platonischen Wissensdefinition:

„Wissen ist gerechtfertigter wahrer Glaube (meta logou alêthê doxan)“

(Platon, Theaetetus, 201d-210a)

Unentscheidbare oder falsche Behauptungen, wie etwa dass es endlich viele Primzahlen gibt, stellen demnach kein Wissen dar. Aber auch wahre Aussagen stellen mitunter kein Wissen dar. Wenn beispielsweise ein Lehrer den Satz des Pythagoras ohne Beweis als Fakt vorlegt, dann kann der Schüler diesen Satz nur glauben, aber nicht wirklich wissen, da ihm eine Rechtfertigung dafür fehlt. Wann eine Vermutung als wahr und gerechtfertigt angesehen wird, soll im Folgenden vertieft werden.

Eine These wird in der Mathematik als wahr bezeichnet, wenn sie durch einen Beweis auf bekannte vorgegebene Axiome zurückgeführt werden kann. Damit ist sie zugleich gerechtfertigt. Innerhalb der mathematischen Fach-Community herrscht im Allgemeinen Konsens darüber, wann eine Vermutung als korrekt begründet anzusehen ist (Kuntze, 2006). Was allerdings generell als Rechtfertigung anerkannt wird und was nicht, hängt von der Wissenschaft und innerhalb dieser auch von der jeweiligen Gemeinschaft ab. Beispielsweise kann die statistische Häufigkeit eines Ereignisses ebenso eine äußere Rechtfertigung dafür sein, dass man meint, etwas darüber zu wissen wie – aus der Warte des Schülers – der Rückgriff auf die Autorität des Lehrers (Goldman, 1986). Auch hinsichtlich der Entscheidung, ob eine Vermutung wahr ist oder nicht, gibt es Probleme. In der Mathematik ist seit Gödels „Unvollständigkeitssatz“ bekannt, dass man grundsätzlich nicht von jeder Behauptung den Wahrheitsgehalt ermitteln kann. Und in sozialwissenschaftlich empirischen Untersuchungen bleiben selbst hochsignifikante Ergebnisse stets anzweifelbar.

Trotz dieser Schwierigkeiten konnte sich die platonische Definition in der Mathematikdidaktik weitgehend durchsetzen, da sie für die meisten Wissensinhalte gut anwendbar ist. Sie bildet die Grundlage für eine Einstufung des mathematischen Wissens als etwas Objektives, das immer gültig und daher wahr ist. Aktuelle Forschungen fokussieren darauf, die platonische Definition mit der Mathematikdidaktik in Einklang zu bringen (Rodd, 1997; Gardiner, 1998; Lindgren; 1999).

Häufig ist weniger das Wissen allgemein, sondern vielmehr das Fachwissen einer Person von Interesse. Da mathematisches Wissen als Fachwissen angesehen wird, soll an dieser Stelle eine konkrete Definition von Fachwissen erfolgen. Wissen kann einzelnen Gebieten wie der Pädagogik, der Mathematik usw. zugeordnet werden. Dadurch wird es aber noch nicht zwangsläufig zu Fachwissen. Um als Fachwissen klassifiziert zu werden, darf dieses Wissen nicht zum Alltagswissen gezählt werden, weil es durch diese Zuordnung seine Fachgebundenheit verlieren würde. Unter Alltagswissen subsumiert man das Wissen, über das grundsätzlich jeder Erwachsene verfügen sollte (Baumert, 2006). Beispielsweise gehört das Wort „Multiplikation“ zum Fach Mathematik. Da die Kenntnis darüber zum Alltagswissen gehört, stellt es jedoch kein Fachwissen dar. Wenn eine Person über Fachwissen verfügt, ist damit das fachgebundene Alltagswissen ausgeschlossen. Die Kenntnis des Begriffs „Multiplikation“ allein lässt nicht auf ein ausgeprägtes Fachwissen schließen. Dementsprechend wird Fachwissen in dieser Arbeit folgendermaßen definiert:

Fachwissen ist Wissen, das einem speziellen Gebiet zugeordnet werden kann und nicht zum Alltagswissen gehört.

Folglich versteht man unter mathematischem Fachwissen das Wissen, das der Mathematik zugeordnet wird und nicht zum Alltagswissen gehört.
Nachdem die beiden Begriffe „Wissen“ und „Fachwissen“ nun definiert und beschrieben wurden, sei kurz auf einen grundsätzlichen Aspekt im Sprachgebrauch hingewiesen. In der konstruktivistischen Sichtweise wird Wissen nicht erworben: Wissen wird durch eine Person individuell wahrgenommen, gedeutet und gespeichert. Die Einbettung und das Verständnis hängen von den Voraussetzungen der Person ab. Es können daher lediglich optimale Lernbedingungen geschaffen werden, die die „Wisseneinbettung“ ermöglichen – eine direkte Wissensvermittlung ist dagegen nicht möglich. Wird in dieser Arbeit von Wissenserwerb gesprochen, ist somit stets der oben genannte Aspekt der Wisseneinbettung gemeint.

2 Bedeutung des Wissens für die Expertise

Es ist weitaus besser,
etwas über alles zu wissen,
als alles über eine Sache zu wissen.
Universalität ist am besten.
Blaise Pascal

Das folgende Kapitel soll die Frage klären, welche Bedeutung dem Wissen für die professionelle Ausübung des Lehrerberufes zukommt. Antwort darauf kann die Expertiseforschung geben, die einen weit verbreiteten Forschungszweig der Psychologie darstellt. In der Expertiseforschung wird das Wissen von Expertinnen und Experten dem von Novizen gegenüberstellt und analysiert. Dadurch erhofft man sich unter anderem die entscheidenden Variablen zu identifizieren, die einem Novizen dabei helfen könnten, einen Expertenstatus zu erlangen. Die Lehrerexpertiseforschung hat das Vorgehen auf den Lehrerberuf übertragen und Erkenntnisse über die Struktur des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern ermittelt. Im Folgenden werden einige ausgewählte Studien mit ihren Ergebnissen vorgestellt.

In den meisten Expertiseuntersuchungen wird zunächst geklärt, unter welchen Voraussetzungen eine Person als Expertin oder als Experte in seinem Fach angesehen werden kann. Eine Festlegung findet sich bei Bromme (1992):

Als Expertin oder als Experte wird eine

„…Person bezeichnet, die spezialisiert ist und eine spezielle Aufgabe bewältigt.“

(Bromme, 1992, S.37).

Ein prinzipielles Problem besteht in der Entscheidung, wann eine Aufgabe als bewältigt gilt. Gerade im Bereich des Lehrerberufs ist diese Frage nur schwer zu klären. So kann ein Lernzuwachs bei einzelnen oder bei allen Schülerinnen und Schülern gefordert werden. Weitere mögliche Zielsetzungen wären, dass das Lernen nachhaltig geschehen muss oder die Schülerinnen und Schüler eines Expertenlehrers ihr Abitur besonders erfolgreich meistern sollen. Eine konkretere Definition stammt von Frensch und Sternberg (1989): Expertinnen und Experten müssen durch eine praktische Tätigkeit eine Fertigkeit erworben haben, die es ihnen ermöglicht, in einem bestimmten Aufgabenbereich qualitativ gute Leistungen zu erzielen. Nun könnte man allerdings für die Expertise im Lehrerberuf diskutieren, wann eine Leistung als gut bezeichnet werden kann. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, dass der Expertenstatus einer Lehrerin oder eines Lehrers in Expertisestudien diversen

Auswahlkriterien unterliegt. Im Folgenden werden tabellenartig mehrere Auswahlkriterien aufgestellt (nach Bromme, 1992) und exemplarisch für den Lehrerberuf betrachtet.

Kriterium	Lehrerberuf
Ausbildungsstand	Der Ausbildungsstand von Studierenden ist niedriger als der von Referendarinnen und Referendaren. Deren Ausbildungsstand ist wiederum niedriger als der von angestellten Lehrerinnen und Lehrern. Häufig wird auch die Anzahl der besuchten Kurse an der Universität als Ausbildungsstand festgelegt.
Beruflicher Erfolg	Für die Bestimmung von beruflichem Erfolg werden je nach Studie unterschiedliche Aspekte berücksichtigt. Häufig wird der berufliche Erfolg einer Lehrkraft an dem Leistungszuwachs seiner Schülerinnen und Schüler gemessen.
Beurteilung	Eine Expertin oder ein Experte wird durch die subjektive positive Einschätzung von Kolleginnen und Kollegen, Vorgesetzten oder Schülerinnen und Schülern charakterisiert.
Leistungsmessung	Durch standardisierte Tests werden bestimmte Lehrervariablen gemessen. Positive Ergebnisse legen den Expertenstatus fest.
Dauer der Berufstätigkeit	Als Expertenkriterium dient die Anzahl der Jahre, die der Beruf ausgeübt wird.
Qualität der Berufserfahrung	Nicht nur die Anzahl der Jahre ist entscheidend, sondern auch die Qualität der Berufserfahrung. Dabei spielen die Anzahl der besuchten Weiterbildungen und der Einsatz in der Oberstufe eine gewichtigere Rolle.

Tabelle 2.1: Auswahlkriterien zum Expertenstatus

Oftmals werden in Untersuchungen mehrere dieser Klassifikationen verwendet, um die Expertengruppe zu bestimmen.

Beim weiteren Vorgehen in den Expertenstudien gilt es eines zu beachten: Experten und Novizen können nicht ohne weiteres in zwei Gruppen (Experimental- und Kontrollgruppe) mit einer Unterscheidungsvariablen (Expertenstatus) aufgeteilt und dann auf Unterschiede hin untersucht werden, da die beiden Gruppen keine gleichen Eingangsvoraussetzungen zur Bewältigung der gestellten Aufgabe haben. Somit muss ein gemeinsamer kognitiver Prozess gefunden werden, der isoliert betrachtet werden kann. Als Ergebnis dieser Studien konnte das Wissen als der entscheidende Faktor bestimmt werden, der Expertinnen und Experten von

Novizen unterscheidet (Holoyoak, 1991). Der Expertenstatus basiert folglich weder auf einer vermeintlich höheren Intelligenz der Experten noch auf einem außergewöhnlich guten Gedächtnis. Auch ein besonders rasches Denken oder andere kognitiven Fähigkeiten sind keine Variablen, die einen Expertenstatus ausmachen (Spada, 2006). Der Umfang des Wissens alleine ist allerdings nicht zwingend ausschlaggebend. Es ist auch die bessere Verknüpfung und die Organisation des Wissens: Expertinnen und Experten verwenden sachlich richtige Begriffe und greifen auf abstrakte Lösungsschemata zurück (Bromme, 1992). Anhand von Expertenstudien konnten für den Lehrerberuf viele Erkenntnisse gewonnen werden, von denen einige im Folgenden skizziert sind:

i) Wahrnehmung von Unterricht (Berliner, 1987)

- Expertinnen und Experten nehmen den Unterricht abstrakter wahr und verwenden Konzepte, um Unterrichtssituationen zu beurteilen
- Expertinnen und Experten greifen für eine Klassenbeobachtung weniger auf einzelne Schülerinnen und Schüler zurück, sondern entwickeln ein globales differenzierteres Bild von der Klasse
- Expertinnen und Experten organisieren ihr Wissen in „Schemata" und „Skripts", die hilfreich für die Strukturierung von Unterrichtssituationen sind

ii) Unterrichtsgestaltung (Leinhardt & Greeno, 1986)

- Expertinnen und Experten haben ein situationsabhängiges Repertoire an Zielen für ihren Unterricht
- Expertinnen und Experten haben einen flüssigen flexiblen Unterrichtsablauf

Man geht davon aus, dass die Ergebnisse der Expertiseforschung auf den Lehrerberuf übertragen werden können. Folglich ist es also vor allem das Wissen, das Expertenlehrerinnen und -lehrer von anderen unterscheidet. Daher scheint eine fundierte Auseinandersetzung mit dem Wissen von Lehrkräften sinnvoll. Im nachfolgenden Kapitel sollen deshalb verschiedene Wissensmodelle von Lehrerinnen und Lehrern näher analysiert werden, um Aufschlüsse über die verschiedenen Wissensbestandteile von Lehrkräften zu erhalten.

3 Professionswissen von Lehrkräften

Wissen ohne Ordnung
ist Hausrat auf einem Leiterwagen.
Jakob Lorenz

Im vorangegangenen Kapitel 2 wurde allgemein die Bedeutung von Wissen für den Lehrerberuf herausgestellt. Ungeklärt blieb, welche Wissensarten bei Lehrkräften vorliegen. In diesem Abschnitt sollen daher verschiedene Wissensbereiche identifiziert werden. Im Fokus stehen allerdings nur solche Wissensanteile, die Einfluss auf die Gestaltung von Unterricht haben. Darüber hinausgehende Aspekte wie Beratungswissen, das zur Kommunikation mit Eltern notwendig ist (Bromme, Jucks & Rambow, 2004), sind von der Betrachtung ausgenommen. Bei der Klassifizierung des Professionswissens von Lehrkräften helfen verschiedene Modelle, wobei sich diese zunächst eher allgemein auf Lehrerwissen und weniger speziell auf das Mathematikfachwissen beziehen. Im Folgenden konzentriert sich der Schwerpunkt auf die Analyse des mathematischen Wissens. Als Ergebnis wird angestrebt, das mathematische Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern zu analysieren, um dessen Bedeutung als Bestandteil des Wissens zu verdeutlichen.

3.1 Shulmans Klassifikation

Nach Shulman (1986, 1987) besteht das Lehrerwissen aus einer Kombination dreier Bestandteile: dem Fachwissen in der Disziplin, dem fachdidaktischen Wissen in der Disziplin und dem curricularen Wissen in der Disziplin.

Fachwissen in der Disziplin

Das Fachwissen in der Disziplin meint den wissenschaftlichen Inhalt eines Unterrichtsfachs. Es bezieht sich zum einen auf den Umfang, die Organisation und die Struktur des Wissens, zum anderen auf den Stellenwert der Disziplin und die Bezüge zu anderen Wissenschaften. Shulman betont, dass die Lehrerin oder der Lehrer nicht nur verstehen muss, dass etwas so ist, sondern auch warum es so ist. Ein solches Verständnis betrifft beispielsweise Beweise bezüglich der Winkelsumme im Dreieck oder die Erklärung der Unmöglichkeit einer Quadratur des Kreises. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass viele Studien zum Thema mit dem Begriff „Fachwissen“ das „Fachwissen in der Disziplin“, also das mathematische Fachwissen meinen. Selbstverständlich ist auch das Pädagogikwissen ein Fachwissen und somit sollte, wenn es zu Missverständnissen führen könnte, der Terminus „Mathematisches Fachwissen“ oder „Fachwissen in der Disziplin“ verwendet werden.

Fachdidaktisches Wissen in der Disziplin

Unter fachdidaktischem Wissen versteht Shulman das Wissen, wie die Disziplin für Schülerinnen und Schüler verständlich gemacht werden kann. Hierzu zählen die didaktische Aufbereitung des Fachinhaltes, die adressatengerechte Präsentation von Unterrichtsinhalten, der geschickte Einsatz von Medien, die Reduktion von komplexem Unterrichtsstoff usw.

Curriculares Wissen in der Disziplin

Das „Curriculare Wissen in der Disziplin“ ist das Wissen über die inhaltliche Gestaltung des entsprechenden Schulfachs. Eine Lehrkraft muss die Inhalte, mit denen die Schülerinnen und Schüler in den jeweiligen Jahrgangsstufen konfrontiert werden, sowie mögliche Vertiefungen oder Alternativen kennen. Wie bereits am Namen ersichtlich, ergibt sich dieses Wissen hauptsächlich aus dem Lehrplan.

Als weiteren Wissensbestandteil nennt Shulman das pädagogische Wissen. Dieses bezieht sich nicht auf die Disziplin, sondern ist eine fachunspezifische Komponente des Lehrerwissens. Pädagogisches Wissen beinhaltet Kenntnisse über Klassenführung, Organisation, Management, Umgang mit Konflikten usw. Er führt es jedoch gesondert zu den drei oben genannten Wissensformen auf, da sich diese speziell auf das Unterrichtsfach beziehen.

Shulmans Kategorisierung hat sich für die Unterrichtsforschung der 1980er Jahre als sehr fruchtbar erwiesen. Insbesondere das fachdidaktische Wissen gewann als eigener Wissensbestand einer Lehrkraft an Bedeutung. Viele empirische Studien zum Lehrerwissen bauen auf Shulmans Modell auf und fügen ihm weitere Wissensanteile wie beispielsweise Rahmenübersetzungswissen und Transformationswissen hinzu (Helsper, 2002). Shulman selbst ergänzte sein Modell um Wissensanteile wie Wissen über Lernende und Lernen, Wissen über andere Fächer, sowie Wissen über Zielsetzungen (Wilson, Shulman & Richert, 1987).

3.2 Brommes Klassifikation

Brommes Klassifikation (Bromme, 1992) baut auf Shulmans Modell auf. Sie orientiert sich allerdings weniger an den empirisch vorgefundenen Wissensbeständen von Lehrkräften, sondern stärker an der Analyse von Anforderungen für den Lehrberuf. Daraus leitet Bromme eine „Topologie des professionellen Wissens“ ab, die fünf Wissensbereiche umfasst. Da er diese auch speziell für das Fach Mathematik nennt, seien beide Benennungen aufgeführt:

Allgemein für jedes Schulfach	Speziell für Mathematik
Fachliches Wissen in der Disziplin	Fachliches Wissen über Mathematik als Disziplin
Wissen über das Schulfach	Schulmathematisches Wissen
Philosophie des Schulfaches	Philosophie der Schulmathematik
Pädagogisches Wissen	Pädagogisches Wissen
Fachspezifisches-pädagogisches Wissen (Fachdidaktisches Wissen)	Fachspezifisches-pädagogisches Wissen (Mathematikdidaktisches Wissen)

Tabelle 3.1: Klassifikation von Lehrerwissen nach Bromme

Parallelen finden sich bei dem „Fachspezifisch-pädagogischen Wissen“, welches mit dem „Fachdidaktischen Wissen in der Disziplin“ bei Shulman gleichgesetzt werden kann. Analog entsprechen sich die Vorstellungen zum „Pädagogischem Wissen“.
Auffällig ist die Ergänzung um das Konzept der „Philosophie der Schulmathematik“. Bromme versteht darunter:

„... die Auffassungen darüber, wofür der Fachinhalt nützlich ist und in welcher Beziehung die Mathematik zu anderen Bereichen menschlichen Lebens und Wissens steht. Die Philosophie des Schulfaches ist auch impliziter Unterrichtsinhalt. Schüler lernen z.B., ob der Lehrer der Auffassung anhängt, das Wesentliche an der Mathematik sei das Operieren mit einer klaren, vorab definierten Sprache, ohne dass es auf den referentiellen Bezug der verwendeten Zeichen ankäme, oder ob eher die Auffassung vorherrscht, Mathematik sei ein Werkzeug zur Beschreibung einer, wie auch immer verstandenen, Wirklichkeit.“ (Bromme, 1992, S.97)

Bromme stellt somit fest, dass der Unterricht auch von den Einstellungen zum Fach und den damit verbundenen Zielen der Lehrkräfte geprägt ist. Die Bedeutung dieser Variablen wurde

bereits von Shulman und Kollegen (Shulman, Grossman & Wilson, 1989) erkannt, sie zählten diese allerdings zum „Fachwissen in der Disziplin“ und kreierten keine eigene Kategorie.
Interessant ist bei Bromme die deutliche Differenzierung zwischen dem „Wissen der Fachdisziplin“ und dem „Wissen des Schulfaches“. Er postuliert damit, dass die Schulmathematik und die Wissenschaftsdisziplin zwei substanziell zu unterscheidende Gebiete darstellen. Das „Fachwissen über Mathematik als Disziplin“ beschreibt er mit folgendem Satz:

“Der Lehrer lernt es in seinem Fachstudium, und es umfasst u.a. mathematische Aussagen, Regeln und mathematische Denkweisen und Techniken.“ (Bromme, 1992, S.96)

Dadurch setzt Bromme das „Fachwissen über Mathematik als Disziplin“ mit dem „Universitätswissen“ gleich, welches als das Wissen verstanden wird, das typischerweise im Mathematikstudium an der Universität gelehrt wird (Brunner et al., 2006). Unter „Schulmathematikwissen“ wiederum versteht er nicht nur einfach die Wissenschaftsdisziplin auf schülerverständlichem Niveau, sondern einen eigenen Kanon von Wissen. Bromme argumentiert, dass die Bedeutung der unterrichteten Begriffe nicht alleine aus der Logik der wissenschaftlichen Fachdisziplin zu erklären sei, sondern auch einfließende Zielvorstellungen über Schule enthalte. Ob sich das Schulmathematikwissen strukturell allerdings so gut vom universitären Wissen trennen lässt wie Bromme es annimmt, oder ob es nicht doch Teil des Universitätswissen ist, ist nicht eindeutig geklärt (Brunner et al., 2006).

3.3 Baumerts Klassifikation

Im Rahmen der COACTIV-Studie greifen Baumert und seine Kolleginnen und Kollegen auf die Modelle von Shulman und Bromme zurück und unterscheiden prinzipiell zwischen Fachwissen (in der Disziplin), fachdidaktischem Wissen und pädagogischem Wissen (Brunner et al., 2006). Bei der Konzeption des fachdidaktischen Wissens werden in Analogie zu Shulman die beiden Wissensinhalte „Wissen über Verständlichmachen von Inhalten“ und „Wissen über mathematikbezogene Schülerkognition“ integriert. Ergänzt wird dieses Konstrukt um „Wissen über das kognitive Potential von Aufgaben“, welches von Shulman zwar als Prämisse genannt, aber nicht ausdifferenziert wurde (Krauss et al., 2008). Pädagogisches Wissen wird in der COACTIV-Studie prinzipiell wie bei Shulman und Bromme verstanden. Das mathematische Fachwissen wird dagegen als vertieftes Hintergrundwissen über Inhalte des mathematischen Schulcurriculums in Mathematik konzeptionalisiert (Brunner et al., 2006). Inhaltlich deckt es jenen Stoff ab, der zwischen der Oberstufenmathematik und dem Mathematikstudium steht (Krauss et al., 2005). Die von Bromme durchgeführte Trennung von Universitäts- und Schulmathematikwissen wird daher aufgehoben und beides dem mathematischen Fachwissen einer Lehrkraft zugeordnet. Insgesamt werden vier Wissensbereiche unterschieden:

Ebene 1: Mathematisches Alltagswissen
Ebene 2: Schulwissen, das in der Schule gelehrt wird
Ebene 3: Profundes Verständnis der unterrichteten Schulmathematik
Ebene 4: Akademisches Forschungswissen, das an Universitäten gelehrt wird
(Baumert, 2006)

Untersucht wurde in der COACTIV-Studie das Wissen der Ebene 3. Baumert schließt sich hier den Ausführungen Shulmans an, der das Fachwissen in der Disziplin als fundiertes Fachwissen auf einem höheren vertieften Standpunkt definiert.
Ergebnisse der COACTIV-Studie werden in Kapitel 4 thematisiert.

3.4 Balls Klassifikation

An der Universität von Michigan in Ann Arbor untersucht seit den 1990er Jahren eine Forschergruppe unter der Leitung von Deborah Ball, Heather Hill und Stephen Schilling das Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In ihren Arbeiten subsumieren sie Fachwissen der Disziplin und das fachdidaktisches Wissen unter „mathematical knowledge for teaching" und grenzen dieses vom pädagogischen Wissen ab (Hill, Ball & Schilling, 2008). Abbildung 3.2 veranschaulicht die Facetten ihres Wissenskonzeptes:

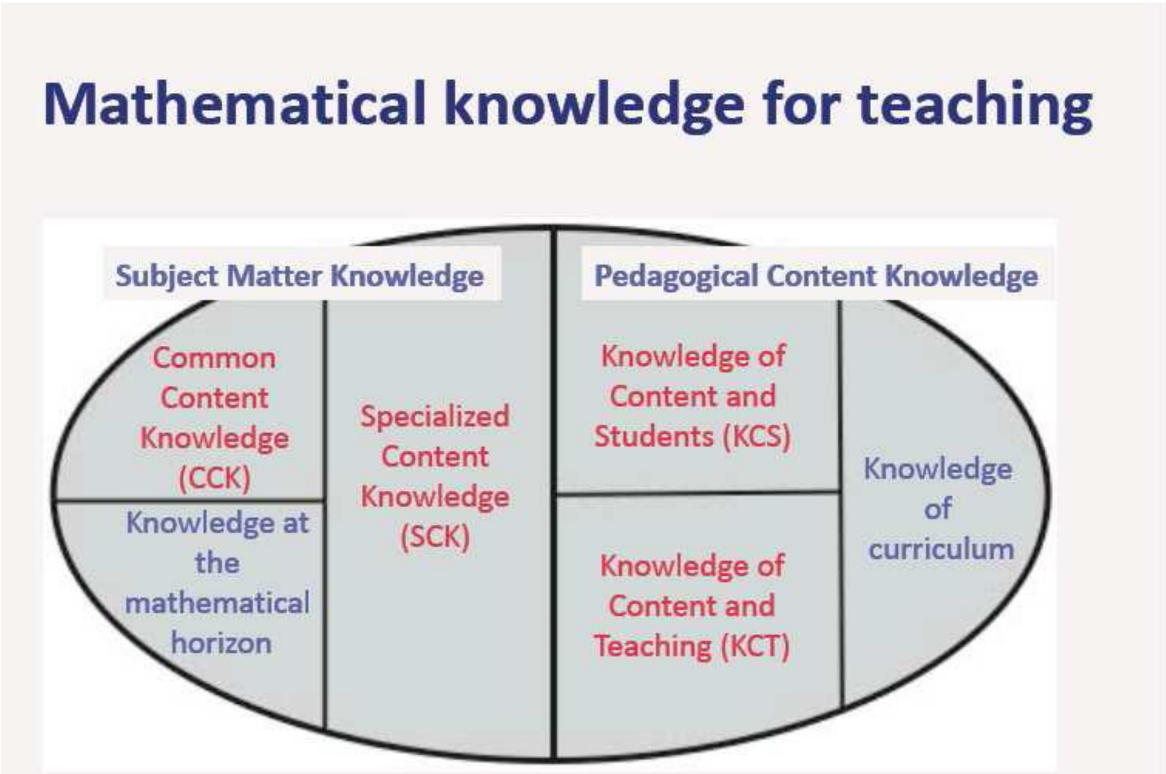


Abbildung 3.2: Konzept des „mathematical knowledge for teaching" (aus Ball, 2008)

Dem mathematischen Fachwissen werden drei Unterkategorien zugeordnet:

- Herkömmliches Fachwissen (CCK), das zum Lösen von mathematischen Problemen benötigt wird und von jeder guten Mathematikerin bzw. gutem Mathematiker beherrscht werden sollte.
- Spezielles Fachwissen (SCK), über das ausschließlich Lehrerinnen und Lehrer zum erfolgreichen Unterrichten verfügen müssen (Ball, Thames & Phelps, 2008).
- „Knowledge at the mathematical horizon" – darunter wird das Wissen verstanden, wie die mathematischen Gebiete miteinander verknüpft sind. Es ermöglicht Lehrkräften eine gehobene Perspektive auf mathematische Inhalte und muss in dieser Form nicht den Schülerinnen und Schülern gelehrt werden.

Das fachdidaktische Wissen lehnt sich eng an den Vorstellungen von Shulman an. Wie beim Fachwissen über die Disziplin werden auch hier drei Unterkategorien unterschieden:
- Wissen über das Fach und die Schülerin oder den Schüler (KCS), wozu etwa das Wissen über Schülerkognitionen und die Interpretation von Schülerbeiträgen zählen.
- Wissen über das Fach und das Lehren (KCT) – damit ist Wissen über die Sequenzierung des Unterrichts, über die Einschätzung von Lernmaterial und über instruktionale Entscheidungen, sprich wann und wie etwas an einer Stelle im Unterricht thematisiert wird, gemeint.
- Unter curricularem Wissen wird ähnlich wie bei Shulman das Wissen über die Unterrichtsinhalte verstanden.

Ball, Bass, Sleep und Thames (2005) veranschaulichen ihr Konzept an einem Beispiel:

„To illustrate these four domains, consider the difference between calculating the answer to a multi-digit multiplication problem (CCK); analyzing calculation errors for the problem (SCK); identifying student thinking that is likely to have produced such errors (KSC); and recognizing which manipulatives would best highlight place-value features of the algorithm (KTC). These last two domains, KSC and KTC, are closest to what is often meant by "pedagogical content knowledge" — the unique blend of knowledge of mathematics and its pedagogy." (S.4f)

Die Michigangruppe entwickelte das Konstrukt „Mathematical knowledge for teaching" ursprünglich für die Primarstufe – inzwischen ist es jedoch auch auf die Sekundarstufe angewendet worden (Hill, 2007). Im Unterschied zu Shulman, Bromme und Baumert wird das mathematische Fachwissen in ihrem Modell nicht über das universitäre Wissen operationalisiert, sondern als ein eigener Wissensbereich, der dem Unterricht und dem Berufsfeld der Lehrkraft nahe steht, angesehen.

Weitere Ausführungen und Ergebnisse von empirischen Überprüfungen dieses Wissenskonzepts finden sich in Kapitel 4.

3.5 Zusammenfassung, Festlegungen und Forschungsdefizite

In diesem Kapitel sind verschiedene Konzepte des mathematischen Fachwissens beschrieben worden. Shulman grenzt anhand der Analyse des Wissens von Lehrkräften das mathematische Fachwissen und das fachdidaktische Wissen voneinander ab. Bromme orientiert sich an den Anforderungen für den Unterricht und schlägt eine Trennung des mathematischen Fachwissens in Wissen über die Schulmathematik und die Wissenschaftsdisziplin vor. Schulmathematikwissen lernen Lehrkräfte hauptsächlich in ihrer eigenen Schulzeit und im Referendariat, während sie das universitäre Wissen in ihrem Fachstudium erlernen. Diese Unterscheidung erscheint im Kontext dieser Arbeit sinnvoll, weswegen sich dieser Differenzierung angeschlossen wird. Bei der Festlegung, was zur Schulmathematik und was zum universitären Wissen zählt, wird ein eher pragmatischer Standpunkt eingenommen:

Schulmathematikwissen ist jenes Wissen, das laut Lehrplan an der Schule unterrichtet wird. Universitäres Wissen ist das Wissen, das typischerweise im Mathematikstudium an der Universität gelehrt wird. Bei Überschneidungen von Schulmathematikwissen und universitärem Wissen wird das Wissen dem Schulmathematikwissen zugeordnet.

Diese Arbeit unterscheidet somit zwischen Schulmathematikwissen und universitärem Wissen als den beiden zentralen Bestandteilen des mathematischen Fachwissens einer Lehrerin oder eines Lehrers. Anzumerken ist, dass Bromme sich zwar an den beruflichen Anforderungen einer Lehrkraft orientiert, beim mathematischen Fachwissen jedoch nicht thematisiert, welches universitäre Wissen konkret für den Lehrerberuf notwendig ist. Baumert differenziert das mathematische Wissen durch die Angabe von vier Ebenen zwar etwas genauer, die Bedeutung der Ebene 4 „Universitäres Wissen" wird aber genauso offen gelassen.

Ball nähert sich dem Wissen auf eine andere Art, weshalb in ihrem Konzept des „mathematical knowledge for teaching" kein universitäres Wissen per se vorkommt. Sie analysiert stattdessen die mathematischen Wissensinhalte, die für das Unterrichten notwendig sind und leitet daraus zwei Wissensbereiche ab: zum einen das mathematische Wissen, über das jeder verfügen sollte. Zum anderen das mathematische Wissen, das speziell eine Lehrkraft parat haben sollte. In Kapitel 6 werden die Überlegungen von Ball aufgegriffen und auf das deutsche Gymnasialsystem übertragen.

4 Empirische Wissensforschung in der Mathematikdidaktik

Der Fortschritt lebt vom Austausch des Wissens.

Albert Einstein

In diesem Kapitel werden verschiedene empirische Studien zum „Mathematischen Fachwissen“ von Lehrkräften vorgestellt. In den ersten beiden Kapitelpunkten wird die Wirkung des Fachwissens von Lehrerinnen und Lehrern betrachtet, zum einen auf den Unterricht (Kapitel 4.1) und zum anderen auf die Schülerleistung (Kapitel 4.2). Drei Arbeiten heben sich durch ihre Vorgehensweise und ihre Resultate besonders hervor, weswegen sie in jeweils eigenen Abschnitten vorgestellt werden: Untersuchungen einer Forschergruppe aus Michigan, USA (Kapitel 4.3), die COACTIV-Studie (Kapitel 4.4) und die TEDS-M-Studie (Kapitel 4.5). Abschließend erfolgt die Zusammenfassung der einzelnen Punkte sowie eine kritische Reflexion des Forschungsstandes (Kapitel 4.6).

4.1 Wirkung von mathematischem Fachwissen der Lehrkraft auf den Unterricht

Die Lehrkraft gestaltet den Unterricht hinsichtlich der Struktur des Ablaufes, der Aufgabenauswahl und der methodischen Ausrichtung - um nur einige Aspekte zu nennen. Lehrervariablen wie persönliche Auffassungen, die Motivation oder eben auch das Fachwissen können sich daher bedeutsam auf die Unterrichtsgestaltung auswirken. Im Folgenden werden einige Studien zur Wirkung des Fachwissens auf den Unterricht vorgestellt, wobei sich die Darstellung an der Arbeit von Bromme (1992, S.92-95) orientiert. In der Konsequenz sind die erörterten Untersuchungen zwar nicht unbedingt zeitgemäß, zeigen aber die wesentlichen Auswirkungen von Fachwissenslücken auf den Unterricht.

In der Studie von Stein, Baxter & Leinhardt (1990) wurde ein erfahrener Mathematiklehrer einer 5. Klasse ausführlich zu seinen mathematischen Kenntnissen befragt. Es stellte sich heraus, dass sein Funktionsverständnis eingeschränkt war: Eine Funktion war für ihn eine Rechenvorschrift, mit der aus einer Zahl eine andere erhalten werden kann. Mittels Videoaufzeichnungen von Unterrichtsstunden zur Einführung von Funktionen wurden die Folgen dieses fehlenden Fachwissens analysiert – der Lehrer beschränkte sich auf spezielle Fälle, ließ Lehrgelegenheiten ungenutzt und behinderte so die Vorbereitung eines adäquaten Begriffsverständnisses.

Carlsen (1987) befragte vier Lehramtsanwärter einer Public High School zu ihren fachlichen Kenntnissen in den Naturwissenschaften. Anhand von Unterrichtsbeobachtungen und Transkripten in den Klassen 9 bis 12 wurde zudem die Fragetechnik der angehenden Lehrer untersucht. Bei Themen, in denen sich die Lehramtsanwärter weniger gut auskannten, stellten sie häufiger direkte Fragen, die einfache Inhalte („low cognitive level“) betrafen. In Unterrichtseinheiten, in denen die Lehramtsanwärter die Inhalte sicherer beherrschten, waren ihre Fragen offener, die Redezeit der Schülerinnen und Schüler deutlich höher und ihre Beiträge gehaltvoller.

Leinhard und Smith (1985) untersuchten in einer Expertenstudie vier Lehrkräfte, deren Klassen in einem fünfjährigen Zeitraum konstant außergewöhnlich gute Lernerfolge in Mathematik vorweisen konnten. Ihr Unterricht wurde daher als gut erachtet und sie als Expertinnen und Experten bezeichnet. Sie befragten diese Lehrerinnen und Lehrer nach ihrem Wissen über Brüche und die Division von Brüchen und ließen sie semantische Netze anfertigen, um die Beziehungen zwischen den Begriffen zu explizieren. Während zwei der vier Experten relativ hohes mathematisches Fachwissen hatten und das Fachwissen eines weiteren Experten im mittleren Bereich lag, fiel eine Lehrerin auf, die mit erheblichen fachlichen Mängeln zu kämpfen hatte. Zum Beispiel konnte sie nicht sagen, ob $\frac{3}{7}$ und $\frac{243}{567}$ äquivalent sind, obwohl sie den gemeinsamen Faktor 81 in 243 und 567 erkennen konnte. Im Unterricht beschränkte sie sich daher eher auf algorithmische Aspekte. Da sie aber zur Expertengruppe gehörte, deuten Leinhard und Smith dies als Indiz, dass Fachwissenslücken in bestimmten Grenzen kompensiert werden können.

Umgekehrt ist jedoch auch das Vorhandensein von mathematischem Fachwissen kein hinreichendes Kriterium für gelingenden Unterricht. In einer weiteren Studie (Eisenhart et al., 1993) konnte beispielsweise eine Mathematiklehrerin mit hinreichendem konzeptionellem Wissen bezüglich der Division von Brüchen ihren Schülerinnen und Schülern keine angemessene mathematische Repräsentation dieses Problems liefern.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass sich Kenntnismängel im Fachwissen im Unterricht ausdrücken können, aber nicht unbedingt müssen, und selbst ausreichendes Fachwissen nicht notwendigerweise einen erfolgreichen Unterricht bedingt.

4.2 Wirkung von mathematischem Fachwissen der Lehrkraft auf Schülerinnen und Schüler

Die Messung des Unterrichtserfolgs anhand des Lernzuwachses der Schülerinnen und Schüler ist ein plausibles Vorgehen, das in einigen Studien der Mathematikdidaktik verwendet wird. Auch aus bildungspolitischen Gründen interessiert häufig, ob hohes mathematisches Fachwissen der Lehrerin oder des Lehrers zu einem hohen mathematischen Fachwissen der Schülerinnen und Schüler führt. Viele Studien untersuchen daher den korrelativen Zusammenhang zwischen dem Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerleistung. Im folgenden Abschnitt wird eine Auswahl dieser Untersuchungen vorgestellt.

Begle (1972) untersuchte an einer High School den Zusammenhang zwischen dem algebraischen Fachwissen von Lehrkräften (n = 308) und der Leistung ihrer Schülerinnen und Schüler der 9. Klasse hinsichtlich algebraischer Aufgaben. Er konstruierte zur Messung des mathematischen Fachwissens der teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer mehrere Testhefte mit zwei unterschiedlichen thematischen Inhalten: dem Aufbau des Zahlensystems und dem Themengebiet Gruppen, Ringe und Körper. Begle vermutete, dass das Wissen über die reellen Zahlen, welches eng mit dem Curriculum der neunten Klasse verknüpft ist, stärker mit dem Wissen der Schülerinnen und Schüler korrelieren würde als das abstraktere Wissen über höhere Algebra. Es zeigten sich jedoch keinerlei signifikanten Korrelationen dieser beiden Wissenskonstrukte mit den Schülerleistungen. Daraus schloss Begle, dass ein relativ niedriger Wissensstand ausreiche, um Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe zu unterrichten. Aufgrund der hohen Ausfallquote (von ursprünglich 492 teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern gingen nur 308 in die finale Auswertung mit ein) wiederholte Eisenberg (1977) die Studie unter gleichen Bedingungen mit 28 Lehrkräften und konnte die Ergebnisse von Begle reproduzieren.

In den USA wurden in den 90er Jahren schulübergreifend die sog. SASS („Schools and Staffing Surveys") durchgeführt, bei denen Daten von über 52.000 Lehrkräften erhoben wurden. Darling-Hammond (1999) analysierte diese Daten, die viele Lehrer- und Schülervariablen berücksichtigen – darunter auch die Schülerleistung und die Lehrerqualifikation. Sie zeigte auf, dass die fachliche Qualifikation der Lehrerin oder des Lehrers, gemessen daran, ob die Lehrkraft Mathematik als Haupt- oder Nebenfach unterrichtete, 20% der Varianz der Schülerleistung in dem fachlichen Test erklären konnte.

Ahn und Choi (2004) stellten fest, dass die Zusammenhänge zwischen Lehrerfachwissen und Schülerleistung empirisch inkonsistent sind, verweisen aber darauf, dass viele Variablen dafür

verantwortlich sein können. Mithilfe einer Metaanalyse von 41 Studien über den Zusammenhang von mathematischem Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerleistung unteruchten sie, weshalb der Zusammenhang keine eindeutige Richtung zeigt. Als Hauptursache identifizierten die Autoren die grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen der Studien: Die Studien unterscheiden sich in der Definition von Fachwissen (schulnahes Wissen, universitäres Wissen oder ein eigenständiges Konstrukt), in der Art, wie das Fachwissen gemessen wird (Leistungstest, Interview oder die Güte der Ausbildung der Lehrkraft) und in der untersuchten Jahrgangsstufe (Primarstufe, Mittelstufe oder Oberstufe). Weiterhin nutzen die einbezogenen Studien unterschiedliche Auswertungsmethoden (qualitativ oder quantitativ; HLM, Korrelation, T-Test oder Regression) und Maßstäbe bezüglich der Stichprobenauswahl der Lehrerinnen und Lehrer (zufällig, freiwillig, Experten).
Tabelle 4.2 zeigt die Zusammenstellung einiger Studien. In der Metastudie kontrollierten die Autoren diese Faktoren und kommen dabei zu folgenden Ergebnissen:

1) Die oben genannten Variablen reichen nicht aus, um die Unterschiede der Korrelationen zwischen dem Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerleistung zu erklären.
2) Durchschnittlich korreliert das mathematische Fachwissen mit der Schülerleistung sehr schwach, aber dennoch positiv und signifikant mit $r = ,06$.
3) Das mathematische Fachwissen korreliert kaum mehr ($r = ,02$), wenn das Fachwissen über den Ausbildungsabschluss gemessen wurde, während es mit $r = ,11$ korreliert, wenn es durch einen Fachwissenstest ermittelt wurde.
4) In den Klassenstufen 1 bis 6 korreliert das Fachwissen geringer mit der Schülerleistung ($r = ,05$) als in den höheren Klassenstufen ($r = ,07$).

Wie anhand dieser Korrelationskoeffizienten ersichtlich wird, hat das Fachwissen der Lehrkräfte kontrolliert über die genannten Variablen keine bedeutende Wirkung auf die Schülerleistung. Insgesamt schließen Ahn und Choi daraus, dass noch weitere Variablen zur Varianzaufklärung existieren. In dieser Richtung sehen sie weiteren Forschungsbedarf.

Studie	**Jahr**	**N**	**Gebiet**	**Klassenstufe**	**Fachwissen**	**r**
Bachmann	1968	210	Algebra	7	Ausbildung	-0.04
Bassham	1962	648	Allgemein	6	Test	0.27
Brown	1988	200	Allgemein	1-6	Ausbildung	-0.35
Caezza	1969	483	Allgemein	6	Test	0
Chiang	1996	5381	Allgemein	8	Ausbildung	0.03
Dick	1990	646	Algebra	1-6	Test	-0.01
Hawk et al.	1985	569	Arithmetik	6-12	Ausbildung	0.18
Koch	1972	52	Algebra	6	Test	0.02
Kim	1992	3551	Allgemein	8	Ausbildung	0.14
Lampela	1966	140	Algebra	4-6	Test	0.1
Moody	1968	26	Geometrie	5	Ausbildung	0.64
Moore	1965	245	Algebra	6	Test	-0.19
Peskin	1964	54	Algebra	7	Test	0.34
Prekeges	1973	1722	Algebra	4,5,6	Ausbildung	-0.05
Reed	1986	60	Allgemein	8	Ausbildung	0.15
Rouse	1967	128	Algebra	6	Ausbildung	-0.08
Smith	1964	54	Arithmetik	8	Ausbildung	0.1
Soeteber	1969	34	Arithmetik	9-12	Ausbildung	0.06
Turgoose	1996	160	Allgemein	6	Test	0.24

Tabelle 4.2: Studien zum Zusammenhang zwischen Fachwissen und Schülerleistung nach Ahn und Choi (2004)

Spalte Studie: Name des Verfassers der Studie

Spalte Jahr: Publikationsjahr der Studie

Spalte N: Anzahl der Lehrerinnen und Lehrer in der Stichprobe

Spalte Gebiet: Stoff des untersuchten Wissens

Spalte Klassenstufe: Klassenstufe der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler

Spalte Fachwissen: Ausbildung (Fachwissen wurde indirekt über die Ausbildung gemessen)
Test (Fachwissen wurde über einen Test gemessen)

Spalte r: Korrelationskoeffizient

4.3 Studie der Michigan-Forschungsgruppe

Wie in Kapitel 3.4 bereits beschrieben, beschäftigt sich eine Forschergruppe um Deborah Ball mit dem Professionswissen von Lehrkräften. Ihr Konzept von mathematischem Fachwissen soll an dieser Stelle anhand von veranschaulichenden Beispielitems nochmals aufgezeigt werden. In ihren Arbeiten haben Ball und ihr Team ein theoretisches Konstrukt des Mathematikfachwissens von Primarstufenlehrerinnen und -lehrern entwickelt, das herkömmliches Fachwissen („common knowledge of content" CCK) und spezielles Fachwissen („specialized knowledge of content" SCK) vereint. CCK bezieht sich dabei auf Wissen, das jeder Erwachsene in Mathematik haben sollte - beispielsweise, welche Zahl in der Mitte zwischen 1,1 und 1,11 liegt. SCK hingegen ist Mathematikwissen, das speziell nur Lehrerinnen und Lehrer zum Unterrichten benötigen. Dazu gehört, dass man mehrere Darstellungen des Bruches ¼ kennt oder mehrere Möglichkeiten beherrscht, wie man das Ergebnis des Produkts aus 35 und 25 berechnen kann. Diese beiden Wissensarten zusammen mit dem fachdidaktischen Wissen verknüpfen sie zu dem Konstrukt „mathematical knowledge for teaching" und spezifizieren es als das Mathematikwissen, das Lehrerinnen und Lehrer für einen erfolgreichen Unterricht benötigen. Aufgrund dessen sind die Items stets in einen Kontext zum Unterricht oder der Unterrichtsplanung eingebunden und umfassen auch Aufgaben zur Diagnostik. Im Folgenden werden zwei der 30 Items (Hill, Schilling & Ball, 2004; Ball, Hill & Bass, 2005) wiedergegeben, die dem CCK zugeordnet sind:

> Item 1: Mr. Allen found himself a bit confused one morning as he prepared to teach. Realizing that ten to the second power equals one hundred ($10^2 = 100$), he puzzles about what power of 10 equals 1. He asked Ms. Berry, next door. What should she tell him? (Mark (X) ONE answer.)
>
> a) 0
> b) 1
> c) Ten cannot be raised to any power such that ten to that power equals 1.
> d) -1

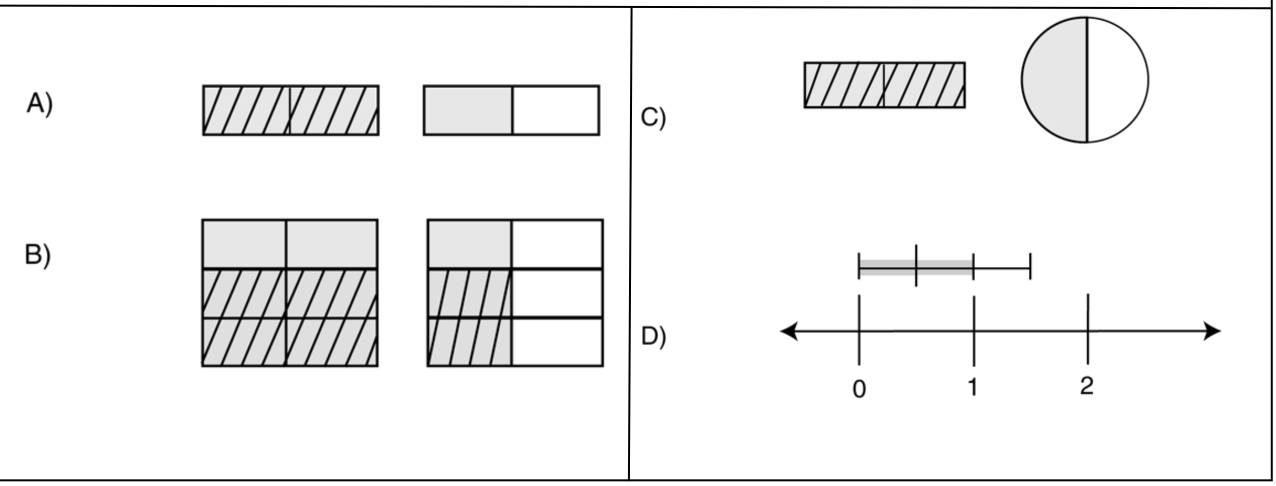
> Item 2: Ms. Dominguez was working with a new textbook and she noticed that it gave more attention to the number 0 than her old book. She came across a page that asked students to determine if a few statements about 0 were true or false. Intrigued, she showed them to her sister who is also a teacher, and asked her what she thought. Which statement(s) should the sisters select as being true?
> (Mark YES, NO, or I'M NOT SURE for each item below.)
> a) 0 is an even number.
> b) 0 is not really a number. It is a placeholder in writing big numbers.
> c) The number 8 can be written as 008.

Im Vergleich dazu ein Beispielitem zum SCK (aus Ball & Hill, 2008):

Item 3: At a professional development workshop, teachers were learning about different ways to represent multiplication of fractions problems. The leader also helped them to become aware of examples that do not represent multiplication of fractions appropriately.

Which model below cannot be used to show that $1\frac{1}{2}\, x\, \frac{2}{3} = 1$?

(Mark ONE answer.)



Bei den Items 1 und 2 werden mathematische Wissensinhalte abgefragt, die prinzipiell jeder Erwachsene beherrschen sollte. Item 3 veranschaulicht Wissen, das speziell Lehrerinnen und Lehrer beherrschen müssen. Für Erwachsene, die keinen mathematischen Lehrberuf ausüben, genügt es, das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe zu berechnen. Die Autoren betonen, dass ein Mathematiklehrender mehr wissen muss, und dass dieses Wissen mathematischer Art ist:

„Unlike the composite known as „pedagogical content knowledge“, SCK is mathematical knowledge, not knowledge intertwined with knowledge of students and pedagogy. It is knowledge of <u>*mathematics*</u> *needed specifically for the work of teaching.“*

(Ball, Bass, Sleep & Thames, 2005, S.3)

In einer Studie (Hill, Rowan & Ball, 2005) mit ca. 700 Primarstufenlehrerinnen und -lehrern und knapp 3000 Schülerinnen und Schüler bestätigen die Autoren ihr Modell empirisch und zeigen, dass „mathematical knowledge for teaching“ als Prädiktor für den Zuwachs in den Mathematikleistungen der Schülerinnen und Schülern angesehen werden kann.

4.4 Die COACTIV-Studie

Die COACTIV-Studie (Cognitive Activation in the Classroom: The Orchestration of Learning Opportunities for the Enhancement of Insightful Learning in Mathematics) ist eine Untersuchung über die Spezifizierung und Erfassung des Professionswissens von deutschen Mathematikehrkräften aller Schulformen und dessen Zusammenhang zu Unterrichtsaspekten und zur Schülerleistung (u.a. Baumert et al., 2010; Krauss et al., 2008; Baumert, 2006; Kunter et al., 2006; Brunner et al., 2006; Krauss et al., 2004). Im Folgenden wird sich hauptsächlich auf Ausführungen zum mathematischen Fachwissen beschränkt.

Eingebettet ist die COACTIV-Studie in die PISA-Längsschnittkomponente 2003-2004, in der ein breites Spektrum von Schüler- und Lehrerdaten erhoben wurde (vgl. Abbildung 4.4). Ihr Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung von Lehrermerkmalen wie Professionswissen, Überzeugungen und Motivation sowie deren Wirkung auf den Unterricht und Schülermerkmale.

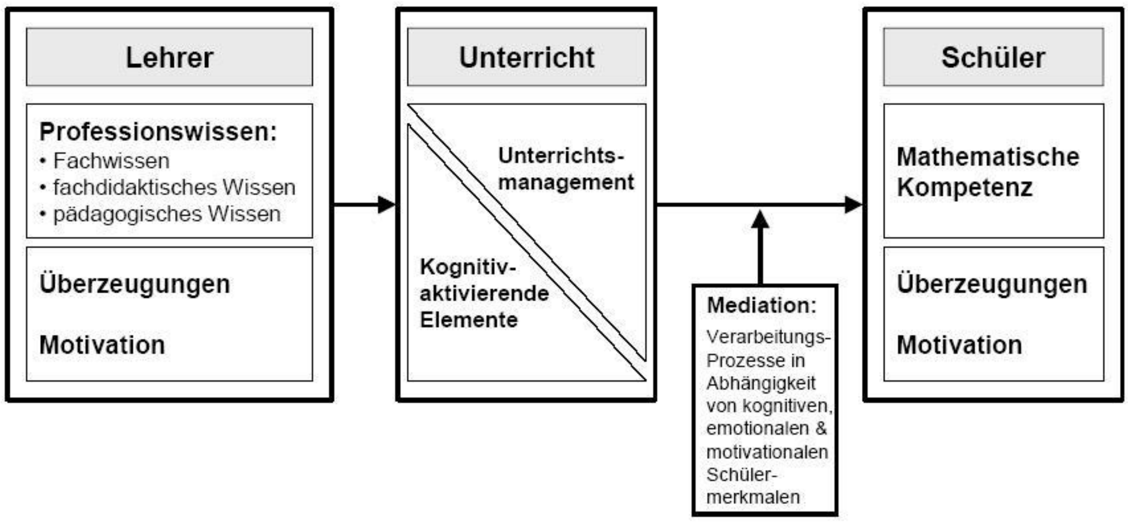


Abbildung 4.4: Die drei inhaltlichen Hauptfokusse von COACTIV: Lehrerkompetenzen, Schülerkompetenzen und die Rekonstruktion des Mathematikunterrichts (aus Krauss et. al, 2008)

Das Professionswissen setzt sich dabei in Anlehnung an Shulman aus Fachwissen, fachdidaktischem Wissen und pädagogischem Wissen zusammen. Mit Wissen ist der erweiterte Wissensbegriff gemeint, der auch die Fertigkeiten, Fähigkeiten, Können und Handlungsroutinen umfasst (Krauss et al., 2008a).

Zudem werden für mathematisches Wissen verschiedene Ebenen unterschieden:

Ebene 1	Mathematisches Alltagswissen, über das grundsätzlich alle Erwachsenen verfügen sollten
Ebene 2	Beherrschung des Schulstoffs so, wie es von einem durchschnittlichen bis guten Schüler der jeweiligen Klassenstufe erwartet wird
Ebene 3	Tieferes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe (z.B. auch „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“, wie sie an der Universität gelehrt wird)
Ebene 4	Reines Universitätswissen, das vom Curriculum der Schule losgelöst ist (z.B. Galoistheorie, Funktionalanalysis)

Tabelle 4.5: Ebenen des mathematischen Fachwissens (Krauss et al., 2008a)

Der Test zum mathematischen Fachwissen besteht aus 13 Items, die eine komplexe mathematische Argumentation oder Beweise erfordern (Baumert et al., 2010). Circa 200 Lehrkräfte bearbeiteten die Aufgaben und waren dabei an kein Zeitlimit gebunden (Krauss et al., 2008). Abgefragt wurde Fachwissen der Ebene 3, wobei die Items so formuliert waren, dass sie im Prinzip auch von sehr guten Schülerinnen und Schülern gelöst werden können, was mithilfe von Leistungskursschülerinnen und -schülern empirisch bestätigt wurde (Krauss, Baumert & Blum, 2008). Anhand dreier Beispielitems soll die Konzeptionalisierung des Fachwissens verdeutlicht werden:

Item 1: Primzahl

„Ist $2^{1024} - 1$ eine Primzahl? Bitte begründen Sie!“ (Krauss et al., 2004)

Items 2: Irrational

„Bitte beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.“ (Baumert, 2006)

Items 3: Unendlicher Dezimalbruch

„Gilt 0,999999…. = 1 ?

Bitte begründen Sie!“ (Krauss et al., 2008a)

Die 13 Items konnten zu einer Gesamtskala aggregiert werden (Cronbach´s α = .83; Krauss et al., 2008a) und messen in dieser Untersuchung das mathematische Fachwissen.

In der folgenden Auflistung werden einige ausgewählte Ergebnisse der COACTIV-Studie präsentiert:

1) Gymnasiallehrkräfte schneiden im Fachwissenstest signifikant besser ab (Effektstärke d = 1,73) als Lehrkräfte anderer Schulformen (Krauss et al., 2008a).
2) Auch im Fachdidaktiktest schneiden Gymnasiallehrerinnen und -lehrer signifikant besser ab (d = 0,80) (Krauss et al., 2008a).
3) Gymnasiales Fachwissen und Fachdidaktikwissen korrelieren mit einem Wert von .96 so hoch, dass diese beiden Wissenskonstrukte bei Gymnasiallehrkräften empirisch nicht trennbar sind. Für Lehrerinnen und Lehrer anderer Schulformen ist eine Trennung empirisch durchaus nachweisbar (Krauss et al., 2008b).
4) Die Unterrichtserfahrung operationalisiert als bisher unterrichtete Jahre korreliert nicht mit dem Fachwissen (Brunner et al., 2006).
5) Gymnasiallehrkräfte vertreten im Vergleich zu Lehrkräften anderer Schulformen eher eine konstruktivistische Lerntheorie und lehnen die rezeptive ab. Das Fachwissen aller Lehrerinnen und Lehrer der Stichprobe korreliert signifikant positiv mit der konstruktivistischen Sichtweise vom Lernen ($r = .21$) und negativ mit der rezeptiven Sichtweise ($r = -.27$) (Kunter et al., 2006).
6) Fachdidaktisches Wissen hat einen signifikanten Einfluss auf die Unterrichtsmerkmale „Kognitive Herausforderung der Schülerinnen und Schüler“ und „Lernunterstützung“. Diese haben wiederum einen signifikanten Einfluss auf den Schülerleistungszuwachs. Das fachdidaktische Wissen ist somit eine entscheidende Größe für den Lernfortschritt der Schülerinnen und Schüler (Baumert et al., 2010).
7) Ersetzt man das Fachdidaktikwissen aus 6) durch Fachwissen, so lassen sich die Zusammenhänge allenfalls schwach nachweisen. Folglich geht die direkte Wirkung von Professionswissen auf Schülerleistung und Unterricht ursächlich vom fachdidaktischen Wissen aus (Baumert et al., 2010).

4.5 Die TEDS-M 2008-Studie

TEDS-M 2008 (*Teacher Education and Development: Learning to Teach Mathematics*) ist eine internationale Studie, die die professionelle Kompetenz angehender Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I vergleicht (Blömeke, Kaiser & Lehmann, 2008). Ihr Hauptfokus liegt darauf, eine Gegenüberstellung der Lehrerausbildungssysteme und deren jeweiliger Effektivität zu ermöglichen. Daher bleiben im zugrundeliegenden Modell die Seite der Schülerinnen und Schüler und der Unterricht unberücksichtigt.

In Deutschland nahmen 771 repräsentativ ausgewählte Referendarinnen und Referendare an dieser Untersuchung teil. Sie wurden auf ihr mathematisches, mathematikdidaktisches und pädagogisches Wissen hin getestet sowie zu ihren Überzeugungen und Lerngelegenheiten befragt. Im Folgenden wird zunächst das Verständnis des mathematischen Fachwissens in TEDS-M vorgestellt.

Der für TEDS-M 2008 entwickelte Leistungstest Mathematik umfasst 76 Items, die inhaltlich alle relevanten Kerngebiete der Sekundarstufe I abdecken. In Anlehnung an TIMMS wurde die Taxonomie der Anforderungsniveaus ausdifferenziert in die Kenntnis mathematischer Definitionen, Begriffe und Eigenschaften, in die Anwendung mathematischer Lösungsverfahren und in die Begründung mathematischer Zusammenhänge. Vom mathematischen Anforderungsspektrum her ist bei den Aufgaben höheres, fachlich reflektiertes Wissen erforderlich, wobei bei der Eingliederung nach der Zugehörigkeit der Klassenstufe (Sekundarstufe I, Sekundarstufe II, universitäre Mathematik) unterschieden wurde (vgl. Tabelle 4.6). Validitätsprüfungen zeigten außerdem, dass die Inhalte der Items ausschließlich Gegenstand der fachlichen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte sind.

<table>
<tr><td colspan="5">Mathematischer Fachwissenstest: 76 Items</td></tr>
<tr><td>Inhaltliche Gebiete</td><td>Arithmetik 27</td><td>Algebra 22</td><td>Geometrie 23</td><td>Stochastik 4</td></tr>
<tr><td>Kompetenz</td><td>Kenntnisse 24</td><td>Anwendung 34</td><td colspan="2">Begründung 18</td></tr>
<tr><td>Anforderungsspektrum</td><td>Elementar 15</td><td>Mittel 39</td><td colspan="2">Fortgeschritten 22</td></tr>
</table>

Tabelle 4.6: Zuordnung der 76 Items zu verschiedene Bereichen

In TEDS-M sind die Itemschwierigkeiten und Personenfähigkeiten raschskaliert worden, so dass damit empirisch gewonnene Schwellenwerte festgelegt werden konnten. Für die Mathematikskala wurden zwei Schwellenwerte gefunden, insgesamt ergeben sich somit drei Kompetenzniveaus angehender Mathematiklehrkräfte.

Die Einteilungen sollen an zwei Beispielitems demonstriert werden:

Sei $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$. $A \otimes B$ wird wie folgt definiert $\begin{pmatrix} pt & qu \\ rv & sw \end{pmatrix}$.

Wenn $A \otimes B = 0$ ist, ist es dann wahr, dass entweder $A = 0$ oder $B = 0$ ist (0 repräsentiert die Nullmatrix)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abbildung 4.7: TEDS-M-Aufgabenbeispiel „Nullmatrix“

Die Aufgabe „Nullmatrix“ gehört zum Bereich Algebra, die Kompetenz ist das Begründen eines mathematischen Zusammenhangs, und das Anforderungsspektrum zählt zum fortgeschrittenen Niveau. International sind 18 Prozent der angehenden Mathematiklehrkräfte in der Lage, ein korrektes Gegenbeispiel zu bieten. In Deutschland sind es 32 Prozent.

Wir wissen, dass es nur einen Punkt auf der Zahlengeraden gibt, der die Gleichung 3x=6 erfüllt, nämlich x = 2. Stellen wir uns nun die Gleichung übertragen auf die Ebene vor, mit den Koordinaten x und y, und dann im Raum, mit den Koordinaten x, y und z. Wie sieht die Menge der Punkte, die die Gleichung 3x=6 erfüllen, dort aus?

Kreuzen Sie <u>ein</u> Kästchen <u>pro Zeile</u> an.

	Ein Punkt	Eine Gerade	Eine Ebene	Etwas Anderes
A. Die Lösung von 3x = 6 in der Ebene				
B. Die Lösung von 3x = 6 im Raum				

Abbildung 4.8: TEDS-M-Aufgabenbeispiel „Punktmenge in Ebene und Raum“

Die Aufgabe „Punktmenge in Ebene und Raum“ erfordert Kenntnisse aus dem Bereich der Geometrie und wurde einem mittleren Schwierigkeitsgrad zugeordnet, da sie sich auf Grundkenntnisse bezieht, die in der Sekundarstufe II vorhanden sein sollten. 57 Prozent bzw. 54 Prozent der deutschen Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren in der Lage, das Item A bzw. B richtig zu lösen. Im Vergleich dazu waren es 51 Prozent bzw. 50 Prozent im internationalen Mittel. Lehrkräfte auf Kompetenzniveau I geben zu über 50 Prozent eine falsche Antwort an.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse aus TEDS-M 2008 angegeben:

1) Deutsche angehende Mathematiklehrkräfte liegen mit ihrem Fachwissen in Mathematik stabil über dem internationalen Mittelwert, im europäischen Vergleich liegen sie im Mittelfeld.
2) Deutsche angehende Mathematiklehrkräfte am Gymnasium zeichnen sich im internationalen Vergleich durch herausragende mathematische und mathematikdidaktische Leistungen aus. Fast alle verfügen über Wissen der Kompetenzstufe II, fast zwei Drittel sogar über Wissen auf dem höchsten Kompetenzniveau III.
3) Deutsche angehende Mathematiklehrkräfte anderer Schularten liegen mit ihrem mathematischen Wissen höchstens im internationalen Mittelfeld. Fast die Hälfte gehört dem untersten Kompetenzniveau an.
4) Die Korrelationen zwischen mathematischem und mathematikdidaktischem Wissen schwanken in Abhängigkeit der Teilnehmerstaaten zwischen 0,70 und 0,18, wobei sich in Deutschland die höchste Korrelation zeigte.
5) In allen Ländern, in denen der Mittelwert des mathematischen Fachwissens der Lehrerpopulation über dem internationalen Mittelwert liegt, liegen auch die Schülerleistungen in der TIMSS 2007- Studie darüber. Umgekehrt bewegen sich in allen Ländern, die in TEDS-M 2008 unter dem Mittelwert liegen, auch die Schülerleistungen von TIMSS unter dem Mittelwert. Es ergibt sich also eine ähnliche Rangfolge der Länder beider Studien.
6) Deutsche angehende Mathematiklehrkräfte zeigen relative Schwächen im Bereich Geometrie und zugleich relative Stärken in Arithmetik und Algebra.
7) Die transmissionsorientierten Überzeugungen von angehenden deutschen Mathematiklehrkräften sind besonders gering ausgeprägt. Konstruktivistische Überzeugungen hingegen besonders stark.
8) Deutsche angehende Gymnasialkräfte stimmen konstruktivistischen Überzeugungen zum Wissenserwerb signifikant stärker zu als angehende Lehrkräfte anderer Schularten.

4.6 Zusammenfassung und Forschungsdefizite

In vielen hauptsächlich qualitativen Untersuchungen wird die Wirkung des Fachwissens der Lehrkraft auf den Unterricht thematisiert. Dabei zeigt sich, dass Fachwissenslücken bedeutende Auswirkungen auf den Unterricht haben können, aber nicht müssen. Es gibt allerdings kaum Hinweise darauf, wie sich hohes Fachwissen der Lehrerin oder des Lehrers in Unterrichtsmerkmalen manifestiert.

Diverse Studien bringen das Fachwissen einer Lehrkraft mit der Schülerleistung in Verbindung, wobei sich aber widersprüchliche Resultate ergeben. Das liegt unter anderem an der unterschiedlichen Messung und Definition des Konstrukts Fachwissen. In den meisten Untersuchungen wird das Fachwissen indirekt über die Ausbildung, sprich anhand der Anzahl der Universitätskurse oder der Art des Abschlusses gemessen. In der Literatur werden direktere Messarten gefordert, die das Konstrukt reliabler und valider abbilden (National Mathematics Advisory Panel, 2008; Lanahan et al., 2004). In den wenigen Studien, die Fachwissenstests einsetzen, gibt es allerdings unterschiedliche Auffassungen über das Konstrukt „Fachwissen“ – vom vertieften Schulwissen (COACTIV) bis hin zum universitären Wissen (Begle, 1972). Die Michigan-Studie (Ball et al.) bildet das Konstrukt „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ und kann positive Zusammenhänge mit dem Lernzuwachs der Schülerinnen und Schülern herstellen. Ihr Ansatz ist jedoch bisher nur für die Primarstufe untersucht worden.

Der korrelative Zusammenhang zwischen dem Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerleistung wird in der Michigan-Studie wie auch in den meisten anderen Untersuchungen nicht kausal interpretiert, da der eigentliche Vermittlungsprozess zwischen diesen beiden Variablen nicht thematisiert wird. In der Regel werden die beiden Größen ohne theoretisch fundierte Vorüberlegungen korreliert, wie diese Beziehung mehrebenenanalytisch plausibel gemacht werden kann (Begle, 1972; Ahn & Choi, 2004). Die COACTIV-Studie gilt diesbezüglich als Ausnahme: Sie zeigt, dass innerhalb ihres Modells kein Zusammenhang zwischen Fachwissen und dem Lernfortschritt der Schülerinnen und Schüler – vermittelt über Unterrichtsvariablen wie „Kognitive Herausforderung“ oder „Adaptive Unterstützung“ – existiert. Die Autoren verweisen ausdrücklich darauf, dass sich aufgrund der auf das Curriculum fokussierten Konzeptionalisierung des Fachwissensbegriffs keine empirisch begründeten Aussagen über die Rolle des universitären Wissens zur Gestaltung schulischen Unterrichts ableiten lassen. „Um die Bedeutung dieses universitätsspezifischen Fachwissens für die spätere Unterrichtsqualität einer Lehrkraft abschätzen zu können, wäre eine neue, dieser Fragestellung angemessene Testkonstruktion erforderlich.“ (Krauss et al., 2008a; S.251).

Die TEDS-M-Studie zielt auf einen internationalen Vergleich der Ausbildungen. Aus diesem Grund sind Referendarinnen und Referendare aller Schultypen befragt worden, nicht jedoch erfahrene Gymnasiallehrkräfte. Anders als bei COACTIV werden auch Items eingesetzt, die universitäres Fachwissen abfragen. Der Vergleich von mathematischem Fachwissen der Lehrkräfte und der Schülerleistung kommt in TEDS-M jedoch aufgrund eines Vergleichs des Abschneidens der beiden Populationen in zwei unterschiedlichen Untersuchungen zustande. Da solche Zusammenhänge durch viele Faktoren beeinflusst und vermittelt werden, können Schlussfolgerungen nur bedingt gezogen werden. Ein Modell, das den Unterricht als Vermittler in die Überlegungen mit einbezieht, wird nicht verwendet.

Insgesamt zeigt sich, dass es hinsichtlich des mathematischen Fachwissens von Gymnasiallehrkräften noch viele offene Fragestellungen gibt. Zur Klärung dieser Fragen bedarf es zunächst der Konzeptionalisierung und Validierung eines geeigneten Fachwissenskonstrukts deutscher Gymnasiallehrkräfte. Anschließend können die Auswirkungen dieses Konstrukts auf Unterrichts- und Personenmerkmale untersucht werden. Im nächsten Kapitel werden diesbezüglich die Forschungsfragen dieser Arbeit formuliert, an denen das Forschungsvorhaben detaillierter erklärt wird.

5 Forschungsfragen

Man muss viel gelernt haben, um über das,
was man nicht weiß, fragen zu können.
Jean-Jacques Rousseau

Wie in den vorangegangenen Kapiteln gezeigt wurde, spielt Wissen für den Lehrerberuf eine wesentliche Rolle. Empirische Studien zum Fachwissen liefern jedoch widersprüchliche Ergebnisse, was unter anderem an der unterschiedlichen Auffassung und Messung von Fachwissen liegt. In dieser Arbeit soll speziell das Mathematikwissen von Lehrkräften an Gymnasien untersucht werden. Es gilt also zunächst, ein Konstrukt zu entwerfen, welches das Mathematikfachwissen von Gymnasiallehrkräften valide abbildet.

1	**Definition des Konstruktes „Fachwissen“:** **Wie kann ein Konstrukt zur Messung des mathematischen Fachwissens von Mathematiklehrkräften am Gymnasium zweckmäßig definiert werden?**

Hill, Rowan und Ball (2005) identifizieren in ihrer Studie die Wissensbestandteile, die zum Unterrichten für das Fach Mathematik in der Primarstufe wesentlich sind und definieren daraus das Konstrukt „mathematical knowledge for teaching“. Die vorliegende Untersuchung möchte diesen Gedanken aufgreifen und die für den gymnasialen Mathematikunterricht relevanten Wissensinhalte einer Lehrkraft bestimmen. In Analogie wird der Terminus „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ verwendet. Bei der Itemerstellung gilt es zu beachten, dass die fachlichen Anforderungen an die Lehrerinnen und Lehrer am Gymnasium höher sind als an anderen Schulformen, was es notwendig macht, das universitäre Fachwissen verstärkt einzubeziehen. Sowohl die COACTIV- als auch die TEDS-M-Studie sind bei ihrer Itemwahl dahingehend eingeschränkt, dass Lehrpersonen aller Schularten die Items zu beantworten haben. Für diese Arbeit, die sich speziell an Gymnasiallehrkräfte und ihr universitäres Fachwissen richtet, ist daher eine gesonderte Testkonstruktion erforderlich. Parallel dazu wird dem Ansatz nachgegangen, universitäres Fachwissen im klassischen Sinne zu messen. Damit soll überprüft werden, ob sich das Konstrukt MWFL vom klassischen mathematischen Fachwissen (MFWK), wie es an Universitäten gelehrt wird, signifikant unterscheidet, oder ob es zu einem gemeinsamen Konstrukt aggregiert werden muss.

2	**<u>Testkonstruktion:</u>** **Wie muss ein Test zur Messung des MFWL aufgebaut sein?**

Hill, Rowan und Ball (2005) erstellten einen Fachwissenstest zur Messung des MFWL, der den Testgütekriterien hinreichend entspricht. Um diesen Ansatz auf Gymnasialniveau zu übertragen, müssen die Anforderungen an die Items neu überdacht werden. Ziel ist es Kriterien aufzustellen, die bei der Itemkonstruktion zu beachten sind. Das mathematische Fachwissen soll gemessen werden, indem die Lehrerinnen und Lehrer mathematische Aufgaben bearbeiten. Inwieweit dabei Fachwissen aktiviert wird, zeigt sich durch eine Betrachtung der Wissensanteile bei der Lösung von mathematischen Problemen. Inhaltlich sollen universitäre Wissensinhalte abgefragt werden, weswegen auch eine Analyse der Wissensinhalte im Studium erfolgt. Nach der Befragung der Lehrerinnen und Lehrer sind die Testgütekriterien anhand deren Itembearbeitung zu überprüfen.

3	**<u>Itemanalyse der Lehrerantworten:</u>** **Was ergibt eine vertiefte Analyse der Fachwissensitems hinsichtlich…** **a) … des Antwortverhaltens der Lehrerinnen und Lehrern, insbesondere bei Items mit hoher Schwierigkeit?** **b) … des Wissensstands der Lehrerinnen und Lehrern?**

Für Lehrerinnen und Lehrer ist es eine ungewohnte Situation, Testitems zu ihrem Fachwissen zu bearbeiten und dadurch möglicherweise mit Wissensdefiziten konfrontiert zu werden. Daher ist von Interesse, ob sich Auffälligkeiten im Antwortverhalten der Lehrkräfte finden lassen. Gerade wenn sie Items nicht beantworten können, kann es sein, dass ein ausweichendes Verhalten sichtbar wird. Möglich wäre beispielweise, dass lediglich eine der Frage nahestehende Antwort gegeben oder angemerkt wird, dass dieses Wissen für den Unterricht nicht gebraucht wird. Mittels einer vertieften Itemanalyse kann untersucht werden, ob die Lehrkräfte den Test akzeptieren und welche subjektive Relevanz der Items sie erleben. Eine qualitative Analyse der bearbeiteten Testbögen soll Aufschlüsse darüber geben. Des Weiteren wird anhand deskriptiver Statistiken das Wissensspektrum der teilnehmenden Lehrkräfte aufgezeigt. Plausibel wäre, dass die Lehrerinnen und Lehrer Schulmathematik sicherer beherrschen als die damit verwandte Mathematik auf universitärem Niveau.

Einerseits interessiert die Außensicht der Forscherperspektive, die Frage wie Fachwissen mit Unterrichtsvariablen zusammenhängt. Andererseits soll aber auch die Innensicht der beteiligten Personen, also der Lehrerinnen und Lehrer, mit in die Forschung einbezogen werden. Beide Perspektiven sollen im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt werden, was Gegenstand der vierten (Lehrerperspektive) und fünften (Forscherperspektive) Forschungsfrage ist:

4	**<u>Einschätzungen der Lehrkräfte zum Wissen:</u>** **Wie schätzen Lehrkräfte das Fachwissen in den unterschiedlichen universitären Gebieten ein hinsichtlich…** **a) … ihres individuellen Wissensstands?** **b) … der Bedeutung für ihren Unterricht?**

Die Schwerpunktsetzung auf fachliche Vorlesungen im Lehramtsstudium wird immer wieder diskutiert. Doch welche Einstellung vertreten erfahrene Lehrerinnen und Lehrer bezüglich dieses Themas, und ist diese Sicht vom eigenen Fachverständnis geprägt? Eine plausible Antwort auf diese Fragen wäre, dass Mathematiklehrkräfte mit hohem Fachwissen die Bedeutung des Fachwissens für den Unterricht höher einschätzen als Lehrkräfte mit vergleichsweise niedrigem Fachwissen. Ferner sollen in dieser Untersuchung die mathematischen Teildisziplinen identifiziert werden, die Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer für die Ausübung ihres Berufes als besonders wichtig erachten. Dadurch können wahrgenommene Defizite der Ausbildung im Fachwissen herausgestellt werden, die der Einschätzung der Lehrkräfte zufolge den Unterrichtserfolg beeinträchtigen.

5	**<u>Zusammenhänge mit Unterrichts- und Personenvariablen:</u>** **Mit welchen Personen- oder Unterrichtsvariablen hängt das mathematische Fachwissen der Lehrkräfte zusammen?**

In den meisten Studien zum Fachwissen steht die Forschungsfrage im Vordergrund, ob höheres mathematisches Fachwissen der Lehrkraft zu höherem mathematischem Fachwissen der Schülerinnen und Schüler führt. Bei Hill, Rowan und Ball (2005) werden positive Korrelationen zwischen dem „mathematical knowledge for teaching“ und dem Schülerleistungszuwachs gefunden, allerdings werden die Unterrichtsaspekte, die diesen Zusammenhang begreifbar machen, nicht thematisiert. Für diese Arbeit soll daher ein multikriterielles Modell verwendet werden, das Variablen über die Lehrperson, zum Unterricht und über die Schülerinnen und Schüler integriert. In der COACTIV-Studie

(Baumert et al., 2010) zeigen sich diese Zusammenhänge mediiert über Unterrichtsvariablen beim fachdidaktischen Wissen, nicht jedoch beim Fachwissen. Es kann daher vermutet werden, dass sich der Zusammenhang mit den Schülerleistungen sowohl beim MFWL als auch bei Ball finden lässt, nicht jedoch beim MFWK. Die vorliegende Studie berücksichtigt also Variablen auf Lehrer-, Unterrichts- und Schülerebene. Welche das im Einzelnen sind und warum bei diesen Variablen ein Zusammenhang mit dem Fachwissen vermutet werden kann, wird in Kapitel 7 ausführlich erörtert.

6 Das Konstrukt „Mathematisches Fachwissen“

Eine Investition in Wissen
bringt noch immer die besten Zinsen.
Benjamin Franklin

Kapitel 6 thematisiert die Messmethode und die Definition des Konstrukts „Mathematisches Fachwissen“ von Gymnasiallehrkräften. In Kapitel 6.1 wird dargelegt, wie sich das Fachwissen durch die Auseinandersetzung mit geeigneten Mathematikaufgaben valide messen lässt. Anschließend wird die der Arbeit zugrunde liegende Definition des mathematischen Fachwissens in Kapitel 6.2 wiederholt und erweitert. Anhand dieser Präzisierung wird eine Bedingung deutlich, die den Items vorangestellt wird. Inhaltlich werden Wissensgebiete aus dem universitären Fachstudium für die Items gewählt, weshalb in Kapitel 6.3 die Curricula bundesweit und in ihrer zeitlichen Entwicklung betrachtet werden. Insgesamt ergeben sich aus den Überlegungen dieser Kapitel Kriterien, die bei der Itemkonstruktion zu beachten sind (Kapitel 6.4). Dabei werden zwei verschiedene Auffassungen des Konstruktes „Mathematisches Fachwissen“ aufgezeigt. Die eine konkrete Umsetzung in dieser Arbeit wird in Kapitel 6.5 thematisiert, die andere in Kapitel 6.6. Eine Zusammenfassung schließt das Kapitel 6 ab.

6.1 Wissensstrukturen bei der Lösung von mathematischen Aufgaben

Für die Untersuchung des Konstrukts soll ein Paper-and-Pencil-Test entwickelt werden, der durch das Lösen mathematischer Probleme ein Abbild über das vorhandene Fachwissen liefern soll. Dabei gilt es zu überprüfen, ob sich Fachwissen durch die Bearbeitung von Mathematikaufgaben valide abbilden lässt. Welche Wissensanteile bei der Lösung von Problemen zum Einsatz kommen können, wird in den Arbeiten von Chi (1984) und Arbinger (1997) deutlich. Sie verwenden ein Modell, in dem sich das Wissen aus Fachwissen, Metawissen und Strategiewissen zusammensetzt (vgl. Abbildung 6.1). Im Folgenden wird die Funktionalität dieses Modells begründet und damit der Anteil des Fachwissens bei Problemlöseprozessen verdeutlicht.

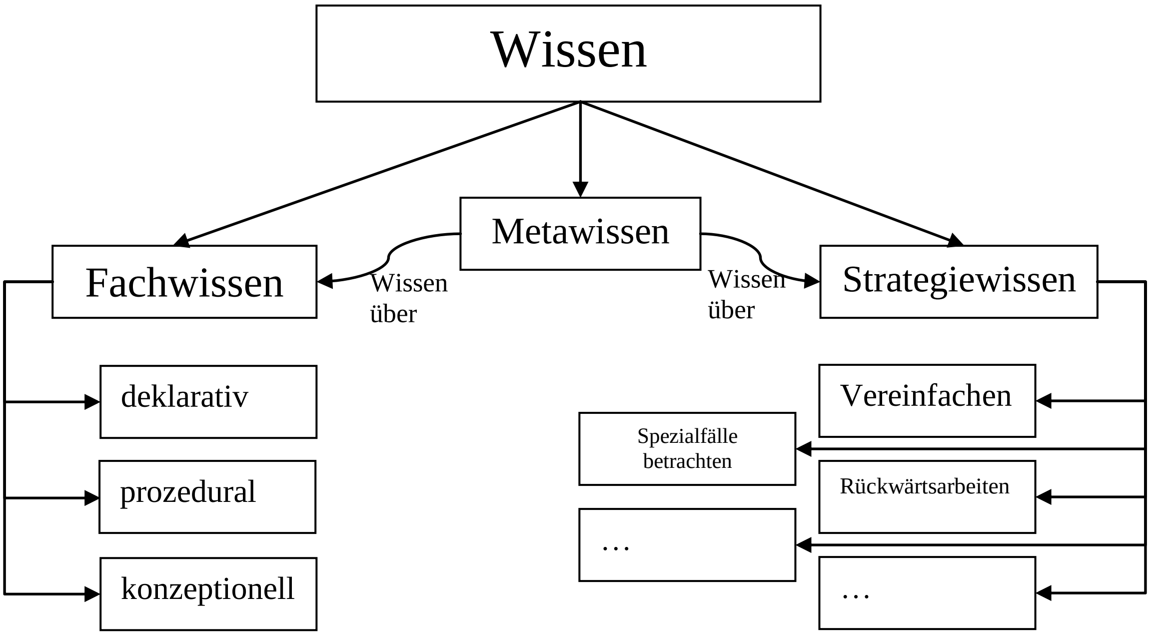


Abbildung 6.1: Wissensstrukturen zum mathematischen Problemlösen

Innerhalb des Fachwissens wird zwischen deklarativem, prozeduralem und konzeptionellem Wissen unterschieden (Anderson & Krathwohl, 2001). Nach Anderson beinhaltet der Begriff *Declarative Knowledge* die Fakten, die wir aus dem Gedächtnis abrufen können. Unter *Procedural Knowledge* werden die Fertigkeiten einer Person, sprich ihr Wissen bezüglich der Ausführung einer bewussten Handlung subsumiert (Anderson, 1980). Lawson (2003) erweitert diese Definition, indem er den wesentlichen Unterschied zwischen deklarativem und prozeduralem Wissen mit *knowing that* (wissen, dass) und *knowing how* (wissen, wie) angibt. Im historischen Kontext der Wissensdiskussion führt Lawson diese Unterscheidung auf Piaget zurück, der hierfür die Termini figurativ und operativ geprägt hat. Die angeführte Unterscheidung kann somit auf eine breite Basis der psychologischen Wissensforschung zurückgreifen.

Im Einzelnen: Deklaratives Wissen erlaubt die Wiedergabe von Bedeutungen, das heißt ein Begriff kann korrekt definiert werden. Dies schließt aber nicht automatisch ein, dass ein Sachverhalt, der dem Begriff nach bekannt ist, auch verstanden oder anwendbar wird. So kann man beispielsweise wissen, dass der Zielbereich einer Funktion Wertemenge genannt wird, ohne die Wertemenge der speziellen Funktion bestimmen zu können. Und das Wissen, dass die Menge der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C}$ abgekürzt wird, beinhaltet nicht die Fähigkeit in dieser Menge Rechenoperationen ausführen zu können. Zum prozeduralem Wissen zählen hingegen alle Handlungen und kognitiven Prozesse, die eine Person ausführen kann. Dazu gehört die Anwendung von Rechenregeln oder eines Algorithmus. Wenn eine Schülerin mit

Zirkel und Lineal die Senkrechte konstruieren kann oder weiß, wie man den Divisionsalgorithmus bei *49725 : 9* auszuführen hat, so verfügt sie über prozedurales Wissen. Als weiteren Fachwissensanteil definieren Anderson und Krathwohl (2001) das konzeptionelle Wissen. Dieses bezeichnet das Wissen über Zusammenhänge zwischen grundlegenden Basiselementen in einer globalen Struktur, welches ermöglicht die Funktion der einzelnen Elemente untereinander zu verstehen. Gemeint ist also Wissen über den Aufbau, die Organisation und die Gesetzmäßigkeiten eines bestimmten Sachgebietes (Hofmeister, 2005). Beispielsweise hat ein Schüler konzeptionelles Wissen über die Bruchrechnung erworben, wenn er verstanden hat, wann zwei Brüche äquivalent sind.

Das Strategiewissen umfasst allgemeine Prozeduren, die dann anzuwenden sind, wenn das Generieren von neuem Wissen oder die Neustrukturierung von vorhandenem Wissen zur Lösung eines Problems notwendig sind. Sie sind übergreifend einsetzbar und müssen nicht unbedingt zum Erfolg führen. Beispiele für diese Strategien, die auch Heuristiken genannt werden, sind die Vereinfachung eines Problems, Rückwärtsarbeiten oder die Betrachtung von Spezialfällen (Pólya, 1949; Schoenfeld, 1992).

Das metakognitive Wissen oder kurz Metawissen umfasst das Wissen einer Person über ihr Wissen. Dazu zählt auch die Fähigkeit zur Einschätzung, wie viel man in einer Domäne weiß. Es ermöglicht somit die Bewertung von Wissen und Selbstreflexion (Arbinger, 1997). Wenn man beispielsweise weiß, dass man schriftlich addieren kann, ist das Metawissen.

Die Funktionalität des Modells sei an einem Beispiel erläutert, bei dem ein Schüler zeigen soll, dass *20.015.769* keine Primzahl ist. In Tabelle 6.2 sind in der ersten Spalte seine Überlegungen geschildert. In der zweiten Spalte wird der Wissensteil benannt, der im jeweiligen Fall zum Einsatz kommt.

Zunächst ruft sich der Schüler ins Gedächtnis, was eine Primzahl ist und was sie auszeichnet.	Fachwissen: Deklaratives Wissen
Danach überlegt er sich, welche Strategien hier sinnvoll erscheinen.	Metawissen über Strategiewissen
Er wählt die Heuristik, sich erst einmal alles aufzuschreiben, was er über Primzahlen weiß.	Strategiewissen: Sammlung von Bekanntem
Er stellt dabei unter anderem fest, dass eine Primzahl nicht durch 3 teilbar ist.	Fachwissen: Deklaratives Wissen
Er weiß, dass es Teilbarkeitsregeln gibt, nur kann er sich nicht mehr erinnern, wie die Teilbarkeitsregel durch 3 lautet.	Metawissen über Fachwissen

Er überlegt sich als Strategie, dass die Division auch schriftlich möglich ist.	Strategiewissen: Alternativer Weg
Er rechnet *20.015.769 : 3* aus, indem er den Divisionsalgorithmus anwendet.	Fachwissen: Prozedurales Wissen
Er erkennt, dass kein Rest bleibt und *20.015.769* somit keine Primzahl sein kann.	Fachwissen: Deklaratives Wissen

Tabelle 6.2: Beispiel für die praktische Anwendung der drei Wissensanteile Fachwissen, Metawissen und Strategiewissen

Bei Problemlösungen kommen häufig alle drei Wissensanteile zum Einsatz, deren jeweilige Bedeutung kann jedoch innerhalb einer Aufgabe stark variieren. Ziel dieser Studie ist die Erstellung eines Tests, der Fachwissen messen soll. Daher sollen die anderen beiden Wissensanteile, also Meta- und Strategiewissen, keinen zu großen Einfluss nehmen. Der Fokus der kognitiven Aktivität soll primär auf dem Fachwissensbereich liegen. Die Items werden deshalb dahingehend überprüft, ob folgende Fragen bejaht werden können:

Würde ein Mathematiklehrer mit hohem Fachwissen die Aufgabe tatsächlich besser lösen als ein Mathematiklehrer mit niedrigem Fachwissen?

Kommt man durch Anwendung von mathematischem Fachwissen zur Lösung, ohne dabei übermäßig viel Strategie- oder Metawissen zu benötigen?

Zur besseren Erklärung werden nun einige Aufgaben angeführt, die im Rahmen dieser Arbeit als wenig geeignet angesehen werden.

Beispiel 1:
In einem Säckchen befinden sich acht Münzen von jedem Eurocentstück, also acht 1-Cent-Stücke, acht 2-Cent-Stücke, acht 5-Cent-Stücke usw. Mit diesen Münzen sollen 5,87 € zusammengestellt werden. Nennen Sie die Möglichkeit mit der geringsten Münzenanzahl.

Bei dieser Aufgabe sind die fachlichen Anforderungen im engeren Sinn eher gering. Grundschulkenntnisse in Mathematik, speziell das Ausführen von Additionen, sind zur Lösung ausreichend. Die Aufgabe könnte somit auch von Personen gelöst werden, die über wenig mathematisches Fachwissen verfügen. Zudem liegt der Schwerpunkt des Items auf der Anwendung von geeigneten Strategien und würde daher Strategiewissen abfragen. Folglich wird dieses Item in dieser Arbeit als ungeeignet zur Fachwissensmessung angesehen.

Beispiel 2:

Lösen Sie dieses Sudoko-Rätsel!
In jeder Zeile, Spalte und
in jedem 9er-Block darf
jede Ziffer nur einmal stehen.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Ein Sudoko-Rätsel ist ohne Zweifel ein mathematisches Problem. Allerdings zeigt sich auch hier, dass zur Lösung ein Testen und Ausprobieren von Strategien gefordert ist. Spezielles mathematisches Fachwissen kann zwar hilfreich sein, ist aber nicht unbedingt notwendig. Abermals könnte das Item von jemandem gelöst werden, der nur sehr rudimentäre Mathematikkenntnisse besitzt. Somit kann ein Sudoko oder ein ähnliches Problem kein Item für einen mathematischen Fachwissenstest sein.

Beispiel 3:

Begründen Sie möglichst einfach, ob $2^{1260} - 1$ eine Primzahl ist.

Um dieses Item zu lösen, muss man zunächst die dritte binomische Formel anwenden: $2^{1260} - 1 = (2^{630} - 1)(2^{630} + 1)$. Also besitzt $2^{1260} - 1$ mindestens zwei Teiler und kann somit keine Primzahl sein. Das erforderliche mathematische Fachwissen stellt für eine Mathematiklehrkraft am Gymnasium wohl keine Hürde dar. Die eigentliche Schwierigkeit besteht darin zu erkennen, dass diese beiden Argumente hier zu verknüpfen sind. Das Item würde dahingehend eine Problemlösestrategie abfragen und könnte auch von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern mit niedrigem Fachwissen gelöst werden. Das widerspricht den Anforderungen an den Test, weswegen Items dieser Art in der Studie ebenfalls ausgeschlossen werden.

Bei der Gestaltung der Items für den Fachwissenstest müssen die vorangegangenen Überlegungen angemessen berücksichtigt und diskutiert werden. Deshalb sind die herangezogenen Items jeweils mit einer entsprechenden Erläuterung versehen (vgl. Kapitel 6.5 & 6.6).

6.2 Wissensebenen des mathematischen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern

Mathematisches Fachwissen kann durch das Lösen von geeigneten Mathematikaufgaben gemessen werden. Es bleibt zu klären, welches mathematische Fachwissen im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden soll. Diese Studie geht in Anlehnung an Bromme von der Annahme aus, dass sich das mathematische Fachwissen von Lehrkräften aus Schulmathematikwissen und universitärem Wissen zusammensetzt. Wie in Kapitel 3.5 erörtert, wird dabei ein pragmatischer Standpunkt eingenommen, bei dem der Zeitpunkt der Wissensaneignung die beiden Wissensarten trennt. Im Kontext dieser Arbeit ist es allerdings sinnvoll, das universitäre Wissen differenziert zu betrachten und in zwei Wissensbereiche aufzuteilen. Bedeutend für den Unterricht und die Unterrichtsvorbereitung ist jenes universitäre Fachwissen, das prinzipiell auch im Unterricht thematisiert werden kann. Dieses Wissen ist beispielsweise dann anwendbar, wenn Schülerinnen oder Schüler weiterführende Fragen stellen oder angrenzende Gebiete, die nicht zum offiziellen Lehrplan gehören, besprochen werden. Des Weiteren gibt dieses über den Schulstoff hinausgehende Wissen den Lehrerinnen und Lehrern Sicherheit im Umgang mit ihrem Fach. Es ermöglicht ihnen ein vielfältiges Bild von dem Fach zu vermitteln, offenere Fragestellungen zu behandeln und multiple Schülerlösungswege zu diskutieren. Zudem befähigt es zu einer optimalen Stoffauswahl. Diese Fachkompetenz kann sich somit positiv auf Merkmale der Schülerinnen und Schüler auswirken. Auf welche Weise dies geschieht, soll Teil dieser Studie sein. Abzugrenzen von diesem unterrichtsnahen Wissen ist Wissen über höhere Mathematik, welches aufgrund seiner Komplexität oder fehlendem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler nur äußert schwer in den Unterricht eingebunden werden kann. Individuell kann dieses Wissen sehr bedeutsam sein, für das Unterrichten selbst spielt es eher eine untergeordnete Rolle.

Festzuhalten ist, dass das mathematische Fachwissen eingeteilt werden kann in:

Schulmathematikwissen, Universitäres Wissen, das einen direkten Unterrichtsbezug hat und Universitäres Wissen, das dem Unterricht eher fern steht (Abbildung 6.3).

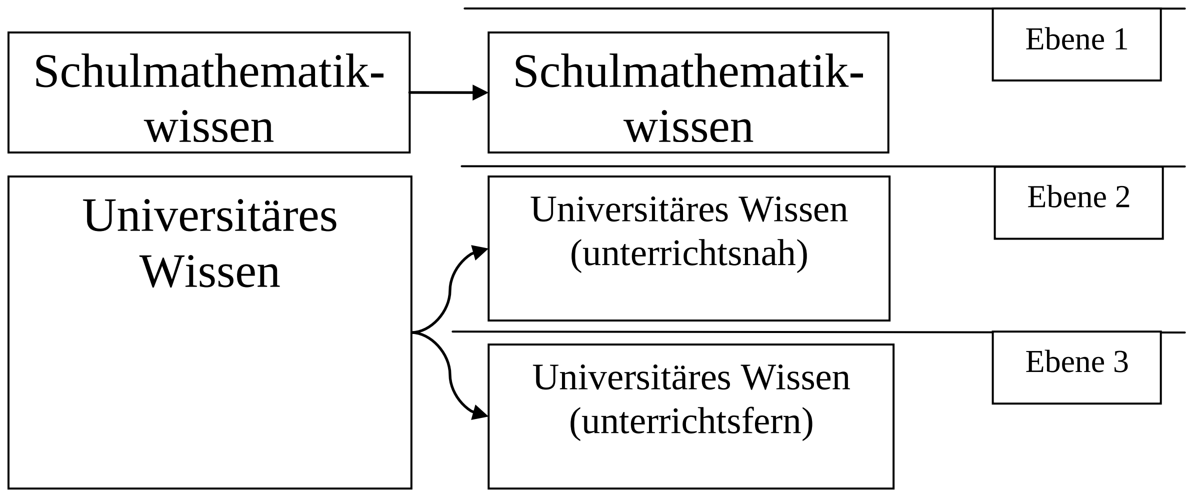


Abbildung 6.3: Ebenen des mathematischen Fachwissens

Diese drei Gebiete werden als Ebenen bezeichnet und durchnummeriert. Dies hilft zum einen bei der Testentwicklung, da überblickt werden kann, ob die erwünschten Ebenen durch die gewählten Items angemessen repräsentiert sind. Zum anderen kann diese Einteilung in Ebene 1 bis Ebene 3 als hierarchische Anordnung des Fachwissens verstanden werden, in etwa vergleichbar mit einem Kompetenzstufenmodell. Die Ebenen bauen aufeinander auf. Im Unterschied zu Kompetenzstufen werden sie allerdings nicht aufgrund eines empirisch festgelegten Schwierigkeitswertes festgelegt, sondern anhand ihres Unterrichtsbezuges differenziert. Lehrkräfte, die das Wissen auf Ebene 1 nur unzureichend beherrschen, können auch Items der Ebenen 2 und 3 kaum lösen. Umgekehrt werden Lehrerinnen und Lehrer, die ausreichend Items der Ebene 3 lösen, wenig Probleme mit Fragestellungen aus den Ebenen 1 und 2 haben. Zur Konkretisierung der Ebenengliederung werden nun einige Beispiele vorgestellt und die Zweckmäßigkeit des Modells daran demonstriert.

Ebene 1: Schulmathematikwissen
Als Faustregel soll gelten: Fachwissen ist der Ebene 1 zuzuordnen, wenn ein Abiturient oder eine Abiturientin im Laufe der Ausbildung mindestens einmal im Unterricht mit diesen Wissensinhalten konfrontiert gewesen ist. Dies hängt selbstverständlich vom Lehrplan im jeweiligen Bundesland ab, weshalb es möglich sein kann, dass ein Item, welches in Bayern der Ebene 1 angehört, in Berlin der Ebene 2 zuzuordnen wäre. Für die vorliegende Studie, die in Bayern durchgeführt wurde, gilt der bis dato gültige Lehrplan des G9 als Referenz. Im Folgenden sind einige Beispielitems für die Ebene 1 aufgeführt, die in allen Bundesländern zum Curriculum gehören:
• Wie lauten die Kongruenzsätze für Dreiecke? • Wie erhält man von einer Zahl in Dezimalbruchdarstellung die Bruchdarstellung? • Nennen Sie eine Gleichung, die nicht in $\mathbb{N}$, aber in $\mathbb{Z}$ lösbar ist. • Wie konstruiert man mit Zirkel und Lineal eine Senkrechte auf einer Geraden g? • Wie nennt man eine Gerade, die einen gegebenen Kreis nicht schneidet?

Ebene 2: Universitäres Wissen (unterrichtsnah)
Wissen auf dieser Ebene zeichnet sich dadurch aus, dass man es durch Reduktion im Schwierigkeitsgrad oder mithilfe anderer didaktischer Möglichkeiten auch im Unterricht behandeln könnte. Es steht der Lehrerin oder dem Lehrer somit für den Unterricht zur Verfügung. Die angegebenen Beispielitems sind abermals so gewählt, dass sie wohl überregional in Deutschland gültig wären:
• Ist die Funktion $f{:}x \mapsto x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ injektiv? Begründen Sie! • Welche der folgenden Funktionen liefern für alle $n \in \mathbb{N}$ Primzahlen? a) $f(n) = n^2 - n + 41$ b) $f(n) = 2^{2n} + 1$ c) $f(n) = p_1p_2p_3...p_n + 1$ ($p_1,p_2,p_3,\dots,p_n$ sind alles Primzahlen) d) keine der oben genannten • Wie unterscheidet sich ein Ring von einem Körper? • Was ist ein Nash-Gleichgewicht? • Ist das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ abzählbar unendlich?

Ebene 3: Universitäres Wissen (unterrichtsfern)
Wissen auf dieser Ebene kann aufgrund seines Umfangs, seiner Schwierigkeit oder fehlenden Grundlagenwissens auf Schülerseite nicht im Unterricht behandelt werden. Die folgenden Beispiele decken allesamt Standardstoff der universitären Ausbildung von Mathematiklehrkräften an Gymnasien ab. Für Studierende, die kurz vor dem Ersten Staatsexamen stehen, wären sie nicht schwer zu beantworten.
• Was besagt der Hauptsatz der Galois-Theorie? • Was versteht man unter einer topologischen n-Mannigfaltigkeit? • Was gilt für eine holomorphe, beschränkte Funktion in $\mathbb{C}$? • Was besagt der „Satz über das Randverhalten maximaler Lösungen“ der Differenzialgleichungstheorie?

Lehrkräfte, die über ein ausgeprägtes Wissen der Ebene 1 und Ebene 2 verfügen, sind in der Lage den inhaltlichen Fachanforderungen des Unterrichts gerecht zu werden, weswegen der Schwerpunkt der Items auf diesen beiden Ebenen liegt. Anzumerken ist dabei, dass die Ebenen nicht zur Einteilung der Lehrkräfte in Gruppen dienen sollen, sondern zur Differenzierung des Wissens eingesetzt werden, um eine optimal gestreute Itemauswahl zu ermöglichen.

Je nach Fragestellung können zu einem Themenbereich Items unterschiedlicher Ebenenzugehörigkeit angegeben werden. Dies wird im Folgenden an einem Beispiel aus dem Themenbereich „Lösbarkeit von Gleichungen“ demonstriert:

1) Mit welcher Formel erhält man die Lösungen einer quadratischen Gleichung?

2) Gibt es entsprechende Lösungsformeln für die Berechnung der Nullstellen von Polynomen vierten und/oder fünften Grades?

3) Begründen Sie Ihre Antwort auf Frage 2.

Fragestellung	Lösung	Begründung der Ebenenzuordnung
Ebene 1: Mit welcher Formel erhält man die Lösungen einer quadratischen Gleichung?	Mit der sog. Mitternachtsformel $x_{1/2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$ kann man die Nullstellen von $ax^2 + bx + c = 0$ bestimmen.	Dieses Wissen ist fester Bestandteil eines jeden Lehrplans an deutschen Gymnasien und gehört daher zur Ebene 1.
Ebene 2: Gibt es entsprechende Lösungsformeln für die Berechnung der Nullstellen von Polynomen vierten und/oder fünften Grades?	Für die Nullstellenbestimmung von Polynomen vierten Grades gibt es noch eine Lösungsformel (Formel von Ferrari), für den Grad 5 kann es keine Lösungsformel geben.	Die Information, dass es keine Lösungsformel mehr ab dem Polynomgrad 5 gibt, kann ohne Probleme in den Unterricht eingebracht werden, jedoch nicht auf Schülerniveau begründet werden. Damit gehört dieses Wissen zur Ebene 2.
Ebene 3: Begründen Sie Ihre Antwort auf Frage 2.	Für eine Gleichung vom Grad 4 ist die symmetrische Gruppe S_4 noch auflösbar, während für $n > 4$ die S_n einen einfachen nichtzyklischen Normalteiler besitzt und somit nicht mehr auflösbar ist.	Dieses Wissen kann nicht im Unterricht thematisiert werden und spielt damit keine direkte Rolle für den Unterricht. Es lässt sich deshalb der Ebene 3 zuordnen.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass diese Studie eine Aufteilung des Fachwissens in drei Ebenen vornimmt. Ebene 1 ist das Schulmathematikwissen, das durch den Lehrplan im jeweiligen Bundesland festgelegt ist. Ebene 2 ist das unterrichtsnahe universitäre Wissen, das in geeigneter Weise auch in der Schule behandelt werden könnte. Und Ebene 3 ist das unterrichtsferne universitäre Wissen, das im Unterricht nicht mehr schülerverständlich thematisiert werden kann. Diese Ebeneneinteilung des Fachwissens erlaubt eine einfache Differenzierung des Wissens, die innerhalb der Itementwicklung hilfreich sein wird.

6.3 Mathematische Wissensinhalte aus dem Studium

Inhaltlich ist bei der Konstruktion des Fachwissenstests zu berücksichtigen, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer das zur Itembeantwortung notwendige Wissen unabhängig vom Bundesland und Zeitpunkt ihres Studiums erworben haben sollten. Daher werden in diesem Abschnitt die Vergleichbarkeit des Studiums in den unterschiedlichen Bundesländern und die zeitbedingten Veränderungen in den Wissensinhalten eines Mathematikstudiums untersucht, um damit eine gemeinsame Wissensbasis für die Items zu bestimmen. Für einen Test zur Messung des mathematischen Fachwissens deutscher Mathematiklehrkräfte kommen grundsätzlich nur Inhalte infrage, die prinzipiell an jeder deutschen Hochschule thematisiert wurden. Da die Lehramtsausbildung in Deutschland den Hoheitsrechten der Bundesländer unterliegt und somit unterschiedlich gestaltet ist, wird nun untersucht, ob man von einem gemeinsamen Wissenskanon bei Mathematiklehrerinnen und -lehrern ausgehen kann oder ob bestimmte Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen. Zunächst ist festzuhalten, dass sich das Fachstudium über alle Bundesländer hinweg durch ein vertieftes Studium von komplexer höherer Mathematik auszeichnet. Rein fachliche Vorlesungen in Mathematik machen einen großen Teil des Lehramtsstudiums aus. Im bayerischen Mathematiklehramtsstudium beispielsweise nahm das Fach Mathematik im Jahr 2006 circa 75 Semesterwochenstunden (SWS) gegenüber 20 SWS für das erziehungswissenschaftliche Studium und 4 SWS für die Fachdidaktik ein. In den anderen Bundesländern ergibt sich ein ähnliches Bild. So berichtet Saterdag (2006), dass in Rheinland-Pfalz für die Mathematik 61 SWS, für die bildungswissenschaftlichen Fächer 18 SWS und für die Mathematikdidaktik 8 SWS veranschlagt sind. In Tabelle 6.4 ist der fachmathematische Anteil des Curriculums im gymnasialen Lehramtsstudium einiger Bundesländer vergleichend zusammengestellt.

Die lineare Algebra und die Analysis stellen im Grundstudium aller Bundesländer feste Bestandteile des Lehrstoffs dar. Auch im Hauptstudium finden sich vergleichbare Inhalte, die auf den eben genannten Gebieten aufbauen und diese vertiefen. Aus diesem Grund werden die lineare Algebra und die Analysis als Schwerpunkt für die Itemgestaltung gewählt, Für die wenigen Items, die über dieses Grundlagenwissen hinaus gehen sollen, werden die Algebra mit Zahlentheorie und die vertiefte Analysis gewählt. In Tabelle 6.4 wird ersichtlich, dass diese gewählten Inhalte in die Studiengänge jedes Bundeslandes integriert sind. Somit kann angenommen werden, dass die Items Bestandteil des Studiums aller in der Studie teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer waren.

Bundesland	Typische Schwerpunkte in der fachwissenschaftlichen Ausbildung*
Baden-Württemberg	Analysis, Geometrie, Algebra oder Zahlentheorie, Angewandte oder Numerische Mathematik oder Informatik, Stochastik, Grundlagen der Mathematik oder mathematische Logik
Berlin	Analysis, Topologie, Geometrie/Kombinatorik, Algebra/Zahlentheorie, Stochastik, Numerik/Mathematik in Anwendungen, Grundlagen der Mathematik /Mathematische Logik
Brandenburg	Algebra, Zahlentheorie und mathematische Logik Analysis (Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Maßtheorie) Geometrie (Analytische Geometrie, Differentialgeometrie, diskrete Geometrie, Elementargeometrie) Numerik, Stochastik, angewandte Mathematik (Numerik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Mathematische Statistik, Angewandte Mathematik)
Hamburg	Algebra und Zahlentheorie; Analysis und Topologie; Geometrie; Graphentheorie und Kombinatorik; Angewandte Mathematik; Mathematische Stochastik, Erlernen einer Programmiersprache, Geschichte der Mathematik
Rheinland-Pfalz	Analysis oder Topologie, Geometrie oder diskrete Mathematik, Algebra oder Zahlentheorie, Praktische Mathematik, Stochastik, Grundlagen der Mathematik oder mathematische Logik
Sachsen-Anhalt	Algebra, Elementargeometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Numerische Mathematik, Gewöhnliche Differentialgleichungen oder Funktionstheorie
Thüringen	Analysis, Geometrie (einschließlich Darstellende Geometrie) und Algebra, Stochastik, Numerik und Informatik
Saarland	Algebra oder Zahlentheorie, Geometrie oder Topologie, Funktionentheorie oder Differenzialgleichungen oder Funktionalanalysis, Stochastik, Angewandte Mathematik
Sachsen	Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Variationsrechnung, Algebra mit linearer Algebra, Gruppentheorie, Galoistheorie, diskrete Strukturen und elementare Zahlentheorie, Geometrie mit Analytischer und Synthetischer Geometrie, Elemente der Darstellenden Geometrie, Höhere Geometrie und Grundlagen der Geometrie, Numerische Mathematik, Informatik, Optimierung, Stochastik, mathematische Statistik
Mecklenburg-Vorpommern	Reine Mathematik und Angewandte Mathematik Algebra/Zahlentheorie und Axiomatische Geometrie
Schleswig-Holstein	Algebra, Analysis, Geometrie, Stockastik, Logik, Numerik, Optimierung.
Niedersachsen	Analysis: reelle Analysis und Funktionentheorie, Differenzialgleichungen, Funktionalanalysis Geometrie: Differenzialgeometrie, Topologie, geometrische Strukturen, Algebra oder Zahlentheorie oder Grundlagen der Mathematik, Stochastik
Berlin	Analysis, Topologie, Geometrie/Kombinatorik, Algebra/Zahlentheorie, Stochastik, Numerik/Mathematik in Anwendungen, Grundlagen der Mathematik/Mathematische Logik

Tabelle 6.4: Überblick über die mathematischen Stoffgebiete der gymnasialen Lehramtsausbildung in den deutschen Bundesländern

* nur Hauptstudium berücksichtigt, häufig besteht eine Wahlmöglichkeit aus den Gebieten (Stand: März 2006)

Die zweite Problemstellung betraf die Frage, ob die Wissensinhalte der unterschiedlichen Abschlussjahrgänge vergleichbar sind. Dies soll am Beispiel Bayerns untersucht werden. Betrachtet man sowohl den Inhalt als auch den Umfang des mathematischen Studiums in Bayern, so zeigt sich für die letzten 35 Jahren keine bedeutsame Veränderung. Dies ist das Ergebnis des direkten Vergleichs der einschlägigen Paragraphen und Abschnitte der LPO I Bayerns in den Ausgaben der Jahre 1976, 1985, 1995 und 2005 (vgl. Tabelle 6.5).

LPO I	§	Inhalt
1976	§43.B (7) 1	a) Analysis: Grundlagen; gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen; Funktionentheorie b) Algebra: Grundstrukturen; Gleichungstheorie; Elemente der Zahlentheorie c) Geometrie: Grundlagen; projektive Geometrie; Differentialgeometrie Vertrautheit mit Methoden der numerischen Mathematik werden vorausgesetzt.
1985	§77 (2) 1	a) Reelle Analysis einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und Funktionentheorie, b) Algebra und Zahlentheorie, c) Geometrie, insbesondere Grundlagen, projektive Geometrie und Differentialgeometrie, d) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, e) Topologie (allgemein Topologie, Elemente der algebraischen Topologie und der Differentialtopologie), f) Numerische Mathematik, g) Mathematische Logik und Informatik.
1995	§77 (2) 1	a) reelle Analysis einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und Funktionentheorie, b) Algebra und Zahlentheorie, c) Geometrie (Grundlagen und ein Spezialgebiet, z.B. Differentialgeometrie) d) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, e) Topologie (algebraische Topologie oder Differentialtopologie), f) Numerische Mathematik, g) Mathematische Logik und Informatik. h) Ein anderes mathematisches Gebiet, soweit dieses vom Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst besonders genehmigt wurde.
2005	§77 (2) 1	Fachwissenschaftliche Kenntnisse aus a) Analysis (reelle Analysis einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen, Funktionentheorie), b) Algebra (Grundstrukturen, Gleichungstheorie) und Elemente der Zahlentheorie, c) Geometrie (Grundlagen und ein Spezialgebiet, z. B. Differentialgeometrie); d) Stochastik e) Informatik oder einem anderen mathematischen Gebiet, soweit dieses vom Staatsministerium für Unterricht und Kultus besonders genehmigt wurde.

Tabelle 6.5: Inhalt der bayerischen Lehramtsprüfungsordnungen I in den Jahren 1976 bis 2006

Man kann davon ausgehen, dass die Entwicklung in den anderen Bundesländern ähnlich verlief. Zusammenfassend lässt sich konstatieren, dass es Studieninhalte gibt, die bundesweit behandelt und abgeprüft werden: Die (vertiefte) Analysis und die (lineare) Algebra. Diese Stoffgebiete stellen eine elementare Grundlage in der Ausbildung von Mathematiklehrenden dar. Entsprechend liegt es nahe, die Aufgaben für den Fachwissenstest aus diesen Bereichen zu wählen.

6.4 Kriterien zur Itemkonstruktion

Bei der Konstruktion der Items für den Fachwissenstest sind neben den üblichen Testgütekriterien einige spezielle Kriterien zu berücksichtigen, wie in den vorangegangenen Kapiteln größtenteils bereits erläutert wurde. Im Folgenden werden diese aufgezählt:

1) **Exemplarizität**
   Die Items sollen jeweils exemplarisch für ein mathematisches Teilgebiet stehen. Randwissen oder Detailwissen sollen bewusst nicht abgefragt werden, da umfassende Kenntnisse über den Kern eines Faches als bedeutsamer eingestuft werden als Spezialwissen.
2) **Streuung**
   In ihrer Summe sollen die Items nicht zu einseitig ausgelegt sein, d.h. durch eine geeignete Streuung sind verschiedene mathematische Teildisziplinen abzubilden: Eine Ausrichtung auf ein oder zwei Gebiete würde nicht zeigen, ob die Lehrkräfte über einen globalen mathematischen Wissensstand verfügen.
3) **Curriculumsvalidität**
   Inhaltlich müssen die Items Stoffgebieten angehören, die Bestandteil des Studiums sind, so dass davon ausgegangen werden kann, dass sie prinzipiell im Studium behandelt wurden.
4) **Fachwissensvalidität**
   Zur Lösung eines Items soll universitäres mathematisches Fachwissen zum Einsatz kommen. Einige mathematische Probleme wie zum Beispiel Sudokurätsel erfordern mehr Strategiewissen als mathematisches Fachwissen. Diese anderen Wissensbestandteile sollen in den Items bewusst keine größere Rolle spielen, da sie wenig über das vorhandene Fachwissen einer Person aussagen.
5) **Unterrichtsbezug**
   Das Wissen zur Lösung der Items wird im Unterricht behandelt oder könnte auf geeignete Weise im Unterricht thematisiert werden. Ausgedrückt im Ebenenmodell beinhaltet dies die Ebenen 1 (Schulmathematikwissen) und 2 (Unterrichtsnahes universitäres Wissen). Es gilt zu beachten, dass auch bei Items der Ebene 1 die universitäre vertiefte Sichtweise auf den Inhalt betont wird.

6.5 Das Konstrukt „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“

In den Kapitel 3.4 und 4.3 wurde erörtert, wie Hill, Rowan und Ball (2005) das Fachwissen von Primarstufenlehrerinnen und -lehrern über das Konstrukt „mathematical knowledge for teaching“ messen. Dabei werden neben herkömmlichen Fachfragen über Mathematik auch spezielle Fachfragen, die zum Mathematikunterrichten benötigt werden, einbezogen. Die Items sind stets in einen Kontext zum Unterricht oder zur Unterrichtsplanung eingebunden und umfassen darüber hinaus Aufgaben zur Diagnostik. Dieser Ansatz soll nun auf das mathematische Fachwissen von Lehrkräften an Gymnasien übertragen werden. Da das fachdidaktische Wissen nicht Gegenstand der Untersuchung sein soll, wird dieser Wissensbereich bei der Konzeptionalisierung des in dieser Arbeit bezeichneten „Mathematischen Fachwissens zum Lehren“ (MFWL) ausgeklammert. Das MFWL wird als Bindeglied zwischen der Schulmathematik und dem universitären mathematischen Wissen verstanden. Abbildung 6.6 veranschaulicht diese Funktion des MFWL.

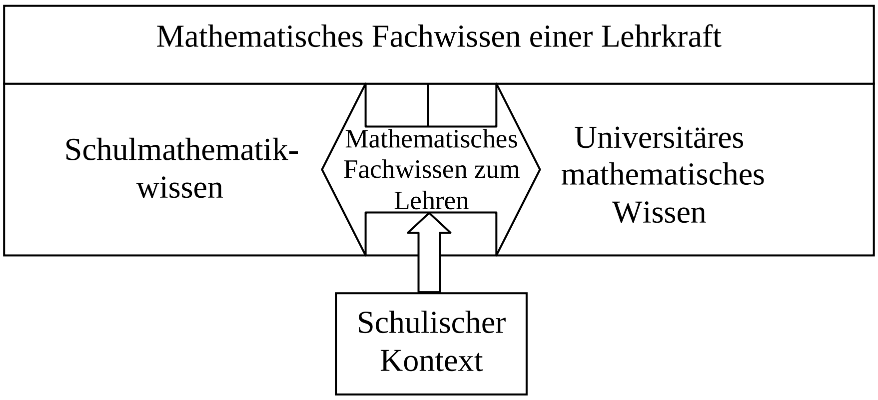


Abbildung 6.6: MFWL als Bindeglied zwischen Schulmathematik und universitärem Wissen

Ausgangspunkt für die Inhalte des MFWL ist universitäres Wissen. Wird dieses Wissen allerdings auch in der Schule thematisiert, so wird es definitionsgemäß der Schulmathematik zugeordnet. Demzufolge gehören die Inhalte des MFWL entweder zur Schulmathematik oder zum universitären Fachwissen, das in der Schule eingesetzt werden kann. Dies entspricht im Wesentlichen den in Kapitel 6.2 vorgestellten Ebenen 1 und 2. Im Unterschied zum klassischen Vorgehen werden die Items in einem schulischen Kontext präsentiert, so dass ihre Relevanz für den Unterricht deutlich gemacht wird. Dies kann dadurch geschehen, dass die teilnehmenden Lehrkräfte eine Aufgabe oder eine Schülermeldung korrigiert oder ein Sachverhalt für eine Unterrichtsplanung überdacht werden muss.

Im Folgenden sei das MFWL in dem in dieser Arbeit verstandenen Sinn definiert:

„Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ (MFWL) ist universitäres mathematisches Fachwissen, das Lehrkräfte vorteilhaft in der Ausübung ihres Berufes einsetzen können. Diese Eigenschaft wird in den MFWL-Items zusätzlich dadurch ausgedrückt, dass sie in einen schulischen Kontext eingebettet werden.

Nachstehend werden nun die eingesetzten Items in tabellarischer Form vorgestellt und ihre Eignung für den Test „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ begründet.
Dabei werden jeweils folgende Punkte behandelt:

Wortlaut	Der genaue Itemwortlaut wird wiedergegeben.
Lösung	Eine Lösung für dieses Item wird angegeben.
Universitäres Gebiet	Es wird erörtert, für welches universitäre Fachgebiet das Item exemplarisch steht.
Fachwissensebene	Es wird der Bezug des Items zum Unterricht dargelegt und danach einer Ebene zugeordnet. Ausschlaggebend ist dabei der zum Zeitpunkt der Untersuchung gültige bayerische Lehrplan des G9.
Kriterien MF	Für die Messung von Fachwissen wurde bereits festgestellt, dass Strategie- oder Metawissen nicht den Schwerpunkt zur Itemlösung ausmachen sollen. Es wird daher untersucht, ob das Item ausreichend zwischen Lehrkräften mit hohem und niedrigem Fachwissen differenziert.
Kriterien MFWL	Ein Item zählt dann zum Konstrukt „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ (MFWL), wenn es Unterrichtsrelevanz besitzt und in einen entsprechenden Kontext eingebettet ist. Dieses Kriterium wird hier jeweils überprüft.
Bemerkungen	Sonstige Bemerkungen, die bei diesem Item zu beachten sind, werden in der letzten Zeile angegeben.

Item 1: Transzendenz von Pi

Wortlaut	Philipp aus der elften Klasse sagt: „Ich habe gelesen, dass π transzendent ist. Das heißt also, dass π unendlich viele Nachkommastellen hat und man nie sagen kann, welche Ziffer als nächstes kommt.“ Wie beurteilen Sie Philipps Aussage?
Lösung	Philipp beschreibt die Irrationalität von π und nicht die Transzendenzeigenschaft. π ist transzendent, weil es keine Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ sein kann. Allerdings hat er insofern Recht, da transzendente Zahlen stets irrational sind.
Universitäres Gebiet	**Algebra / Zahlentheorie** Die Inhalte des Items werden in Zahlentheorie- und/oder Algebravorlesungen im Studium thematisiert und sind unerlässlich, um den Aufbau des Zahlensystems zu verstehen. Transzendente Zahlen sind per Definition Zahlen, die nicht Nullstellen von Polynomen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ sein können.. Darüber hinaus sind sie stets irrational, d.h. ihre Dezimaldarstellung bricht nicht ab. Allerdings müssen irrationale Zahlen nicht automatisch transzendent sein, da zum Beispiel die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ Lösung von $x^2 - 2 = 0$ ist.
Fachwissensebene	**Ebene 1** Die reellen Zahlen werden in der Jahrgangsstufe 9 eingeführt. Dabei soll laut Lehrplan auch thematisiert werden, dass die Irrationalität eine Eigenschaft dieser neuen Zahlen ist. Die Kenntnisse über transzendente Zahlen und ihr Zusammenhang zu irrationalen Zahlen werden gemäß dem bis dato gültigen bayerischen Lehrplan in Jahrgangsstufe 12 im Leistungskurs behandelt. Daher zählt dieses Wissen zur Ebene 1.
Kriterien MF	Zur Beantwortung wird lediglich das Definitionswissen benötigt, was irrationale und transzendente Zahlen sind. Meta- oder Strategiewissen ist nicht erforderlich. Es kann somit dem deklarativem mathematischen Wissen zugeordnet werden.
Kriterien MFWL	Die Inhalte des Items sind für das Lehren relevant, da die Thematik der Zahlenerweiterung durch die reellen Zahlen einen wichtigen Punkt im Mathematikunterricht darstellt. Die Untergliederung der reellen Zahlen in irrationale und algebraische Zahlen ist dabei ein wesentlicher Bestandteil, der zum Verständnis des Zahlenaufbaus notwendig ist. Durch die Frage des Schülers Philipps ist es zudem in einen schulinternen Kontext eingebunden.
Bemerkungen	Obwohl das Item sehr gut die Kriterien zur Messung des MFWL erfüllt, kann man durch die eher offene Formulierung der Frage nicht erwarten, dass der Begriff Transzendenz bei der Beurteilung definiert und von der Irrationalität abgegrenzt wird. Zur korrekten Beanwortung des Items reicht die Bemerkung, dass Irrationalität mit Transzendenz verwechselt wurde. Die Auswertung des Items wird deshalb darauf beschränkt, ob dieser Irrtum erkannt wurde.

Item 2: Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades

Wortlaut	Martina aus einem Mathematik-Grundkurs sitzt vor einer Aufgabe, bei der man die Nullstellen eines Polynoms 5. Grades bestimmen soll und versucht eine Lösung zu erraten, damit sie eine Polynomdivision durchführen kann. Martina: „Gibt es eigentlich eine Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades?“ Wie würden Sie Martina antworten und wie würden Sie einem Mathematiker antworten?
Lösung	Für Martina: Es gibt keine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad fünf. Für den Mathematiker: Dies folgt aus dem Hauptsatz der Galoistheorie, da die symmetrische Gruppe S_5 nicht mehr auflösbar ist.
Universitäres Gebiet	**Algebra, Galoistheorie** Die Galoistheorie stellt einen Schwerpunkt im Lehramtsstudium und die Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen den Kern dieses mathematischen Teilgebiets dar. Für die Nullstellenbestimmung von Polynomen bis zum Grad 4 finden sich noch Lösungsformeln. Es gibt jedoch keine Lösungsformel für die Nullstellen von Gleichungen fünften Grades, denn während die symmetrische Gruppe S_4 noch auflösbar ist, besitzt die S_n für $n > 4$ einen einfachen nichtzyklischen Normalteiler und ist daher nicht mehr auflösbar. Dies sind alles Folgerungen aus dem Hauptsatz der Galoistheorie.
Fachwissensebene	**Ebene 2 / Ebene 3** Das für die Beantwortung von Martinas Frage notwendige Wissen gehört der Ebene 2 an, da man den Hinweis, dass es für Gleichungen fünften Grades keine Lösungsformel mehr geben kann, im Unterricht problemlos anführen kann. Die Begründung dazu gehört allerdings der Ebene 3 an, denn in der Schule kann dieser Teil nicht thematisiert werden.
Kriterien MF	Zur Beantwortung wird konzeptionelles Wissen über die Lösbarkeit von Gleichungen benötigt. Ausgeprägtes Meta- oder Strategiewissen muss für die Lösung nicht angewendet werden.
Kriterien MFWL	Wissen über die Lösbarkeit von Gleichungen stellt einen zentralen Schwerpunkt der schulischen Algebra dar. Die Kenntnis darüber, bis zu welchem Grad Lösungsformeln zu diesen Gleichungen existieren, ist für das Lehren von Mathematik äußerst hilfreich und ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern die Grenzen der Mathematik aufzuzeigen.
Bemerkungen	Da dieses Item zwei Fragestellungen beinhaltet, wird es bei der Auswertung getrennt betrachtet, und zwar als Teil 2a (Martinas Erklärung) und Teil 2b (Mathematiker Erklärung). Für die korrekte Beantwortung von 2b wird nur konzeptionelles Wissen verlangt. Das bedeutet ein kurzer Hinweis darauf, dass die Galoistheorie diesen Beweis erbracht hat, reicht völlig aus.

Item 3: Gültigkeit einer Implikation

<table>
<tr>
<td>Wortlaut</td>
<td>
Vor Herbert stehen 4 Mädchen:


Er möchte wissen ob es stimmt, dass ein Mädchen, wenn es keine Brille trägt, eine Schleife im Haar hat. Um seine Neugier zu befriedigen, muss er nicht alle vier Mädchen bitten sich umzudrehen.
Es genügt, dass sich umdrehen: ____________________________

(bitte Namen einsetzen)

Bitte begründe deine Antwort!

Für die Aufgabe sind 5 Bewertungspunkte vorgesehen.
Wie würden Sie die folgenden beiden Antworten bewerten?
(aus Ihrer Korrektur sollte Ihre Punktevergabe klar ersichtlich sein)

1.Schülerantwort:
Tanya:
Es reicht, dass sich Tanya umdreht, denn nur sie erfüllt die Bedingung, dass sie keine Brille trägt. Sie muss also eine Schleife im Haar haben, damit Herberts Behauptung stimmt.
Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil ………………..

2.Schülerantwort:
Tanya & Olga:
Tanya muss sich auf jeden Fall umdrehen, denn sie hat keine Brille und nun muss ich kontrollieren, dass sie eine Schleife im Haar hat.
Olga muss sich auch umdrehen, denn sie hat ja eine Schleife im Haar, darf also keine Brille tragen.
Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil …………………
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lösung</td>
<td>
Beide Schülerantworten sind als nicht korrekt zu bewerten, da sich Tanya und Mary umdrehen müssen.
Zur Lösung gelangt man durch die Anwendung der Definition der Implikation: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$.

(Keine Brille $\Rightarrow$ Schleife) ist äquivalent zu (Brille oder Schleife).
Demzufolge behauptet Herbert, dass jedes Mädchen eine Brille trägt oder eine Schleife im Haar hat.
Falls jemand also keine Brille trägt (Tanya), so muss überprüft werden, ob sie eine Schleife im Haar hat.
Falls jemand keine Schleife im Haar hat (Mary), so muss überprüft werden, ob sie eine Brille trägt.
Daher müssen sich Mary und Tanya umdrehen.
</td>
</tr>
</table>

Universitäres Gebiet	**Grundlagenwissen: Mathematische Logik** Logische Argumentation über Implikationen ist Grundlagenwissen jedes Mathematikers, weshalb in den Anfängervorlesungen großer Wert auf den richtigen Umgang mit diesen Aussageverknüpfungen gelegt wird. Das Item steht somit exemplarisch für die mathematische Logik.
Fachwissensebene	**Ebene 1** Die Frage ist auf der Ebene 1 angesiedelt, denn das Thema des logischen Schlussfolgerns ist Bestandteil jeglichen Mathematikunterrichts. Das kann man auch daran erkennen, dass das Item einem lehrplankonformen Schultest entnommen ist (Känguruh, 1998).
Kriterien MF	Es gibt mehrere Herangehensweisen für die Lösung des Items. Zum einen kann ein kenntnisreicher Mathematiker die Implikationsdefinition abrufen und anwenden. Eine andere Möglichkeit besteht in einer Fallunterscheidung, bei der die Definition der Implikation im Sinne von „Wenn-Dann“ angewendet wird. Zum Beispiel könnte Olga eine Brille tragen oder nicht. Trägt sie eine Brille, so ist die Implikation wahr, denn sie erfüllt die Wenn-Bedingung der Implikation nicht. Trägt sie keine Brille, so ist die Implikation auch wahr, denn sowohl die Wenn- als auch die Dann-Bedingung ist erfüllt. Somit ist für dieses Item eine Anwendung von Meta- und Strategiewissen notwendig. Dies fordert allein der Modellierungsaufwand der Aufgabe. Ohne Kenntnis über die Implikation, also nur durch Strategiewissen, ist das Item jedoch sicherlich nicht lösbar. Für die Lösung muss also gezeigt werden, dass man die Implikation verstanden hat und anwenden kann. Da die Kenntnis der Implikationsdefinition zum deklarativen Wissen gehört und ihre Anwendung zum prozeduralen Wissen, werden in diesem Item zwei Wissenselemente abgefragt.
Kriterien MFWL	Mathematik ohne die Kenntnis von Implikationen ist nicht vorstellbar. Es gehört zum Mathematikunterricht, den korrekten Umgang mit dem Implikationspfeil zu lehren. Somit ist direkt ersichtlich, dass die Kenntnis der Implikation unerlässlich ist. Das Item wird in Form einer Schülerlösung präsentiert, so dass anhand der Korrektur der Lehrkraft zu sehen ist, ob der Lehrer oder die Lehrerin selber das zur Lösung der Aufgabe notwendige Fachwissen besitzt. Damit ist auch der schulnahe Kontext gewährleistet.
Bemerkungen	Das Item fordert neben dem fachlichen Wissen auch einen Anteil an Strategiewissen. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass die Implikation ein so grundlegender Erfahrungsbereich von Mathematiklehrerinnen und -lehrern ist, dass das Wissen über Implikation auf das vorliegende Problem übertragen werden kann.

Item 4: Vollständige Induktion

Wortlaut	In einem Schultest der 11. Klasse wurde folgende Aufgabe gestellt: Man beweise durch vollständige Induktion: $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$ Für die Aufgabe sind 5 Bewertungspunkte vorgesehen. Wie würden Sie die folgende Antwort bewerten? (aus Ihrer Korrektur sollte Ihre Punktevergabe klar ersichtlich sein) Schülerantwort: $n \to n+1$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil …………………..
Lösung	Zum einen fehlt der Induktionsanfang für n = 4. Zum anderen wurde die Induktionsannahme nicht benannt und nicht markiert, an welcher Stelle sie verwendet wurde.
Universitäres Gebiet	**Grundlagenwissen: Beweismethoden** Die vollständige Induktion ist eine grundlegende Beweismethode der Mathematik. Jeder Mathematikstudierende hat die Induktion als Beweisverfahren zu Beginn seines Studiums kennengelernt und auch mehrfach angewendet. Sie steht somit exemplarisch für eine Beweismethode der Mathematik.
Fachwissensebene	**Ebene 2** Das Item gehört der Ebene 2 an, da die Induktion nicht mehr im Lehrplan steht, diese allerdings auf geeignetem Schülerniveau im Unterricht durchgenommen werden kann.
Kriterien MF	Strategiewissen und Metawissen rücken bei dieser Aufgabe deutlich in den Hintergrund. Zur Beantwortung wird prozedurales Wissen über den Induktionsvorgang verlangt, und zwar dass die Induktion in den drei Schritten Induktionsstart, Induktionsannahme und Induktionsbehauptung vollzogen wird. Das deklarative Wissen, sprich wie diese Schritte der Induktion genannt werden, wird an dieser Stelle nicht verlangt, da das konzeptionelle Verständnis der Induktion im Vordergrund steht.
Kriterien MFWL	Die Kenntnis über die Induktion als Beweisverfahren ist als Hintergrundwissen für das Lehren unentbehrlich. Sehr viele Beweise, die sich auf natürliche Zahlen beziehen, werden durch Induktion vollzogen und diese Besonderheit der Beweismöglichkeit bei natürlichen Zahlen ist für einen das Verständnis fördernden Mathematikunterricht sehr wichtig. Dieser Themenbereich kann in der Oberstufe besprochen werden und zeigt exemplarisch eine Beweisart der Mathematik. Da das Item in einen Korrekturkontext gestellt ist, ist das Kriterium der Schulrelevanz erfüllt.
Bemerkungen	Die sicherlich notwendigen, aber fehlenden Begründungen bei der Schülerantwort sind für die Messung des prozeduralen Wissens nicht von Bedeutung. Vielmehr soll es darum gehen, ob das Wissen über das Beweisprinzip der Induktion noch vorhanden ist. Des Weiteren geht bei der Itemauswertung nicht mit ein, ob die Induktionsannahme textlich festgehalten und im Beweisprozess markiert wurde. Dies wird in universitären Klausuren teilweise nicht mehr verlangt und soll daher auch hier nicht gefordert werden.

Item 5: Wurzel ziehen im Komplexen

Wortlaut	Karla ist eine sehr gute Schülerin, die auch im Unterricht gut mitarbeitet und weiterführende Fragen stellt. In der Hausaufgabe über die komplexen Zahlen ist Karla etwas aufgefallen. Sie hat in ihr Heft folgende Zeilen geschrieben. Die komplexe Zahl *i* ist durch $i = \sqrt{-1}$ definiert. Dann gilt doch: $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$ Also, -1 = 1. ???? Wie erklären Sie Karla ihren Fehler?
Lösung	Der Fehler steckt im Schritt $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)}$. Das Rechengesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ gilt nicht für komplexe Zahlen, denn dort ist die Wurzel nicht mehr eindeutig definiert.
Universitäres Gebiet	**Analysis: Funktionentheorie** Komplexe Zahlen und deren Rechengesetze werden in Grundvorlesungen im Studium eingeführt und im Hauptstudium in der Funktionentheorie weiter vertieft. Das Item steht somit exemplarisch für Äquivalenzumformungen in der Analysis.
Fachwissensebene	**Ebene 2** Das Wissen gehört der Ebene 2 an, da ein großer Bezug zum Schulwissen besteht, denn auch im Reellen ist bei dem Rechengesetz Vorsicht geboten: $4 = \sqrt{16} = \sqrt{(-4) \cdot (-4)} \neq \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-4}$
Kriterien MF	Bei der Beantwortung steht das deklarative Wissen über Rechengesetze im Vordergrund gegenüber Strategie- oder Metawissen. Somit ist das Item gut für die Fachwissensmessung geeignet.
Kriterien MFWL	Das Item zeigt Schulrelevanz, da im Mathematikunterricht die Wurzelgesetze explizit nicht für negative Zahlen gelten. Folgendes Beispiel veranschaulicht das: $-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ Eine Lehrerin oder ein Lehrer sollte also darüber Bescheid wissen, dass die Wurzelgesetze nicht allgemeingültig sind.
Bemerkungen	Bei diesem Item kann man den Fehler in der Gleichungskette relativ schnell identifizieren, indem jeder Schritt einzeln abgegangen wird. Daher ist die Begründung von größerem Interesse. Wie schon bei dem Item „Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades“ wird dieses Item in zwei aufgeteilt, denn neben der Identifikation des Fehlers (Item 5a), ist auch der Fehler zu erklären (Item 5b).

6.6 Das Konstrukt „Klassisches mathematisches Fachwissen“

Auch der Ansatz klassisches Fachwissen zu messen, wird in dieser Untersuchung unternommen. Der Fachwissenstest soll aus zeitlich schnell zu lösenden Aufgaben bestehen, die im Grundstudium in linearer Algebra oder in Analysis behandelt werden. Anders als beim MFWL sind die Items des „Klassischen mathematischen Fachwissens“ (MFWK) in einer formal-mathematischen Weise formuliert und somit nicht in einen schulischen Kontext eingebettet. Trotzdem haben sie die Kriterien für Items zum mathematischen Fachwissen zu erfüllen. Das bedeutet, dass das notwendige Strategiewissen die Aufgabenlösung nicht dominieren und die Items exemplarisch für ein universitäres Fachwissensgebiet in der Lehrerausbildung stehen sollen. Es soll überprüft werden, ob diese zwei unterschiedlichen Herangehensweisen zu zwei empirisch trennbaren Wissenskonstrukten führen. Das Format der Items besteht zum größten Teil aus Mehrfach-Antwort-Aufgaben, bei denen die Lehrkraft aus mehreren Antwortalternativen alle korrekten Antworten anzukreuzen hat.

Zur Strukturierung der Items wird die gleiche Tabellenform wie im vorangegangenen Kapitel eingesetzt.

Wortlaut	Der genaue Itemwortlaut wird wiedergegeben.
Lösung	Die Lösung des Items wird angegeben.
Universitäres Gebiet	Es wird erörtert, für welches universitäre Fachgebiet das Item exemplarisch steht.
Fachwissensebene	Es wird der Bezug des Items zum Unterricht dargelegt und danach einer Ebene zugeordnet. Ausschlaggebend ist dabei der zum Zeitpunkt der Untersuchung gültige bayerische Lehrplan des G9.
Kriterien MF	Für die Messung von Fachwissen wurde bereits festgestellt, dass Strategie- oder Metawissen nicht den Schwerpunkt zur Itemlösung ausmachen sollen. Es wird daher untersucht, ob das Item ausreichend zwischen Lehrkräften mit hohem und niedrigem Fachwissen differenziert.
Bemerkungen	Sonstige Bemerkungen, die bei diesem Item zu beachten sind, werden in der letzten Zeile angegeben. Gibt es keine Bemerkungen zum Item, wird diese Zeile nicht dargestellt.

Item 1: Linearkombination

Wortlaut	Aus der Gleichung $v_4 = 3v_1+2v_2-4v_3$ kann gefolgert werden: a) v_4 ist eine Linearkombination aus v_1, v_2, v_3. b) v_2 ist eine Linearkombination aus v_1, v_3, v_4. c) Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig. d) Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig. e) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig. f) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.
Lösung	Nur a), b) und d) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Lineare Algebra**
Fachwissensebene	**Ebene 1** Der Umgang mit dem Konzept der linearen Unabhängigkeit findet in der Oberstufe im Rahmen der analytischen Geometrie statt.
Kriterien MF	Zur richtigen Lösung genügt das deklarative Wissen über die lineare Unabhängigkeit, welches hier direkt angewendet werden muss. Strategie- oder Metawissen spielen kaum eine Rolle.

Item 2: Basis eines Vektorraums

Wortlaut	Wenn B eine Basis von einem Vektorraum V ist, dann ist B a) eine minimale Menge von linear unabhängigen Vektoren. b) eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren. c) eine minimale Menge, von der V der Aufspann ist. d) eine maximale Menge, von der V der Aufspann ist.
Lösung	Nur b) und c) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Lineare Algebra**
Fachwissensebene	**Ebene 1** Die Basis und die Dimension eines reellen Vektorraums sind Bestandteil des bayerischen G9-Lehrplans der 12. Klasse und werden in der analytischen Geometrie thematisiert.
Kriterien MF	Zur Lösung müssen nur die Definitionen einer Basis beherrscht werden. Auch hier kann das Strategie- oder Metawissen nicht weiterhelfen, wenn das Wissen über Basen nicht vorhanden ist. Auch dieses Item misst damit gut das Fachwissen.

Item 3: Lineare Gleichungssysteme

Wortlaut	a) Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung. b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung. c) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens zwei Lösungen. d) Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Lösungen hat, hat unendlich viele. e) Jedes inhomogene Gleichungssystem hat höchstens eine Lösung.
Lösung	Nur b) und d) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Lineare Algebra**
Fachwissensebene	**Ebene 1** Homogene und inhomogene Systeme mit zwei oder drei Unbekannten werden laut G9-Lehrplan am Anfang der 12.Klassen im Unterricht behandelt.
Kriterien MF	Für die Beantwortung muss konzeptionelles Wissen über lineare Gleichungssysteme angewendet werden. Andere Wissensanteile kommen nicht vor.

Item 4: Eigenvektoren

Wortlaut	f sei eine lineare Abbildung eines Vektorraums in sich, für die es einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit $f(-v) = kv$. Dann ist a) -v ein Eigenvektor zum Eigenwert k. b) +v eine Eigenvektor zum Eigenwert –k. c) -v ein Eigenvektor zum Eigenwert –k. d) +v ein Eigenvektor zum Eigenwert k. e) $k = 0$.
Lösung	Nur b) und c) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Lineare Algebra**
Fachwissensebene	**Ebene 2** Eigenvektoren sind Vektoren $v \neq 0$ für die gilt: $f(v) = kv$. k nennt man dann den Eigenwert zum Vektor v. Dieses Wissen ist zwar nicht Inhalt des Lehrplans, könnte aber ohne Probleme in einer Oberstufe thematisiert werden.
Kriterien MF	Zur Lösung muss deklaratives Wissen über die Definition eines Eigenvektors angewendet werden. Strategien müssen zwar beherrscht werden, um die gegebene Funktion in eine äquivalente Form umzuschreiben, jedoch ist dieses Strategiewissen im Vergleich zum benötigen Fachwissen eher gering.

Item 5: Faktorraum

Wortlaut	Der Faktorraum von V nach U ist a) eine Menge von Vektoren aus U. b) ein Teilraum (Unterraum) von V. c) ein Vektorraum. d) eine Nebenklasse von U. e) eine Menge von Nebenklassen. f) Aus v+U = U folgt v = 0, weil 0+U = U gilt. g) Aus v+U = U folgt v = 0, weil v+U = 0+U gilt. h) Aus v+U = U folgt v = 0, weil man auf beiden Seiten –U rechnen kann. i) Aus v+U = U folgt v $\in$ U.
Lösung	Nur c), e) und i) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**(Lineare) Algebra**
Fachwissensebene	**Ebene 3** Zur Lösung des Problems ist deklaratives Wissen über Definitionen in der linearen Algebra anzuwenden. Allein die Menge an Begrifflichkeiten und der Abstraktionsgrad machen eine Behandlung im Unterricht so gut wie unmöglich, weswegen eine Zuordnung zur Ebene 3 erfolgt.
Kriterien MF	Das Item steht nicht nur exemplarisch für die lineare Algebra: Im Studium wird dieses Wissen in Algebra und der Gruppentheorie erneut aufgegriffen, so dass man tatsächlich von Grundlagenwissen sprechen kann. Der Faktorraum ist eine Menge von Äquivalenzklassen, die einen Vektorraum bilden. Die Elemente einer Äquivalenzklasse unterscheiden sich nur um einen Vektor aus U. Dieses deklarative Wissen würde ausreichen, um zur korrekten Lösung zu kommen. Weitere Wissensanteile sind nicht notwendig.

Item 6: Exponentialfunktion

Wortlaut	Nennen Sie so viele Möglichkeiten, wie Ihnen spontan einfallen, auf welche Weise man die Exponentialfunktion e^x definieren kann.
Lösung	1.) Als Umkehrfunktion zum natürlichen Logarithmus 2.) Über die Ableitungseigenschaft: $f'(x) = f(x); f(0) = 1$ 3.) Über die Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 4.) Über die Folge: $f(x) = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$
Universitäres Gebiet	**Analysis**
Fachwissensebene	**Ebene 1** Die Eulersche Zahl e und ihre Grenzwertdarstellung sind im G9-Lehrplan sowohl im Grundkurs als auch im Leistungskurs vorgesehen. Im Leistungskurs werden mehrere Berechnungsmöglichkeiten sowie die Irrationalität und die Transzendenz von e gefordert.
Kriterien MF	Zur Beantwortung ist allein die Aufzählung von deklarativem Wissen notwendig.
Bemerkungen	Zur korrekten Beantwortung müssen die Formeldarstellungen nicht beherrscht werden. Es genügt wenn die Lehrerin oder der Lehrer weiß, dass es eine Potenzreihe oder eine passende Folge gibt, die die Eulersche Zahl darstellt.

Item 7: Stetigkeitsdefinition

Wortlaut	Was sind Definitionen von Stetigkeit einer Funktion *f(x)* an der Stelle x_0? ($f: D \to \mathbb{R}$, $x \in D$) a) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ b) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$ c) Für alle Folgen x_n mit Grenzwert x_0 gilt: *f(x)* stetig $\Leftrightarrow \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(\lim\limits_{x_n \to x_0} x_n)$ d) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ f umkehrbar und f^{-1} injektiv e) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung *U(f(a))* des Bildpunktes *f(a)* gibt es eine Umgebung *U(a)* mit $f(U(a)) \subseteq U(f(a))$
Lösung	Nur a), c) und e) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Analysis**
Fachwissensebene	**Ebene 2** Stetigkeit wird im G9 Lehrplan anhand stückweise definierter Funktionen in Jahrgangsstufe 11 behandelt. Eine formale Definition, wie sie hier gefordert wird, ist zwar nicht ausdrücklich verlangt, könnte aber trotzdem im Unterricht behandelt werden, weswegen das Item der Ebene 2 zugeordnet wird.
Kriterien MF	Es liegt eine reine Messung von deklarativem Wissen vor.
Bemerkungen	In einigen Schulbüchern kann man sogar die obigen formalen Stetigkeitsdefinitionen finden, was die Zugehörigkeit zur Ebene 2 unterstreicht.

Item 8: Abzählbarkeit

Wortlaut	Welche der folgenden Mengen sind abzählbar unendlich? a) M = { 2;4;6;8;10;12;... } (Menge der geraden natürlichen Zahlen) b) W = { $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4} = 2; \sqrt{5}; \sqrt{6};...$} (Menge der Wurzel aus den natürlichen Zahlen) c) Intervall $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$ d) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ e) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
Lösung	Nur a), b) und d) sind korrekt.
Universitäres Gebiet	**Analysis**
Fachwissensebene	**Ebene 2** Die Abzählbarkeit von Mengen wird im Lehrplan nicht gefordert, kann aber relativ einfach in den Unterricht implementiert werden.
Kriterien MF	Eine Menge M ist abzählbar, wenn sie endlich ist oder eine bijektive Abbildung der natürlichen Zahlen auf M existiert. Insbesondere gibt es eine Bijunktion, die die natürlichen auf die rationalen Zahlen abbildet, weswegen auch die rationalen Zahlen abzählbar sind. Dieses Grundlagenwissen wird in Anfängervorlesungen in Analysis erworben und steht exemplarisch für eine Eigenschaft von Mengen. Zur Lösung genügt ein direkter Einsatz des Wissens.

Item 9: Irrationalität

Wortlaut	Gegeben sei folgende Zahl 0,12122122212… (es gibt unendlich viele Ziffern, wobei die 2er zwischen den 1ern stets um eins zunehmen). Ist diese Zahl dann rational oder irrational? a) Rational b) Irrational c) Kann ich nicht beantworten
Lösung	Nur b) ist korrekt.
Universitäres Gebiet	**Analysis**
Fachwissensebene	**Ebene 1** Irrationale Zahlen werden auch auf diesem Niveau in der Jahrgangsstufe 9 behandelt. Daher kann das Item zur Ebene 1 gerechnet werden.
Kriterien MF	Die Dezimaldarstellung von irrationalen Zahlen bricht nicht ab und ist nicht periodisch. Die gegebene Zahl hat eine nicht abbrechende und nicht periodische Dezimaldarstellung. Die Lösung des Items ergibt sich daher direkt aus der Anwendung von Wissen über irrationale Zahlen. Irrationalität ist eine elementare Eigenschaft von Zahlen, weswegen der Inhalt des Items exemplarisch für diese Teildisziplin steht.
Bemerkungen	Das Item stammt von Zazkis und Sirotric (2004), die es Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe I vorlegten. 76% der in dieser Studie Befragten konnten das Item richtig beantworten.

6.7 Zusammenfassung

Um mathematisches Fachwissen valide zu messen, sind Testitems einzusetzen, bei deren Lösung Meta- und Strategiewissen eine untergeordnete Rolle spielen. Inhaltlich gilt es sich an den im Studium thematisierten Gebieten zu orientieren. Bundesübergreifend können dafür die (lineare) Algebra und die (vertiefte) Analysis identifiziert werden. Das mathematische Fachwissen von Lehrpersonen wird als dreistufiges Ebenen-Modell betrachtet, das sich aus Schulmathematikwissen (Ebene 1), unterrichtsnahem universitärem Wissen (Ebene 2) und unterrichtsfernem universitärem Wissen (Ebene 3) zusammensetzt. Schwerpunktmäßig sollen die Items den Ebenen 1 oder 2 zuzuordnen sein. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei verschiedene Konstrukte zum mathematischen Fachwissen von Lehrkräften gebildet. Das „Mathematische Fachwissen zum Lehren“ (MWFL) lehnt sich an dem Konzept von Hill, Rowan und Ball (2005) an. Die Items sind in schulnahe Situationen eingebettet, wodurch ihre Unterrichtsrelevanz sofort plausibel wird. Beim „Klassischen mathematischen Fachwissen“ (MFWK) werden die Items hingegen wie im Studium üblich streng formal präsentiert.

Folgende tabellarische Übersicht demonstriert, dass die eingesetzten Items durch die Fachgebiete und durch die Ebenen gestreut sind:

Test	Itemnr.	Fachgebiet	Itemüberschrift	Ebene
MFWL	1	Zahlentheorie	Transzendenz von Pi	1
MFWL	2a	Algebra	Lösungsformel Gleichung 5.Grades	2
MFWL	2b	Galoistheorie	Algebraische Begründung zu 2a	3
MFWL	3	Logik	Gültigkeit einer Implikation	1
MFWL	4	Beweismethoden	Vollständige Induktion	2
MFWL	5a	Funktionentheorie	Wurzel ziehen im Komplexen	2
MFWL	5b	Funktionentheorie	Funktionentheoretische Begründung	2
MFWK	1	Lineare Algebra	Linearkombination	1
MFWK	2	Lineare Algebra	Basis eines Vektorraums	1
MFWK	3	Lineare Algebra	Lineare Gleichungssysteme	1
MFWK	4	Lineare Algebra	Eigenvektoren	2
MFWK	5	(Lineare) Algebra	Faktorraum	3
MFWK	6	Analysis	Exponentialfunktion	1
MFWK	7	Analysis	Stetigkeitsdefinition	2
MFWK	8	Analysis	Abzählbarkeit	2
MFWK	9	Analysis	Irrationalität	1

7 Das Prozess-Mediations-Produkt-Modell als Ausgangspunkt für Zusammenhänge zwischen mathematischem Fachwissen und Unterrichtsvariablen

Wir müssen wissen.
Wir werden wissen.
David Hilbert

Im folgenden Kapitel wird ein allgemeines Unterrichtsrahmenmodell vorgestellt, das die komplexen Zusammenhänge von Unterrichtsvariablen veranschaulicht und die Grundlage der Studie bildet. Zunächst wird festgelegt, welche Ausschnitte daraus in der vorliegenden Untersuchung erforscht werden. Die einzelnen Unterkapitel beleuchten die Faktoren näher, deren Zusammenhang mit dem mathematischen Fachwissen untersucht wird. Konkret sind das Variablen aus dem Bereich des Kontextes der Lehrkraft (7.1), des Unterrichtsprozesses (7.2), des Schülermediationsprozesses (7.3) und der Schülerkompetenz (7.4). Eine Zusammenfassung (7.5) schließt das Kapitel ab.

Wie in Kapitel 4 beschrieben wurde, konzentriert sich eine Vielzahl der Studien zum mathematischen Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern darauf, das Fachwissen mit der Schülerleistung direkt zu korrelieren. Das Verfahren direkte Beziehungen einzelner isolierter Unterrichtsfaktoren zu untersuchen dominierte die empirische Forschung der 1980-er Jahre – führte jedoch teilweise zu widersprüchlichen und wenig überzeugenden Ergebnissen (Petko, Waldis, Pauli & Reusser, 2003). Deshalb scheint es angebracht, auf Grundlage systemtheoretischer Überlegungen (Fend, 1998) ein Konstrukt zu entwickeln, welches die komplexen Beziehungen, in die Unterricht und Lernen eingebunden sind, adäquat beschreibt. Das beinhaltet, dass der Unterricht nicht mit einem einfachen Input-Output-Modell erfasst, sondern dass nur durch ein wechselseitiges Zusammenwirken von multiplen Faktoren auf verschiedenen Ebenen beschrieben werden kann. Ein zentraler Gedanke von Fend (1998) ist, den Unterricht als Zusammenspiel von Angebot und Nutzung zu betrachten: Die Lehrkraft liefert den Schülerinnen und Schülern mit dem durch sie gestalteten Unterricht ein Angebot, welches von diesen auf unterschiedlichste Weise genutzt werden kann und individuell verschiedene Auswirkungen haben kann. Es wird damit explizit betont, dass das Lernen an sich durch die Lehrkraft nur gefördert und unterstützt werden kann und letztlich ein kognitiver Prozess der Lernenden ist, der subjektiv und „unsichtbar“ bei den Schülerinnen und Schülern stattfindet. Fends Ideen haben sich als sehr ergiebig für die Forschung erwiesen. Helmke (2003) baut auf Fends Modell auf und erweitert dieses auf sechs Erklärungsblöcke zur Wirkungsweise von Unterricht: Lehrerpersönlichkeit, Klassen- und Fachkontext, Unterricht (Angebot), individuelle Eingangsvoraussetzungen, Mediationsprozesse auf Schülerseite und Lernaktivitäten auf Schülerseite (Nutzung). Hinzu kommt der Block „Wirkungen“: Dieser beinhaltet den Ertrag des Unterrichts in Form von Fachwissen, Grundverständnis, Fertigkeiten usw.

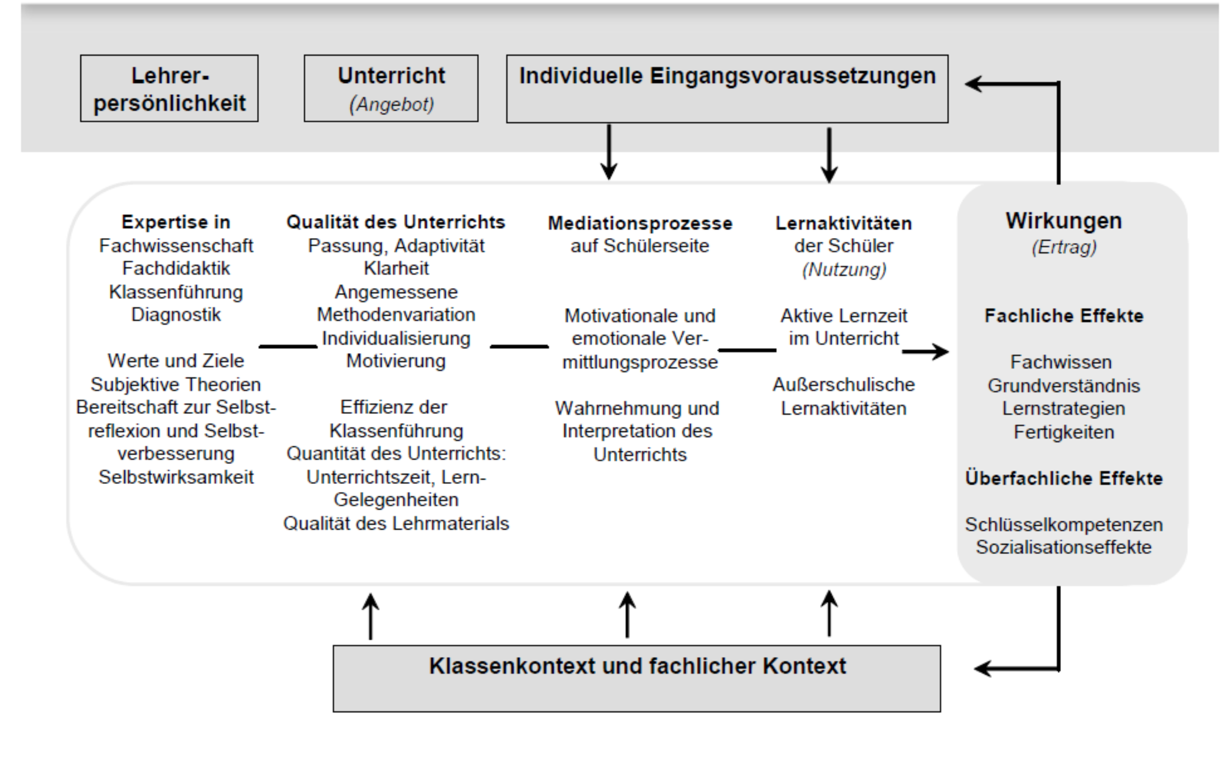


Abbildung 7.1: Das Angebots-Nutzungs-Modell von Helmke (2003)

In diesem Modell wird ersichtlich, wie das Fachwissen der Lehrkraft auf andere Variablen wirken kann: Das Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer (Lehrerpersönlichkeit) wirkt auf den Unterricht (Angebot), dieser wird von den Lernenden verarbeitet (Mediation), was schließlich zu mathematischer Kompetenz führt (Ertrag). Wird eine Korrelation zwischen mathematischem Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerkompetenz festgestellt, gilt es folglich zu untersuchen, wie sich das Fachwissen auf den Unterricht ausgewirkt hat und wodurch sich der Ertrag einstellte.

Pekrun und Reiss (2005) entwickelten darauf aufbauend das sog. Prozess-Mediations-Produkt-Modell, in dem der Mediationsprozess um eine konstruktivistische Komponente erweitert wird. Dieses stellt die Grundlage für die vorliegende Studie dar. Die Funktionalität des Modells konnte beispielsweise von Kuntze (2006) erwiesen werden. In Abbildung 7.2

sind die Unterrichtsvariablen des Modells aufgeführt: der Kontext der Lehrerin oder des Lehrers, der Prozess Unterricht, die Mediation durch die Schülerinnen und Schüler und das Produkt „Mathematische Kompetenz“.

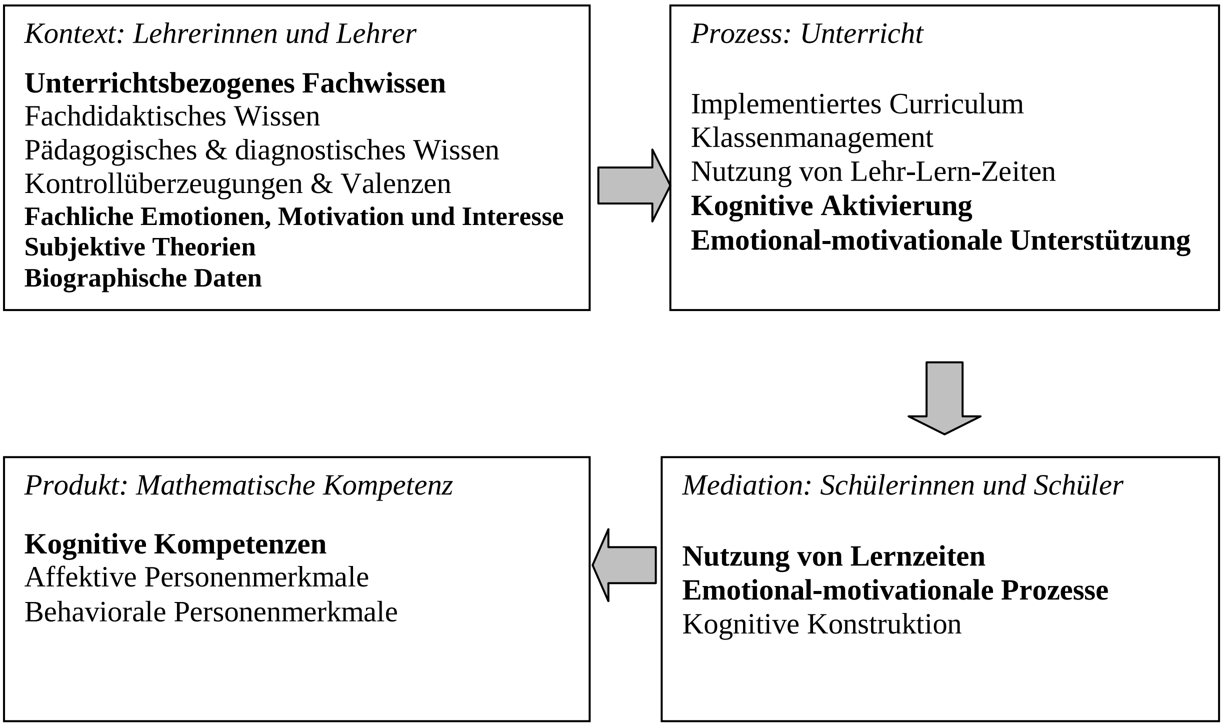


Abbildung 7.2: Prozess-Mediations-Produkt-Modell nach Pekrun und Reiss (2005)

Auch in diesem Modell wird der Zusammenhang des Fachwissens deutlich:
Das Fachwissen der Lehrkraft (Kontext) wirkt auf den Unterricht (Prozess), den die Schülerinnen und Schüler verarbeiten (Mediation) und so mathematische Kompetenz aufbauen (Produkt). Das Prozess-Mediation-Produkt-Modell ist somit in Hinblick auf die Untersuchung von Korrelationen zum mathematischen Fachwissen praktikabel. Da sich diese Studie schwerpunktmäßig mit dem Kontext der Lehrerin oder des Lehrers auseinandersetzt, wird dieser Aspekt allerdings um zwei Bereiche ergänzt: Um die subjektiven Theorien und die biographischen Daten. Unter subjektiven Theorien versteht man individuelle Überzeugungssysteme, die von Lehrkräften zur Vorhersage und Erklärung von Wirkungen herangezogen werden, die jedoch keine wissenschaftlichen Ansprüche erfüllen (siehe 7.1.2). Die subjektiven Theorien und die Biographiedaten sind beides Personenmerkmale, die Einflüsse auf die Unterrichtsqualität haben können. In den folgenden Kapitelabschnitten 7.1 bis 7.4 werden die im Modell hervorgehobenen Einflussgrößen – das sind die in der Studie erhobenen Faktoren – in Bezug zur Unterrichtsqualität und in ihrem Zusammenhang zum mathematischen Fachwissen diskutiert.

7.1 Kontext: Lehrerinnen und Lehrer

Im Unterrichtsprozess stellt die Lehrperson meist die zentrale Entscheidungsinstanz dar. Der Unterricht wird größtenteils durch die Lehrkraft gesteuert, weshalb die Persönlichkeitsmerkmale der Lehrerin oder des Lehrers unweigerlich mit dem Unterricht verknüpft sind. Es ist somit offensichtlich, dass die Dispositionen der Lehrenden Einfluss auf den Unterricht nehmen. Inwieweit sich diese Einflüsse auf die Unterrichtsqualität auswirken, soll im Folgenden diskutiert werden. Dabei werden drei Variablen herausgegriffen und untersucht: erstens die fachlichen Emotionen, die Motivation und das Interesse, zweitens die subjektiven Theorien und drittens die biographischen Daten.

7.1.1 Fachliche Emotionen, Motivation und Interesse

Die Einstellung der Lehrkraft zum unterrichteten Fach ist zweifelsohne ein entscheidender Faktor für den Unterrichtserfolg. Dennoch lässt der empirische Forschungsstand hierzu zu wünschen übrig (Helmke, 2003). Unter Einstellungen werden die Motivation und das Interesse für das Schulfach Mathematik sowie die Emotionen, die für eine Lehrkraft mit dem Fach einhergehen, verstanden. Während zur Lernmotivation von Schülerinnen und Schüler viele Erkenntnisse vorliegen, ist der empirisch nachgewiesene Kenntnisstand bezüglich der Motivation von Lehrkräften lückenhaft. Es ist nicht unmittelbar klar, welche Motive Lehrerinnen und Lehrer antreiben, um erfolgreich zu unterrichten. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass Lehrkräfte, die Mathematik nicht gerne unterrichten, nicht so erfolgreich sind wie Lehrerinnen oder Lehrer, die voller Enthusiasmus für ihr Fach zu begeistern wissen (Brophy & Good, 1986; Gage & Berliner, 1996). In dieser Untersuchung wird der Bereich von Motivation und Interesse durch Items vertreten, die bestimmen, wie gerne das Fach Mathematik laut Eigenaussage unterrichtet wird und welchen Stellenwert die Lehrpersonen höherer Mathematik entgegenbringen. Dies geschieht vor dem Hintergrund der Vermutung, dass Mathematiklehrkräfte mit niedrigem Fachwissen das Fachstudium der höheren Mathematik als eher unwichtig ansehen könnten, wohingegen Mathematiklehrkräfte mit vertieftem verknüpftem Fachwissen die höhere Mathematik als eher wichtig für ihren Schulalltag empfinden. Des Weiteren scheint es plausibel, dass es einen positiven Zusammenhang zwischen der Beliebtheit von Mathematik als Unterrichtsfach und dem mathematischen Fachwissen geben könnte. Einfacher formuliert: Wer sein Fach versteht, der mag es auch.

7.1.2 Subjektive Theorien

Als subjektive Theorien werden persönliche Aussage- und Überzeugungssysteme verstanden, die zur Erklärung und Vorhersage herangezogen werden, ohne dabei die Gütekriterien einer wissenschaftlichen Theorie zu beanspruchen (Helmke, 2003). Im mathematikdidaktischen Diskurs konnte bisher keine einheitliche Definition für dieses Konstrukt gefunden werden, weswegen parallel die Begriffe Beliefs und Weltbilder zu finden sind (Törner, 2002). Diese Uneinigkeit führt zu vielen Variationen der Definition, die sich allerdings oft nur in kleinen Details unterscheiden (Törner, 2002, 2000; Furinghetti & Pehkonen, 2002; Leder & Forgasz, 2002). Allein in den Arbeiten von Schoenfeld (1985, 1992, 1998) finden sich drei verschiedene Definitionen, in denen er sein geändertes Verständnis von Beliefs zum Ausdruck bringt (Rolka, 2006). Als weiteres Exempel für die Differenz der Ansichten kann gelten, dass einige Autoren die Beliefs zum Wissen zählen (Diedrich, Thußbas & Klieme, 2002; Möller et al., 2006), während andere dies nicht tun (Calderhead, 1996). Im Rahmen dieser Untersuchung, die den platonischen Wissensbegriff verwendet, werden die subjektiven Theorien als ein eigenes Konstrukt betrachtet und synonym zu dem Begriff Beliefs verwendet.

An einem Beispiel soll verdeutlicht werden, was eine subjektive Theorie sein kann (aus Lipowsky, Thußbas, Klieme, Reusser & Pauli, 2003):

„In Mathematik gibt es immer einige Schüler/innen, die es einfach nicht begreifen, was auch immer man als Lehrperson tut.“

Diese These genügt nicht den Kriterien einer wissenschaftlichen Diskussion, kann aber nichtsdestotrotz bei Lehrerinnen und Lehrer als gültige Überzeugung fest verankert sein. Als mögliche Konsequenz könnte eine die obige Theorie vertretende Lehrkraft schwachen Schülern weniger Unterstützung anbieten und bei Verständnisschwierigkeiten der Lernenden schnell aufgeben. An diesem Beispiel wird deutlich, wie bedeutend subjektive Theorien für die Motive und somit für die Gestaltung von Unterricht sein können. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass viele Studien die Beliefsforschung thematisieren, obwohl oder vielleicht gerade weil die empirische Evidenz bisher noch gering ist (Helmke, 2003). Ein Exempel für eine Studie mit signifikanten Ergebnissen in diesem Gebiet stellt die Arbeit von Stern und Staub (2000) dar. Stern und Staub untersuchten die Beliefs von Grundschullehrkräften hinsichtlich ihrer konstruktivistischen oder rezeptiven Orientierung im Verständnis von Lehren und Lernen. Lehrkräfte mit einem eher konstruktivistischen Verständnis vertreten die Ansicht, dass Schülerinnen und Schüler – bevor sie mit einem genormten Lösungsweg oder einer Musterlösung konfrontiert werden – eigene Wege zur Lösung von Problemen und

Aufgaben suchen sollten. Ferner sind sie der Ansicht, dass der Austausch über und die Diskussion von Lösungswegen eine zentrale Funktion für den Aufbau mathematischen Verständnisses hat. Lehrpersonen mit einer eher rezeptiven Sichtweise auf den Prozess des Wissensaufbaus sind dagegen der Ansicht, dass Schülerinnen und Schüler erst genormte Verfahren und Prozeduren erlernen müssen, bevor sie diese auf Anwendungsaufgaben übertragen können. Solche Vorgehensweisen müssen demnach zunächst detailliert eingeführt und vermittelt werden. In der Grundschulstudie von Stern und Staub (2002) haben die Beliefs auf das Lehrerhandeln einen bedeutenden Einfluss genommen, hatten Auswirkungen auf die Unterrichtsplanung haben und waren ein Prädiktor für den Lernzuwachs bei Schülerinnen und Schülern sind. Weitere Ergebnisse der Beliefsforschung finden sich in der COACTIV-Studie (Brunner et al., 2006). Sie weisen einen latenten Zusammenhang von rezeptiven bzw. konstruktivistischen Orientierungen der Lehrkraft und ihrem mathematischen Fachwissen nach. Eine rezeptive Auffassung korreliert negativ mit dem mathematischen Fachwissen ($r = -.42$, $p < .05$), während eine konstruktivistische Sichtweise positiv korreliert ($r = .36$, $p < .05$) (Brunner et al., 2006). Das bedeutet, dass konstruktivistisch orientierte Lehrerinnen und Lehrer über ein höheres mathematisches Fachwissen verfügen, während Lehrpersonen, die eine rezeptive Ansicht vertreten, tendenziell ein eher niedriges mathematisches Fachwissen besitzen. Im Rahmen dieser Studie wird untersucht, ob sich diese Ergebnisse replizieren lassen. Über diese Befunde hinaus werden in der Studie subjektive Theorien der Lehrkräfte zur Rolle der Begabung erhoben. Dabei stellt sich die Frage, ob Mathematiklehrerinnen und -lehrer mit niedrigem Fachwissen eher glauben, dass eine angeborene Begabung für Mathematik existiert. Es wäre möglich, dass Lehrkräfte, die selbst über weniger Fachwissen verfügen, dies auf einen „entschuldbaren“ Mangel an Begabung zurückführen und daher verstärkt zu dieser Ansicht neigen. Des Weiteren werden Beliefs der Lehrerinnen und Lehrer ermittelt, auf welche Weise eine Leistungsförderung bei Schülerinnen und Schüler zu erzielen ist. Dies kann zum einen durch positive Emotionen wie Lob geschehen, zum anderen durch ein Angebot interessanter Aufgaben. Die ermittelten subjektiven Theorien werden anschließend explorativ auf eine Korrelation mit dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft hin überprüft.

7.1.3 Biographische Daten

Im Zusammenhang mit mathematischem Fachwissen kommen auch biographische Daten von Lehrerinnen und Lehrern als Untersuchungsgegenstand in Frage. Da man davon ausgehen kann, dass einige Inhalte des mathematischen Fachwissens mit der Zeit in Vergessenheit geraten, wäre ein Zusammenhang von mathematischem Fachwissen und dem Alter der Lehrkraft bzw. den Jahren der Diensttätigkeit vorstellbar.

Darüber hinaus wird untersucht, ob eine eher naturwissenschaftlich orientierte Fächerkombination einer Lehrerin oder eines Lehrers – speziell die Kombination Mathematik und Physik – ein Indikator für höheres mathematisches Fachwissen sein kann. Zum einen werden Lehrkräfte mit dem Beifach Physik bereits im Studium verstärkt mit Mathematik in Anwendungssituationen konfrontiert. Zum anderen könnte allein die bewusste Entscheidung für diese Fächerkombination mit dem mathematischen Fachwissen in Verbindung stehen. Aus diesen Gründen wäre es denkbar, dass diese Ausrichtung mit einer höheren Ausprägung von mathematischem Fachwissen einhergeht.

Eine weitere biographische Lehrervariable stellt das Bundesland dar, in dem der Studienabschluss erworben wurde. In Kapitel 6 wurde argumentiert, dass die inhaltliche Ausrichtung der Lehramtsstudiengänge in Mathematik über alle Bundesländer hinweg als vergleichbar angesehen werden kann. Die konkrete Umsetzung der Inhalte, beispielweise ob ein zentrales Staatsexamen existiert oder die Prüfungen getrennt voneinander abgelegt werden können, könnte jedoch zu verschiedenen Wissensständen von Lehrkräften unterschiedlicher Bundesländer führen. Daher wird auch diese Variable in die Studie miteinbezogen.

Des Weiteren wird in der Studie untersucht, ob ein aussagekräftiger Zusammenhang zwischen dem Geschlecht der Lehrkraft und dem mathematischen Fachwissen besteht. In der PISA-Studie 2009 beispielsweise schnitten in Deutschland Jungen in Mathematik signifikant besser ab als Mädchen (Klieme et al., 2010). Andererseits finden sich auch zahlreiche Belege dafür, dass bezüglich der mathematischen Kompetenz keine Geschlechterunterschiede existieren (vgl. Hyde, 2005; Heinze et al., 2007). Insgesamt ergibt sich somit ein widersprüchliches Bild, weshalb ein möglicher Zusammenhang zwischen dem Geschlecht der Lehrkraft und deren mathematischem Fachwissen ebenfalls Gegenstand der Untersuchung sein soll.

7.2 Prozess: Unterricht

Der Unterricht ist der Ort und der Zeitpunkt, in dem das eigentliche Lernen stattfindet und somit für die mathematikdidaktische Forschung von größtem Interesse. Es gestaltet sich allerdings als schwierig und sehr aufwendig, den Unterricht zum Gegenstand von empirischen Untersuchungen zu machen. Eine Möglichkeit besteht darin, trainierte Testleiter dem Unterricht beiwohnen und ihre Beobachtungen zu gewissen Aspekten schriftlich fixieren zu lassen. Diese werden dann nachträglich ausgewertet. Nachdem die 1995 in Deutschland durchgeführte TIMSS-Videostudie bedeutende Ergebnisse in der Forschung liefern konnte, hat sich die Videografie als eine Methode zur Unterrichtsbeobachtung durchgesetzt. Ihre Vorteile liegen klar auf der Hand: Der Unterricht kann beliebig oft analysiert, Beobachtungskriterien auch nachträglich angepasst und der Aufwand merklich reduziert werden. In Rahmen der vorliegenden Studie wird der Unterricht der teilnehmenden Lehrkräfte allerdings nicht direkt beobachtet, sondern durch die subjektiven Einschätzungen von Schülerinnen und Schülern gemessen. Damit ist auch bei der Bewertung der Ergebnisse Vorsicht geboten.

7.2.1 Kognitive Aktivierung

Die Unterrichtsqualität hängt in bedeutendem Maße von der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler ab (Clausen, Reusser & Klieme, 2003; Clausen, 2002). Zur kognitiven Aktivierung zählen alle Maßnahmen, Unterstützungen und Vorgehensweisen der Lehrkraft, die bei Schülerinnen und Schülern eine Beschäftigung mit Unterrichtsinhalten auslösen und dadurch einen Lernprozess initiieren. Einer Lehrkraft stehen diverse Möglichkeiten zur Verfügung, um Schülerinnen und Schüler kognitiv zu aktivieren: So können beispielsweise adressatengerechte Aufgaben ausgewählt werden, Fragen in angemessenen Schwierigkeitsgraden gestellt werden, klare strukturierte Anweisungen gegeben werden oder Schülerfehler konstruktiv als Lerngelegenheit genutzt werden. Letzterer Punkt ist ein Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Studie. Die Einschätzung der Schülerinnen und Schüler, ob sie ihre Lehrkraft bei der Fehlerkorrektur im Unterrichtsgespräch so unterstützt, dass eine kognitive Aktivierung stattfindet, wird mittels eines von Heinze (2006) entwickelten Fragebogens erhoben. Reagiert eine Lehrerin oder ein Lehrer auf einen Schülerfehler damit, lediglich die richtige Antwort zu nennen oder einen Mitschüler aufzurufen, der die richtige Antwort weiß, so ist der Grad der Aktivierung wohl niedriger, als wenn der Fehler zum Gegenstand des Unterrichts gemacht und in einer angemessenen Weise thematisiert wird. Mehrere Untersuchungen zu diesem Thema konstatieren, dass dem Aufbau einer Fehlerkultur eine wichtige Bedeutung für die Unterrichtsqualität zukommt (Schoy-Lutz, 2005; Heinze, 2006; Chott, 2004). Ein ausgeprägtes mathematisches Fachwissen der Lehrkraft könnte somit dazu führen, dass die Lehrkraft bei Schülerfehlern kognitiv unterstützender reagiert als Lehrkräfte, deren Mängel an mathematischem Fachwissen eher eine Vermeidung der Fehlerbehandlung bedingt. Der Zusammenhang zwischen kognitiver Unterstützung und mathematischem Fachwissen wird daher Gegenstand der Untersuchung.

7.2.2 Emotional-motivationale Unterstützung

Die Steigerung des Interesses der Schülerinnen und Schüler wird als ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichtes betrachtet (Pekrun & Zirngibl, 2004; Krapp, 1998). Man geht davon aus, dass die Motivation der Lernenden von den Unterrichtsbedingungen abhängt, wobei die Wahrnehmung dieser Bedingungen wesentlich von der Lehrkraft abhängt (Heinze & Reiss, 2004). Die Lehrerin oder der Lehrer hat folglich die Aufgabe die Schülerinnen und Schüler zu motivieren, d.h. einen ausreichenden Anreiz für die Beschäftigung mit dem Unterrichtsstoff zu schaffen. Im Fach Mathematik kann dies durch die Vorgabe authentischer Aufgaben und Situationen, konkrete Beispiele, alltagsnahe Projekte, das Aufzeigen von Anwendungsmöglichkeiten sowie innovative und anregende Lehr-Lern-Arrangements erreicht werden (Helmke, 2003).

Neben der motivationalen Unterstützung sind auch die Emotionen der Lernenden zu berücksichtigen, da diese für den Lernerfolg einen nicht zu vernachlässigenden Faktor darstellen (vgl. 7.3.2). Auch hier kann die Lehrerin oder der Lehrer durch die Förderung einer entsprechenden Lehrer-Schüler-Beziehung positiv einwirken. Die Lehrkraft kann etwa verhindern, dass sich Schülerinnen und Schüler eine „gelernte Hilflosigkeit“ aneignen oder durch Misserfolge ängstlich werden (Oser, 2001).

In dieser Studie wird diese emotionale Unterstützung am Beispiel des affektiven Lehrerverhaltens beim Fehlermachen im Unterricht gemessen. Affektives Verhalten meint hier ein stark gefühlsgesteuertes Verhalten wie zum Beispiel Ärger oder Gereiztheit.

Es ist ein Anliegen dieser Untersuchung zu prüfen, ob sich Zusammenhänge zwischen dem Gewähren emotionaler Unterstützung und dem mathematischen Fachwissen einer Lehrperson finden lassen.

7.3 Mediation: Schülerinnen und Schüler

Unterricht hat keinen direkten Effekt. Seine Wirkungen entfaltet er ausschließlich auf dem Weg der Mediation, d.h. über individuelle Verarbeitungsprozesse wie Lern- und Denkprozesse (Helmke, 2003). Zwar findet Mediation auf Seiten der Schülerinnen und Schüler statt, da jedoch die Lehrkraft für die Schaffung der Rahmenbedingungen von Unterricht verantwortlich ist, kann sie indirekt auf den Mediationsprozess einwirken.

7.3.1 Nutzung von Lernzeiten

Die Gestaltung des Unterrichts sollte so ablaufen, dass die Unterrichtszeit möglichst optimal als Lernzeit genutzt werden kann. Die Unterrichtszeit umfasst alle von der Lehrkraft gehaltenen Unterrichtsstunden, während die aktive Lernzeit nur diejenige Zeit meint, in der die Schülerinnen und Schüler dem Unterrichtsinhalt ein Mindestmaß an Aufmerksamkeit entgegenbringen. Es konnte empirisch gezeigt werden, dass eine positive Korrelation zwischen Unterrichtszeit und Leistung besteht, die jedoch ab einem gewissen Punkt abbricht, so dass zusätzliche Unterrichtszeit nur noch minimale Leistungssteigerungen hervorbringt (Anderson, 1995; Fisher, 1995). Die genannten Studien beziehen sich jedoch nur auf die Unterrichtszeit, weshalb keine Aussage über aktive Lernzeit und Leistung möglich ist. Es gestaltet sich als schwierig die Lernzeit zu erfassen, da die tatsächlichen mentalen Vorgänge einer Schülerin oder eines Schülers nicht messbar sind. Im Folgenden werden mögliche Voraussetzungen angegeben, die dazu führen können, dass eine Schülerin oder ein Schüler die Lernzeit effektiv nutzt.

Zum einen muss bei den Lernenden das zum Verständnis notwendige Grundwissen vorhanden sein. Fehlt dieses, bleibt die Lernzeit trotz des Willens und der Bereitschaft von Schülerseite ungenutzt. Zum anderen sollte der Inhalt der Lernzeit dem eigenen Fähigkeitsselbstbild und den individuellen Ansichten und Erwartungen nicht widersprechen. Die zweite Voraussetzung manifestiert sich in dieser Untersuchung in der Frage, wie eine Schülerin oder ein Schüler mit eigenen Fehlern umgeht. Wird der Fehler verbessert, hinterfragt und reflektiert, so gilt die Lernzeit als effektiv genutzt. Vertritt der Schüler hingegen die Ansicht, dass Fehler grundsätzlich zu vermeiden sind und nicht zum Lernen dazugehören, so nutzt dieser Schüler seine Lernzeit nicht effektiv. In diesem Fall könnte der Lehrer oder die Lehrerin die individuelle Fehlerbehandlung fördern. Dabei wäre es möglich, dass eine Lehrkraft mit hohem Fachwissen jenes aus einem positiven Umgang mit Fehlern erworben hat und deshalb ihrer Klasse den hohen Stellenwert der Fehlerbehandlung besser vermitteln kann als eine

Lehrerin mit niedrigem Fachwissen. Ob sich dazu Zusammenhänge finden, wird in dieser Arbeit untersucht werden.

7.3.2 Emotional-motivationale Prozesse

In diesem Abschnitt wird erklärt, welche Bedeutung Emotionen und Motivation für den Unterrichtserfolg haben. Zweifelsohne sind Emotionen und das Interesse eng verknüpft, weswegen von emotional-motivationalen Prozessen die Rede ist. Zu den emotional-motivationalen Prozessen einer Schülerin oder eines Schülers zählen das Gefühlsleben infolge der subjektiven Wahrnehmung des Lerninhalts sowie das Interesse und die Motivation.

Es werden nun zunächst die Emotionen erläutert und im Anschluss der motivationale Aspekt näher beleuchtet. Emotionen im Lernprozess sind beispielsweise Angst, Freude, Spaß, Ärger, Unbehagen, Langeweile usw. Das Forschungsprojekt PALMA beschäftigte sich mit der Frage, wie das Emotionserleben von Schülerinnen und Schülern den Kompetenzerwerb in Mathematik beeinflusst (Pekrun, Götz, vom Hofe et al., 2004). In der ersten Projektphase wurden spezielle Items zur Erhebung von Mathematikemotionen erstellt, die sogenannten „Münchener Skalen zu Mathematikemotionen“ (Pekrun, Götz & Frenzel, 2005), welche sieben Emotionen im Fach Mathematik erfassen (Freude, Stolz, Ärger, Angst, Scham, Langeweile und Hoffnungslosigkeit). In einer empirischen Studie mit mehr als 2000 Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I konnten im Querschnitt enge Zusammenhänge zwischen diesen Schüleremotionen und mathematischer Leistung gefunden werden. So korreliert Mathematikfreude deutlich positiv mit der Testleistung, während die Korrelationen für negative Emotionen wie Angst, Hoffnungslosigkeit und Langeweile überwiegend negativ ausfallen (Pekrun, Götz, vom Hofe et al., 2004). Es konnte weiterhin nachgewiesen werden, dass sich die Emotions- und Leistungsentwicklung wechselseitig beeinflussen. Darüber hinaus betonen die Autoren die Bedeutung der Schüleremotionen für motivationale Prozesse und die nach dem Schulabschluss folgende Bildungs- und Berufswahl (Pekrun et al., 2006).

In der vorliegenden Studie werden die emotionalen Prozesse durch die „Angst vor dem Fehlermachen im Mathematikunterricht“ repräsentiert. Gerade die Fehlersituation geht häufig mit einer emotionalen Reaktion des Lernenden einher. Es wäre möglich, dass Lehrkräfte mit hohem Fachwissen und solche mit niedrigem unterschiedlich mit der Schülerangst vor Fehlern umgehen. Es wird daher zum Gegenstand einer Forschungsfrage, ob die Angstempfindung von Schülerinnen und Schülern durch ein hohes oder niedriges Fachwissen der Lehrkraft unterschiedlich beeinflusst wird.

Unter Motivation in Bezug auf das Lernen versteht man „*die Absicht oder Bereitschaft einer Person, sich in einer konkreten Lernsituation intensiv und ausdauernd mit einem Gegenstand auseinanderzusetzen*“ (Krapp & Weidenmann, 2001, S.218).

Zunächst gilt es zwei Dimensionen von Motivation zu unterscheiden, und zwar die intrinsische und die extrinsische Motivation. Intrinsische Motivation liegt dann vor, wenn die Beweggründe für eigene Anstrengungen in der subjektiven Wahrnehmung des Schülers oder der Schülerin aus einem persönlichen Interesse am Fach resultieren. Die Belohnung liegt also in der Handlung selbst (Deci & Ryan, 1993). Bei der extrinsischen Motivation steht als Ziel des Lernenden das Erlangen einer von außen kommenden Belohnung im Vordergrund. Solche Formen der Belohnung wären beispielsweise das Lob der Eltern bei einer guten Note oder die Anerkennung einer Leistung durch die Mitschüler. In Anlehnung an Pekrun (2000, 2002, 2003) wird die extrinsische Motivation innerhalb dieser Studie in drei nach dem Beweggrund unterschiedene Kategorien aufgeteilt: die fremdbewertungsbezogene Leistungsmotivation, die sozial vergleichende Leistungsmotivation und die zukunftsorientierte Motivation. Allgemein betrifft die Leistungsorientierung einen Bereich der Motivation, der darauf ausgelegt ist, Erfolge zu erzielen und Misserfolge zu vermeiden (Heckhausen, 1989). Zum einen kann diese Leistungsmotivation „fremdbewertungsbezogen“ sein, klassischerweise durch Noten. Zum anderen sind „sozial vergleichende“ Komponenten denkbar, in erster Linie wenn die Schülerinnen und Schüler ihre Leistung an den Mitschülern messen. Die zukunftsorientierte Motivation bezieht sich auf den Beweggrund, sich aus außerschulischen, an der Zukunft orientierten Motiven mit Mathematik zu beschäftigen, beispielsweise das Motiv später einmal viel Geld verdienen zu wollen. Die reichhaltige empirische Forschung zum Thema Motivation lässt keinen Zweifel daran, dass motivationale Dispositionen immanent für Lernprozesse sind und positive Korrelationen zwischen Motivation und Schülerleistungen bestehen (Pekrun & vom Hofe, 2001; Prenzel et al., 2004; Heinze & Reiss, 2004; Reiss, 2005). Früher wurden intrinsische und extrinsische Motivation als Antagonisten gesehen. Heute besteht jedoch weitgehend Konsens darüber, dass extrinsische Belohnungen die intrinsische Motivation eher aufrechterhalten als schwächen (Deci & Ryan, 1993; Weinert, 1997). Eng verknüpft mit der Motivation ist das Selbstkonzept der Schülerinnen und Schüler, das die Einschätzung der eigenen Fähigkeiten bzw. das eigene Leistungsvermögen in Mathematik wiedergibt. (Pekrun & Zirngibl, 2004). Für weitere Ergebnisse der Motivationsforschung wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Festzuhalten bleibt, dass Motivation äußerst wichtig für den Lernprozess ist und verschiedene Arten von Schülermotivation existieren. Es ist für diese Untersuchung nun von Interesse, inwieweit die Bedingungsvariable des mathematischen

Fachwissens die verschiedenen Motivationstypen beeinflusst. Es wäre denkbar, dass Lehrkräfte mit hohem mathematischen Fachwissen den Unterricht so gestalten, dass es Einfluss auf die Motivation der Schülerinnen und Schüler haben könnte. Diesen möglichen Zusammenhängen zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft und der Motivation der Schülerinnen und Schüler wird im Auswertungsteil nachgegangen.

7.4 Produkt: Mathematische Kompetenz

Als Produkt des Unterrichtsprozesses wird im Modell von Reiss und Pekrun – neben affektiven und behavioristischen Personenmerkmalen – die mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schülern angegeben. Der Kompetenzerwerb stellt ein zentrales Ziel von Unterricht dar. Im Folgenden wird überblicksartig erarbeitet, was den Begriff Kompetenz ausmacht und welche Rolle dieser im Rahmen der vorliegenden Untersuchung spielt.

Kompetenzen nach Weinert

"*… sind die bei Individuen verfügbaren oder von ihnen erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“*

(Weinert, 2001,S.27f)

Der so definierte Kompetenzbegriff umfasst neben dem Wissen und den Fertigkeiten auch die Motivation und den Willen, dieses Wissen und diese Fertigkeiten zu nutzen. Er macht deutlich, dass nicht nur die Kenntnis von Wissen, sondern auch dessen Anwendung in unterschiedlichen Problemlösesituationen bedeutend ist. Durch die Betonung der Variabilität der Problemlösesituationen wird zudem ersichtlich, dass mathematische Kompetenz eine gewisse kognitive Flexibilität beinhaltet, weswegen mathematisches Wissen verständnisvoll und vernetzt aufgebaut werden muss. Der Kompetenzbegriff konnte sich in der mathematikdidaktischen Forschung etablieren, beispielsweise bauen sowohl die PISA- als auch die TIMS-Studie ihre Untersuchung auf einem Kompetenzkonstrukt auf. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei verschiedene Instrumente zur Ermittlung der Kompetenz herangezogen. Bei dem einen wird auf die mathematische Leistung als kognitive Grunddisposition, bei dem anderen auf nicht-mathematische übergeordnete Problemlösekompetenz zurückgegriffen.

7.4.1 Mathematische Argumentationskompetenz

Reiss, Hellmich und Thomas (2002) haben in einer Studie mit über 600 Schülerinnen und Schülern der siebten Jahrgangsstufe einen Rasch-skalierbaren Test entwickelt, der neben geometrischem Grundwissen auch die Beweis- und Argumentationskompetenz misst. Dem mehrfach erfolgreich erprobten Test (Reiss, 2002; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002; Heinze & Reiss, 2004; Reiss et al., 2006) liegt ein dreistufiges Kompetenzmodell zugrunde, mithilfe dessen die Items theoretisch hergeleiteten Kompetenzstufen zugeordnet werden können. Die Kompetenzstufen sind hierarchisch aufgebaut, so dass eine Person, die eine höhere Kompetenzstufe erreicht hat, auch die Aufgaben darunter liegender Kompetenzstufen ausreichend sicher beherrscht.

Der Test beinhaltete folgende Kompetenzstufen:

Kompetenzstufe I: Einfaches Anwenden von Regeln und Basiswissen

Aufgaben dieser Kompetenzstufe prüfen das einfache Anwenden von Regeln oder Berechnungen, die keine höhere Komplexität besitzen.

Kompetenzstufe II: Begründen und Argumentieren (einschrittig)

Bei Items dieser Kompetenzstufe muss die Vorgehensweise durch eine einschlägige Argumentation begründet sein, wobei ein Fakt ausreichend ist.

Kompetenzstufe III: Begründen und Argumentieren (mehrschrittig)

Zur richtigen Lösung müssen mehrere Argumente verknüpft werden.

Reiss, Hellmich und Thomas (2002) konnten zeigen, dass die Aufgaben zur Beweis- und Argumentationskompetenz den Schülerinnen und Schülern sehr viel schwerer fielen als die Grundwissens- und Routineaufgaben. Des Weiteren stellten sie starke Klassenunterschiede in der Kompetenzentwicklung fest und folgerten daraus, dass der Unterricht eine entscheidende Rolle bei der Entwicklung der mathematischen Argumentationskompetenz spielt. Für die Gestaltung des Unterrichts ist jedoch in größten Teilen die Lehrkraft verantwortlich. Insofern erscheint es sinnvoll, die Variablen der Lehrkraft für die Schülerkompetenz mit einzubeziehen, speziell in diesem Fall das mathematische Fachwissen der Lehrkraft. Mehrere Aspekte sind bezüglich eines Zusammenhanges zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft und der mathematischen Schülerkompetenz denkbar. Zwei seien hier genannt:

(i) Lehrerinnen und Lehrer mit hohem mathematischen Fachwissen legen besonderen Wert auf mehrschrittiges Begründen und Argumentieren. Sie richten ihren Unterricht dementsprechend aus, wodurch dieser Kompetenzbereich bei den Schülerinnen und Schülern dieser Lehrkräfte besser ausgebildet sein könnte.

(ii) Lehrerinnen und Lehrer mit niedrigem mathematischen Fachwissen messen den kognitiven Grundlagen wie dem Anwenden von Regeln und dem Basiswissen mehr Wert bei und gestalten ihren Unterricht danach, wodurch die Schülerinnen und Schüler in Kompetenzstufe I bessere Ergebnisse erzielen könnten.

Beide Ansichten greifen auf den Gedanken zurück, dass das Ausführen von Beweisen von den Lehrkräften selbst als sehr schwierige mathematische Tätigkeit gesehen wird und dadurch die eigene Bewertung des Inhaltes eine Rolle bei der Unterrichtsgestaltung spielt. Inwieweit diese Annahmen gerechtfertigt sind, wird im Rahmen der Untersuchung geklärt. Ein Zusammenhang zwischen dem mathematischen Fachwissen und einzelnen Kompetenzstufen wäre zumindest plausibel.

7.4.2 Fächerübergreifende Problemlösekompetenz

Unter der fächerübergreifender Problemlösekompetenz versteht man in Anlehnung an PISA

„die Kapazität eines Individuums, kognitive Prozesse zu nutzen, um realen, überdisziplinären Situationen gegenüberzutreten und sie zu lösen, in denen der Lösungsweg nicht unmittelbar sichtbar ist, und in denen die Kompetenzbereiche oder Lehrplanbereiche, die zutreffen könnten, nicht innerhalb einer einzelnen Domäne wie Mathematik, Naturwissenschaft oder Lesen liegen“ (OECD, 2003)

Im Gegensatz zum mathematischen Problemlösen brauchen Schülerinnen und Schüler zur Lösung fächerübergreifender Problemlöseaufgaben weniger Vorwissen, sondern müssen durch Strategiewissen zur Lösung kommen. Bei PISA 2003 erzielten die deutschen Schülerinnen und Schüler im internationalen Vergleich weitaus bessere Ergebnisse im Problemlösen als in Mathematik, wobei eine hohe latente Korrelation von mathematischer Kompetenz und Problemlösekompetenz festgestellt wurde (Prenzel et al., 2004). Daraus wird gefolgert, dass bei den deutschen Schülerinnen und Schülern noch ungenutztes Potential für die Entwicklung mathematischer Kompetenz vorhanden ist. Problemlösekompetenz wird somit als Voraussetzung für mathematische Kompetenz angesehen. Inwieweit der

Mathematikunterricht bei der Entwicklung fächerübergreifender Problemlösekompetenz eine Rolle spielt, ist hingegen unklar. Es wäre jedoch denkbar, dass der Mathematikunterricht die Problemlösekompetenz besonders anspricht und dieser Bereich je nach Lehrkraft gefördert oder vernachlässigt wird. Diesbezüglich wäre es plausibel, dass gerade Lehrkräfte mit hohem Fachwissen vermehrt auch die Problemlösekompetenz in ihren Unterricht integrieren. Aus diesem Grund soll explorativ untersucht werden, ob sich ein Zusammenhang zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrperson und der fächerübergreifenden Problemlösekompetenz findet.

7.5 Zusammenfassung

Im folgenden Schaubild werden alle in diesem Kapitel vorgestellten Subkategorien der Einflussgrößen des Prozess-Mediation-Produkt-Modells überblicksartig dargestellt.

Kontext: Lehrerinnen und Lehrer

Unterrichtsbezogenes Fachwissen
Fachdidaktisches Wissen
Pädagogisches & diagnostisches Wissen
Kontrollüberzeugungen & Valenzen
Fachliche Emotionen, Motivation und Interesse
Lieblingsunterrichtsfach
Wichtigkeit von höherer Mathematik
Subjektive Theorien
Konstruktivistische Sichtweise
Rezeptive Sichtweise
Begabungsbedeutung
Leistungsförderung durch pos. Emotionen
Leistungsförderung durch Aufgaben
Biographische Daten
Alter, Geschlecht, Lehrerfahrung,
Fächerkombination, Studienabschluss

Prozess: Unterricht

Implementiertes Curriculum
Klassenmanagement
Nutzung von Lehr-Lern-Zeiten
Kognitive Aktivierung
Kognitiv-Unterstützendes Lehrerverhalten
Emotional-motivationale Unterstützung
Affektives Lehrerverhalten

Mediation: Schülerinnen und Schüler

Nutzung von Lernzeiten
Individueller Umgang mit Fehlern
Emotional-motivationale Prozesse
Interesse, Motivation & Selbstkonzept
Angst vorm Fehlermachen
Kognitive Konstruktion

Produkt: Mathematische Kompetenz

Kognitive Kompetenzen
Argumentationskompetenz
Problemlösekompetenz
Affektive Personenmerkmale
Behaviorale Personenmerkmale

Abbildung 7.5: Prozess-Mediations-Produkt-Modell des Mathematikunterrichts von Pekrun und Reiss (2005)

8 Untersuchungsrahmen und Erhebungsinstrumente

Denken und Wissen sollten immer gleichen Schritt halten.
Das Wissen bleibt sonst tot und unfruchtbar.
Wilhelm von Humboldt

Zur Beantwortung der Forschungsfragen aus Kapitel 5 wurden die in dieser Studie entwickelten Fachwissenstests innerhalb eines DFG-Projekts erprobt. In Kapitel 8.1 werden die Rahmeninformationen dieses Projektes skizziert und die für die vorliegende Arbeit relevanten Aspekte herausgestellt. Des Weiteren wird die Stichprobe der teilnehmenden Lehrkräfte beschrieben. Anschließend werden in Kapitel 8.2 die zur Messung von Schüler- und Lehrervariablen eingesetzten Testinstrumente vorgestellt.

8.1 Untersuchungsrahmen

Die vorliegende Untersuchung war in das Teilprojekt „Begründen und Beweisen in der Geometrie – Bedingungen des Wissensaufbaus bei Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe“ des DFG-Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität von Schule“ eingebunden. In den ersten beiden Projektphasen standen die individuelle Ebene und die Ebene der Schulklasse im Mittelpunkt des Interesses, wobei der Fokus auf der Betrachtung der individuellen Kompetenzentwicklung in Abhängigkeit von der Schülermotivation lag. Neben der Entwicklung von geeigneten Lernumgebungen zur Verbesserung der Beweis- und Argumentationskompetenz wurden auch Testinstrumente zur Erhebung der Beweiskompetenz und der Motivation konstruiert. In der dritten Projektphase wurde der Fokus hin zum Einfluss des Unterrichts auf die Lernprozesse und damit insbesondere auch zur Rolle der Lehrerinnen und Lehrer verschoben. Diesbezüglich wurde ein Lehrertraining ausgearbeitet, in dem erfolgreich getestete Unterrichtsmaterialien vorgestellt wurden und die Schaffung einer produktiven Fehlerkultur thematisiert wurde. In der Studie interessierte man sich für vielfältige Fragestellungen, die an dieser Stelle nicht in voller Ausführlichkeit behandelt werden können. Im Folgenden werden deshalb nur die für die vorliegende Untersuchung relevanten Erhebungen angesprochen. Die erste Messung fand am Ende des Schuljahres mit siebten Klassen statt. In zwei aufeinander folgenden Schulstunden wurden die Beweis- und Argumentationskompetenz sowie die Problemlösekompetenz erhoben. Während für die Aufgaben zum Beweisen 45 Minuten vorgesehen waren, standen für die Problemlöseaufgaben 30 Minuten zur Verfügung. In den verbleibenden 15 Minuten füllten die Schülerinnen und

Schüler einen Fragebogen zu ihrer Motivation und einen Fragebogen zum Fehlerumgang aus. Die Lehrkraft der Klasse wurde darum gebeten, während dieser Zeit zwei Fragebogen zu bearbeiten. Der eine bestand aus Items zu den Einstellungen über das Lehren und Lernen, der andere thematisierte die persönliche Meinung zum Fachstudium und die Wichtigkeit von mathematischen Teildisziplinen für den Unterricht. Die Erhebung fand an der jeweiligen Schule statt und wurde von einem geschulten Testleiter durchgeführt. In einer zweiten Messung, die sich nur auf die Ebene der Lehrkräfte bezog, wurde im Rahmen einer Lehrerfortbildung testleiteradministriert das mathematische Fachwissen erhoben, wobei die in Kapitel 6 vorgestellten Tests zum Einsatz kamen, für deren Bearbeitung insgesamt 40 Minuten zur Verfügung standen (vgl. Abbildung 8.1).

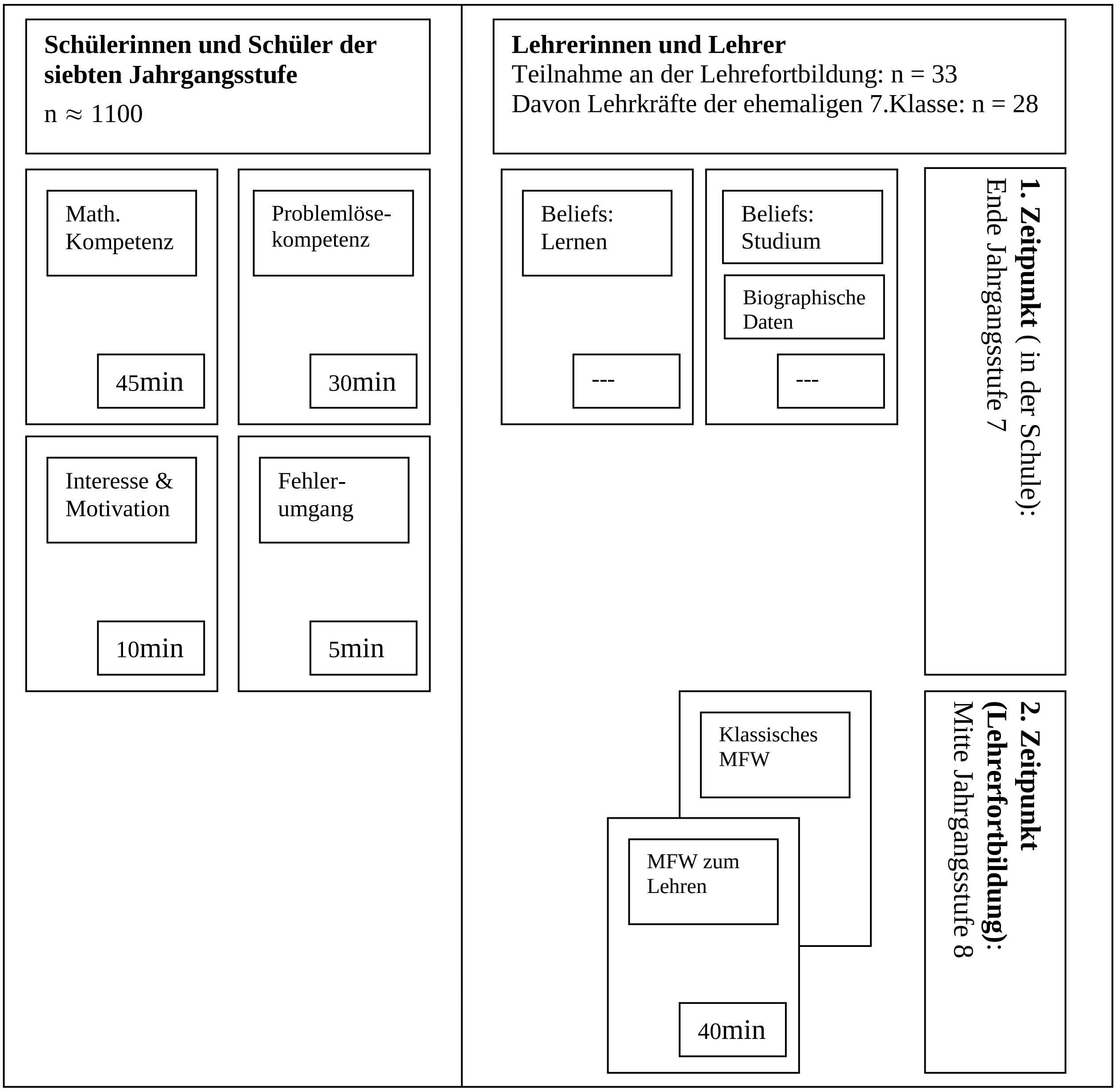


Abbildung 8.1: Untersuchungsdesign

Im Rahmen des Forschungsvorhabens wurden über 50 Schulen angeschrieben und deren Mathematiklehrkräfte um Mitarbeit an der Studie gebeten. Voraussetzung zur Teilnahme war, dass die Lehrerinnen und Lehrer eine 7. Klasse unterrichteten und diese Klasse voraussichtlich auch im darauffolgenden Schuljahr in Mathematik weiterführen würden. 40 Lehrkräfte signalisierten Bereitschaft zur Teilnahme. In den siebten Klassen dieser Lehrerinnen und Lehrer wurden am Ende des Schuljahres Leistungsdaten sowie das mathematische Interesse von insgesamt über 1100 Schülerinnen und Schüler erhoben. An der Lehrerfortbildung nahmen 12 der Lehrkräfte nicht teil. Als Grund gaben einige terminliche Probleme an, andere dass sie ihre ehemalige siebte Klasse nicht als achte Klasse erhielten. 5 Lehrkräfte, die diese 7. Klassen übernommen hatten, entschlossen sich an der Lehrerfortbildung teilzunehmen. Diese können allerdings nicht zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Fachwissen und anderen Variablen herangezogen werden, da sich die Schülerdaten auf die ursprüngliche Lehrkraft beziehen. Insgesamt konnte somit das mathematische Fachwissen von 33 Lehrerinnen und Lehrern gemessen werden, wobei sich diese Gruppe aus 5 neuen Lehrkräften und 28 Lehrkräften der ehemaligen siebten Klasse zusammensetzt.

Folglich können für die Validierung des Fachwissenstests und zur Untersuchung der Zusammenhänge von Fachwissen und Lehrervariablen 33 Lehrkräfte herangezogen werden. Für die Analyse der Korrelation des Lehrerfachwissens mit Schülervariablen beläuft sich die Stichprobe auf 28 Lehrerinnen und Lehrer.

Die Geschlechterverteilung und der Altersdurchschnitt der Stichprobe (46,9% weiblich, M = 41,2 Jahre, SD = 8,8 Jahre) entsprechen gängigen Zufallsstichproben von Lehrkräften, wie man aus einem Vergleich mit Werten der COACTIV-Studie schließen kann (46,6% weiblich, M = 46,6 Jahre, SD = 8,5 Jahre; Brunner et. al., 2006).

8.2 Erhebungsinstrumente

In diesem Abschnitt werden kurz die Erhebungsinstrumente der Studie vorgestellt, mit denen die in Kapitel 7 aufgeführten Konstrukte gemessen wurden. Auf eine Erörterung der Testhefte zum mathematischen Fachwissen wird dabei verzichtet, da eine solche bereits ausführlich in Kapitel 6 erfolgt ist.

8.2.1 Schüler: Mathematische Kompetenz

Die mathematische Kompetenz wird im Untersuchungsrahmen als Beweiskompetenz erhoben. Wie in Abschnitt 7.4.1.1 erörtert wurde, werden die Items auf der Basis von theoretischen fachdidaktischen Überlegungen in drei hierarisch aufgebaute Kompetenzstufen eingeteilt, die sich auch empirisch bestätigen konnten. In der folgenden Übersicht sind die Anzahl der verwendeten Items pro Kompetenzstufe und die inhaltlichen Komponenten mit je einem Beispielitem angegeben.

		Anzahl der Items
Kompetenzstufe I	Einfaches Anwenden von Regeln und Basiswissen	5
Bei einem gleichschenkligen Dreieck mit einem gegebenen Winkel sind alle Winkel zu bestimmen.		
Kompetenzstufe II	Begründen und Argumentieren (einschrittig)	3
Die Gleichheit zweier Winkel muss begründet werden, wobei nur das Argument der Wechselwinkel zu nennen ist.		
Kompetenzstufe III	Begründen und Argumentieren (mehrschrittig)	4
Die Kongruenzsätze, dass ein gestreckter Winkel 180° beträgt und der Basiswinkelsatz müssen angewendet werden, um die Gleichschenkligkeit eines Dreiecks zu zeigen.		

Tabelle 8.1: Kompetenzstufenmodell mit Beispielen

Die Schülerantworten zu den Aufgaben wurden von zwei unabhängig voneinander arbeitenden Korrektoren gesichtet und nach einem vorgegebenen Korrekturschema mit 0, 1 oder 2 Punkten beurteilt. Dieser Kompetenztest wurde seit seiner Entstehung mehrfach in diversen Projekten eingesetzt und validiert (vgl. Reiss, 2002; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002; Heinze & Reiss, 2004, Reiss et al., 2006).

8.2.2 Schüler: Problemlösekompetenz

Zur Messung der Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern wurde innerhalb des DFG-Projekts ein Fragebogen entwickelt. Die darin enthaltenden Items lehnen sich eng an die veröffentlichten PISA-Aufgaben zur Problemlösekompetenz an. In Tabelle 8.2 sind die Anzahl der verwendeten Items und der Inhalt zweier Beispielitems aufgeführt.

		Anzahl der Items
Problemlösekompetenz	Fächerübergreifende Problemstellungen, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist	5
1) Nachdem ein Schema zur Erstellung eines einfachen Struktogrammes vorgestellt wurde, muss ein Struktogramm für einen Ticketautomaten erstellt werden.		
2) Unter Berücksichtigung einer Reihe von Bedingungen muss für mehrere Jugendliche ein gemeinsamer Kinofilm aus einer Liste ausgewählt werden.		

Tabelle 8.2: Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern

Die Schülerlösungen wurden von zwei geschulten Korrektoren beurteilt und nach einem vorgegebenen Korrekturschema mit 0, 1 oder 2 Punkten bewertet. Es wurden 0 Punkte bei fehlender Lösung oder im Ganzen nicht mehr brauchbaren Schülerantworten vergeben. Noch 1 Punkt wurde zwar korrekten, aber nicht oder nur teilweise begründeten Antworten zugeordnet und 2 Punkte wurden für vollständig korrekte Lösungen mit Begründung gegeben. Weitere Details und Ergebnisse können bei Rudolph und Kessler (2006) nachgelesen werden.

8.2.3 Schüler: Interesse und Motivation

Der Fragebogen, der in dieser Studie zur Messung der Schülermotivation und des Selbstkonzeptes herangezogen wurde, stammt aus der PALMA-Studie (vom Hofe, Pekrun, Kleine & Götz, 2002). Dieser Multiple-Choice-Fragebogen umfasst 30 Items. Durch Ankreuzen auf einer fünfstufigen Likert-Skala („stimmt genau“, „stimmt weitgehend“, „stimmt etwas“, „stimmt kaum“, „stimmt gar nicht“) konnten die Schülerinnen und Schüler ihre Tendenz zu den Items zum Ausdruck bringen. In mehreren Studien (vgl. Kuntze, 2006; Rudolph & Reiss, 2005; Pekrun & vom Hofe, 2000) wurden die Items durch Faktorenanalysen zu fünf Faktoren gruppiert, so dass die in Kapitel 7.3.2 vorgestellten Faktoren entstehen. Ebenso geht die vorliegende Untersuchung von diesen Faktoren aus, die in Tabelle 8.3 jeweils mit einem Beispielitem und der Anzahl der Items angegeben werden.

		Anzahl der Items
Faktor 1	Intrinsische Motivation	11
„In Mathe strenge ich mich an, weil mich das Fach interessiert.“		
Faktor 2	Selbstkonzept	6
„In Mathematik bin ich ein begabter Schüler.“		
Faktor 3	„fremdbewertungsbezogene“ Leistungsorientierung	4
„In Mathematik tue ich etwas, weil ich gute Noten bekommen möchte.“		
Faktor 4	„sozial vergleichende“ Leistungsorientierung	6
„Ich lerne für Mathe, weil ich zu den Besten gehören möchte.“		
Faktor 5	Zukunftsorientierte Motivation	3
„Für Mathe strenge ich mich an, damit ich in der Zukunft finanziell abgesichert bin.“		

Tabelle 8.3: Motivationsfaktoren der Schülerinnen und Schüler

8.2.4 Schüler: Fehlerumgang

Darüber hinaus wurde in dem DFG-Projekt untersucht, wie Schülerinnen und Schüler mit ihren Fehlern umgehen bzw. wie sie den Umgang der Lehrkraft mit ihren Fehlern empfinden. Die Schülerinnen und Schüler erhielten einen Fragebogen mit vorgegebenen Items, die sie auf einer vierstufigen Likert-Skala ablehnen oder bejahen sollten. Den Zustimmungsgraden waren dabei folgende Werte zugeordnet:

1 = stimmt gar nicht, 2 = stimmt kaum, 3 = stimmt weitgehend, 4 = stimmt genau

Bei dem Fragebogen handelt es sich um eine von Heinze (2006) adaptierte Version der Kurzform des S-UFS aus dem Schweizer Fehlerprojekt um Spychinger (1998). Der Fragebogen umfasst die Faktoren „Individueller Umgang“, „Affektives Lehrerverhalten“, „Kognitiv unterstützendes Lehrerverhalten“ und „Angst vorm Fehlermachen“.

		Anzahl der Items
Faktor 1	Individueller Umgang mit Fehlern	6
„Falsche Lösungen in Mathematikaufgaben überdenke ich mehrmals.“		
Faktor 2	Affektives Lehrerverhalten	6
„Mein Mathematiklehrer ist geduldig und schimpft nicht mit mir, wenn mir etwas nicht gelingt.“		
Faktor 3	Kognitiv unterstützendes Lehrerverhalten	3
„Wenn ich im Mathematikunterricht etwas falsch mache, geht mein Lehrer auf eine Art und Weise damit um, dass ich etwas dazulernen kann.“		
Faktor 4	Angst vorm Fehlermachen	3
„Ich bekomme Angst, wenn ich im Mathematikunterricht Fehler mache.“		

Tabelle 8.4: Motivationsfaktoren der Schülerinnen und Schüler

Weiterführende Informationen zu den einzelnen Faktoren und deren Ergebnisse finden sich bei Heinze (2006). Die Faktoren werden in das in Kapitel 7 vorgestellte Unterrichtsmodell eingepasst, das bedeutet: Faktor 1 gehört zu der Nutzung von Lernzeiten, Faktor 2 zu der emotional-motivationalen Unterstützung im Unterricht, Faktor 3 zu der kognitiven Aktivierung und Faktor 4 wird den emotional-motivationalen Prozessen im Unterricht zugeordnet.

8.2.5 Lehrer: Beliefs zum Lehren und Lernen

In Kapitel 7.1.2 wurde dargelegt, dass die subjektiven Theorien oder Beliefs zum Lehren und Lernen im Wesentlichen zwei Ausprägungen zugeordnet werden können (Stern & Staub, 2002): Die Lehrkraft kann eine eher konstruktivistische oder eine eher rezeptive Auffassung von Lehren und Lernen vertreten. Zur Messung dieser Ausprägungen kam eine für Gymnasiallehrkräfte modifizierte Version der Items von Stern und Staub (2002) zum Einsatz. Die Zustimmung oder Ablehnung zu einem Item konnte auf einer vierstufigen Skala signalisiert werden:
„stimmt genau“ / „stimmt größtenteils“ / „stimmt nur teilweise“ / „stimmt gar nicht“
Nachfolgend sind zwei Beispielitems aus dem Fragebogen angeführt, wobei das erste bei Zustimmung auf eine konstruktivistische Ausrichtung der Lehrkraft schließen lässt und das zweite auf eine eher rezeptive Sichtweise.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Anzahl der Items</td></tr>
<tr><td>Faktor 1</td><td>konstruktivistische Orientierung</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Man sollte Schülern/innen erlauben, sich eigene Wege zur Lösung von Anwendungsproblemen auszudenken, bevor die Lehrperson vorführt, wie diese zu lösen sind.“</td></tr>
<tr><td>Faktor 2</td><td>rezeptive Orientierung</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="3">„Schüler/innen benötigen ausführliche Anleitung dazu, wie Anwendungsprobleme zu lösen sind.“</td></tr>
</table>

Tabelle 8.5: Orientierungen der Lehrkraft zum Lehren und Lernen

Im gleichen Fragebogen wurden einige Indikatoritems verwendet, die aus einer Studie von Klieme und Reusser stammen (Lipowsky, Thußbas, Klieme, Reusser, & Pauli, 2003). Diese Items stehen für die Faktoren „Begabungsbedeutung“, „Leistungsförderung durch positive Emotionen“ und „Leistungsförderung durch interessante Aufgaben“.
Die Begabungsbedeutung entspricht der Ansicht der Lehrerin oder des Lehrers, dass Mathematik viel mit Begabung zu tun hat, an der man nichts ändern kann. Faktor 4 repräsentiert die Meinung, dass man durch Lob und Freude Lernergebnisse von Schülerinnen und Schülern verstärken kann. Faktor 5 drückt die Ansicht aus, dass interessante Aufgaben die Lernergebnisse von Schülerinnen und Schülern verbessern können.
Tabelle 8.6 zeigt diese Faktoren, jeweils ergänzt um ein Beispiel.

		Anzahl der Items
Faktor 3	Begabungsbedeutung	2
„In Mathematik gibt es immer einige Schüler/innen, die es einfach nicht begreifen, was auch immer man als Lehrperson tut.“		
Faktor 4	Leistungsförderung durch positive Emotionen	2
„Lob ist ein gutes Mittel, um Schüler/innen anzuspornen, sich in Mathematik anzustrengen.“		
Faktor 5	Leistungsförderung durch interessante Aufgaben	2
„Wenn Schüler/innen nicht mitarbeiten, liegt das meist daran, dass die Aufgaben nicht sehr interessant sind.“		

Tabelle 8.6: Begabungsbedeutung sowie Leistungsförderung durch unterschiedliches Vorgehen

8.2.6 Lehrer: Beliefs zum Studium und Unterricht

In einem für diese Studie konstruierten Fragebogen werden die Einstellungen und Erfahrungen der teilnehmenden Lehrkräfte in Bezug auf das Fach Mathematik, ihren Kenntnisstand von universitärer Mathematik und ihre subjektiv empfundene Bedeutung für ihren Unterricht abgefragt. Darin integriert wurden auch biographische Daten der Lehrkräfte wie Alter, Geschlecht, Lehrerfahrung, Fächerkombination und Studienabschluss erhoben. Da dieser Fragebogen zum ersten Mal eingesetzt wurde, wird in Kapitel 9 aufgezeigt, dass diese Items zur Erfassung des Kenntnisstandes und zur Wichtigkeit von Mathematik eine ausreichende Reliabilität besitzen.

Im Folgenden werden die drei Untersuchungsgegenstände näher beschrieben:

a) Lieblingsunterrichtsfach

Die Lehrpersonen sollten angeben, welches ihrer Unterrichtsfächer sie lieber unterrichten bzw. ob sie diese gleich gern unterrichten.

b) Einschätzung über die Kenntnisse und Wichtigkeit von mathematischem Fachwissen

Die Lehrkräfte sollten zu mehreren mathematischen Gebieten angeben, wie sie ihre Kenntnisse in diesem Gebiet einschätzen und für wie wichtig sie dieses für ihren Schulalltag halten. Ein Beispielitem:

	Wie schätzen Sie Ihre Kenntnisse in diesem Gebiet ein?	Für wie wichtig halten Sie dieses Gebiet für Ihren Schulalltag?
Zahlentheorie	O vertiefte Kenntnisse O Kenntnisse O nur Grundlagen O keine Kenntnisse	O wichtig O eher wichtig O eher unwichtig O unwichtig

Die im Fragebogen aufgeführten Gebiete sind:

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionen im Komplexen, Gruppentheorie, Galoistheorie, Numerik, Zahlentheorie, Lineare Algebra, Differentiation und Integration in Mehrdimensionalen

9 Auswertung und Ergebnisse

Der Grad der Erregung wächst in umgekehrtem Verhältnis
zu unserer Kenntnis der Tatsachen
– je weniger wir wissen, desto aufgeregter werden wir.
Bertrand Russel, Eroberung des Glücks

Im folgenden Kapitel 9 werden die in Kapitel 8 vorgestellten Frage- und Testbögen ausgewertet und die sich daraus ergebenen Erkenntnisse präsentiert. Einleitend wird in Kapitel 9.1 das mathematische Fachwissen zum Lehren auf die üblichen Testgütekriterien hin überprüft. Anschließend werden deskriptive Befunde zu den einzelnen Testitems präsentiert, wobei anhand von Beispielen auch Einblicke in typische Lehrerantworten gegeben werden. Eine tabellarische Gesamtübersicht über den Test und eine Zusammenfassung schließen das Teilkapitel ab. Bei der Auswertung des klassischen mathematischen Fachwissens in Kapitel 9.2 wird nach demselben Schema vorgegangen. In Kapitel 9.3 wird dargelegt, warum ein Aggregieren beider Fachwissensanteile zum einem Konstrukt „Mathematisches Fachwissen“ sinnvoll ist. Der darauffolgende Kapitelaufbau orientiert sich an dem Prozess-Mediations-Produkt-Modell (vgl. Kapitel 7). Es werden die Zusammenhänge des Fachwissens mit den Variablen aus dem Kontext der Lehrkraft (9.4), des Unterrichts (9.5), der Schülermediation (9.6) und des Produkts der mathematischen Schülerkompetenz (9.7) untersucht. Einschränkungen hinsichtlich der Interpretation der Ergebnisse werden in Kapitel 9.6 thematisiert.

9.1 Der Test „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“

9.1.1 Objektivität

Da es sich bei diesem Test um offene Aufgabenformate handelt, wurden die Items von drei verschiedenen Korrektoren geratet. Die Übereinstimmung in der Beurteilung nach dem Klassifikationsschema, welches in Kapitel 9.1.4 vorgestellt werden wird, lag bei über 95%, was ein sehr guter Wert ist. Interpretationsobjektivität ist daher gegeben. Bei der Durchführung folgten die Testadministratoren genauen schriftlich fixierten Anweisungen, so dass die Untersuchungssituation standardisiert abgelaufen ist. Dadurch ist auch die Durchführungsobjektivität gewährleistet.

9.1.2 Reliabilität

Die Reliabilität wird über Cronbachs Alpha bestimmt (Cronbach, 1951), welches ein gängiges Instrument zur Bestimmung der Reliabilität ist. Für die sieben Items aus dem Fachwissenstest ergibt sich mit einem Cronbachs Alpha von .70 ein zufriedenstellender Wert.

9.1.3 Validität

Der Test baut auf dem Curriculum der universitären Mathematik auf und beinhaltet, wie in Kapitel 6 ausführlich erörtert wurde, als Hauptkomponente zur korrekten Lösung das mathematische Fachwissen sowie in geringem Maß andere Wissensanteile wie Strategiewissen. Darüber hinaus sind die Items in mehreren Fachsitzungen mit Mathematikdidaktikern aus der Arbeitsgruppe um Kristina Reiss (München) auf Validität hin besprochen worden, so dass von einer ausreichenden Validität ausgegangen werden kann.

9.1.4 Aufgaben

Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgt die Darstellung der Auswertung und der Ergebnisse durch ein Schema. Dieses gliedert sich in folgende Punkte:

1) Wortlaut des Items: Der genaue Wortlaut des Items wird wie in Kapitel 6 wiederholt.
2) Dichotomisiertes Auswertungsschema In Anlehnung an Lienert und Raatz (1998) werden die Items dichotomisiert ausgewertet, d.h. jedem korrekt beantworteten Item wird 1 Punkt und jedem falsch beantworteten Item 0 Punkte zugeordnet.
3) Itemschwierigkeit (als Lösungshäufigkeit) und Trennschärfe Die Itemschwierigkeit ergibt sich aus der prozentualen Angabe, wie viele Probanden das Item richtig beantworten konnten. Hohe Werte bezeichnen daher Aufgaben mit einem niedrigen Schwierigkeitsgrad. Um Verwechslungen zu vermeiden, wird im Weiteren von Lösungshäufigkeit gesprochen. Die Trennschärfe wird durch die Korrelation des Items mit dem Gesamttestwert (vgl. Bortz & Döring, 2003, S.218) berechnet. Sie gibt an, wie gut das Item zwischen Personen mit hohem und solchen mit niedrigem Fachwissen unterscheidet.
4) Lehrerantworten Zu jedem Item werden einige typische Beispiele von Lehrerantworten angegeben. Wo es sinnvoll erscheint, werden auch besonders auffällige Lehrerantworten angeführt und kurz diskutiert.
5) Multikategoriales Auswertungsschema Um zusätzliche Informationen aus den Daten zu gewinnen, wird neben der dichotomisierten Auswertung ein Auswertungsschema mit multiplen Kategorien erstellt, welches einen besseren deskriptiven Einblick in die Lehrerantworten ermöglicht.

Item 1: Transzendenz von Pi (E1) Philipp aus der elften Klasse sagt: „Ich habe gelesen, dass π transzendent ist. Das heißt also, dass π unendlich viele Nachkommastellen hat und man nie sagen kann, welche Ziffer als nächstes kommt.“ Wie beurteilen Sie Philipps Aussage?	
Dichotomisierte Auswertung:	Wird bemerkt, dass der Begriff „irrational“ anstelle von „transzendent“ definiert wird? JA → 1 NEIN → 0
Lösungshäufigkeit:	.42 (mittlerer Wert in diesem Test)
Trennschärfe:	.44 (niedrigster Wert in diesem Test)
Lehrerantworten:	
A 1 Punkt	Richtig! Das trifft zu, aber nicht nur für π. Ich würde jedoch noch den Aspekt der algebraischen Gleichung erwähnen. In der elften Klasse kann ein Schüler mit diesem Begriff etwas anfangen und durchaus erkennen, dass es Zahlen gibt, die nicht als Lösung einer solchen Gleichung in Frage kommen. Man kann die Unterscheidung zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen innerhalb der irrationalen Zahlen aufzeigen.
B 1 Punkt	π ist transzendent ⇒ irrational ⇒… Er hat Recht, wobei die Eigenschaft (unperiod. Unend. Dezimalbruch) von $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kommt.
C 1 Punkt	Irrational mit transzendent verwechselt.
D 0 Punkte	Von formalen Mängeln (was soll „als nächstes kommt“ bzw. „nie sagen kann“ heißen?) abgesehen eine im Prinzip korrekte Aussage. Philipp hat (wohl) verstanden, was eine transzendente Zahl ist.
E 0 Punkte	Man kann die nächste Zahl nicht vorhersagen, aber man kann sie berechnen, also eigentlich doch bestimmen.

Die vorgestellten Beispiele der Lehrerantworten verdeutlichen, dass die Frage sehr unterschiedlich aufgefasst wurde. Lehrer A liefert neben einer Antwort, die auf ein hohes mathematisches Fachwissen schließen lässt, eine Aussage über die Einarbeitung im Unterricht. Dies bedeutet, dass neben dem mathematischen Fachwissen auch fachdidaktisches Wissen zur Beurteilung von Philipps Aussage angewendet wird. Lehrer B beantwortet das Item ebenfalls mit hohem mathematischen Fachwissen, nimmt allerdings keinen Bezug auf Philipp, sprich wie man ihn korrigieren würde. Die Lehrerantwort C ist sehr knapp und beschränkt sich auf den Aspekt der Irrationalität, ohne weiter auf den Begriff der Transzendenz einzugehen. Die Lehrerantworten D und E beziehen den Begriff der Transzendenz nicht richtig ein, sondern konzentrieren sich lediglich auf formale Mängel. Diese beiden Antworten werden als nicht richtig eingestuft, da sie nicht darauf eingehen, dass Philipp den Begriff „irrational“ mit „transzendent“ verwechselt. Um einen weiteren Überblick zu gewähren, werden die Lehrerantworten nach Kategorien eingeteilt.

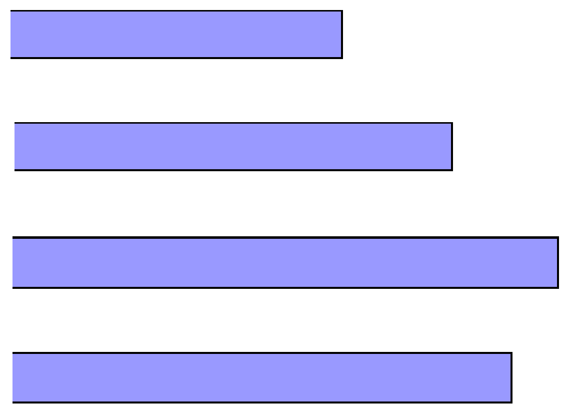
Kategorie	n	
Neben der Irrationalität wird auch auf den Begriff Transzendenz eingegangen	6	
Es wird sich auf den Begriff Irrationalität beschränkt	8	
Es werden nur Formulierungen bemängelt	10	
Keine oder keine brauchbare Antwort	9	

Tabelle 9.1: Kategorien zu Item 1

Nur ca. 18% der Lehrerinnen und Lehrer beziehen sich in ihrer Antwort auf den Begriff „transzendent“. Diese Zahl erscheint gering, da dieser den Kern von Philipps Aussage darstellt. 24% erkennen, dass Philipp eigentlich von Irrationalität spricht, ohne weiter auf die Transzendenz einzugehen. Die Mehrheit der Lehrkräfte (30%) stört sich nur an den Formulierungen von Philipp. Keine oder keine brauchbare Antwort auf das Item geben 27% der Lehrerinnen und Lehrer.

<table>
<tr><td colspan="2">Item 2a: Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades (E2)
Martina aus einem Mathematik-Grundkurs sitzt vor einer Aufgabe, bei der man die Nullstellen eines Polynoms 5. Grades bestimmen soll und versucht eine Lösung zu erraten, damit sie eine Polynomdivision durchführen kann.
„Gibt es eigentlich eine Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades?“
Wie würden Sie Martina antworten und wie würden Sie einem Mathematiker antworten?</td></tr>
<tr><td>Dichotomisierte Auswertung:</td><td>Wird gewusst, dass es keine Formel für die Lösung von Polynomen 5. Grades gibt?
JA → 1
NEIN → 0</td></tr>
<tr><td>Lösungshäufigkeit:</td><td>.73 (höchster Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Trennschärfe:</td><td>.45 (niedriger Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Item 2b: Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades (E2)
Wie würden Sie Martina antworten und wie würden Sie einem Mathematiker antworten?</td></tr>
<tr><td>Dichotomisierte Auswertung:</td><td>Kann der Lehrer einem Mathematiker antworten, also auf mathematisch höherem Niveau argumentieren?
JA → 1 NEIN → 0</td></tr>
<tr><td>Lösungshäufigkeit:</td><td>.18 (niedrigster Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Trennschärfe:</td><td>.55 (mittlerer Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Lehrerantworten:</td><td></td></tr>
<tr><td>A
2a: 1 Punkt
2b: 1 Punkt</td><td>An Martina: Für Polynome 5. Grades gibt es keine Lösungsformel. Es gibt Methoden die Lösungen zu finden, aber keine Formel, die einem die möglichen Lösungen alle liefert.
An Mathematiker: Für Gleichungen fünften Grades gibt es keine Lösungsformel. Es gibt numerische Verfahren, um Lösungen zu finden und Methoden, die aus verschiedenen Bereichen der Mathematik entnommen sind (Transformationsgruppe des Ikosaeders und komplexe Lösungen am Einheitskreis, die mit Hilfe der Koeffizienten des Polynoms auf Lösungen führen können…)</td></tr>
<tr><td>B
2a: 1 Punkt
2b: 1 Punkt</td><td>Für n > 4 gibt es keine Lösungsformel. Der Beweis dafür ist sehr schwierig und mit Schulwissen nicht verständlich (er frustriert Martina vielleicht).
E. Galois hat dies mit Hilfe der Gruppentheorie bewiesen. Es geht dabei um Abbildungen von Untergruppen aufeinander.</td></tr>
<tr><td>C
2a: 1 Punkt
2b: 1 Punkt</td><td>So eine Formel gibt es nicht. Beiden würde ich antworten, dass dies mit Hilfe der Galoistheorie bewiesen werden kann.</td></tr>
</table>

D 2a: 1 Punkt 2b: 0 Punkte	Beiden würde ich antworten, dass es so eine Lösungsformel nicht gibt und dass man diese Tatsache sogar bewiesen hat. Das ist zwar schon lange her, aber seitdem muss niemand mehr danach suchen.
E 2a: 0 Punkte 2b: 0 Punkte	Ich würde Martina sagen: Nein Ich würde einem Mathematiker sagen: wahrscheinlich ja, aber ich kenne sie nicht.

Bei der Beantwortung fällt auf, dass die Lehrerinnen und Lehrer unterschiedliche Perspektiven einnehmen. Beispielweise passt sich Lehrer A bei der Begründung seiner Aussage seinem Gegenüber an: Martina gibt er eine didaktisch reduzierte, dem Mathematiker eine ausführliche Antwort. Lehrer C hingegen macht diesbezüglich keinen Unterschied. Lehrer B erkennt, dass die Antwort von C für eine Schülerin einer 11. Klasse keinen Sinn macht. Bei der Beantwortung des Items fließt somit auch viel fachdidaktisches Wissen mit ein. Lehrer D begründet seine Antwort nicht auf mathematischem Niveau, während die Lehrerantwort E auf starke Unsicherheit schließen lässt. Weiterhin ist auffällig, dass manche Lehrerinnen und Lehrer auf Martinas Nachfrage mit einer Problemlösestrategie wie „Probier mal die Teiler des letzten Koeffizienten" reagieren oder numerische Verfahren angeben – ganz so, wie sie vermutlich auch im Unterricht vorgehen würden.

Für eine konkretere Auswertung wird daher noch unterschieden, welche Antwort über die Verneinung der Frage hinaus gegeben wird. Die Antworten bezüglich Martina und dem Mathematiker werden dabei getrennt voneinander ausgewertet.

Kategorie	n		
Existenz keiner Lösungformel	24	Verfahren oder Methode	8
		Beweis ist (zu) schwer	3
		Falsche Ausführungen	3
		Höhere Mathematik	1
		Keine Begründung	9
Unsicher oder ausweichend	6	Verfahren oder Methode	2
		Anderes	3
		Keine Begründung	1
Keine oder falsche Antwort	3	Keine Antwort	1
		Falsche Antwort	2

Tabelle 9.2: Kategorien zu Item 2a: Antwort für Martina

Über 30% der Lehrerinnen und Lehrer verweisen bei der Antwort für Martina auf eine Methode oder ein Verfahren, wie sie zur Lösung kommen kann. Dies ist vor allem deswegen interessant, weil dies bei der Frage nach einer Lösungsformel nicht explizit verlangt ist. Es ist ersichtlich, dass wie bei Item 1 ein nicht unerheblicher Teil der Lehrkräfte auf fachdidaktisches Wissen zurückgreift.

Kategorie	n	Begründung	
Existenz keiner Lösungsformel	23	Verfahren oder Methode	7
		Beweis ist (zu) schwer	2
		Falsche Ausführungen	2
		Höhere Mathematik	6
		Keine Begründung	6
Unsicher oder ausweichend	5	Verfahren oder Methode	0
		Anderes	2
		Keine Begründung	3
Keine oder falsche Antwort	5	Keine Antwort	3
		Falsche Antwort	2

Tabelle 9.3: Kategorien zu Item 2b: Antwort für Mathematiker

Einem Mathematiker hingegen würden weniger Personen eine Methode oder ein Verfahren nennen (nur 21%). Vermutlich ist den Lehrerinnen und Lehrern ersichtlich, dass hier eine Antwort auf mathematisch höherem Niveau notwendig ist, die ein Ausweichen nicht ermöglicht. Beide Aufgabenteile zusammenfassend kann man sagen: Die Mehrzahl der Lehrkräfte weiß, dass es keine Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades gibt (73%), aber nur wenige können dies auch mathematisch begründen (18%).

Item 3: Gültigkeit einer Implikation (E1)

Vor Herbert stehen 4 Mädchen:

Er möchte wissen ob es stimmt, dass ein Mädchen, wenn es keine Brille trägt, eine Schleife im Haar hat.

Um seine Neugier zu befriedigen, muss er nicht alle vier Mädchen bitten, sich umzudrehen.

Es genügt, dass sich umdrehen: __________________________ (bitte Namen einsetzen)

Bitte begründe deine Antwort!

Für die Aufgabe sind 5 Bewertungspunkte vorgesehen.
Wie würden Sie die folgenden beiden Antworten bewerten?
(aus Ihrer Korrektur sollte Ihre Punktevergabe klar ersichtlich sein)

1.Schülerantwort:

Tanya:

Es reicht, dass sich Tanya umdreht, denn nur sie erfüllt die Bedingung, dass sie keine Brille trägt. Sie muss also eine Schleife im Haar haben, damit Herberts Behauptung stimmt.

Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil ....

2.Schülerantwort:

Tanya & Olga:

Tanya muss sich auf jeden Fall umdrehen, denn sie hat keine Brille und nun muss ich kontrollieren, dass sie eine Schleife im Haar hat.

Olga muss sich auch umdrehen, denn sie hat ja eine Schleife im Haar, darf also keine Brille tragen.

Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil ....

Dichotomisierte Auswertung:	Beantwortet der Lehrer die Frage korrekt? JA → 1 NEIN → 0
Lösungshäufigkeit:	.45 (mittlerer Wert in diesem Test)
Trennschärfe:	.73 (höchster Wert in diesem Test)
Lehrerantworten:	
A 1 Punkt	1.Schülerantwort: Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil Wenn Mary keine Brille trägt, ist die Beh. auch falsch! Für Tanya richtig erkannt! 2.Schülerantwort: Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil Mit Tanya hast du Recht. Wenn Olga keine Brille trägt, stimmt die Beh. sowieso, da sie eine Schleife hat. Wenn sie eine Brille trägt, ist es uninteressant, da es um diesen Fall gar nicht geht.
B 0 Punkte	1.Schülerantwort: Ich würde __2__ von 5 Punkten geben, weil Olga ebenfalls in Frage kommt. Somit ist nur ein Teil korrekt beantwortet. 2.Schülerantwort: Ich würde __4__ von 5 Punkten geben, weil das Problem im Wesentlichen erkannt und richtig gelöst ist. Lediglich die Begründung ist nicht korrekt formuliert.
C 0 Punkte	1.Schülerantwort: Ich würde __5__ von 5 Punkten geben, weil genau die Frage beantwortet und die Antwort dann begründet wurde. 2.Schülerantwort: Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil „Tanya“ richtig beantwortet und begründet wurde, aber die Antwort Olga falsch ist. Der Schüler kennt den Unterschied zwischen Voraussetzung und Behauptung nicht.

Lehrer B und Lehrer C haben die Aufgabe nicht richtig gelöst und sind daher zu unterschiedlichen Bewertungen gekommen. Lehrer A hingegen zeigt durch seine Korrektur, dass er das Problem korrekt lösen konnte. Die Korrektur der Schülerlösungen ist somit alles andere als eindeutig. Anhand der Bepunktung und deren Begründung wird ersichtlich, ob die Lehrerin oder der Lehrer selbst die richtige Antwort liefern konnte.

Hier die Auswertung der Punktevergabe:

1. Schülerantwort: Nur Tanya muss sich umdrehen						
Nicht bearbeitet	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	5 Punkte
2	0	6	15	8	2	2

Tabelle 9.4: Punktevergabe bei der Korrektur von Item 3 – 1. Schülerantwort

2. Schülerantwort: Tanya & Olga müssen sich umdrehen						
Nicht bearbeitet	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	5 Punkte
1	0	3	11	4	6	8

Tabelle 9.5: Punktevergabe bei der Korrektur von Item 3 – 2. Schülerantwort

In Kategorien eingeteilt ergibt sich folgendes Bild:

Kategorie	n
„Tanya“	3
„Tanya und Olga“	9
„Tanya und Mary“	15
„Tanya, Olga und Mary“	5
Keine Antwort	1

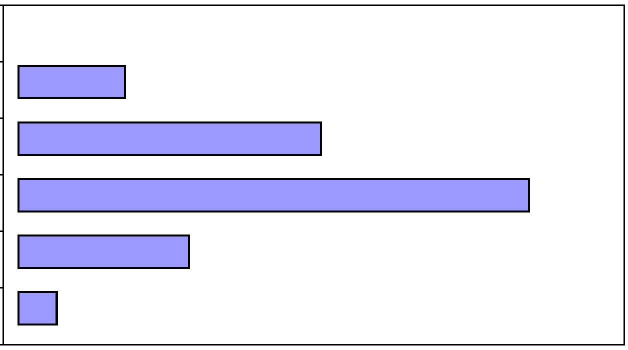


Tabelle 9.6: Antworten der Lehrpersonen bei Item 3

Insgesamt konnten somit weniger als die Hälfte der Lehrkräfte (45%) die Aufgabe richtig lösen. Am häufigsten (27%) kam die Fehlannahme zum Tragen, dass auch die verkehrte Negation der Implikation, also aus Schleife folgt Brille, zu überprüfen ist. Erstaunlich ist die zu 15% gegebene Antwort, dass sich neben Tanya und Mary auch Olga umzudrehen hat. Anhand der Lehrerkorrektur kann leider nicht geklärt werden, welcher Denkfehler zu dieser Lösung geführt hat. Des Weiteren ist bemerkenswert, dass nur eine Lehrerin oder ein Lehrer die Aufgabe nicht bearbeitet hat. Vermutlich sprach das Item vom Schwierigkeitsgrad und seiner Bedeutung für den Schulalltag die Lehrkräfte an.

Item 4: Vollständige Induktion (E2)	
Man beweise durch vollständige Induktion: $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$ Wie würden Sie die folgende Antwort bewerten? (aus Ihrer Korrektur sollte Ihre Punktevergabe klar ersichtlich sein) Schülerantwort: $n \to n+1: 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ Ich würde ____ von 5 Punkten geben, weil …	
Dichotomisierte Auswertung:	Bemängelt die Lehrkraft, dass der Induktionsanfang für n = 4 fehlt? JA → 1 NEIN → 0
Lösungshäufigkeit:	.58 (hoher Wert in diesem Test)
Trennschärfe:	.55 (mittlerer Wert in diesem Test)
Lehrerantworten:	
A 1 Punkt	Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil Von Vollst. Induktion habe ich seit 15 Jahren nichts mehr gehört, aber die Folgerungs- bzw. Ungleichungskette ist korrekt. Die Voraussetzungen bzw. der erste Schritt fehlt meiner Meinung nach (man zeige wahr für $n = 4$). Deshalb 3 von 5 Punkten.
B 1 Punkt	Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil [Es fehlt] Induktionsanfang $n = 4$ [Es fehlt] $n^2 \geq 3n$ (erst ab $n = 3$ richtig!) $3n \geq 2n+1$ (kann man wohl als offensichtlich annehmen)
C 0 Punkte	Ich würde __3__ von 5 Punkten geben, weil Induktionsvoraussetzung ($2^n \geq n^2$) fehlt, $n^2 > 3n$ nicht begründet (wenn ich ehrlich bin, wäre ich froh, wenn irgendwer diese Aufgabe könnte und würde wohl nur 1 Pkt. abziehen)
D 0 Punkte	Ich würde __2__ von 5 Punkten geben, weil Der Schüler verwendet in seiner Beweisführung die Behauptung und begründet die Rechenschritte nicht. Das Beweisprinzip ist nur wenig verstanden.

Aus Lehrerantwort A wird ersichtlich, dass das Wissen über das Beweisprinzip der Induktion trotz ausgedrückter Unsicherheit vorhanden ist. Dem Lehrer oder der Lehrerin fällt das Fehlen des Induktionsanfangs auf, allerdings kann dieser begrifflich nicht benannt werden. Lehrerantwort B bemerkt das Fehlen ebenfalls und beanstandet darüber hinaus die fehlenden Erklärungen in der Ungleichungskette. Bei den Lehrerantworten C und D wird das Fehlen des Induktionsanfangs nicht erkannt. In Antwort C beanstandet die Lehrkraft, dass die Behauptung in der Beweisführung verwendet wurde, obwohl gerade dies ein grundlegender Bestandteil der vollständigen Induktion ist. Bei den drei Beispielkorrekturen A, B und C herrscht zwar Einigkeit über die Punktevergabe, allerdings geben sie unterschiedliche Gründe für ihre Bepunktung an. Ein und dieselbe Schülerlösung zieht somit sehr unterschiedliche Bewertungen nach sich, wie in Tabelle 9.7 ersichtlich wird.

Korrektur: Vollständige Induktion						
Nicht bearbeitet	0 Punkte	1 Punkt	2 Punkte	3 Punkte	4 Punkte	5 Punkte
5	0	2	5	14	6	1

Tabelle 9.7: Punktevergabe bei Item 4

Diese unterschiedliche Punktevergabe ist am häufigsten auf die unterschiedliche Gewichtung der fehlenden Begründungen zurückzuführen. Welche weiteren Gründe für die Bewertung in Betracht gezogen wurden, zeigt folgende Tabelle:

Gründe (Mehrfachnennung!)	n
Induktionsanfang fehlt	19
Begründung für $n^2 \geq 3n$ fehlt	13
Induktionsannahme fehlt	5
Allgemein: Begründungen fehlen	5
Begründung für $3n \geq 2n+1$ fehlt	3
Anderes	6

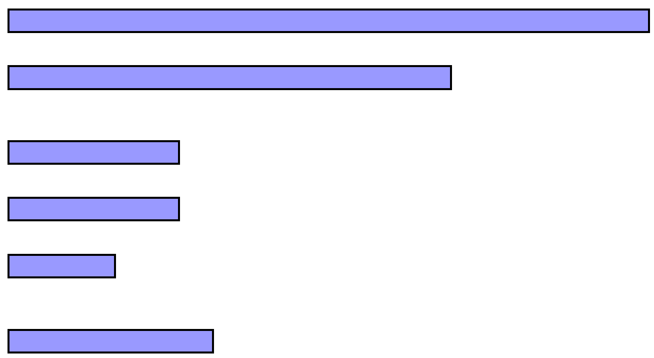


Tabelle 9.8: Antwortkategorien bei Item 4

Knapp 58% der Lehrerinnen und Lehrer bemängeln korrekt, dass der Induktionsanfang fehlt. Weiterhin stört 39% der Lehrpersonen, dass der Schritt $n^2 \geq 3n$ nicht ausreichend begründet wurde. Die fehlende Induktionsannahme, die auch Induktionsvoraussetzung genannt wird, bemerken ca. 15%. Wie in Kapitel 6.4 bereits erörtert wurde, wird sich bei der Itembewertung auf das Fehlen des Induktionsanfangs beschränkt.

<table>
<tr><td colspan="2">Item 5a: Wurzel ziehen im Komplexen (E2)
Karla ist eine sehr gute Schülerin, die auch im Unterricht gut mitarbeitet und weiterführende Fragen stellt.
In der Hausaufgabe über die komplexen Zahlen ist Karla etwas aufgefallen.
Sie hat in ihr Heft folgende Zeilen geschrieben.
Die komplexe Zahl i ist durch $i = \sqrt{-1}$ definiert.
Dann gilt doch:
$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$
Also, -1 = 1. ????
Wie erklären Sie Karla ihren Fehler?</td></tr>
<tr><td>Dichotomisierte Auswertung:</td><td>Merkt der Lehrer, dass der Fehler in der Wurzelzusammenfassung steckt?
JA → 1
NEIN → 0</td></tr>
<tr><td>Lösungshäufigkeit:</td><td>.36 (mittlerer Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Trennschärfe:</td><td>.68 (hoher Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Item 5b: Funktionentheoretische Begründung zu 5a (E2)</td></tr>
<tr><td>Dichotomisierte Auswertung:</td><td>Kann der Lehrer den Fehler auch erklären?
JA → 1
NEIN → 0</td></tr>
<tr><td>Lösungshäufigkeit:</td><td>.21 (niedriger Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Trennschärfe:</td><td>.67 (hoher Wert in diesem Test)</td></tr>
<tr><td>Lehrerantworten:</td><td></td></tr>
<tr><td>A
5a: 1 Punkt
5b: 1 Punkt</td><td>i ist nicht durch $i = \sqrt{-1}$ sondern durch i^2 = -1 definiert. Daher können auch nicht die Regeln für (reelle) Wurzeln angewandt werden („Unter eine Wurzel ziehen“).
Regeln, die ich nicht anwenden darf, führen aber auch nicht weiter, die Gleichung gilt also nicht. Schnelles Beispiel auf niedrigerem Niveau:
$1 = \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = 0$
Erweitern mit 0
$\frac{0}{a} = 0$, unabhängig von a</td></tr>
<tr><td>B
5a: 1 Punkt
5b: 1 Punkt</td><td>Das von dir benutzte Gesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ gilt in dieser Richtung nur für $a,b \in \mathbb{R}_0^+$
z.B. ist ja $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} \neq \sqrt{4}$</td></tr>
</table>

C 5a: 1 Punkt 5b: 1 Punkt	Im Komplexen ist das mit der Wurzel auch komplexer. Das Gesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ gilt dort nicht (gilt nur für positive Zahlen *a* und *b*). Aus ähnlichem Grund ist im bayerischen Matheunterricht auch $\sqrt[3]{-8}$ nicht definiert (obwohl der Taschenrechner sie ziehen könnte). $-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$ Potenzgesetze gelten nur für positive Basen!
D 5a: 1 Punkt 5b: 0 Punkt	Der Fehler steckt im 3. Schritt $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \ldots$ aber ich kann ihn im Moment nicht erklären.
E 5a: 0 Punkt 5b: 0 Punkt	Vermutlich ist die Definition nicht korrekt, die heißt nämlich i^2 = -1 und nicht $i = \sqrt{-1}$.
F 5a: 0 Punkt 5b: 0 Punkt	Wenn ich jemals „komplexe Zahlen" unterrichtet hätte, wüsste ich es sicherlich. Ich könnte mir vorstellen, dass der Grund der folgende ist: Quadrieren und Wurzelziehen sind keine Äquivalenzumformungen, aber es liegt eigentlich keine Gleichung vor. u.U. liegt es an der Definition der Multiplikation in $\mathbb{C}$.

Bei diesem Item ist interessant, dass erneut (vgl. Item 1 und 2) einige Lehrerinnen und Lehrer neben einer fachlichen Antwort ein fachdidaktisches Beispiel zur Klärung des Fehlers liefern. Bei A wird ein analoges Beispiel angegeben, bei B ein konkretes Rechenbeispiel, warum der Rechenschritt nicht erlaubt ist, und bei C ein Beispiel angeführt, weswegen das Rechengesetz für Exponenten nicht anzuwenden ist. Lehrerantwort D ist exemplarisch für eine nicht weiter begründete richtige Lösung. Lehrkraft E vermutet den Fehler in einer falschen Definition von *i*, was jedoch nicht korrekt ist. Lehrkraft F bemüht sich um eine Fehlererklärung und gibt Möglichkeiten an, ist am Ende aber nicht erfolgreich. Zu bemerken ist auch die vorangegangene „Rechtfertigung" der Unsicherheit.
In Tabelle 9.8 sind die Gründe, die die Lehrerinnen und Lehrer für den Fehler in Klaras Rechnung angegeben haben, zusammengefasst.

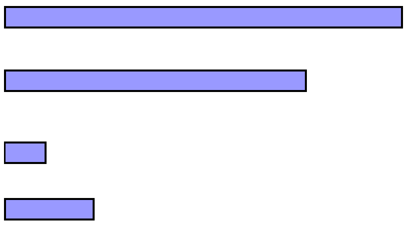
Gründe (Mehrfachnennung möglich!)	n	
Aus i^2 = -1 folgt nicht $i = \sqrt{-1}$	18	
Rechenregel $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}$ nicht anwendbar	14	
Keine Äquivalenzumformung	2	
Keine oder keine brauchbare Antwort	4	

Tabelle 9.8: Antwortkategorien bei Item 5b

Die Mehrheit der Lehrerinnen und Lehrer (55%) gibt an, dass der Fehler in einer falschen Definition der komplexen Zahlen liegt. Allerdings ist es durchaus gängig, die komplexe Zahl i über $i = \sqrt{-1}$ und nicht über i^2 = -1 einzuführen. Diese Antwort ist somit nicht korrekt. 36% der Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer können den falschen Rechenschritt identifizieren, 21% darüber hinaus auch die richtige Begründung geben, nämlich dass die Rechenregeln für das Zusammenfassen von Wurzeln bei negativen Basen nicht anwendbar sind.

9.1.5 Gesamtübersicht über den Test „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“

Insgesamt besteht der Test zum „Mathematischen Fachwissen zum Lehren“ somit aus 7 Items, auf die jeweils maximal 1 Punkt vergeben wird. Im Durchschnitt haben die den Test bearbeitenden 33 Lehrerinnen und Lehrer, die diesen Test bearbeitet haben, 2,9 Punkte erzielt, mit einer Standardabweichung von 2,0 Punkten. Diagramm 9.10 gibt einen Überblick über die Verteilung der Punktzahlen:

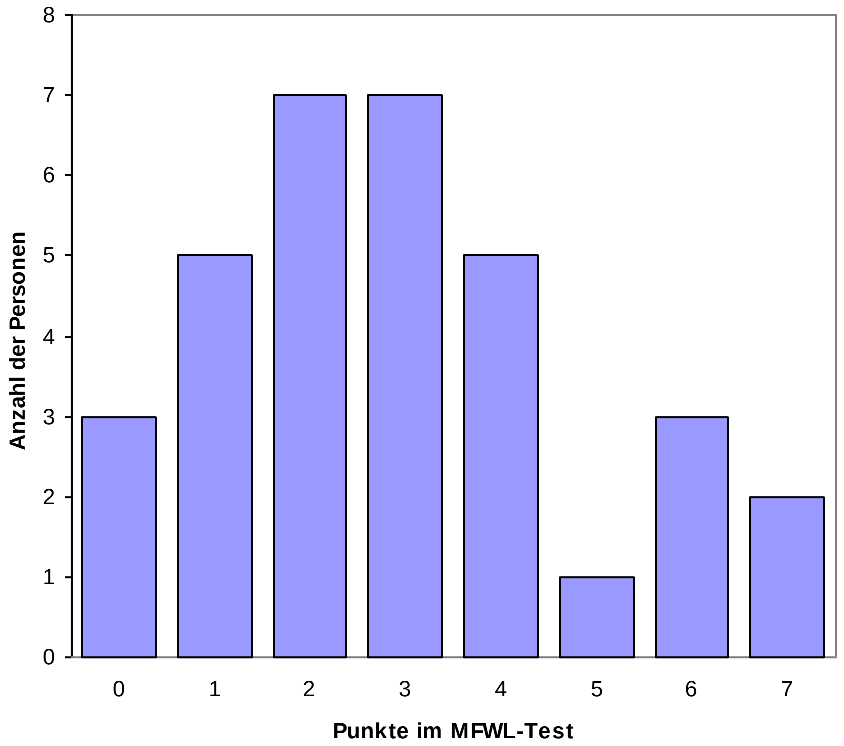


Diagramm 9.10: Anzahl der Personen mit einer bestimmten Punktzahl im „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“-Test

Die meisten der Lehrkräfte erlangten eine Punktzahl von 2 bis 4 Punkten (58%).
24% der Lehrerinnen und Lehrer konnten keinen oder nur 1 Punkt erreichen, während bei ca. 18% von einem hohem Fachwissen ausgegangen werden kann (5 bis 7 Punkte).
Insgesamt liegt eine breite Streuung der Testwerte vor, so dass gut zwischen Lehrkräften mit hohem und niedrigem Fachwissensstand differenziert werden kann.

9.1.6 Zusammenfassung

Das „Mathematische Fachwissen zum Lehren“ konnte objektiv, valide und reliabel (α = .70) gemessen werden. Die 7 Items wurden dichotomisiert ausgewertet, so dass 7 Punkte erreichbar waren. Im Durchschnitt ergab sich bei den 33 Lehrerinnen und Lehrern ein Punktwert von 2,9 mit einer Standardabweichung von 2,0. Wie anhand der Schwierigkeitswerte der Items zu sehen ist, waren weder zu leichte noch zu schwere Aufgaben vertreten. Ebenso zufriedenstellend sind die Trennschärfewerte, die allesamt über .40 liegen.

Item	Schwierigkeit	Trennschärfe
Item 1: Transzendenz von Pi	.42	.44
Item 2a: Lösungsformel für Gleichungen 5. Grades	.73	.45
Item 2b: Algebraische Begründung zu 2a	.18	.55
Item 3: Gültigkeit einer Implikation	.45	.73
Item 4: Vollständige Induktion	.58	.55
Item 5a: Wurzel ziehen im Komplexen	.36	.68
Item 5b: Funktionentheoretische Begründung zu 5a	.21	.67

Tabelle 9.11: Zusammenfassung der Items zum Test „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“

Anhand von exemplarischen Lehrerantworten konnte gezeigt werden, dass Lehrerinnen und Lehrer häufig ihr fachdidaktisches Wissen einsetzen, auch oder gerade wenn sie nicht das nötige Fachwissen zur Beantwortung besitzen. Bei der Analyse der Antworten war auch zu beobachten, dass sich einige Lehrpersonen direkt an die Schülerinnen und Schüler wenden, während andere sich losgelöst vom Kontext mit dem mathematischen Problem auseinandersetzen.

9.2 Der Test „Klassisches mathematisches Fachwissen“

9.2.1 Objektivität

Da es sich bei diesem Test um Multiple-Choice-Aufgabenformate (außer Item 6) handelt, ist die Auswertungsobjektivität automatisch gegeben, d.h. sie ermöglicht eine intersubjektiv eindeutige Auswertung. Da der „Klassische Fachwissenstest“ in Kombination mit dem Test zum „Mathematischen Fachwissen zum Lehren“ durchgeführt wurde, liegt hier dieselbe Durchführungsobjektivität vor.

9.2.2 Reliabilität

Die Reliabilität wird erneut über Cronbachs Alpha ermittelt. Für die 9 Items aus dem „Klassischen Fachwissenstest“ ergibt sich ein Cronbachs Alpha von .71, was einen zufriedenstellenden Wert darstellt.

9.2.3 Validität

Der Test wurde mehrfach am Ende des Semesters in Anfängervorlesungen an der Universität Augsburg durchgeführt. Er baut auf den klassischen Inhalten der universitären Mathematik im Grundstudium auf und deckt daher die wichtigsten Anteile der Linearen Algebra und Analysis ab. Die Validität ist somit gegeben.

9.2.4 Aufgaben

Jedes Item soll mit maximal 1 Punkt bewertet werden. Um dies zu ermöglichen wird, da bei den Multiple-Choice-Antworten auch mehrere Antworten richtig sein können, die Anzahl der richtigen angekreuzten Antworten durch die Anzahl der richtigen Antworten dividiert. Zusätzlich ist bei Aufgaben mit Mehrfach-Antworten eine Ratekorrektur notwendig (vgl. Lienert & Raatz, 1998, S.168f.), Diese wird erreicht, indem falsche Antworten mit einem Minuspunkt bewertet (vgl. Bortz & Döring, 2005, S. 216) werden. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden darüber in Kenntnis gesetzt.

In der nun folgenden Auswertung wird analog zu Kapitel 9.1 der Itemwortlaut wiederholt und das Auswertungsschema, d.h. die korrekten Lösungen, angegeben. Weiterhin werden die Lösungshäufigkeit sowie die Trennschärfe berechnet und das Ergebnis in einer Tabelle dargestellt. Aufgrund des Multi-Choice-Aufgabenformates können keine typischen Lehrantworten angeführt werden.

Item 1: Linearkombination

Aus der Gleichung $v_4 = 3v_1+2v_2-4v_3$ kann gefolgert werden:

	n	
a) v_4 ist eine Linearkombination aus v_1, v_2, v_3.	31	
b) v_2 ist eine Linearkombination aus v_1, v_3, v_4.	24	
c) Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig.	1	
d) Die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 sind linear abhängig.	25	
e) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.	4	
f) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.	1	

Tabelle 9.2: Antwortkategorien bei Item 1

Lösung: a) b) d)

Lösungshäufigkeit: .78

Trennschärfe: .49

Dieses schulnahe Item, dessen Inhalt in der gymnasialen Oberstufe Standard ist, konnten die meisten Lehrerinnen und Lehrer richtig beantworten. Nur 7% der gegebenen Antworten sind nicht korrekt. Zwei Drittel der Lehrkräfte nennen sogar alle drei richtigen Antworten. Allerdings erhalten 9% der Lehrpersonen in diesem Item 0 Punkte, weil sie keine oder falsche Antworten liefern. Insgesamt bereitet dieses Item den Lehrerinnen und Lehrern am wenigsten Schwierigkeiten (höchster Lösungshäufigkeitswert!). Die Trennschärfe liegt im mittleren Bereich.

Item 2: Basis eines Vektorraums

Wenn B eine Basis von einem Vektorraum V ist, dann ist B

	n	
a) eine minimale Menge von linear unabhängigen Vektoren.	8	
b) eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren.	21	
c) eine minimale Menge, von der V der Aufspann ist.	17	
d) eine maximale Menge, von der V der Aufspann ist.	4	

Tabelle 9.13: Antwortkategorien bei Item 2

Lösung: b) c)

Lösungshäufigkeit: .50

Trennschärfe: .48

Auch das zweite Item deckt sich inhaltlich mit dem gymnasialen Stoff der Oberstufe. Allerdings haben die Lehrerinnen und Lehrer mit diesem Item mehr Probleme als mit dem vorherigen. Zwar nennen 36% der Lehrerinnen und Lehrer die beiden richtigen Antworten, doch genauso viele erhalten in dieser Aufgabe 0 Punkte. Der Wert der Trennschärfe befindet sich im mittleren Bereich.

Item 3: Lineare Gleichungssysteme

	n	
a) Jedes lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.	1	
b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.	23	
c) Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens zwei Lösungen.	0	
d) Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Lösungen hat, hat unendlich viele Lösungen.	19	
e) Jedes inhomogene Gleichungssystem hat höchstens eine Lösung.	4	

Tabelle 9.14: Antwortkategorien bei Item 3

Lösung: b) d)

Lösungshäufigkeit: .59

Trennschärfe: .49

Die Theorie der linearen Gleichungssysteme ist ein Inhalt, der ausführlich in der gymnasialen Oberstufe und teilweise auch schon zuvor thematisiert wird. 36% der Lehrpersonen können beide richtigen Antworten nennen, während gerade mal 11% der gegebenen Antworten falsch sind. 9% der Lehrerinnen und Lehrer geben bei dem Item keine Antwort. Weitere 9% erreichen durch das Ankreuzen einer richtigen und einer falschen Antwort 0 Punkte. Die Trennschärfe liegt im mittleren Bereich.

Item 4: Eigenvektoren

f sei eine lineare Abbildung eines Vektorraums in sich, für die es einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit $f(-v) = kv$. Dann ist

	n	
a) -v ein Eigenvektor zum Eigenwert k.	13	
b) +v eine Eigenvektor zum Eigenwert –k.	11	
c) -v ein Eigenvektor zum Eigenwert –k.	3	
d) +v ein Eigenvektor zum Eigenwert k.	0	
e) k = 0.	2	

Tabelle 9.15: Antwortkategorien bei Item 4

Lösung: b) c)

Lösungshäufigkeit: .15

Trennschärfe: .64

Dies ist das erste Item in diesem Test, welches sich mit einem Inhalt der linearen Algebra auseinandersetzt, der typischerweise nicht in der Schule behandelt wird. Zur Beantwortung muss das Wissen vorhanden sein, was man unter einem Eigenvektor und einem Eigenwert versteht.

Dieses Item fällt den Lehrerinnen und Lehrern besonders schwer. Das sieht man das daran, dass mehr als 30% der Lehrkräfte keine Antwort ankreuzen und von den angekreuzten Antworten ca. 50% falsch (15 von 29) sind. Insgesamt können nur 6% die beiden richtigen Antworten nennen. Die Trennschärfe des Items hat den größten Wert im Vergleich zu den anderen Items dieses Fachwissenstests.

Item 5: Der Faktorraum

Der Faktorraum von V nach U ist

	n	
a) eine Menge von Vektoren aus U.	1	
b) ein Teilraum (Unterraum) von V.	5	
c) ein Vektorraum.	5	
d) eine Nebenklasse von U.	1	
e) eine Menge von Nebenklassen.	2	
f) Aus v+U = U folgt v = 0, weil 0+U = U gilt.	0	
g) Aus v+U = U folgt v = 0, weil v+U = 0+U gilt.	0	
h) Aus v+U = U folgt v = 0, weil man auf beiden Seiten –U rechnen kann.	0	
i) Aus v+U = U folgt v $\in$ U.	8	

Tabelle 9.16: Antwortkategorien bei Item 5

Lösung: c) e) i)

Lösungshäufigkeit: .16

Trennschärfe: .38

Der Inhalt dieses Item verlangt eine höhere Abstraktionsfähigkeit als die anderen Items. Nur ein Lehrer konnte alle drei richtigen Antworten identifizieren. Über 63% der Lehrerinnen und Lehrer lassen die Aufgabe offen, ohne eine Antwort anzukreuzen. Das Item erscheint damit als zu schwer und trennt nicht hinreichend gut, was an der niedrigen Trennschärfe zu sehen ist. Dies könnte daran liegen, dass die Antwortalternativen f) bis h) so formuliert sind, dass man als erfahrene Mathematikerin oder erfahrener Mathematiker eher Abstand davon nimmt. Dass man Äquivalenzumformungen nicht genauso auf Mengen wie auf Variablen anwenden kann, scheint zumindest den Lehrerinnen und Lehrern bewusst zu sein, die eine Antwort angeben. Es wäre möglich, dass aufgrund dessen einige zusätzlich i) wählen, welches von den vier letzten Antwortalternativen übrig bleibt. Insgesamt bestünde bei diesem Item vor einer erneuten Verwendung Verbesserungspotential.

Item 6: Exponentialfunktion

Nennen Sie so viele Möglichkeiten für eine Definition der Exponentialfunktion e^x, wie Ihnen spontan einfallen.

Dieses Item ist das einzige mit einer offenen Aufgabenbearbeitung.

Zunächst wird das Item dahingehend ausgewertet, wie viele richtige Möglichkeiten die Lehrerinnen und Lehrer nennen konnten.

	n	
Keine Möglichkeit	7	
Eine Möglichkeit	10	
Zwei Möglichkeiten	8	
Drei Möglichkeiten	6	
Vier Möglichkeiten	2	

Tabelle 9.17: Anzahl der genannten Möglichkeiten bei Item 6

Als Maß für eine richtige Antwort wird nun folgender Wert gesetzt:

Drei Möglichkeiten und vier Möglichkeiten werden mit 1 Punkt gewertet,

zwei Möglichkeiten mit 0,66 Punkten,

eine Möglichkeit mit 0,33 Punkten und

keine Möglichkeit mit 0 Punkten.

Bei dieser Gewichtung ergibt sich folgende Lösungshäufigkeit und Trennschärfe:

Lösungshäufigkeit: .51

Trennschärfe: .55

Über die Hälfte der Lehrerinnen und Lehrer gibt keine oder nur eine Möglichkeit an, wie man die Exponentialfunktion definieren kann. Genau zwei Möglichkeiten werden von 24% der Lehrerkräfte angegeben, weitere 24% können drei oder vier Möglichkeiten nennen. Die Trennschärfe stellt einen mittleren bis guten Wert in diesem Fachwissenstest dar.

Diese offene Aufgabe wird genauer beleuchtet, indem die unterschiedlichen Nennungen der Lehrkräfte explizit aufgelistet werden:

	n	
a) Über die Ableitungseigenschaft: $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$	18	
b) Als Umkehrfunktion zum natürlichen Logarithmus	14	
c) Über die Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	11	
d) Über die Folge: $f(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$	7	
e) Stichwort: Wachstumsfunktion, Verzinsung, …	2	

Tabelle 9.18: Antwortkategorien bei Item 6

Am häufigsten (55%) definieren die Lehrerinnen und Lehrer die Exponentialfunktion über ihre Ableitungseigenschaft. Darunter fällt auch, wenn eine Lehrperson ausgedrückt hat, dass die Ableitung die ursprüngliche Funktion reproduziert. Interessanterweise folgt noch vor den gängigen Definitionen über die Reihe oder die Folge die Definition über die Umkehrfunktion (42%). Es ist eher unüblich die Exponentialfunktion über die Logarithmusfunktion zu definieren, nichtsdestotrotz ist es eine korrekte Möglichkeit. Über die Potenzreiche bzw. die Folge definieren 33% bzw. 21% der Lehrkräfte die Exponentialfunktion. An die Potenzreihe erinnern sich also mehr Lehrerinnen und Lehrer als an die Folgendarstellung. Zwei Lehrerinnen und Lehrer umschrieben die Definition über die Eigenschaft der Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion.

Item 7: Stetigkeitsdefinition

Was sind Definitionen von Stetigkeit einer Funktion *f(x)* an der Stelle x_0? ($f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$)

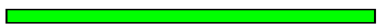
	n	
a) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$	22	
b) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$	10	
c) Für alle Folgen x_n mit Grenzwert x_0 gilt: *f(x)* stetig $\Leftrightarrow \lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(\lim\limits_{x_n \to x_0} x_n)$	20	
d) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ f umkehrbar und f^{-1} injektiv	2	
e) *f(x)* stetig $\Leftrightarrow$ zu jeder Umgebung *U(f(a))* des Bildpunktes *f(a)* gibt es eine Umgebung *U(a)* mit $f(U(a)) \subseteq U(f(a))$	21	

Tabelle 9.19: Antwortkategorien bei Item 7

Lösung: a) c) e)

Lösungshäufigkeit: .58

Trennschärfe: .58

Die Stetigkeit ist ein Gebiet der Mathematik, das in der gymnasialen Oberstufe grundlegend behandelt wird. Allerdings werden dabei nur selten exakte Definitionen wie in diesem Item verlangt. Trotzdem kann die Mehrheit der Lehrerinnen und Lehrer zumindest einige der richtigen Antworten identifizieren. 45% können sogar alle drei richtigen Antworten nennen, ohne auch nur eine einzige falsche Antwort anzukreuzen. Dagegen findet sich ein Drittel an Lehrpersonen, die dieses Item mit 0 Punkten abschließen. Die Trennschärfe liegt im oberen mittleren Bereich.

Item 8: Abzählbarkeit

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar unendlich?

	n	
a) M = { 2;4;6;8;10;12;… }	30	
b) W = { $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4} = 2; \sqrt{5}; \sqrt{6};\ldots$}	22	
c) Intervall $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$	3	
d) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$	21	
e) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$	1	

Tabelle 9.20: Antwortkategorien bei Item 8

Lösung: a) b) d)

Lösungshäufigkeit: .69

Trennschärfe: .58

Die Abzählbarkeit von Mengen ist im Lehrplan des Gymnasiums nicht vertreten, dennoch scheinen die Lehrerinnen und Lehrer mit dem Konzept noch sehr gut vertraut zu sein:
Ca. 40% sind in der Lage genau die drei korrekten Antworten zu benennen und nur 6% der Lehrkräfte erzielen bei diesem Item 0 Punkte. Die Trennschärfe liegt im oberen mittleren Bereich.

Item 9: Irrationalität

Gegeben sei folgende Zahl 0,12122122212… (es gibt unendlich viele Ziffern, wobei die 2er zwischen den 1ern stets um eins zunehmen).

Ist diese Zahl dann rational oder irrational?

	n	
a) Rational	1	
b) Irrational	27	
c) Kann ich nicht beantworten	3	

Tabelle 9.21: Antwortkategorien bei Item 9

Lösung: b)

Lösungshäufigkeit: .82

Trennschärfe: .51

Dieses Item ist von Zazkis und Sirotic (2004) übernommen, die es 46 Mathematiklehrerinnen und -lehrern der Sekundarstufe I vorgelegt haben. 76% konnten in der zitierten Studie eine richtige Antwort geben (ungeachtet der Begründung) und 24% gaben eine falsche oder keine Antwort. Ein ähnliches Bild ergibt sich hier: 82% nennen die richtige Antwort und 18% können die Frage nicht beantworten. Dies erweckt den Eindruck, dass das Item außergewöhnlich gut bearbeitet wurde. Allerdings konnten bei Zazkis und Sirotic nur 59% der Lehrerinnen und Lehrer ihre Antwort auch richtig begründen. So lieferten ca. 15% ihrer Probanden zur richtigen Antwort b) falsche Begründungen wie „Die Zahl ist irrational, weil sie unendlich viele Stellen hat“, so dass man vermuten kann, dass in der vorliegenden Stichprobe ähnlich viele falsche Vorstellungen vertreten sind. Bei der Itembewertung wird dieser Aspekt allerdings nicht berücksichtigt, da an dieser Stelle keine Begründung verlangt war. Der Wert der Trennschärfe liegt im mittleren Bereich.

9.2.5 Gesamtübersicht zum Test „Klassisches mathematischen Fachwissen“

Insgesamt besteht der Test zum „Klassischen mathematischen Fachwissen“ aus 9 Items, bei denen jeweils maximal 1 Punkt erreicht werden konnte. Die 33 Lehrerinnen und Lehrer, die diesen Test bearbeitet haben, erzielten im Durchschnitt 4,9 Punkte mit einer Standardabweichung von 1,6 Punkten. Diagramm 9.22 gibt einen Überblick über die Verteilung der Punktzahlen:

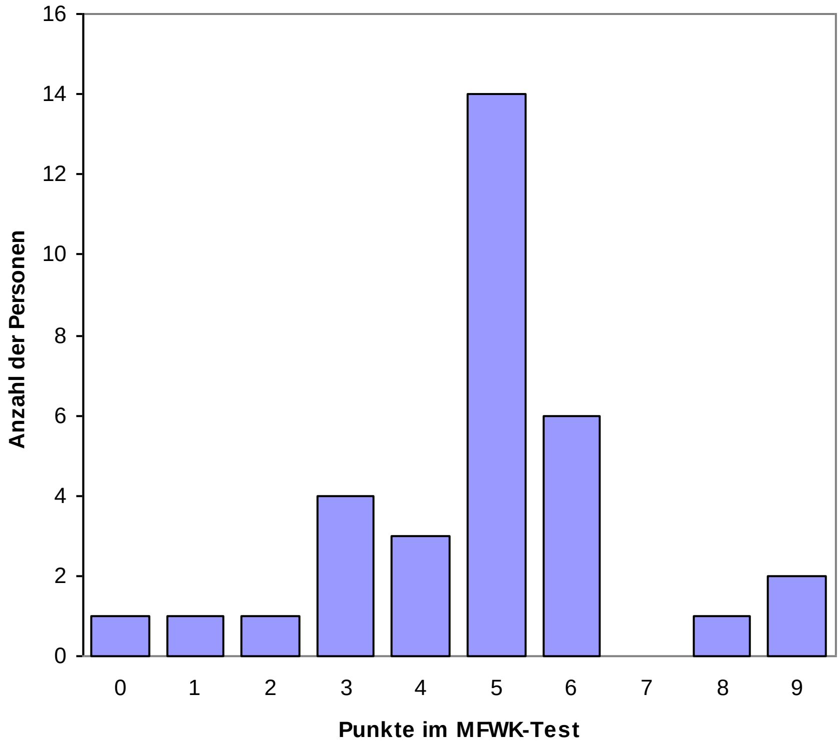


Diagramm 9.22: Anzahl der Personen mit einer bestimmten Punktzahl im „Klassisches mathematisches Fachwissen“-Test

Die meisten der Lehrkräfte erzielten eine Punktzahl von 4 bis 6 Punkten (60%).
21% der Lehrerinnen und Lehrer erreichen 0 bis einschließlich 3 Punkte, während ca. 9% mit über 7 Punkten bei einem sehr guten Wert liegen. Die Streuung der Testwerte zeigt, dass die Lehrkräfte durch diesen Fragebogen nach ihrem Fachwissen differenziert werden können.

9.2.6 Zusammenfassung

Das „Klassische mathematische Fachwissen zum Lehren“ konnte objektiv, valide und reliabel (α = .71) gemessen werden.

Die 9 Items wurden dichotomisiert ausgewertet, so dass 9 Punkte erreichbar waren.

Im Durchschnitt ergab sich bei den 33 Lehrerinnen und Lehrern ein Punktewert von 4,9 Punkten mit einer Standardabweichung von 1,6 Punkten.

Item	Schwierigkeit (Lösungshäufigkeit)	Trennschärfe
Item 1: Linearkombination	.78	.49
Item 2: Basis eines Vektorraums	.50	.48
Item 3: Lineare Gleichungssysteme	.59	.49
Item 4: Eigenvektoren	.15	.64
Item 5: Der Faktorraum	.16	.38
Item 6: Exponentialfunktion	.51	.55
Item 7: Stetigkeitsdefinition	.58	.58
Item 8: Abzählbarkeit	.69	.58
Item 9: Irrationalität	.82	.51

Tabelle 9.23: Zusammenfassung der Items zum Test „Klassisches mathematisches Fachwissen“

9.3 Der Test „Mathematisches Fachwissen“

Das mathematische Fachwissen von Lehrkräften kann man sich als ein Konstrukt aus mehreren Komponenten vorstellen (vgl. Kapitel 3). In dieser Studie versteht man unter dem mathematischen Fachwissen von Lehrkräften das mathematische Fachwissen zum Lehren (MFWL), zu dem das Schulmathematikwissen und das unterrichtsnahe universitäre Forschungswissen gerechnet werden, im Gegensatz zum klassischen mathematischen Fachwissen (MFWK), das für die höhere Mathematik auf universitärem Niveau steht (vgl. Kapitel 3.6). Zweifelsohne gibt es Überschneidungen dieser beiden Wissensbestandteile, etwa wenn an der Universität Themen besprochen werden, die auch in der Schule behandelt werden. Dennoch ist prinzipiell davon auszugehen, dass zwei getrennte Konstrukte vorliegen. Werden die Ergebnisse der beiden Fachwissenstests korreliert, so ergibt sich ein Korrelationskoeffizient von .51 ($p<.001$). Der Wert bestätigt beide Vermutungen. Zum einen ist er nicht zu hoch, so dass beide Wissenskomponenten noch deutlich empirisch voneinander getrennt betrachtet werden können, zum anderen lässt er erkennen, dass eine Überschneidung beider Konstrukte existiert.

Um auch für das mathematische Fachwissen von Lehrkräften einen Messwert zu erhalten, werden nun die beiden Testergebnisse zu dem Konstrukt MFW aggregiert. Der Test zum „Mathematischen Fachwissen“ besteht dann aus den Items zum „Mathematischen Fachwissen zum Lehren“ und denjenigen zum „Klassischen mathematischen Fachwissen“, insgesamt also 16 Items. Somit sind maximal 16 Punkte zu erreichen. Die Reliabilität ergibt einen Wert von $\alpha = .80$, was zwar ein relativ hoher Wert ist, aufgrund der großen Anzahl an Items jedoch trotzdem nur als zufriedenstellend einzustufen ist. Die durchschnittliche Punktzahl der Lehrerinnen und Lehrer liegt bei 7,9 Punkten mit einer Standardabweichung von 3,1 Punkten. Diagramm 9.24 verschafft einen Überblick über die Ergebnisse im Test zum „Mathematischen Fachwissen“.

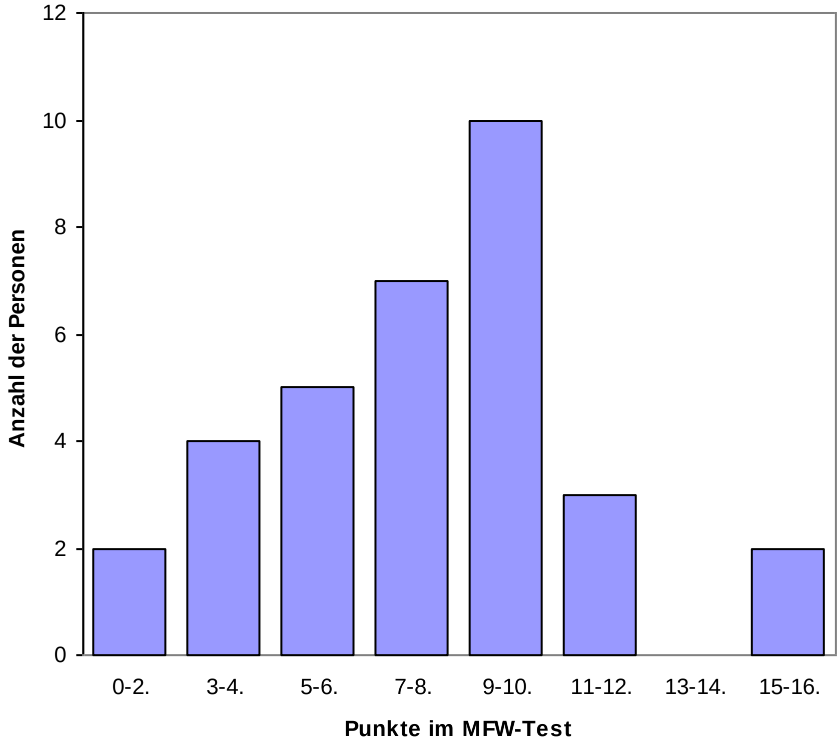


Diagramm 9.24: Anzahl der Personen mit einer bestimmten Punktzahl im Test zum „Mathematischen Fachwissen“

Um im weiteren Auswertungsteil Lehrergruppen mit besonders hohem von solchen mit eher niedrigem Fachwissen zu unterscheiden, werden für die Stichprobe zwei Testwerte so gesetzt, dass drei Gruppen mit ungefähr identischer Personenanzahl entstehen. Dabei wird sich bei der Bildung der Intervallgrenzen am Mittelwert orientiert. Wählt man die Intervalle von 0 bis unter 7 Punkte, ab 7 Punkte bis unter 9,5 Punkte und ab 9,5 Punkte, so werden obige Bedingungen erfüllt.

	Gruppeneinteilung über MFW		
	Niedriges MFW $0 \leq$ Punktzahl < 7	Mittleres MFW $7 \leq$ Punktzahl $< 9{,}5$	Hohes MFW $9{,}5 \leq$ Punktzahl
Anzahl der Personen	14	11	8

Tabelle 9.25: Gruppeneinteilung über das „Mathematische Fachwissen gesamt“

Diese Gruppenaufteilung wird bei der folgenden Auswertung zur Veranschaulichung der Ergebnisse herangezogen.

9.4 Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Fachwissen und dem Kontext der Lehrkräfte

Im folgenden Abschnitt werden die Zusammenhänge zwischen den oben erarbeiteten Konstrukten zum mathematischen Fachwissen und den in Kapitel 7 vorgestellten Lehrervariablen untersucht. Wie bereits erörtert, wird dabei explorativ vorgegangen, indem die Korrelationen von MFWL, MFWK und MFW mit den Lehrervariablen berechnet werden. An dieser Stelle sei an die Abkürzungen für die drei Fachwissenskonstrukte erinnert:
MFWL: Mathematisches Fachwissen zum Lehren
MFWK: Mathematisches Fachwissen klassisch
MFW: Mathematisches Fachwissen, aggregiert aus MFWL und MFWK

9.4.1 Biographische Daten

Im Folgenden werden die Zusammenhänge der biographischen Daten der Lehrkräfte mit ihrem mathematischen Fachwissen untersucht. Zu den biographischen Daten zählen das Geschlecht, das Alter, die Lehrerfahrung, das Bundesland, in dem der Studienabschluss erworben wurde, und der Aspekt, ob die Lehrkraft in letzter Zeit einen Kurs der Oberstufe unterrichtet hat.
Vor der Auswertung werden jeweils Überlegungen angeführt, weswegen die jeweilige Fragestellung von Interesse ist bzw. welcher Zusammenhang vermutet werden kann.

Geschlecht

Zunächst wird geprüft, ob sich das mathematische Fachwissen von Mathematiklehrerinnen von dem der Mathematiklehrer unterscheidet. Ob bezüglich einer Variablen Geschlechterunterschiede existieren, ist eine häufig gestellte Frage in pädagogischen und psychologischen Forschungsarbeiten. In mathematikdidaktischen Arbeiten wurde vor allem in den 70er Jahren oftmals beobachtet, dass Männer in den mathematischen Disziplinen Vorteile besitzen und bessere Leistungen erzielen. Heutzutage wird dieser Effekt seltener nachgewiesen und immer öfter die These der Gender-similarity vertreten, was impliziert dass beispielsweise die kognitiven Unterschiede zwischen Mann und Frau nicht so bedeutend sind wie früher angenommen (Hyde, 2005; Heinze et. al, 2007). In Tabelle 9.26 werden die Mittelwerte und Standardabweichungen nach Geschlechtern getrennt aufgeführt.

	N=33					
	MFWL		MFWK		MFW	
	Männer n = 19	Frauen n = 14	Männer n = 19	Frauen n = 14	Männer n = 19	Frauen n = 14
Geschlecht	3,37 (2,24)	2,36 (1,33)	4,90 (2,20)	4,58 (1,10)	8,27 (3,88)	6,94 (2,26)

Tabelle 9.26: Mittelwerte und Standardabweichungen für das mathematische Fachwissen getrennt nach Geschlechtern

Im Test zur Messung des MFWL (max. 7 erreichbare Punkte) schneiden männliche Lehrkräfte um ca. 1 Punkt besser ab als Lehrerinnen. Beim MFW (max. 16 erreichbare Punkte) sind es 1,3 Punkte. Diese Unterschiede sind nicht signifikant und deshalb nicht weiter von Bedeutung. Signifikante geschlechterspezifische Unterschiede lassen sich demzufolge nicht feststellen.

Alter

Es kann vermutet werden, dass jüngere Lehrkräfte, deren Fachstudium weniger weit zurück liegt, im Test zur Messung des MFWK besser abschneiden als ältere Lehrkräfte.
In Tabelle 9.27 sind die Korrelationen des Alters mit den Testscores berechnet worden.

	N=28		
	MFWL	MFWK	MFW
Alter	-,095	,008	-,054

Tabelle 9.27: Korrelationen des Alters mit den Fachwissenskonstrukten
*p < 0,05 **p < 0,01

Im Weiteren reduziert sich die Stichprobengröße von 33 auf 28, da nur von den Lehrkräften der 7. Klassen die vollständigen biographischen Daten vorlagen (vgl. Kapitel 8).
Es zeigen sich über alle drei Wissenskonstrukte hinweg keine Unterschiede im Fachwissen. Noch deutlicher wird der fehlende Einfluss des Alters auf das Fachwissen, wenn man das durchschnittliche Alter in den Leistungsdritteln des MFW-Tests betrachtet (Tabelle 9.28).

	Gruppeneinteilung über MFW		
	Niedriges MFW MW (SD)	Mittleres MFW MW (SD)	Hohes MFW MW (SD)
Alter	42,0 (10,2)	41,6 (8,1)	40,3 (8,2)

Tabelle 9.28: Alter der Probanden in Abhängigkeit der Gruppeneinteilung über MFW

Das durchschnittliche Alter liegt in allen drei Leistungsdritteln bei ca. 41 Jahren. Die breite Streuung von bis zu 10 Jahren zeigt, dass sich alle Altersklassen in den Gruppen wiederfinden. Die Ergebnisse legen nahe, dass das mathematische Fachwissen nicht mit dem Alter zusammenhängt.

Lehrerfahrung

Es wäre nun möglich, dass nicht das niedrige Alter der entscheidende Prädiktor für hohes Fachwissen ist, sondern die Zeitspanne, in der die Lehrerin oder der Lehrer schon im Dienst ist. Dieser Vermutung nach können sich Lehrkräfte, die noch nicht lange im Dienst sind, an mehr Fachwissen aus dem Studium erinnern als andere Lehrkräfte.
Die Korrelationen der Dienstjahre mit dem Fachwissen finden sich in Tabelle 9.29.

	N=28		
	MFWL	MFWK	MFW
Diensttätigkeit	-,071	,020	-,036

Tabelle 9.29: Korrelationen der Lehrerfahrung mit den Fachwissenskonstrukten
$^{*}p < 0,05$ $^{**}p < 0,01$

Wie bereits beim Alter zeigen sich auch für die Lehrerfahrung gemessen in Dienstjahren keine signifikanten Korrelationen.

Betrachtet man die durchschnittlichen Dienstjahre in den drei Lehrergruppen mit unterschiedlichem Fachwissen (vgl. Tabelle 9.30), so findet man eine breite Streuung um einen ähnlichen hohen Mittelwert. Folglich ist die Lehrerfahrung kein Faktor, der mit dem mathematischen Fachwissen zusammenhängt. Vielmehr scheint der Fachwissensstand der Lehrkräfte unabhängig von der Lehrerfahrung zu sein.

	Gruppeneinteilung über MFW		
	Niedriges MFW MW (SD)	Mittleres MFW MW (SD)	Hohes MFW MW (SD)
Diensttätigkeit	12,3 (10,8)	12,8 (10,2)	9,6 (9,5)

Tabelle 9.30: Durchschnittliche Lehrerfahrung in Jahren in Abhängigkeit der Gruppeneinteilung über MFW

Fächerkombination

Die Fächerkombination Mathematik und Physik ist eine der häufigsten an bayerischen Gymnasien und lässt auf eine naturwissenschaftlich-technische Ausrichtung der Lehrkraft schließen. Physiklehrkräfte lernen im Studium mehr Anwendungen der Mathematik kennen und beschäftigen sich dadurch womöglich mehr mit mathematischen Inhalten als beispielsweise Lehrerinnen und Lehrer mit der Fächerkombination Mathematik und Sport. Es wäre daher denkbar, dass die Lehrerinnen und Lehrer mit Physik als Zweitfach aufgrund ihrer Interessenausrichtung über höheres mathematisches Fachwissen verfügen. In Tabelle 9.31 sind die durchschnittlichen Punktzahlen in Abhängigkeit der Fächerkombination eingetragen.

	N=28					
	MFWL		MFWK		MFW	
	M/Ph n = 19	M/X n = 9	M/Ph n = 19	M/X n = 9	M/Ph n = 19	M/X n = 9
Punktzahl	3,05 (2,07)	2,89 (1,76)	4,89 (1,66)	4,48 (1,31)	7,95 (3,13)	7,37 (2,79)

Tabelle 9.31: Mittelwerte und Standardabweichungen der Punktzahlen in den drei Fachwissenstests in Abhängigkeit von der Fächerkombination *p < 0,05 **p < 0,01

M/Ph: Fächerkombination Mathematik / Physik

M/X: Fächerkombination Mathematik und beliebiges zweites Fach außer Physik

Die Punktzahlen in den jeweiligen Tests fallen ähnlich hoch aus und aufgrund der relativ breiten Streuung verwundert es nicht, dass keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen M/Ph und M/X nachzuweisen sind. Daher ist die Fächerkombination in dieser Studie kein Prädiktor für das mathematische Fachwissen einer Lehrkraft.

Bundesland, in dem der Studienabschluss erworben wurde

In Kapitel 6.3 wurde der Inhalt des Mathematikstudiums für das Lehramt an Gymnasien verglichen und festgestellt, dass sich die Bundesländer hinsichtlich des stofflichen Curriculums nur wenig unterscheiden. Aufgrund verschiedener Umsetzungsmöglichkeiten der Inhalte in Umfang, in der Art der Prüfung oder in der Ausgestaltung der Kurse könnte es jedoch sein, dass dennoch Unterschiede im Fachwissen entstehen. Tabelle 9.32 zeigt die Punktzahlen der drei Fachwissenstests in Abhängigkeit davon, ob der Abschluss in Bayern erworben wurde oder nicht.

	N=28					
	MFWL		MFWK		MFW	
	Bayern n = 20	Andere n = 8	Bayern n = 20	Andere n = 8	Bayern n = 20	Andere n = 8
Punktzahl	3,45* (1,96)	1,88* (1,46)	5,12 (1,47)	3,88 (1,41)	8,57* (2,76)	5,75* (2,67)

Tabelle 9.32: Mittelwerte und Standardabweichungen der Punktzahlen in den drei Fachwissenstest in Abhängigkeit von dem Bundesland, in dem der Abschluss erworben wurde
*p < 0,05 **p < 0,01
Bayern: Abschluss in Bayern erworben
Andere: Abschluss in einem anderen Bundesland erworben

Tatsächlich finden sich signifikante Unterschiede in Abhängigkeit vom Bundesland, in dem der Abschluss erworben wurde. Die Mittelwerte beim MFWK sind gerade nicht mehr signifikant (p=,052), zeigen aber die gleiche Tendenz. Die Relevanz dieses Unterschiedes wird mit der Effektstärke d nach Cohen (1988) ausgedrückt. Sie wird berechnet mit $d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$, wobei μ_1 und μ_2 die Mittelwerte bezeichnen und σ die korrigierte Streuung mit $\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2}}$ ist. So ergibt sich beim MFWL ein Wert von .91 und beim MFW ein Wert von 1.0. Dies sind hohe Werte, die auf einen bedeutsamen Effekt schließen lassen. Um diese Beobachtung genauer zu analysieren, wird die Verteilung der Lehrkräfte in den Fachwissensgruppen betrachtet (Tabelle 9.33).

	Gruppeneinteilung über MFW					
	Niedriges MFW MW (SD)		Mittleres MFW MW (SD)		Hohes MFW MW (SD)	
	Bayern n = 6	And. n = 7	Bayern n = 7	And. n = 1	Bayern n = 7	And. n = 0

Tabelle 9.33: Verteilung der Lehrkräfte in der Gruppeneinteilung über MFW in Abhängigkeit vom Bundesland, in dem der Abschluss erworben wurde

Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass alle Lehrpersonen mit hohem Fachwissen ihren Abschluss in Bayern erworben haben und von den 8 Lehrerinnen oder Lehrern, die ihren Abschluss in anderen Bundesländern abgelegt haben, 7 in der Kategorie mit dem niedrigem Fachwissen zu finden sind. Ob eine Lehrkraft den Abschluss in Bayern erworben hat oder nicht, ist in dieser Studie somit ein Prädikator für das mathematische Fachwissen.

Angabe, ob und wann ein Leistungskurs / Grundkurs unterrichtet wurde

Es erscheint plausibel, dass Lehrerinnen oder Lehrer, die aktuell oder vor kurzem einen Leistungs- oder Grundkurs in der Oberstufe unterrichteten, über höheres Fachwissen verfügen. Diese Vermutung wird direkt abgeleitet aus den stofflichen Anforderungen, die in einem solchen Oberstufenkurs thematisiert werden. Die an der Studie teilnehmenden Lehrkräfte wurden daher gefragt, ob sie in den letzten drei Jahren einen Grundkurs oder einen Leistungskurs unterrichtet haben. Die Mittelwerte und Standardabweichungen sowie die Anzahl der Lehrkräfte pro Gruppe sind in Tabelle 9.34 dargestellt.

	N=28					
	MFWL		MFWK		MFW	
	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
GK?	2,69 (1,60) n = 13	3,27 (2,22) n = 15	4,45 (1,68) n = 13	5,03 (1,41) n = 15	7,14 (2,65) n = 13	8,30 (3,24) n = 15
LK?	2,17 (0,98) n = 6	3,22 (2,09) n = 22	4,42 (1,14) n = 6	4,86 (1,64) n = 22	6,58 (2,00) n = 6	8,08 (3,16) n = 22

Tabelle 9.34: Mittelwerte und Standardabweichung der Punktzahlen in den Fachwissenstests in Abhängigkeit davon, ob in den letzten drei Jahren ein GK / LK unterrichtet wurde
*p < 0,05 **p < 0,01

Die Fachwissenspunktwerte der Lehrerinnen und Lehrer, die in den letzten drei Jahren keinen Grundkurs oder Leistungskurs hatten, sind durchschnittlich höher als die der Lehrkräfte, die einen Grund- oder Leistungskurs unterrichtet hatten. Allerdings sind diese Unterschiede nicht signifikant und besitzen deshalb keine Relevanz. Es kann daraus geschlossen werden, dass der Zeitpunkt, wann zuletzt ein Grund- oder Leistungskurs unterrichtet wurde, keinen bedeutsamen Faktor für das Fachwissen darstellt.

9.4.2 Subjektive Theorien

Im Rahmen der subjektiven Theorien wurden in dieser Studie Einstellungen zum Lehren und Lernen (vgl. Kapitel 7.1.2) untersucht, die durch 5 Skalen repräsentiert werden. Die Beliefs über eine konstruktivistische Auffassung werden über fünf Items abgefragt, die Ansichten über eine rezeptive Sichtweise von Lehren und Lernen über neun Items. Während der Reliabilitätswert der konstruktivistischen Sichtweise (α_{konst} = .72) zufriedenstellend ist, kann bei dem Reliabilitätswert der rezeptiven Auffassung ($\alpha_{rezeptiv}$ = .63) lediglich von einer gerade noch ausreichenden Reliabilität gesprochen werden. Die drei anderen Skalen bestehen jeweils nur aus zwei Items und können somit allenfalls einen Indikatorstatus einnehmen. Die Reliabilitätswerte liegen bei $\alpha_{Begabung}$ = .52, $\alpha_{positive\_Emotionen}$ = .38 und $\alpha_{interesse}$ = .78. In Hinblick darauf, dass die Konstrukte von jeweils nur zwei Items pro Skala gemessen werden, sind die Reliabilitätswerte akzeptabel. Zunächst werden die Ergebnisse anhand der Referenzgruppe, die die Stichprobe in drei Gruppen mit unterschiedlichen Fachwissensniveaus aufteilt, veranschaulicht. Anschließend werden die Korrelationen zwischen den Beliefsskalen und den Konstrukten zum „mathematischen Fachwissen“ untersucht. In Tabelle 9.35 sind die Mittelwerte auf der vierstufigen Likert-Skala (4 = „stimmt genau“ / 3 = „stimmt größtenteils“ / 2 = „stimmt nur teilweise“ / 1 = „stimmt gar nicht“) eingetragen.

	Gruppeneinteilung über MFW		
	Niedriges MFW MW (SD)	Mittleres MFW MW (SD)	Hohes MFW MW (SD)
Konstrukt. Sicht	3,22 (0,45)	3,29 (0,35)	3,30 (0,48)
Rezeptive Sicht	2,44 (0,36)	2,33 (0,42)	2,02 (0,22)
Begabung	2,33 (0,83)	2,39 (0,93)	1,96 (0,59)
Pos. Emotionen	3,58 (0,51)	3,50 (0,43)	3,29 (0,64)
Interesse	2,42 (0,56)	2,28 (0,57)	2,39 (0,50)

Tabelle 9.35: Mittelwerte der Beliefsskalen in Abhängigkeit vom mathematischen Fachwissen

Betrachtet man die Leistungsdrittel des MFW bezüglich der konstruktivistischen Sichtweise, so ergibt sich für alle drei Gruppen eine Tendenz zur Zustimmung, es existieren keine bedeutsamen Unterschiede innerhalb der Fachwissensgruppen. Anders bei der rezeptiven Sichtweise: Während Lehrerinnen und Lehrer mit eher niedrigem Fachwissen eher der rezeptiven Auffassung zustimmen, lehnen Lehrkräfte mit hohem Fachwissen diese Ansicht eher ab. Der Unterschied zwischen diesen Gruppen ist nicht nur signifikant, sondern weist darüber hinaus aufgrund der niedrigen Standardabweichungen eine außergewöhnlich hohe Effektstärke auf ($d = 1.41$). Auch hinsichtlich der Meinung über die Bedeutung der Begabung beim Mathematiklernen gibt es Besonderheiten. Lehrpersonen mit niedrigem Fachwissen vertreten eher die Ansicht, dass mathematische Kompetenz von der Begabung abhängt, während Lehrkräfte mit hohem Fachwissen dies verneinen. Dieser Unterschied ist jedoch aufgrund der hohen Streuung innerhalb der Gruppe mit niedrigem Fachwissen nicht mehr signifikant. Die Bedeutung positiver Emotionen wird von allen drei Gruppen als überdurchschnittlich hoch angesehen, allerdings nimmt die Zustimmung mit höherem Fachwissen eher ab. Diese Tendenz ist allerdings ebenfalls nicht signifikant. Die Wichtigkeit interessanter Aufgaben für die Motivation wird von den Lehrerinnen und Lehrern als durchschnittlich angesehen, hierbei ergeben sich keine bedeutsamen Unterschiede zwischen den Gruppen.

Im Folgenden werden nun auch die beiden Untertests „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ und „Klassisches mathematisches Fachwissen“ miteinbezogen und die Korrelationen des Fachwissens mit den subjektiven Theorien berechnet (vgl. Tabelle 9.36).

	N=28		
Beliefs:	MFWL	MFWK	MFW
Konstruktivistische Sichtweise	,009	,188	,103
Rezeptive Sichtweise	-,447*	-,316	-,455*
Begabungsbedeutung	-,231	-,196	-,252
Leistungsförderung durch positive Emotionen	-,092	,103	-,007
Leistungsförderung durch interessante Aufgaben	,117	-,251	-,053

Tabelle 9.36: Korrelationen von Lehrerfachwissen mit Lehrervariablen

*$p < 0,05$ **$p < 0,01$

Unter Einbeziehung der beiden anderen Testwerte des Fachwissens ergibt sich ein analoges Bild. Die konstruktivistische Sichtweise zeigt keine signifikanten Korrelationen bezüglich der Fachwissenskonstrukte, während das rezeptive Verständnis negativ mit dem Fachwissen zum MFWL und MFW korreliert. Die Korrelation hat mit $r = -.447$ bzw. $r = -.455$ einen bedeutsamen Wert. Die Korrelation mit dem MFWK ist gerade nicht mehr signifikant, zeigt jedoch die gleiche Tendenz. Die Leistungsförderung durch positive Emotionen oder interessante Aufgaben ist weder signifikant noch zeigt sie eine Tendenz.

9.4.3 Fachliche Emotionen, Motivation und Interesse

Wie in Kapitel 7.1.1 dargelegt, werden die fachlichen Emotionen sowie die Motivation und das Interesse der Lehrkraft anhand zweier Variablen repräsentiert, nämlich ob die Lehrkraft Mathematik als Lieblingsunterrichtsfach angibt und ob dem mathematischen Fachwissen eine hohe Wichtigkeit für den Unterricht zugesprochen wird.

Lieblingsunterrichtsfach

Die Affinität zum Unterrichtsfach könnte insofern ein Prädiktor für das Fachwissen sein, als die Vorliebe für Mathematik als Unterrichtsfach auch mit höherem Fachwissen in dieser Disziplin einhergehen könnte. Die Lehrerinnen und Lehrer wurden daher gefragt, ob Mathematik ihr Lieblingsunterrichtsfach ist. Anhand der positiven und negativen Antworten ergeben sich zwei Gruppen. In der folgenden Tabelle 9.37 wurden die Mittelwerte und Standardabweichungen eingetragen:

	N=28					
	MFWL		MFWK		MFW	
	Ja n = 10	Nein n = 18	Ja n = 10	Nein n = 18	Ja n = 10	Nein n = 18
Lieblings- fach?	2,90 (1,73)	3,06 (2,10)	4,98 (1,46)	4,64 (1,61)	7,88 (2,87)	7,69 (3,12)

Tabelle 9.37: Mittelwerte und Standardabweichungen der Punktzahlen in den drei Fachwissenstests in Abhängigkeit davon, ob die Probanden Mathematik als ihr Lieblingsunterrichtsfach angeben

*p < 0,05 **p < 0,01

In allen drei Tests bewegt sich der Mittelwert in beiden Gruppen um den gleichen Wert. Folglich lassen sich keine signifikanten Unterschiede finden: Ob Mathematik von den Lehrkräften als Lieblingsunterrichtsfach angegeben wird oder nicht, ist daher in dieser Studie kein Prädiktor für das Fachwissen.

Einschätzung der Wichtigkeit von mathematischem Fachwissen

Je wichtiger mathematisches Fachwissen für den Unterricht empfunden wird, desto eher, so erscheint es zumindest möglich, verfügt die Lehrerin oder der Lehrer selbst über hohes mathematisches Fachwissen. Zur Prüfung dieser Vermutung wurden die Lehrkräfte in dieser Studie aufgefordert, ihre Kenntnisse zu einzelnen mathematischen Gebieten und die subjektiv empfundene Wichtigkeit derselben für den Schulalltag anzugeben (vgl. Abbildung 9.38). Den Antworten werden Zahlenwerte zwischen 1 und 4 zugeordnet, so dass der Mittelwert bei 2,5 liegt.

	Wie schätzen Sie Ihre Kenntnisse in diesem Gebiet ein?	Für wie wichtig halten Sie dieses Gebiet für Ihren Schulalltag?
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	4 vertiefte Kenntnisse 3 Kenntnisse 2 nur Grundlagen 1 keine Kenntnisse	4 wichtig 3 eher wichtig 2 eher unwichtig 1 unwichtig

Abbildung 9.38: Kenntnis- und Wichtigkeitseinschätzung durch die Lehrkraft

Diagramm 9.39 zeigt die einzelnen Gebiete, ein Ranking, welche dieser Gebiete für besonders wichtig im Schulalltag angesehen werden (erster Balken) und die Kenntnisse in den jeweiligen Gebieten (zweiter Balken jeweils darunter).

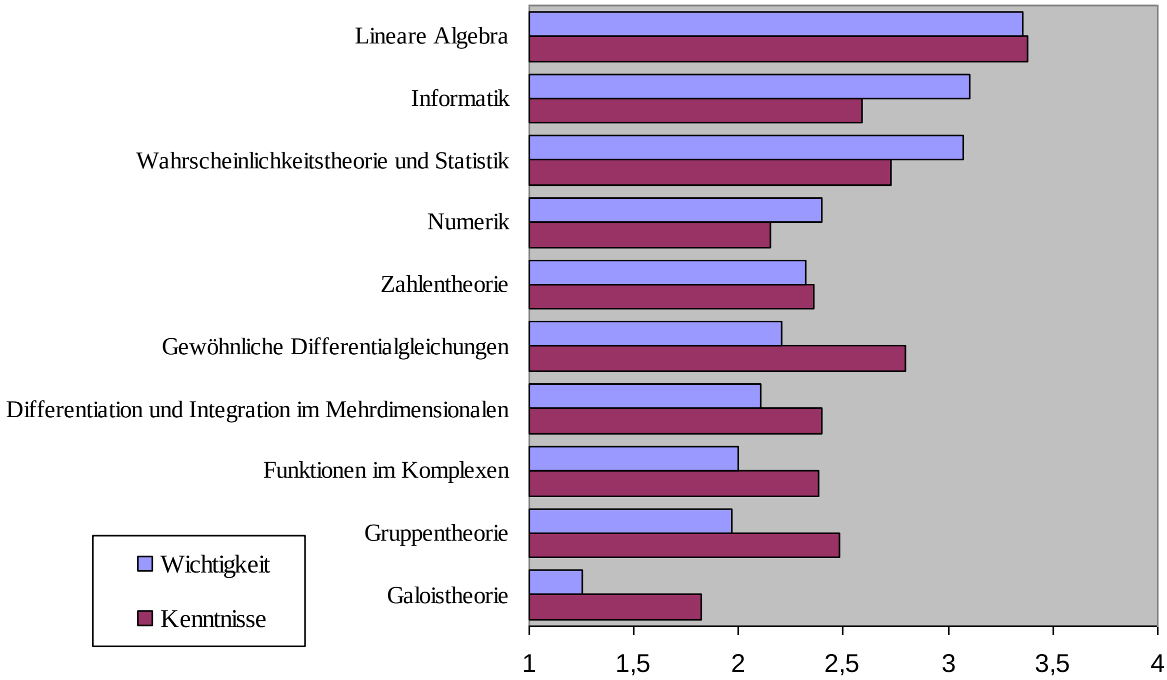


Diagramm 9.39: Wichtigkeit und Kenntnisse nach Einschätzung der Lehrerinnen und Lehrer

Die Wichtigkeit und die Kenntnisse von linearer Algebra werden am höchsten eingestuft. Bei der Informatik fällt auf, dass die Wichtigkeit einen hohen Wert aufweist, die eigenen Kenntnisse jedoch insgesamt nur durchschnittlich eingeschätzt werden. Auch bei Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik wird die Wichtigkeit höher eingeschätzt als die eigenen Kenntnisse. Bei der Numerik ist ein Sprung auf einen Wert unter dem Mittelwert von 2,5 feststellbar. Die Kenntnisse liegen ebenfalls unter diesem Mittelwert. Des Weiteren wird die Zahlentheorie, die inhaltlich eigentlich sehr viel mit dem Unterricht gemein hat, als eher unwichtig für den Unterricht betrachtet. Im Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen schätzen die Lehrerinnen und Lehrer ihren Kenntnisstand überdurchschnittlich ein, stufen dieses Gebiet aber als eher unwichtig für den Unterricht ein. Analoges findet sich bei der Differentiation und Integration im Mehrdimensionalen, Funktionen im Komplexen und in der Gruppentheorie. Die Galoistheorie wird weder als wichtig empfunden noch werden große Kenntnisse in dieser Disziplin angegeben.

Als nächstes soll untersucht werden, ob Lehrkräfte, die der Mathematik tendenziell eine höhere Wichtigkeit beimessen, selbst über höheres mathematisches Fachwissen verfügen. Dazu wird jeder Lehrkraft ein Wichtigkeitswert zugeordnet, indem der Durchschnitt aus allen angegebenen Wichtigkeitswerten gebildet wird. Analog dazu wird der subjektiv eingeschätzte Kenntnisstand berechnet. Durch den Bezug der Kenntniseinschätzungen mit den Testergebnissen kann überprüft werden, ob sich die Lehrerinnen und Lehrer bezüglich ihres Wissensstands richtig einschätzen. Die Aggregation zu den beiden Variablen „Wichtigkeit" und „Kenntnisse" liefert zufriedenstellende Reliabilitätswerte ($\alpha_{Wichtigkeit} = .76$ und $\alpha_{Kenntnisse} = .81$). Die Korrelationen dieser beiden Konstrukte sind in Tabelle 9.40 eingetragen.

	N=28		
	MFWL	MFWK	MFW
Wichtigkeit	,184	,235	,238
Kenntnisse	,200	,393*	,333

Tabelle 9.40: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und der angegebenen Wichtigkeit und subjektiven Kenntnisseinschätzung

*p < 0,05 **p < 0,01

Für die Wichtigkeit ergeben sich schwache positive Korrelationen, d.h. Lehrkräfte, die den mathematischen Gebieten eine höhere Wichtigkeit zuschreiben, wissen auch mehr. Allerdings ist dieses Korrelation nicht signifikant. Dafür ergibt sich zwischen der Wichtigkeit und den Kenntnissen untereinander eine positive signifikante Korrelation von ,435 ($p < 0{,}05$). Das bedeutet: Lehrkräfte, die der Mathematik eine höhere Wichtigkeit beimessen schätzen auch ihr Wissen über Mathematik höher ein. Die Korrelationen zwischen den subjektiven Kenntnissen und den Ergebnissen in den Fachwissenstests liegen zwischen ,20 und ,40. Allerdings ist nur die Korrelation beim MFWK-Test signifikant. Insgesamt deutet dieser Zusammenhang darauf hin, dass die Lehrerinnen und Lehrer ihr mathematisches Fachwissen in etwa richtig einschätzen konnten und bestätigt damit erneut die Güte der mathematischen Fachwissenstests.

9.5 Zusammenhänge zwischen mathematischem Fachwissen und dem Unterricht

In diesem Kapitel wird untersucht, ob sich in dieser Studie Effekte des mathematischen Fachwissens auf den Unterricht finden lassen (vgl. 7.2). Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Variablen nicht durch die direkte Beobachtung des Unterrichts, sondern indirekt über die Einschätzung der Schülerinnen und Schüler erhoben wurden. Die Kapitelabschnitte gliedern sich dabei nach den Unterkategorien des Prozesses „Unterricht“ im Prozess-Mediations-Produkt-Modell.

9.5.1 Kognitive Aktivierung

Die kognitive Aktivierung im Unterricht wird überwiegend von der Lehrkraft gesteuert. Wie in Kapitel 7.2 beschrieben, wird die kognitive Aktivierung über die Schülermeinung zum Fehlerumgang gemessen. Es wird vermutet, dass eine Lehrkraft mit hohem Fachwissen bei Schülerfehlern kognitiv unterstützender reagieren kann als Lehrkräfte, die weniger mathematisches Fachwissen besitzen und deshalb die Fehlerbehandlung aus Unsicherheit eher meiden. In Tabelle 9.41 ist die Korrelation des kognitiv-unterstützenden Lehrerverhaltens mit dem Fachwissen der jeweiligen Lehrkräfte eingetragen. Da dieser Fragebogen von einigen Schülerinnen und Schülern nicht abgegeben wurde, reduziert sich die Fallzahl geringfügig von 913 auf 907.

	Individualebene (N=907)			Klassenebene (N=28)		
	MFWL	MFWK	MFW	MFWL	MFWK	MFW
Kognitiv-Unterstützendes Lehrerverhalten	-,167**	-,083*	-,155**	-,376*	-,159	-,339

Tabelle 9.41: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und dem kognitiv-unterstützenden Lehrerverhalten
*p < 0,05 **p < 0,01

Entgegen der Erwartung zeigt sich ein negativer signifikanter Zusammenhang zwischen dem kognitiv-unterstützenden Verhalten einer Lehrkraft bei Fehlern und ihrem Fachwissen. Auf Klassenebene steigt der Effekt sogar auf einen bedeutsamen Wert: Schülerinnen und Schüler empfinden das Lehrerverhalten als kognitiv unterstützender, wenn ihre Lehrkraft über weniger Fachwissen verfügt. Dieses überraschende Ergebnis soll im Folgenden weiter analysiert werden. Dazu werden die Schülerinnen und Schüler auf Grundlage ihres Ergebnisses im Test zur mathematischen Kompetenz in Leistungsdrittel eingeteilt. Es ergeben sich drei Gruppen, wobei das untere Leistungsdrittel schwächere Schülerinnen und Schüler und das oberste Leistungsdrittel die leistungsstärksten Schülerinnen und Schüler beinhaltet. Nun wird erneut die Korrelation auf Individualebene bezüglich dieser Leistungsdrittel berechnet (vgl. Tabelle 9.42).

	Individualebene Unteres LD (N= 302); Mittleres LD (N= 311); Oberes LD (N=287)			
	Leistungsdrittel	MFWL	MFWK	MFW
Kognitiv-Unterstützendes Lehrerverhalten	Unteres LD	-,233**	-,084	-,199**
	Mittleres LD	-,130*	-,101	-,138*
	Oberes LD	-,100	-,028	-,082

Tabelle 9.42: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und kognitiv-unterstützendem Lehrerverhalten unterschieden nach Leistungsdritteln

*p < 0,05 **p < 0,01

Wie in Tabelle 9.42 ersichtlich, ist der Effekt, dass Lehrerinnen und Lehrer mit sinkendem Fachwissen als kognitiv unterstützender wahrgenommen werden, bei leistungsstarken Schülerinnen und Schüler nicht mehr erkennbar. Anders bei schwächeren Schülerinnen und Schülern: Hier verstärkt sich dieser Effekt. Das bedeutet, dass schwache Schülerinnen und Schüler angeben bei Fehlersituationen eher zu profitieren, wenn ihre Lehrerin oder ihr Lehrer ein niedrigeres Fachwissen besitzt. Eine mögliche Interpretation dieser Beobachtung wird in der Diskussion gegeben.

9.5.2 Emotional-motivationale Unterstützung

An dieser Stelle wird nachgeprüft, ob die von den Schülerinnen und Schülern subjektiv wahrgenommene emotionale Unterstützung mit dem Fachwissen der jeweiligen Lehrkraft zusammenhängt. Dies geschieht, indem das negative affektive Verhalten der Lehrkraft bei einer Fehlersituation mit dem Fachwissen der Lehrkraft korreliert wird (vgl. Tabelle 9.43).

	Individualebene (N=903)			Klassenebene (N=28)		
	MFWL	MFWK	MFW	MFWL	MFWK	MFW
Negatives affektives Lehrerverhalten	-,137**	-,039	-,112**	-,314	-,085	-,259

Tabelle 9.43: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und dem affektiven Lehrerverhalten bei Schülerfehlern
*p < 0,05 **p < 0,01

Das negative affektive Lehrerverhalten korreliert signifikant mit den Fachwissenskonstrukten, jedoch sind diese Zusammenhänge betragsmäßig so gering, dass ihnen keine weitere Bedeutung beigemessen wird.

9.6 Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Fachwissen und der Schülermediation

In diesem Kapitel wird untersucht, ob sich in dieser Studie Auswirkungen des mathematischen Fachwissens auf die Schülermediation finden lassen (vgl. 7.3). Mediation sind Verarbeitungsprozesse der Schülerin oder des Schülers, wobei davon ausgegangen wird, dass diese von der Lehrkraft beeinflussbar sind. Die Kapitelabschnitte gliedern sich dabei nach den Unterkategorien der „Mediation" im Prozess-Mediations-Produkt-Modell.

9.6.1 Nutzung von Lernzeiten

Lernzeit gilt unter anderem dann als gut genutzt, wenn sich eine Schülerin oder ein Schüler selbstständig mit einem begangenen Fehler auseinandersetzt. Dabei wäre es denkbar, dass eine Lehrerin oder ein Lehrer mit hohem Fachwissen der Klasse den hohen Stellenwert der Fehlerbehandlung besser vermitteln kann als eine Lehrerkraft mit niedrigem Fachwissen. In Tabelle 9.44 sind die Korrelationen dieser Variablen mit dem Fachwissen der Lehrkraft eingetragen.

	Individualebene (N=907)			Klassenebene (N=28)		
	MFWL	MFWK	MFW	MFWL	MFWK	MFW
Individueller Fehlerumgang von Schülerinnen und Schüler	-,081*	-,060	-,085*	-,295	-,188	-,298

Tabelle 9.44: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und dem individuellen Fehlerumgang der Schülerinnen und Schüler
*p < 0,05 **p < 0,01

Die nachweisbaren Korrelationen sind sehr schwach. Es zeigen sich keine bedeutsamen Effekte zwischen dem individuellen Fehlerumgang und dem Fachwissen der Lehrkraft.

9.6.2 Emotional-motivationale Prozesse

Die Motivation und das Interesse von Schülerinnen und Schülern haben einen wichtigen Einfluss auf das Gelingen von Unterricht. Es wäre möglich, dass das mathematische Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern eine regulative Funktion bezüglich der Motivation und des Interesses von Schülerinnen und Schülern einnimmt - beispielsweise, indem eine Lehrkraft mit hohem Fachwissen interessantere Aufgaben wählt oder im Unterricht mehr motivierende Ausblicke auf andere mathematische Gebiete bietet. Dadurch könnte sich das Fachwissen der Lehrkraft auf das Interesse der Schülerinnen und Schüler auswirken. In Tabelle 9.45 sind die Korrelationen der verschiedenen Interessensfaktoren mit den mathematischen Fachwissenskonstrukten auf Klassen- und Individualebene zu finden.

	Individualebene (N=907)			Klassenebene (N=28)		
	MFWL	MFWK	MFW	MFWL	MFWK	MFW
Intrinsische Motivation	-,059	-,025	-,053	-,160	-,001	-,110
Selbstkonzept	,006	,066*	,038	-,217	-,044	-,172
Sozial vergleichende Leistungsorientierung	,033	,007	,025	-,152	,010	-,100
Zukunftsorientierte Motivation	-,039	-,019	-,036	-,022	,041	,005
fremdbewertungsbezogene Leistungsorientierung	-,016	,008	-,006	-,022	,041	,005

Tabelle 9.45: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und Schülermotivation auf Individual- und Klassenebene

*p < 0,05 **p < 0,01

Es ergibt sich kein signifikanter Zusammenhang zwischen den Interessenfaktoren und dem Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer. Einzig das Selbstkonzept zeigt beim MFWL eine signifikante Korrelation, die aber so niedrig ist, dass ihr praktisch keine Bedeutung zukommt.

9.7 Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Fachwissen und der Schülerkompetenz

Dieses Kapitel beschäftigt sich damit, ob Zusammenhänge zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft und der Schülerkompetenz gefunden werden können (vgl. 7.4). Zur Schülerkompetenz zählt die Argumentations- und die Problemlösekompetenz der Schülerinnen und Schüler. Die Kapitelabschnitte gliedern sich dabei nach den Unterkategorien des Produktes im Prozess-Mediations-Produkt-Modell.

Eine zentrale Frage dieser Studie war, ob es einen Zusammenhang zwischen der Schülerleistung und dem Fachwissen der Lehrkraft gibt. Die Korrelationen auf Individual- und Klassenebene sind in Tabelle 9.46 dargestellt.

	Individualebene (N=907)			Klassenebene (N=28)		
	MFWL	MFWK	MFW	MFWL	MFWK	MFW
Gesamtscore	-,061	-,029	-,056	-,162	-,001	-,111
Kompetenzstufe I	-,047	-,048	-,056	-,190	-,036	-,148
Kompetenzstufe II	-,063	-,013	-,050	-,163	,008	-,108
Kompetenzstufe III	-,022	,001	-,014	-,051	,033	-,018

Tabelle 9.46: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und mathematischer Schülerkompetenz auf Individual- und Klassenebene
*p < 0,05 **p < 0,01

Sowohl auf der Individualebene als auch auf der Klassenebene ergeben sich mehrheitlich negative schwache Korrelationen, die jedoch nicht signifikant sind und denen somit keine Bedeutung beigemessen wird. In dieser Studie kann daher kein Effekt zwischen dem Fachwissen der Lehrerin oder des Lehrers und der mathematischen Kompetenz der Schülerinnen und Schüler gefunden werden. Das ist insofern bemerkenswert, als das Konzept des „Mathematischen Fachwissens für das Lehren“ in anderen Studien Zusammenhänge lieferte (Hill, Rowan & Ball, 2005).

Des Weiteren wurde auch die Problemlösekompetenz der Schülerinnen und Schüler erhoben. Der Test zur Problemlösekompetenz zeichnet sich dadurch aus, dass keine dezidiert mathematischen Aufgaben, sondern alltagsnahe Probleme zu lösen waren. Es wäre denkbar, dass Lehrerinnen und Lehrer mit niedrigerem Fachwissen eher anwendungsnahe Aufgaben thematisieren, die weniger aus einem mathematiktheoretischen Zusammenhang abgeleitet werden. Dies könnte sich positiv auf die allgemeine Problemlösekompetenz der Schülerinnen und Schüler auswirken. Tabelle 9.47 zeigt die Korrelationen zwischen der Problemlösekompetenz der Lernenden und dem Fachwissen der jeweiligen Lehrkraft. Dabei ist zu beachten, dass eine Klasse den Problemlösetest aus organisatorischen Gründen nicht bearbeitet hat, weswegen sich die Anzahl der Schülerinnen und Schüler auf 898 reduziert.

	Individualebene (N=898)		
	MFWL	MFWK	MFW
Gesamtscore	-,054	,033	-,020

Tabelle 9.47: Korrelationen zwischen Lehrerfachwissen und der Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schüler auf Individualebene

*p < 0,05 **p < 0,01

Auch hier zeigt sich kein Zusammenhang zwischen der Schülerkompetenz und dem Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer. Damit kann festgestellt werden, dass in dieser Studie keine Auswirkungen des mathematischen Fachwissens auf die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler nachweisbar sind.

9.8 Einschränkungen und Kritik

Um die Ergebnisse dieses Kapitels richtig zu interpretieren, müssen nachstehende Einschränkungen berücksichtigt werden. Durch sie wird der Kontext der Studie schärfer umgrenzt. Zunächst ist anzuführen, dass die Studie an sich nur exemplarisch in Bayern durchgeführt wurde. Bei einer eventuellen Übertragung der Ergebnisse sind somit die Gegebenheiten in den anderen Bundesländern zu berücksichtigen. Die zweite Einschränkung betrifft den Sachverhalt, dass ausschließlich Gymnasiallehrkräfte für die Untersuchung herangezogen wurden. Hierzu sei als Begründung angegeben, dass mathematisches Fachwissen an Gymnasien aufgrund des umfangreicheren Stoffes eine sehr viel größere Rolle einnimmt als an anderen Schularten. Bezüglich der Stichprobengröße ist anzufügen, dass diese bei 33 bzw. 28 teilnehmenden Gymnasiallehrkräften liegt. Die geringe Anzahl muss bei der Verallgemeinerung der Ergebnisse bedacht werden. Des Weiteren beziehen sich die Ergebnisse auf eine Stichprobe aus Schülerinnen und Schüler einer siebten Jahrgangsstufe. Es wäre denkbar, dass sich eine Korrelation zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer und der Schülerkompetenz erst in der Oberstufe bemerkbar macht, da der mathematische Inhalt dort gehaltvoller ist. Der Hauptfokus bei den Schülertests wiederum liegt in dieser Studie auf dem Begründen und Argumentieren, speziell im Bereich der Geometrie. Somit sind andere Gebiete der Mathematik wie die Algebra nicht eingeschlossen. Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass der Unterricht der beteiligten Lehrpersonen nicht Gegenstand der Untersuchung war. Möglicherweise liefert aber gerade dieser Aspekt weitere interessante Aufschlüsse bezüglich der Frage, wie sich unterschiedliches mathematisches Fachwissen auf das Unterrichtsgeschehen auswirken kann. Diese Hinweise sollten bei einer realistischen Einordnung der Resultate dieser Arbeit in die mathematikdidaktische Forschung zum professionellen Wissen von Lehrkräften bedacht werden.

10 Interpretation der Ergebnisse

Was wir wissen, ist ein Tropfen;
was wir nicht wissen, ist ein Ozean.
Isaac Newton

In diesem Abschnitt werden die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Ergebnisse interpretiert. Dies geschieht in Rückbezug auf die in Kapitel 5 formulierten Forschungsfragen. Diese thematisieren fünf Aspekte:

- die Definition von mathematischem Fachwissen einer Lehrkraft,
- die Testkonstruktion zur Messung des mathematischen Fachwissens,
- die Analyse der Lehrerantworten zu den Items,
- die Einschätzung der Lehrkräfte über mathematisches Fachwissen und
- die Zusammenhänge zwischen mathematischem Fachwissen und anderen Unterrichtsvariablen.

Gegliedert ist dieses Kapitel so, dass zunächst der Wortlaut der Forschungsfragen wiederholt und deren Relevanz kurz dargelegt wird. Anschließend werden zur Beantwortung die jeweiligen Ergebnisse angeführt, die in den vorherigen Kapiteln erarbeitet wurden. Dabei werden auch Erklärungsansätze angeführt, die bei der Interpretation hilfreich sein können, aber keinen Anspruch auf sichere Gültigkeit erheben. Durch seine übergreifende Struktur stellt dieses Kapitel gleichzeitig eine Zusammenfassung der Arbeit dar.

1	<u>**Definition des Konstruktes „Fachwissen“:**</u> **Wie kann ein Konstrukt zur Messung des mathematischen Fachwissens von Mathematiklehrkräften an Gymnasien zweckmäßig definiert werden?**

Forschungsgegenstand dieser Studie war das mathematische Fachwissen von Lehrkräften an Gymnasien. Zu dessen Analyse wurde ein Konzept entwickelt, welches mathematisches Fachwissen (MFW) aus mehreren Komponenten zusammengesetzt sieht. Das Konstrukt „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ (MFWL) wurde dabei als Bindeglied von Schulmathematik- und universitärem Wissen (MFWK) angesehen. Die Fragestellungen zum MFWL waren so gewählt, dass Wissen abgefragt wurde, das für den Unterricht als gewinnbringend angesehen wird. Es wurde daher davon ausgegangen, dass Wissen in diesem Bereich sich vorteilhaft auf den Unterricht auswirken kann. In der empirischen Untersuchung konnte gezeigt werden, dass beide Konstrukte – MFWK und MFWL – reliabel und valide messbar sind. Sie stehen miteinander in Verbindung, können aber empirisch als getrennt voneinander angesehen werden ($r = .51$, $p <.001$). Abbildung 10.1 veranschaulicht diese Auffassung des mathematischen Fachwissens von Lehrkräften.

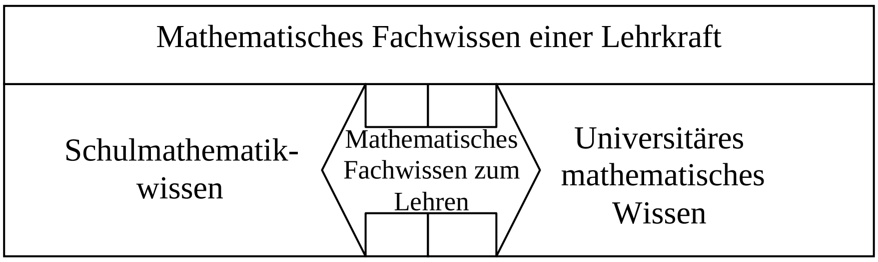


Abbildung 10.1: MFWL als Bindeglied zwischen Schulmathematik- und universitärem Wissen

Die Rolle des MFWL als Vermittler zwischen Schulmathematik- und universitärem Wissen stellt die Bedeutung dieses Wissens für den Unterricht einer Lehrkraft heraus. Insgesamt konnte somit ein zufriedenstellendes Modell für das mathematische Fachwissen entwickelt werden.

2	**<u>Testkonstruktion:</u>** **Wie muss ein Test zur Messung des MFWL aufgebaut sein?**

Ein Ziel dieser Untersuchung war es, den Fachwissensstand von Lehrerinnen und Lehrern empirisch zu erfassen. Die Messung des Fachwissens erfolgte, indem Lehrkräfte sich in einem Paper-and-Pencil-Test mit Aufgaben schriftlich auseinandersetzten. Es wird davon ausgegangen, dass bei einem Problemlöseprozess mit mathematischer Fragestellung Fach-, Strategie- und Metawissen zum Einsatz kommen. Da in dieser Studie jedoch das Fachwissen erhoben werden sollte, waren die Items so zu gestalten, dass kaum Strategie- und Metawissen bei der Aufgabenlösung anzuwenden war. Als weiteres galt es zu beachten, dass Fachwissen in verschiedenen Formen vorliegt. So wurde zwischen deklarativem, prozeduralem und konzeptionellem Wissen unterschieden und diese Formen in angemessenen Teilen in den Items berücksichtigt.

Das Konstrukt MFWL orientiert sich an der Vorstellung, dass die wesentlichen mathematischen Bereiche, die für das Lehren relevant sind, zu identifizieren sind. Für die Untersuchung von Gymnasiallehrkräften wurde die Bedeutung des universitären Wissens herausgestellt. Aus diesem Grund wurden die wesentlichen und übergreifenden Inhalte des Mathematikstudiums bestimmt und in den Test zum MFWL integriert. Bei der Itementwicklung ist die Verbindungsfunktion des MFWL zwischen Schulmathematik und MFWK zu berücksichtigen. Dies geschieht vor allem dadurch, dass die Fragestellungen in einen schulischen Kontext eingebettet sind – beispielsweise umfassen die Items Aufgaben zur Diagnostik und der Unterrichtsplanung (vgl. Abbildung 10.2).

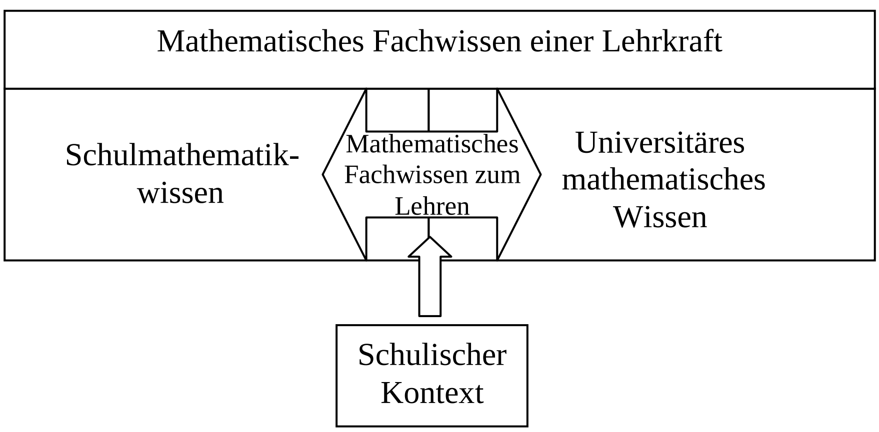


Abbildung 10.2: MFWL als Bindeglied zwischen Schulmathematik- und universitärem Wissen, ergänzt um den schulischen Kontext

3	**<u>Itemanalyse der Lehrerantworten:</u>** **Was ergibt eine vertiefte Analyse der Fachwissensitems hinsichtlich…** **c) … des Antwortverhaltens der Lehrerinnen und Lehrer, insbesondere bei Items mit hoher Schwierigkeit?** **d) … des Wissensstands der Lehrerinnen und Lehrer?**

Die sieben Items, die im Vorfeld dem Schulmathematikwissen (Ebene 1) zugeordnet wurden, wurden im Durchschnitt zu 58% von den teilnehmenden Lehrkräften richtig beantwortet. Dieser Wert erscheint recht niedrig, bedenkt man, dass Lehrerinnen und Lehrer dieses Wissen zu unterrichten haben. Als mögliche Erklärung sei die Antwort einer Lehrerin bei Item 5 des MFWL-Tests zitiert: „Wenn ich jemals komplexe Zahlen unterrichtet hätte, wüsste ich es sicherlich.“ Es könnte sein, dass Lehrkräfte beim Schulmathematikwissen besser abschneiden, wenn sie gerade dieses Stoffgebiet aktiv unterrichten und das Wissen somit präsent haben. Hier stellt sich die Frage, ob Lehrerinnen und Lehrer prinzipiell sicher im Umgang mit der Schulmathematik sein sollten oder ob es ausreicht, dass sie den Stoff der aktuellen Jahrgangsstufe beherrschen. Bei den sieben Items, die zum schulnahen universitären Wissen (Ebene 2) zählen, lagen die korrekten Antworten bei 47%. Da dieses Wissen für den Unterricht als wertvoll, aber nicht zwingend notwendig erachtet wird, kann dieser Wert im Gegensatz zu dem Wert beim Schulmathematikwissen als zufriedenstellend eingeschätzt werden. Eine deutlich niedrigere durchschnittliche Lösungsrate von 17% ergab sich bei den zwei Items, die universitäres Wissen ohne Schulbezug abfragen (Item 2b MFWL: 18%; Item 5 MWFK: 16%). Es kann davon ausgegangen werden, dass dieses Wissen im Lauf der Zeit vergessen wurde.

Bezüglich des Antwortverhaltens bei schwierigen Items erbrachte eine qualitative Analyse der Lehrerantworten ein interessantes Ergebnis: Lehrerinnen und Lehrer setzen häufig ihr fachdidaktisches Wissen ein, wenn ihnen das nötige Wissen zur Beantwortung eines Items fehlt. Dies ermöglicht den Lehrkräften in Unterrichtssituationen, dem Schüler oder der Schülerin trotz eigener Unwissenheit eine zumindest in Schüleraugen adäquate Antwort zu liefern. In Kurzinterviews bestätigten die teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer mehrheitlich, dass die Fachwissensfragen des Tests ihren Unterrichtsalltag betreffen. Sie teilten auch die Meinung, dass das im Test implementierte Wissen größtenteils zum Wissensschatz eines Gymnasiallehrers gehören sollte. Eine Lehrerin gab sinngemäß an, sich nun wieder besser in die Schülersicht hineinversetzen zu können: „Wie sonst immer meine Schüler sagen, sage ich jetzt auch: eigentlich sollte ich das jetzt wissen, aber ich kann es gerade nicht.“.

4	**<u>Einschätzungen der Lehrkräfte zum Wissen:</u>** **Wie schätzen Lehrkräfte das Fachwissen in den unterschiedlichen universitären Gebieten ein hinsichtlich…** **c) … ihres individuellen Wissensstands?** **d) … der Bedeutung für ihren Unterricht?**

Mit einem Fachwissenstest bestehend aus 16 Items kann nicht der Anspruch erhoben werden, alle universitären Gebiete in ausreichendem Umfang zu berücksichtigen. Um dennoch genauere Aufschlüsse über die Kenntnisse der Lehrkräfte zu erlangen, wurden die Lehrkräfte darum gebeten, ihre Fachwissenskenntnisse bezüglich verschiedener universitärer Wissensgebiete auf einer Likertskala mit Zahlenwerten von 1 bis 4 einzuschätzen. Die Kenntnisse in linearer Algebra, gewöhnlichen Differentialgleichungen und Wahrscheinlichkeitstheorie wurden am höchsten eingestuft. In Informatik, Numerik und der Galoistheorie wird das Wissen dagegen als lückenhaft angesehen. Zwischen subjektiv eingeschätztem und tatsächlich gemessenem Wissen ergab sich ein Korrelationswert von $r = .393$ ($p<0.05$). Folglich können sich die Lehrerinnen und Lehrer der Studie bezüglich ihres Wissenstands (noch) ausreichend gut selbst einschätzen. Es wird somit davon ausgegangen, dass obige Selbsteinschätzungen in etwa die tatsächlichen Wissensbestände abbilden. Die Lehrkräfte sollten darüber hinaus die Bedeutung dieser Gebiete für ihren Unterricht angeben. Hier ergab sich, dass die lineare Algebra als einziges Stoffgebiet in dieser Studie als ein Wissensbereich angesehen wird, dem die Lehrerinnen und Lehrer hohe Wichtigkeit und überdurchschnittliche eigene Kenntnisse zusprechen. Klassische Elemente der Funktionentheorie, Komplexer Analysis und Differentialgleichungen sowie der Gruppentheorie wurden als eher unwichtig betrachtet, die eigenen Kenntnisse in diesen Gebieten jedoch als durchschnittlich eingeschätzt. In der Galoistheorie sahen die Lehrkräfte den unwichtigsten Wissensbereich und zugleich den eigenen Wissensbestand als am niedrigsten an. Bei Numerik, Informatik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik wurde die Wichtigkeit höher eingestuft als die Kenntnisse. Die Lehrkräfte schätzen also die Bedeutung dieser Gebiete für ihren Unterricht als eher hoch ein, geben jedoch gleichzeitig an Wissenslücken in diesem Bereich zu besitzen. Folglich wäre es eine Überlegung wert, diese Fachinhalte im Studium oder in Fortbildungsveranstaltungen stärker zu berücksichtigen.

5	**<u>Zusammenhänge mit Unterrichts- und Personenvariablen:</u>** **Mit welchen Personen- oder Unterrichtsvariablen hängt das mathematische Fachwissen der Lehrkräfte zusammen?**

Auf Grundlage des Prozess-Mediations-Produkt-Modells wurden mehrere Unterrichts- und Personenmerkmale identifiziert, die mit dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft zusammenhängen konnten. Bezogen auf Lehrervariablen gibt diese Studie Hinweise, dass das mathematische Fachwissen unabhängig vom Alter und der Berufserfahrung der Lehrerin oder des Lehrers ist. Dies steht im Einklang zu Ergebnissen der COACTIV-Studie (Krauss et al., 2008). Die Autoren erklären diesen Befund mit der sog. „deliberate-practice“-Theorie (Ericsson, Krampe und Tesch-Römer, 1993), die besagt, dass die eigene Expertise nur durch andauerndes Arbeiten an eigenen Schwachstellen, am besten unterstützt durch Expertenfeedback verbessert werden kann. Mathematisches Fachwissen wird damit als relativ stabile Disposition dargestellt. Allein die Tatsache, dass eine Lehrkraft über einen langen Zeitraum unterrichtet, verbessert oder verschlechtert ihr mathematisches Fachwissen nicht.

Auch das Geschlecht, eine Vorliebe für Mathematik als Unterrichtsfach oder die Bewertung, dass mathematisches Fachwissen sehr wichtig für den Unterricht ist, stellen keine Variablen dar, die auf ein höheres mathematisches Fachwissen schließen lassen. Bedeutsame signifikante Unterschiede mit relativ hohen Effektstärken zeigen sich hingegen, wenn das mathematische Fachwissen in Abhängigkeit des Bundeslandes, in dem der Studienabschluss erworben wurde, betrachtet wird. Die teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer mit bayerischem Staatsexamen verfügten über ein höheres mathematisches Fachwissen als ihre Kolleginnen und Kollegen aus anderen Bundesländern. Über die Gründe kann man an dieser Stelle nur spekulieren. Da die bayerischen Schülerinnen und Schüler in den PISA-E-Studien im Vergleich zu den anderen Bundesländern bei der mathematischen Kompetenz zur Spitzengruppe gehören, könnte es sein, dass sich diese Wissensvorteile auch auf das Studium auswirken. Diesbezüglich wäre eine Folgeuntersuchung wünschenswert.

Ebenfalls untersucht wurden potentielle Zusammenhänge im Kontext der Lehrerbeliefs über das Lehren und Lernen. Von den integrierten Faktoren zeigte die rezeptive Sichtweise eine signifikante Korrelation mit dem mathematischen Fachwissen ($r = -0{,}45$). Das bedeutet, dass eine Lehrerin oder ein Lehrer mit niedrigem Fachwissen eher eine rezeptive Ansicht von Lehren und Lernen vertritt. Auch dies steht in Einklang mit Ergebnissen der COACTIV-Studie, die ebenfalls eine signifikante Korrelation ($r = -0.22$) zwischen mathematischem Fachwissen und einer rezeptiven Auffassung feststellen (Krauss et al., 2008). Interessant ist es nun, den kausalen Zusammenhang dieser beiden Variablen zu interpretieren. Ist eine rezeptive Orientierung eine Folge von weniger Fachwissen oder haben diese Lehrkräfte aufgrund ihrer rezeptiven Sichtweise weniger Fachwissen im Studium erlangt? Beide Möglichkeiten sollen kurz angedacht werden. Betrachtet werden soll zunächst ein Abiturient, der eine eher rezeptive Sichtweise vom Lernen vertritt: Es wäre vorstellbar, dass dieser als Studierender weniger erfolgreich ist und weniger Fachwissen erwirbt, weil seine Sichtweise vom Lernen den Lernfortschritt behindert. Gerade universitäre Mathematik lernt man vermutlich nicht durch das Ansammeln von Rezepten oder kleinschrittigen Anleitungen, sondern nach gängiger Auffassung eher, indem man sich auf konstruktivistische Art und Weise selbstständig mit anspruchsvollen mathematischen Problemen auseinandersetzt. Andersherum könnte ein Lehrer, der im Studium weniger erfolgreich war und deswegen weniger Fachwissen erworben hat, aus eben diesem Grunde die rezeptive Auffassung vom Lernen vertreten. Er könnte aus seinen Misserfolgen im Studium schließen, dass man eben nicht auf konstruktivistische Art und Weise Mathematik lernt, sondern die Lernenden streng anzuleiten sind. Die vorherrschende Kausalität in der Praxis zu ermitteln, wäre eine Fragestellung für eine Folgeuntersuchung.

Auf der Ebene des Unterrichts konnte eine schwache negative signifikante Korrelation ($r = -0{,}16$ auf Schülerebene, $r = -0{,}38$ auf Klassenebene beim MFWL) zwischen dem subjektiv wahrgenommenen kognitiv-unterstützenden Lehrerverhalten und dem mathematischen Fachwissen festgestellt werden: Schülerinnen und Schüler geben an, dass Lehrerinnen und Lehrer mit weniger Fachwissen sie kognitiv besser unterstützen würden. Dieses Ergebnis überrascht zunächst. Ein Erklärungsansatz lässt sich finden, wenn man die Schülergruppe nach ihrer mathematischen Beweiskompetenz in Leistungsdrittel unterteilt. Der Effekt verstärkt sich bei den Schülerinnen und Schülern der schwächsten Leistungsgruppe ($r = -0{,}23$; $p < 0{,}01$), ist jedoch für die stärkste Leistungsgruppe nicht mehr nachweisbar. Folglich geben nur die schwächeren Schülerinnen und Schüler an davon zu profitieren, dass ihre Lehrkraft weniger mathematisches Fachwissen besitzt. Es wäre möglich, dass diese Lehrkräfte allgemein mehr Verständnis aufbringen, wenn eine Schülerin oder ein Schüler Schwierigkeiten beim Mathematiklernen hat und ihren Unterricht dementsprechend gestalten. In welcher Form dies geschieht, darüber lässt sich nur spekulieren. Es gilt jedoch besonders zu beachten, dass bei diesem Ergebnis auf eine Einschätzung der Schülerinnen und Schüler zurückgegriffen wird. Ob das Verhalten der Lehrkraft tatsächlich kognitiv unterstützender im Sinne der Lerntheorie ist, bleibt offen.

Auf der Ebene der Schülermediation konnten keine bedeutsamen Effekte nachgewiesen werden, die in Zusammenhang mit dem mathematischen Fachwissen der Lehrkräfte stehen. Das mathematische Fachwissen der Lehrkraft wirkt sich daher weder auf die Nutzung der Lernzeiten noch auf emotional-motivationale Prozesse bei den Schülerinnen und Schülern aus. Es ist denkbar, dass diese Variablen kausal schon zu weit vom mathematischen Fachwissen der Lehrkraft entfernt liegen. Dazwischen steht im Prozess-Mediations-Produkt-Modell der Prozess des Unterrichts, für dessen Variablen bereits nur schwache Korrelationen nachweisbar waren. Mit dem gleichem Argument kann man erklären, weswegen das mathematische Fachwissen der Lehrkräfte weder mit der mathematischen Beweis- noch mit der Problemlösekompetenz zusammenhängt. Es ist klar, dass das mathematische Fachwissen nicht direkt, sondern nur mediiert über Unterrichtsvariablen Einfluss auf die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler nehmen kann. Doch wie bereits genannt zeigen sich schon auf der ersten weiteren Ebene „Unterricht“ keine größeren Korrelationen mehr mit dem Fachwissen. Diese Ergebnisse sind insofern bemerkenswert, als Hill, Rowan und Ball (2005) das „mathematical knowledge for teaching“ in ihrem Modell als den größten Prädiktor für den Leistungszuwachs von Grundschülerinnen und -schülern nennen. Bass und Ball (2004) bezweifeln, dass sich das Konstrukt „mathematical knowledge for teaching“ empirisch in seine Bestandteile Fachwissen und fachdidaktisches Wissen trennen lässt. Bezogen auf das Fachwissen von Gymnasiallehrkräften kann auch in der COACTIV-Studie keine Trennung dieser beiden Wissensbereiche nachgewiesen werden, allerdings schon für Lehrkräfte anderer Schulformen (Krauss et al., 2008b). Die Autoren nehmen an, dass hauptsächlich das fachdidaktische Wissen für den Effekt auf die Schülerkompetenz verantwortlich ist und das mathematische Fachwissen bei Lehrkräften über alle Schulformen hinweg keinen bedeutsamen Effekt auf den Leistungszuwachs der Lernenden hat (Baumert et al., 2010). In ihrer Studie hängt das fachdidaktische Wissen mediiert über Unterrichtsvariablen mit dem Schülerleistungszuwachs zusammen. Es wäre daher möglich, dass die Wirkung des „mathematical knowledge for teaching“ auf die Schülerleistung ursächlich vom fachdidaktischen Wissen ausgehen könnte. Da in der vorliegenden Untersuchung Fachwissen, jedoch kein fachdidaktisches Wissen erhoben wurde, wäre es denkbar, dass aus diesem Grund kein Zusammenhang zwischen dem MFWL und der Schülerkompetenz gefunden werden konnte.

11 Diskussion und Ausblick

Nichts ist schrecklicher als ein Lehrer,
der nicht mehr weiß als das,
was die Schüler wissen sollen.
Johann Wolfgang von Goethe

In diesem abschließendem Kapitel sollen aus den Erkenntnissen dieser Studie mögliche Implikationen für Theorie und Praxis abgeleitet werden. In Zusammenhang mit diesen Überlegungen werden Anschlussfragen erörtert, die in Folgeuntersuchungen thematisiert werden könnten. Bei der Gliederung dieses Abschnittes wird sich weitgehend an der Abfolge der Forschungsfragen orientiert.

Die vorliegende Arbeit konnte einige Beiträge zum Lehrerprofessionswissen liefern. Während bisherige deutsche Studien (COACTIV, TEDS-M) einen mathematischen Fachwissenstest für alle Schulformen verwendeten, wurde hier ein speziell auf die Anforderungen von Gymnasiallehrkräften zugeschnittenes Testinstrumentarium entwickelt. Anders als bei COACTIV wurde das universitäre Fachwissen explizit miteinbezogen. Und anders als bei TEDS-M gehörten nicht Referendarinnen und Referendare, sondern ausschließlich erfahrene Lehrkräfte zur Stichprobe. Bei der Konzeptionalisierung des mathematischen Fachwissens wurde gezeigt, dass das Konstrukt „Mathematisches Fachwissen zum Lehren“ reliabel und valide gemessen werden kann und einen als eigenständig anzusehenden Wissensbereich innerhalb des mathematischen Fachwissens darstellt. Hohes Fachwissen in diesem Bereich erwies sich im Rahmen einer Studie von Hill, Rowland und Ball (2005) mit Primarstufenlehrkräften als prädiktorisch für den Kompetenzgewinn von Grundschülerinnen und -schülern. Dieser Zusammenhang bestätigte sich in der vorliegenden Studie nicht für Gymnasiallehrkräfte. Dabei ist anzumerken, dass der bei Ball verwendete „mathematical knowledge for teaching“-Begriff auch fachdidaktisches Wissen einbezieht. Dies steht in Einklang mit Ergebnissen der COACTIV-Studie, die zeigen, dass eine Trennung von Fachwissen und fachdidaktischem Wissen von gymnasialen Mathematiklehrerinnen und -lehrern schwierig ist. Allerdings ist es fraglich, ob ein Fachwissenstest, der über alle Schulformen hinweg eingesetzt wird, ausreichend zwischen Gymnasiallehrkräften mit niedrigem und solchen mit hohem Fachwissen unterscheiden kann. In dieser Hinsicht ermöglicht der in dieser Arbeit entwickelte Fachwissenstest eine gute Differenzierung. Als Ausgangspunkt für weitere Forschungsvorhaben wäre es jedoch interessant, bei der Konzeptionalisierung des Fachwissens von Gymnasiallehrkräften den Einfluss des fachdidaktischen Wissens zu integrieren, allerdings zugeschnitten auf die beruflichen Anforderungsmaßstäbe von Lehrerinnen und Lehrern an Gymnasien.

Für die Messung des MFWL wurden sieben Testitems erstellt, die in einen schulischen Kontext eingebettet wurden und unterrichtsnahes mathematisches Fachwissen abfragten. Schon an der geringen Zahl der Items ist zu erkennen, dass die Entwicklung weiterer Testitems wünschenswert wäre. Dabei müsste so vorgegangen werden, dass universitäres Fachwissen zu identifizieren ist, das einen unterrichtsrelevanten Zusammenhang aufweist. Während sich die Inhalte der Items in dieser Studie hauptsächlich aus Fachgesprächen mit erfahrenen Lehrkräften und Forschenden im Bereich der Mathematikdidaktik ergaben, wäre eine direkte Bestimmung, zum Beispiel durch die Beobachtung von Unterrichtsstunden, möglich. Und während die Messung des MFWL hier über einen Paper-and-Pencil-Test erfolgte, wäre es möglich, die Unterrichtswirklichkeit durch andere Formen wie Lehrerreaktionen auf aufgezeichnete Unterrichtssituationen oder tatsächlich beobachteten Unterricht eventuell besser abzubilden. Allgemein erscheint es ein vielversprechendes Ziel für zukünftige Forschungsvorhaben, unterrichtsrelevantes Wissen aus dem universitären Fachwissen zu extrahieren und auf verschiedene Arten zu messen. Ein Anfang wurde in dieser Arbeit gemacht.

Im MFW-Test zeigten die Mathematiklehrkräfte teilweise gravierende Defizite in Bereichen der Schulmathematik. Und es konnten Wissensbereiche wie die Numerik, Informatik, die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik gefunden werden, in denen Lehrerinnen und Lehrer selbst Wissensbedarf sehen. Folglich wäre es zu überlegen, sowohl Schulmathematikwissen konzeptionell in die Lehrerausbildung zu integrieren als auch die oben genannten Fachgebiete im Studium stärker zu berücksichtigen. Bedenkt man, dass unterrichtsfernes universitäres Wissen von den Lehrkräften kaum mehr beherrscht wurde, kann zur Diskussion gestellt werden, ob die stark ausgeprägten Vertiefungen der unterrichtsfernen Fächer in der Lehrerausbildung sinnvoll sind. Terhart (2000) führt dazu an:

„Der Lehrer muss im Blick auf den Schulunterricht die gesamte Breite seines Faches bzw. seiner Fächer beherrschen, wohingegen der Fachwissenschaftlicher (auf einer breiten Basis) sich in aller Regel um eine oder mehrere Spezialisierungen als Vertiefung innerhalb seines Faches bemühen muss.“ (S. 99)

Auch der Wissenschaftsrat stellt in seinen „Empfehlungen zur künftigen Struktur der Lehrerbildung“ fest, dass die fachwissenschaftliche Qualität keine Einbußen hinnehmen darf, allerdings aus der gegenwärtig zunehmenden Spezialisierung moderner universitärer Wissenschaftlichkeit herausgelöst werden und stärker auf übergreifendes Fachwissen ausgerichtet sein sollte (2001). Dies könnte idealerweise dadurch geschehen, dass für Lehramtsstudierende im Hauptstudium spezielle Fachvorlesungen angeboten werden, die diese geforderte breite fachwissenschaftliche Basis abdecken. Ob Universalist oder Spezialist – es bleibt abzuwarten, in welche Richtung sich die Ausbildungsstruktur in den nächsten Jahren und Jahrzehnten weiterentwickelt.

Ferner wurden in der vorliegenden Studie Unterschiede im Fachwissen bezüglich des Bundeslandes, in dem die Lehrkraft ihren Abschluss erworben hat, festgestellt. Auch hier wäre eine Folgestudie mit einer breiteren Datenbasis und unter Einbeziehung mehrerer Bundesländer wünschenswert. Augenscheinlich stellt es ein Problem der Ausbildung dar, dass die Stoffwahl nicht über die Bundesländer hinweg geregelt ist. Inzwischen wurden von der KMK länderübergreifende Standards für die Lehrerausbildung verabschiedet, die auch spezielle Fachprofile berücksichtigen (KMK, 2008). Diese wurden jedoch teilweise bereits im Vorfeld kritisiert (Herzog, 2005; Oser, 2001). Terhart (2002) fügt an, dass eine solche Festlegung an sich problematisch ist, solange es noch keinen Konsens gibt, was Lehrerinnen und Lehrer wirklich wissen und können müssen. An dieser Stelle kann die vorliegende Arbeit anknüpfen und einige empirische Ergebnisse für das mathematische Fachwissen liefern.

Festgestellt wurde in dieser Arbeit, dass kein Zusammenhang zwischen dem mathematischen Fachwissen der Lehrkraft und der mathematischen Schülerkompetenz besteht. Allerdings würde sich eine Wiederholung der Untersuchung bezüglich mehrerer Punkte anbieten, die in dieser Studie nicht berücksichtigt werden konnten. Zum einen wurde das Fachwissen der Lehrkraft nur mit der Kompetenz von Schülerinnen und Schülern der siebten Klasse untersucht. Es könnte aber sein, dass sich die Fachwissensunterschiede gerade in der Oberstufe bemerkbar machen, also dort, wo der schulische Inhalt anspruchsvoller ist und sich mehr dem Wesen des universitären Wissens annähert. Zum anderen wurden die Ergebnisse anhand der Beweis- und der übergreifenden Problemlösekompetenz erzielt. Eventuell gibt es andere Kompetenzbereiche, in denen sich Fachwissensdefizite der Lehrkraft bedeutsam auswirken könnten. Bei den epistemologischen Überzeugungen konnten bezüglich der rezeptiven Einstellungen einer Lehrkraft und ihrem Fachwissen negative signifikante Korrelationen gefunden werden. Unklar ist die kausale Beziehung dieser beiden Konstrukte. Deshalb wäre es interessant, das Zusammenspiel dieser beiden Variablen in einer longitudinal angelegten Studie zu untersuchen. Ganz allgemein wären fundierte Kenntnisse über die

Entwicklung des Fachwissens wünschenswert. Auch hierin besteht eine wichtige Aufgabe weiterer Forschung zu diesem Thema.

Insgesamt wird der große Forschungsbedarf bezüglich des Professionswissens von erfahrenen Lehrerinnen und Lehrern ersichtlich. Obschon mit dieser Studie ein Teilbereich empirisch überprüft werden konnte – es gibt noch viele offene Fragestellungen, die das Wissen von Lehrkräften betreffen. Weitere empirisch fundierte Kenntnisse in diesem Bereich zu finden, sollte deshalb ein erklärtes Ziel der Forschenden sein: Sowohl die Schülerkompetenz als auch die Lehrerausbildung könnten davon profitieren. Entsprechende Forschungen sind allerdings nur mit der Hilfe erfahrener Lehrerinnen und Lehrer möglich. Es gestaltet sich jedoch derzeit als äußerst schwierig Lehrkräfte zu finden, die parallel zu ihren beruflichen Pflichten noch die Zeit aufbringen, an empirischen Untersuchungen zu partizipieren. Die Bedeutung des Wissens für den Lehrerberuf muss daher auch Politikerinnen und Politikern bewusst gemacht werden. Diese können die Weichen für länderübergreifende Projekte zum Lehrerprofessionswissen stellen, indem sie Lehrkräften wie Forschenden die notwendige Zeit und die finanziellen Mittel gewähren. Nur durch ein produktives Zusammenspiel zwischen Forschenden, Lehrkräften und eben Politikerinnen und Politikern kann der Forschungsbedarf in diesem anspruchsvollen, aber vielversprechenden Bereich gestillt werden.

Literatur

Kapitel 1

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band 1: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Albrecht, F. (1993). *Strategisches Management der Unternehmensressource Wissen*. Frankfurt am Main u.a.: Lang.

Baumert, J. (2006). *Trotz schwachem PISA-Abschneiden schneller zum Abitur.* Klett-Themendienst, 34, 4-5. Verfügbar unter: http://www.klett-pressebox.de/sixcms/media.php/273/4-5.pdf [Zugriff am 01.02.07].

Burnett, J. (Hrsg.), (1958). *Platonis Opera, Vol. 3, Theaetetus*. Oxford: Calderon Press.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs - a hidden variable in mathematics education?* (73 - 94). Dordrecht: Kluwer Publications.

Gardiner, T. (1998). The art of knowing. *The mathematical gazette*, 82 (495), 2-20.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173-198.

Goldman, A. (1986). *Epistemology and Cognition*. Cambridge u.a.: Harvard Univ. Press.

Heiden, U. an der (1985). Kognitive Selbstreferenz. In G. Pasternack (Hrsg.), *Erklären, Verstehen, Begründen* (59-86). Bremen: Universität (Zentrum Philosophische Grundlagen der Wissenschaften, Schriftenreihe Band 1).

Klix, F. (Hrsg.) (1984). *Gedächtnis, Wissen, Wissensnutzung.* Berlin: Dt. Verlag der Wissenschaften.

Kuntze, S. (2006). *Themenstudienarbeit - Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren.* [Dissertation]. München: Verlag Dr. Hut.

Lenzen, W. (1980). *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit*. Wien u.a.: Springer.

Lindgren, S. (1999). *Plato and Mathematics Education*. Verfügbar unter: http://www.icme-organisers.dk/dg04/contributions/lindgren.pdf [Zugriff am 17.08.06].

North, K. (2005). *Wissensorientierte Unternehmensführung*. Wiesbaden: Gabler.

Oeser, E. & Seitelberger, F. (1988). *Gehirn, Bewusstsein und Erkenntnis*. Darmstadt:Wiss. Buchges.

Rodd, M. M. (1997). Beliefs and their warrants in mathematics learning. In E. Pehkonen (Hrsg.), *Proceedings of the 21st International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 4,* (64-65). Helsinki: University of Helsinki; Lahti Research and Training Center.

Rubinstein, S. L. (1983). *Sein und Bewusstsein.* Berlin: Akademischer Verlag.

Seel, N. (1991). *Weltwissen und mentale Modelle*. Göttingen u.a.: Hogrefe, Verlag für Psychologie.

Steup, M. (2001). *The Analysis of Knowledge.* Stanford: University of Stanford. Verfügbar unter: http://plato.stanford.edu/entries/knowledge-analysis/ [Zugriff am 17.08.06].

Waibel, M. Chr. (1997). *„Knick leicht durch den Holm drücken“: Lokales Wissen in der betrieblichen Lebenswelt.* Dissertation, Universität Bremen.

Kapitel 2

Berliner, D. C. (1987 a). Der Experte im Lehrerberuf: Forschungsstrategien und Ergebnisse. *Unterrichtswissenschaft, 15,* 295-305.

Berliner, D. C. (1987 b). Ways of thinking about students and classroom by more and less experienced teachers. In J. Calderhead (Hrsg.), *Exploring teacher thinking* (60-83). London: Cassell.

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte.* Bern u. a.: Huber.

Frensch, P. & Sternberg, R.J. (1989). Expertise an intelligent thinking: When is it worse to know better? In Sternberg, R.J. (Hrsg.*), Advances in the psychology of human intelligence* (113-126). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Holyoak, K. J. (1991). Symbolic connectionism: toward third-generation theories of expertise. In K. A. Ericsson & J. Smith (Hrsg.), *Toward a general theory of expertise* (301-335). Cambridge: Cambridge University Press.

Leinhardt, G. & Greeno, J. (1986). Skill of teaching. *Journal of Educational Psychology, 78,* 75-95.

Spada, H. (Hrsg.), (2006). *Lehrbuch der Allgemeinen Psychologie* (219-226). Bern: Huber.

Kapitel 3

Ball, D.L. (2008). *Mathematical knowledge for teaching: Explicatiing and examining a program of research*. Präsentation auf dem jährlichen Treffen der American Educational Research Association, New York.
Verfügbar unter: http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/032408_AERA.pdf
[Zugriff am 09.01.10]

Ball, D. L., Bass, H., Sleep, L., Thames, M. (2005). *A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching*. The work-session paper. The 15th International Commission on Mathematical Instruction Study, Aguas de Lindoia, Brazil.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Baumert, J. (2006). *Professionswissen von Lehrern und Lernzuwachs von Schülern (COACTIV).* [Vortrag auf der Wissenschaftlichen Fachtagung "Selbständiges Lernen im Fachunterricht" an der Universität Kassel am 28.04.2006].

Bromme, R., Jucks, R. & Rambow, R. (2004). Experten-Laien-Kommunikation im Wissensmanagement. In G. Reinmann & H. Mandl (Hrsg.). *Der Mensch im Wissensmanagement: Psychologische Konzepte zum besseren Verständnis und Umgang mit Wissen* (176-188). Göttingen: Hogrefe.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. et al. (in Druck). Wie erwerben Mathematiklehrkräfte ihr Fachwissen und ihr fachdidaktisches Wissen? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft.*

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Dubberke, T., Jordan, A., Löwen, K. & Tsai, Y.-M. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel& L. Allolio-Näcke (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (54-82). Münster u. a.: Waxmann.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S. Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., & Tsai, Y. (in Druck). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* .

Grossmann, P. L., Wilson, S. M. & Shulman, L. S. (1989). Teachers of Substance: Subject Matter Knwoledge for Teaching. In M. Reynolds (Hrsg.), *Knowledge base for the beginning teacher* (23-36). New York: Pergamon.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a teacher.* New York u. a.: Teachers College Press.

Helsper, W. (2002). Wissen, Können, Nicht-Wissen-Können: Wissensformen des Lehrers und Konsequenzen für die Lehrerbildung. In Zentrum für Schulforschung und Fragen der Lehrerbildung (ZSL) der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Hrsg.), *Studien zur Schul-& Bildungsforschung* (65-86). Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Hill, H.C. (2007). Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No Child Left Behind Policy initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis* (29), 95-114.

Hill, H., Ball, D. L., & Schilling, S. (2008). Unpacking “pedagogical content knowledge”: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (31-53). Münster u. a.: Waxmann.

Shulman, L. S. (1986a). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), (4-14).

Shulman, L. S. (1986b). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. In M. C. Wittrock (Hrsg.), *Handbook of reaseach on teaching* (3rd ed.), (3-36). New York: Macmillian.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1)*, 1-22.

Schwab, J, J. (1964). The structure of disciplines: Meanings and significance. In G. W. Ford & L. Pugno (Hrsg.), *The structure of knowledge and the curriculum*. Chicago: Rand McNally.

Wilson, S. M., Shulman, S. & Richert, A. E. (1987). ‘150 Different Ways’ of Knowing Representations of Knowledge in Teaching. In J. Calderhead (Hrsg.), *Exploring teachers’ thinking* (104-124). London: Cassell.

Kapitel 4

Ahn, S. & Choi J. (2004). Teachers’ subject matter knowledge as a teacher qualification: A Synthesis of the quantitative literature on students’ mathematics achievement. [Presented at the Amereican Educational Research Association, San Diego, April 2004]. Verfügbar unter: http://www.msu.edu/user/mkennedy/TQQT/Documents/AhnChoi04SMKSL.pdf [Zugriff am 26.10.2006].

Bachman, A. M. (1968). *Factors related to the achievement of junior high school students in mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, University of Oregon.

Ball, D. L., Bass, H., Sleep, L. & Thames, M. (2005). *A theory of mathematical knowledge for teaching.* Beitrag auf der fünfzehnten ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics am 15 bis 21 Mai 2005, State University of Sao Paolo at Rio Claro, Brazil.

Ball, D. L., Hill, H.C, & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D.L. & Bass, H. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-404.

Ball, D. L. & Hill, H. (2008). Mathematical knowledge for teaching (MKT) measures – mathematics released items. Verfügbar unter: http://sitemaker.umich.edu/lmt/files/LMT_sample_items.pdf [Zugriff am 05.01.2011]

Bassham, H. (1962). Teacher understanding and pupil efficiency in mathematics - a study of relationship. *Arithmetic Teacher*, 9, 383-387.

Baumert, J. (2006). *Professionswissen von Lehrern und Lernzuwachs von Schülern (COACTIV).* [Vortrag auf der Wissenschaftlichen Fachtagung "Selbständiges Lernen im Fachunterricht" an der Universität Kassel am 28.04.2006].

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W. & Neubrand, M. (2006). *Fachwissen und fachdidaktisches Wissen von Lehrkräften als Bedingungen für qualitätsvolle Unterrichtsgestaltung.* Beitrag auf der 3. Göttinger Fachtagung des ZEUS, Göttingen.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010). Teachers’ mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47(1), 133-180.*

Begle, E. J. (1972). *Teacher knowledge and student achievement in algebra (SMSG Reports No. 9).* Stanford: SMSG.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.) (2010). *TEDS-M 2008 – Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann.

Brown, M. A. (1988). *The relationship between levels of mathematics anxiety in elementary classroom teachers, selected teacher variables, and student achievement in grades two through six.* Unpublished doctoral dissertation, The American University.

Brunner, M., Krauss, S., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., & Neubrand, M. (2006). *Lassen sich das Fachwissen und das fachdidaktische Wissen von Lehrkräften empirisch trennen? Eine Untersuchung der Dimensionalität des Professionswissens von Lehrkräften*. Beitrag auf der 3. Göttinger Fachtagung des ZEUS, Göttingen.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S. et al. (2006): Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht; eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFGSchwerpunktprogramms* (54-82). Münster: Waxmann.

Caezza, J. F. (1969). *A study of teacher experience, knowledge of and attitude toward mathematics and the relationship of these variables to elementary in mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, Syracuse University.

Carlsen, W. S. (1987). *Why do you ask? The effects of science teacher subject-matter knowlege on teacher questioning and classroom discourse.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Washington D. C.

Chiang, F.-S. (1996). *Ability, motivation, and performance: A quantitative study of teacher effects on student mathematics achievement using NELS:88 Data.* Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence. *Education Policy analysis Archives 8 (1).* Verfügbar unter: http://epaa.asu.edu/epaa/v8n1/ [Zugriff am 26.10.2006].

Dick, J. C. (1990). *Relationship of teacher Cbest scores to teaching practice and student performance.* Unpublished doctoral dissertation, Loma Linda University.

Dobey, D. C. & Schäfer, L. E. (1984). The effects of knowledge on elementary science inquiry teaching. *Science Education, 68,* 39-51.

Eisenberg, T. A. (1977). Begle Revisited: Teacher Knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (3), (216-222).

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). *Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding.* Journal for Research in Mathematics Education, 24, 8-40.

Fend, H. (1998). *Qualität im Bildungswesen. Schulforschung zu Systembedingungen, Schulprofilen und Lehrerleistung.* Weinheim: Juventa.

Hashweh, M. Z, (1986). *Effects of subject-matter knowledge on the teaching of biology and physics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Hawk, P. P., Coble, C. R., & Swanson, M. (1985). Certification: It does matter. *Journal of Teacher Education,* 36 (3), 13-15.

Helmke, A. (2003). *Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern.* Seelze: Kallmayer.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics research and teaching* (65-100). New York: MacMillian.

Hill, H.C., Schilling, S.G., & Ball, D.L. (2004) Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal 105*, 11-30.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), (371-406). Verfügbar unter: http://www-personal.umich.edu/~dball/Publications/SelecteJournalArticles/HillRowanBallAERJSummer05.pdf [Zugriff am 26.10.2006].

Hill, H.C. (2007). Mathematical knowledge of middle school teachers: Implications for the No Child Left Behind policy initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 29, 95-114.

Kim, L. Y. (1992). *Factors affecting student learning outcomes: A school-level analysis of the 1990 NAEP mathematics trial state assessment (mathematics assessment, state assessment).* Unpublished doctoral dissertation, University of Southern California.

Koch, D. (1972). *Concept of self and mathematics achievement*. Unpublished doctoral dissertation, Auburn University.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (31-53). Münster u.a.: Waxmann.

Krauss, S., Baumert, J. & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers´pedagogical content knowledge and content knowledge: Validation of the COACTIV constructs. *The Internationak Journal on Mathematics Education, 40(5)*, 873 – 892.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008a). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematikdidaktik (JMD), 29(3/4*), 223 - 258.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. et al. (2008b). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teacher. *Journal of Educational Psychology, 100(3)*, 716-725.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J. et al. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In: Prenzel, M, Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R. Leutner, D., Neubrand, M. Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (Eds.): *PISA 2003. Untersuchung zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres* (161-194). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W. & Neubrand, M. (2006). *Wissenserwerb von Lehrkräften: Institutionelle Effekte oder aktive Weiterbildung?* Beitrag auf der 3. Göttinger Fachtagung des ZeUS, Göttingen.

Lampela, R. M. (1966). *An investigation of the relationship between teacher understanding and change in pupil understanding of selected concepts in elementary school mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, University of California.

Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77 (3), (247-271).

Lanahan, L., Scotchmer, M. & McLaughlin M. (2004). *Methodological critique of current NCES survey measures of instructional processes.* Verfügbar unter: http://www.air.org/files/AERA2004NCESMeasures.pdf [Zugriff am 01.09.2010].

Moody, W. B. (1968). *An investigation of the relationship between fifth-grade student and teacher performance on selected tasks involving non-metric geometry.* Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland.

Moore, R. E. (1965). *The mathematical understanding of the elementary school teacher as related to pupil achievement in intermediate-grade arithmetic.* Unpublished doctoral dissertation, Stanford University.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Neubrand, M. (2006). Professionalität von Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrern: Konzeptualisierungen und Ergebnisse aus der COACTIV- und der PISA-Studie. [Vortrag auf der GDM–Tagung an der Universität Osnabrück am 07.03.2006].

Peskin, A. (1964). *Teacher understanding and attitude and student achievement and attitude in seventh grade mathematics.* Unpublished doctoral dissertation, New York University.

Prekeges, D. P. (1973). *Relationship Between Selected Teacher Variables and Growth in Arithmetic in Grades Four, Five and Six.* Washington D. C.: U.S Department of Health, Education, and Welfare.

Reed, W. D. (1986). *The effects of teacher mathematics preparation on student performance in the middle level schools.* Unpublished doctoral dissertation, The University of Arizona.

Reiss, K.. (2005). *Die Bedeutung von Interesse und Motivation für das Mathematiklernen.* [Vortrag an der Universität Kassel am 17.01.2005].

Roehler, L. R., Duffy, G. G., Conley, M., Hermann, B. A., Johnson, J. & Michelson, S. (1987). *Exploring preservice teachers' knowledge structures.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Washington D. C.

Rouse, W. M., JR. (1967). *A study of the correlation between the academic preparation of teachers of mathematics and the mathematics achievement of their students in kindergarten through grade eight.* Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University.

Smith, W. (1964). *The achievement of English-grade students in arithmetic with respect to selected patterns of teacher preparation.* Unpublished doctoral dissertation, The University of Oklahoma.

Stein, M., Baxter, J. & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal, 27*, 639-663.

Soeteber, W. (1969). *Major-minor teaching assignments and related achievement.* Unpublished doctoral dissertation, Colorado State College.

Mentale Repräsentationen - der Zusammenhang zwischen 'Subject-Matter Knowledge' und 'Pedagogical Content Knowledge' - dargestellt am Beispiel der Exponentialfunktionen in einer Fallstudie mit Lehramtsstudenten. In *Kaiser, G.* (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht.* Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5. bis 9. März 2001 in Ludwigsburg. Volume **35** (2001), 628 - 631. Hildesheim: div-Verlag Franzbecker.

Turgoose, L. E. (1996). *The relationship of teacher efficacy, mathematics anxiety, achievement, preparation, and years of experience to student Iowa Tests of Basic Skills mathematics test scores*. Unpublished doctoral dissertation, University of Idaho.

Wayne, A. J. & Youngs, P. (2003). Teacher Characteristics and Student Achievement Gains: A Review. *Review of Educational Research*, 73 (1), 89-122.

Kapitel 5

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American Educational Research Journal, *47*, 133-180.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), (371-406). Verfügbar unter: http://www-personal.umich.edu/~dball/Publications/SelecteJournalArticles/HillRowanBallAERJSummer05.pdf [Zugriff am 26.10.2006].

Kapitel 6

Anderson, L.W. (1995) Time. Allocated and instructional. In L.W. Anderson (Hrsg.), *International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education* (204-207). Oxford: Pergamon.

Anderson, L. W. & Krathwohl, D. R . (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom´s taxonomy of educational objectives*. New York: Longman.

Arbeitsgruppe Känguruh (Hrsg.), (1998). *Kangourou des Mathématiques 1998. Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13.* Berlin: Institut für Mathematik.

Arbinger, R. (1997). *Psychologie des Problemlösens.* Darmstadt: Primus-Verlag.

Baden-Württemberg: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (Hrsg.), (2001). *Verordnung des Kultusministeriums über die Wissenschaftliche Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien (Wissenschaftliche Prüfungsordnung) vom 13. März 2001 (GBl. 2001, S. 201).* Verfügbar unter: http://www.leu.bw.schule.de/berat/POrd/GYPO_WPO_Integr_Gesamtversion.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Baden-Württemberg: Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (Hrsg.), (2001). *Verordnung des Kultusministeriums über die Wissenschaftliche Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien (Wissenschaftliche Prüfungsordnung), Anlage A (incl. Änderungen vom 21.04.2004, KuU 10/2004, S. 122).* Verfügbar unter: http://www.leu.bw.schule.de/berat/POrd/GYPO_WPO_Anl_Integr_Gesamtversion.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Baumert, J. (2006). *Professionswissen von Lehrern und Lernzuwachs von Schülern (COACTIV).* [Vortrag auf der Wissenschaftlichen Fachtagung "Selbständiges Lernen im Fachunterricht" an der Universität Kassel am 28.04.2006]

Bayrisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (1976). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 25.Mai 1976.* München: Kommunalschriften-Verlag J. Jehle München GmbH.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (1979). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 25.Dezember 1979.* München: Kommunalschriften-Verlag J. Jehle München GmbH.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (1985). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 23. Juli 1985.* München: Kommunalschriften-Verlag J. Jehle München GmbH.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (1991). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 27.Dezember 1991.* München: Kommunalschriften-Verlag J. Jehle München GmbH.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (1995). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 12.Dezember 1995*. München: Kommunalschriften-Verlag J. Jehle München GmbH.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hrsg.), (2002). *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfungsordnung I – LPO I) in der Fassung der Bekanntmachung vom 7. November 2002*. München: Max Schick GmbH.

Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport (Hrsg.), (1999). *Verordnung über die Ersten Staatsprüfungen für die Lehrämter (1. Lehrerprüfungsordnung – 1. LPO –) vom 1. Dezember 1999*. Verfügbar unter: http://www.sensjs.berlin.de/schule/rechtsvorschriften/1lpo.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Berlin: Prüfungsamt für Lehramtsprüfungen Berlin(Hrsg.), (1999). *Prüfungsmeldung (Anlage) Mathematik (80 SWS).*Verfügbar unter: http://www.sensjs.berlin.de/schule/informationen_fuer_lehrer/lehrerbildung/pruefungsamt/lehramtspruefungen/formulare/mathematik_80.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Brandenburg: Ministerium für Bildung, Jugend und Sport (MBJS), (Hrsg.), (1996). *Ordnung der Ersten Staatsprüfungen für Lehrämter an Schulen (Lehramtsprüfungsordnung - LPO) vom 14. Juni 1994 (GVBl.II/94 S. 536) geändert durch Verordnung vom 19.05.1996 (GVBl.II/96 S. 399).* http://www.mdje.brandenburg.de/Landesrecht/gesetzblatt/texte/K55/5532-03.htm [Zugriff am 29.03.06].

Brandenburg: Ministerium für Bildung, Jugend und Sport (MBJS), (Hrsg.), (2001).*Ordnung der Ersten Staatsprüfungen für Lehrämter an Schulen (Lehramtsprüfungsordnung - LPO) vom 31. Juli 2001 (GVBl.II/01 S.494), geändert durch Artikel 1 der Verordnung vom 7. Dezember 2004 (GVBl.II/04 S.3).* Verfügbar unter: http://www.mdje.brandenburg.de/Landesrecht/gesetzblatt/texte/K55/5532-06.htm [Zugriff am 29.03.06].

Bremen: Der Senator für Bildung und Wissenschaft, (Hrsg.), (2003).*Verordnung über die Erste Staatsprüfung für das Lehramt an öffentlichen Schulen vom 7. Oktober 2003.* Verfügbar unter: http://www.zfl.uni-bremen.de/Ordnungen/Erste_Staatspruefung-7_10_2003.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Chi, M. T. H. (1984). Bereichsspezifisches Wissen und Metakognition. In F. E. Weinert & H. Kluwe (Hrsg.), *Metakognition, Motivation und Lernen* (211-232). Stuttgart u.a.: Kohlhammer.

Hamburg: Behörde für Bildung und Sport (Hrsg.), (1982). Verordnung über die Erste Staatsprüfung für Lehrämter an Hamburger Schulen Vom 18. Mai 1982. Verfügbar unter: http://www2.erzwiss.uni-hamburg.de/studium/stapr1.htm [Zugriff am 29.03.06].

Hamburg: Behörde für Bildung und Sport (Hrsg.), (1982). Lehramt an der Oberstufe-Allgemeinbildende Schulen - aus dem Sonderdruck aus dem Hamburgischen Gesetz- und Verordnungsblatt Nr. 26 vom 28. Mai 1982. Verfügbar unter: http://www2.erzwiss.uni-hamburg.de/studium/loaexa.htm [Zugriff am 29.03.06].

Hamburg: Behörde für Bildung und Sport (Hrsg.), (1982). Lehramt an der Grund- und Mittelstufe - aus dem Sonderdruck aus dem Hamburgischen Gesetz- und Verordnungsblatt Nr. 26 vom 28. Mai 1982. Verfügbar unter: http://www2.erzwiss.uni-hamburg.de/studium/grumiexa.htm [Zugriff am 29.03.06].

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effechts of Teachers' Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), (371-406). Verfügbar unter: http://www-personal.umich.edu/~dball/Publications/SelecteJournalArticles/HillRowanBallAERJSummer05.pdf [Zugriff am 26.10.2006].

Hofmeister, W. (2005). *Erläuterung der Klassifikationsmatrix zum ULME-Kompetenzstufenmodell*. In: bwp@ – Berufs- und Wirtschaftspädagogik online, Heft 8/2005.Verfügbar unter: http://www.bwpat.de/ausgabe8/hofmeister_bwpat8.pdf [Zugriff am 26.05.11]

Kessler, S. (2003). *Mathematische Grundbildung bei Erwachsenen – eine Untersuchung im Kontext von TIMSS & PISA.* Zulassungsarbeit im Fach Didaktik der Mathematik im Rahmen des Ersten Staatsexamens für das Lehramt an bayerischen Gymnasien, Universität Augsburg.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (31-53). Münster u. a.: Waxmann.

Lawson, A.E. (2003). *The Neurological Basis of Learning, Development and Discovery: Implications for Teaching Science and Mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77 (3), (247-271).

Mecklenburg-Vorpommern: Kultusministerium (Hrsg.), (2000). Verordnung über die Erste Staatsprüfung für Lehrämter an Schulen im Lande Mecklenburg-Vorpommern ab Matrikel 2000 (Lehrerprüfungsverordnung 2000 - LehPrVO 2000 M-V) vom 7. August 2000. Verfügbar unter: http://www.kultus-mv.de/_sites/bibo/vo/schule/lehrerpruef00.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Mietzel, G. (2003). *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens.* Göttingen: Hogrefe, Verlag für Psychologie.

Niedersachsen: Kultusministerium (Hrsg.), (1998). *Verordnung über die Ersten Staatsprüfungen für Lehrämter im Land Niedersachsen vom 15.April 1998 (Nds.GVBl. S. 399), geändert durch VO v. 11.Juli 2000 (Nds.GVBl. S.155), v. 17.Oktober 2002 (Nds.GVBl. Nr.29/2002 S.415)und v. 26.Januar 2006 (Nds.GVBl. Nr.3/2006 S.33).* Verfügbar unter: http://www.schure.de/2041101/pvolehr1/pvolehr1.htm [Zugriff am 30.03.06].

Niedersachsen: Kultusministerium (Hrsg.), (1998). *Verordnung über die Ersten Staatsprüfungen für Lehrämter im Land Niedersachsen vom 15.April 1998 (Nds.GVBl. S. 399), geändert durch VO v. 11.Juli 2000 (Nds.GVBl. S.155), v. 17.Oktober 2002 (Nds.GVBl. Nr.29/2002 S.415)und v. 26.Januar 2006 (Nds.GVBl. Nr.3/2006 S.33) – Anlage.* Verfügbar unter: http://www.schure.de/2041101/6907001.htm [Zugriff am 30.03.06].

Nordrhein-Westfalen: Ministerium für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), (2003). *Ordnung der Ersten Staatsprüfungen für Lehrämter an Schulen (Lehramtsprüfungsordnung - LPO) vom 27. März 2003 (GV. NRW. S. 182).* Verfügbar unter: http://www.bildungsportal.nrw.de/BP/Schule/System/Recht/Vorschriften/Lehrerausbildung/LPO03.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens.* München: Franke.

Rheinland-Pfalz: Ministeriums für Bildung, Frauen und Jugend (1982). *Landesverordnung über die Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien* ***v****om 7. Mai 1982 GVBl. S. 157****, Fundstelle:*** *GVBl 1982, S. 157, zuletzt geändert durch Verordnung vom 13.9.2005, GVBl. 2005, S. 372.* Verfügbar unter: http://rlp.juris.de/rlp/gesamt/GymLehr1StPrV_RP.htm#GymLehr1StPrV_RP_rahmen [Zugriff am 29.03.06].

Saarland: Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft (Hrsg.), (2003). *Verordnung zur Änderung der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen vom 20. März 2003, aufgrund des § 21 des Saarländischen Lehrerbildungsgesetzes (SLBiG) vom 23. Juni 1999 (Amtsbl. S. 1054) und des § 20 Abs. 2 des Saarländischen Beamtengesetzes (SBG) in der Fassung der Bekanntmachung vom 27. Dezember 1996 (Amtsbl. 1997, S. 301), zuletzt geändert durch das Gesetz vom 27. November 2002 (Amtsbl. S. 2505).* Verfügbar unter: http://www.uni-saarland.de/mediadb/organisation/zentrale_einrichtungen/zfl/Ordnungen/APO-Lehramt-Gymnasien-undGesamtschulen.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Saterdag, H. (2003). Für Professionalität und Praxisbezug der Lehrerbildung – Das Duale Studien- und Ausbildungskonzept des Landes Rheinland-Pfalz. In H. Merkens (Hrsg.), *Lehrerbildung in der Diskussion* (59-97). Opladen: Leske und Budrich.

Sachsen: Staatsministerium für Kultus (Hrsg.), (2000). *Verordnung des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus über die Erste Staatsprüfung für Lehrämter an Schulen im Freistaat Sachsen (Lehramtsprüfungsordnung I – LAPO I) vom 13. März 2000, rechtsbereinigt mit Stand vom 29. Dezember 2001, auf Grund von § 40 Abs. 3 des Schulgesetzes für den Freistaat Sachsen (SchulG) vom 3. Juli 1991 (SächsGVBl. S. 213), zuletzt geändert durch Artikel 1 des Gesetzes vom 29. Juni 1998 (SächsGVBl. S. 271).* Verfügbar unter: http://marvin.sn.schule.de/~rsa_l/rsa/pala/erste_staatspr.htm#oben [Zugriff am 29.03.06].

Sachsen-Anhalt: *Information Mathematik (Lehramt an Gymnasien) von der Martin-Luther-Universität Halle.* Verfügbar unter: http://www.verwaltung.uni-halle.de/STUDIUM/stualf/mathe_gym.htm [Zugriff am 29.03.06].

Schleswig-Holstein: Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung, Kultur (Hrsg.). (2003). *Landesverordnung über die Ersten Staatsprüfungen der Lehrkräfte (Prüfungsordnung Lehrkräfte I - POL I) vom 11.09.2003, Gl.-Nr.: 221-7-91 Fundstelle: GVOBl. Schl.-H. 2003 S. 440, Änderungsdaten: NBl. Schl.-H. – H – 2004 S. 303.* Verfügbar unter: http://www.uni-kiel.de/140/sta/0-2-13_neu.pdf [Zugriff am 29.03.06].

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematical learning and teaching* (334-370). New York: Macmillan.

Thüringen: Kultusministerium (Hrsg.), (1994). *Thüringer Verordnung über die Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Regelschulen vom 6. Mai 1994 (GVBl. S. 664), zuletzt geändert durch Verordnung vom 18. Februar 2000 (GVBl. S. 66).* Verfügbar unter: http://www.uni-erfurt.de/lpa/ [Zugriff am 29.03.06].

Zazkis, R & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education* Vol. 4. (497-504). Bergen, Norway.

Kapitel 7

Brophy, J.E. & Good, T.L. (1986). Teacher behaviour and student achievement. In M.C. Wittrock (Hrsg.), *Handbook of research on teaching* (328-375). London: Macmillian.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S. et al. (2006): Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht; eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFGSchwerpunktprogramms* (54-82). Münster: Waxmann.

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. In D. C. Berliner. & R. Calfee, R. (Hrsg.), *Handbook of Educational* Psychology (709-725). New York: Simon & Schuster Macmillian.

Chott, P. (2004). Ansätze zur Entwicklung einer Fehlerkultur. *Lernchancen*, 39, (53-56).

Clausen, M. (2002). *Qualität von Unterricht – Eine Frage der Perspektive?* Waxmann: Münster.

Clausen, M., Reusser, K. & Klieme E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein instruktionspsychologischer Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft*, 31 (2), 122-141.

Deci, E.L. & Ryan, R.M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik*, 39, (223-238)

Diedrich, M. Thußbas, C. & Klieme, E. (2002). Professionelles Lehrerwissen und selbstberichtete Unterrichtspraxis im Fach Mathematik. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (107-123). Weinheim: Beltz

Fend, H. (1998). *Qualität im Bildungswesen. Schulforschung zu Systembedingungen, Schulprofilen und Lehrerleistung.* Weinheim: Juventa.

Fisher, C.W: (1995). Academic learning time. In L.W. Anderson (Hrsg.), *International Encyclopedia of Teaching and Teacher Education* (430-434). Oxford: Pergamon.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (39-57). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Gage, N.L. & Berliner, D.C. (1996). *Pädagogische Psychologie*. Weinheim: Beltz.

Heckhausen, H. (1989). *Motivation und Handeln.* Berlin: Springer.

Helmke, A. (2003). *Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern.* Seelze: Kallmayer.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (234-249). Münster u. a.: Waxmann.

Heinze, A. (2006). Fehlerkultur im Mathematikunterricht aus Schülerperspektive – Ergebnisse einer quantitativen Studie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 251-254). Hildesheim: Franzbecker.

Heinze, A., Kessler, S., Kuntze, S., Lindmeier, A., Moormann, M., Reiss, K., Rudolph-Albert, F. & Zöttl, L. (2007). Kann Paul besser argumentieren als Marie? Betrachtungen zur Beweiskompetenz von Mädchen und Jungen aus differentieller Perspektive. Eine Reanalyse von vier empirischen Untersuchungen. *Journal für Mathematikdidaktik 28*(2), (148-167).

Hofe, R. vom, Pekrun, R., Kleine, M., & Goetz, T. (2002). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen (Project for the Longitudinal Analysis of Mathematics Achievement: Development of the Regensburg Mathematics Achievement Test for Grades 5-10). In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (83-100). Weinheim: Beltz.

Hyde, J. S. (2005). The Gender Similarities Hypothesis. *American Psychologist*, 60, (581-592).

Krapp, A. (1998). Entwicklung und Förderung von Interessen im Unterricht. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 44, (185-201).

Krapp A. & Weidenmann, B. (Hrsg.) (2001). *Pädagogische Psychologie*. Weinheim: Beltz.

Kuntze, S. (2006). *Themenstudienarbeit - Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren.* [Dissertation]. München: Verlag Dr. Hut.

Klieme, E., Artelt, C., Hartig, J., Jude, N., Köller, O., Prenzel, M., Schneider, W. & Stanat, P. (2010) (Hrsg.), *PISA 2009. Bilanz nach einem Jahrzehnt.* Münster: Waxmann.

Leder, G. C. & und Forgasz, H. J. (2002). Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (95-113). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Lipowsky, F., Thußbas, C., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2003). Professionelles Lehrerwissen, selbstbezogene Kognitionen und wahrgenommene Schulumwelt - Ergebnisse einer kulturvergleichenden Studie deutscher und schweizerischer Mathematiklehrer. *Unterrichtswissenschaft*, 31(3), 206-237.

Möller, K., Hardy, I., Jonen, A., Kleickmann, T. & Blumberg, E. (2006). Naturwissenschaften in der Primarstufe. Zur Förderung konzeptuellen Verständnisses durch Unterricht und zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In Prenzel, M. & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (54-82). Münster u. a.: Waxmann.

OECD (2004). *Problem solving for tomorrow's world – First measures of cross – curricular skills from PISA 2003.* Paris: OECD Publications.

Oser, F. (2001). Standards: Kompetenzen von Lehrpersonen. In F. Oser & J. Oelkers (Hrsg.). *Die Wirksamkeit der Lehrerbildungssysteme. Von der Allrounderausbildung zur Ausbildungprofessioneller Standards* (215-342). Chur: Rüegger.

Pekrun, R. & vom Hofe, R. (2001). PISA-Längsschnittstudie Mathematik: Entwicklungsverläufe, individuelle Voraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülern der Sekundarstufe I. Projektphase 2002 – 2004. Verfügbar unter: http://www.ipn.uni.kiel.de/projekte/biqua/biqua.htm. [Zugriff am 04.05.2005].

Pekrun, R., & Zirngibl, A. (2004). Schülermerkmale im Fach Mathematik (Student characteristics in the domain of mathematics). In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (191-210). Münster: Waxmann.

Pekrun, R., vom Hofe, R., Blum, W., Goetz, T., Wartha, S., Frenzel, A., & Jullien, S. (2006). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms.* Münster: Waxmann.

Pekrun, R., Goetz, R., vom Hofe, R., Blum, W., Jullien, S., Zirngibl, A., Kleine, M., Wartha, S. & Jordan, A. (2004). Emotionen und Leistung im Fach Mathematik: Ziele und erste Befunde aus dem „Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik" (PALMA). In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.): *Studien zur Verbesserung der Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Schülerförderung und Unterrichtsentwicklung.* Münster: Waxmann.

Petko,D.; Waldis, M., Pauli, C. & Reusser, K. (2003). Methodologische Überlegungen zur videogestützten Forschung in der Mathematikdidaktik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35* (6), 265–280.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolff, H.-G., Rost, J. & Schiefele, U. (2004). (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann.

Pekrun, R., Goetz, T., & Perry, R.P. (2005). *Academic Emotions Questionnaire (AEQ). User's manual.* Department of Psychology, University of Munich.

Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Projektserver SINUS.* Bayreuth: Universität.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (51-64). Weinheim: Beltz.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschulussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (194-208). Münster u. a.: Waxmann.

Rolka, K. (2006). *Eine empirische Studie über Beliefs von Lehrenden an der Schnittstelle Mathematikdidaktik und Kognitionspsychologie,* Online-Dissertation.
Verfügbar unter: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-15754/Dissertation_Katrin_Rolka.pdf [Zugriff am 26.04.11]

Rudolph, F. & Reiss, K. (2005). Charakteristika von Schülergruppen mit verschiedenen mathematikbezogenen Interessenprofilen. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (493-496). Hildesheim: Franzbecker.

Reiss, K.. (2005). *Die Bedeutung von Interesse und Motivation für das Mathematiklernen.* [Vortrag an der Universität Kassel am 17.01.2005].

Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematical learning and teaching* (334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1998).Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education,* 4(1), 1-94.

Schoy-Lutz, M. (2005). Fehlerkultur im Mathematikunterricht, Dissertation, Hildesheim: Berlin.

Spychinger, M., Mahler, F., Hascher, T. & Oser, F. (1998). Fehlerkultur aus der Sicht von Schülerinnen und Schüler. Schriftreihe des Pädagogischen Institutes der Universität Fribourg.

Stern, E. & Staub, F. (2000). Mathematik lehren und verstehen: Anforderungen an den Unterricht. In E. Inckermann, J. Kahler & A. Speck-Hamdan, *Sich Lernen leisten* (90-100). Neuwied: Luchterhand.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 93, 144–155.

Törner, G. (2002). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (73-94). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Törner, G. (2000). Domain specific beliefs and calcalus. Some theoretical remarks and phenomenological observations. In E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings of the Workshop in Oberwolfach, Nov. 21-27, 1999*, (127-137). Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, No 457. Duisburg: Universität Duisburg.

Weinert, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (17-31). Weinheim: Beltz .

Kapitel 8

Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and knowledge. In D. C. Berliner. & R. Calfee, R. (Hrsg.), *Handbook of Educational* Psychology (709-725). New York: Simon & Schuster Macmillian.

Diedrich,M. Thußbas, C. & Klieme E. (2002). Professionelles Lehrerwissen und selbstberichtete Unterrichtspraxis im Fach Mathematik. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (107-123). Weinheim: Beltz

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (39-57). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Heckhausen, H. (1989). *Motivation und Handeln.* Berlin: Springer.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (234-249). Münster u. a.: Waxmann.

Heinze, A. (2006). Fehlerkultur im Mathematikunterricht aus Schülerperspektive – Ergebnisse einer quantitativen Studie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 251-254). Hildesheim: Franzbecker.

Hofe, R. vom, Pekrun, R., Kleine, M., & Goetz, T. (2002). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen (Project for the Longitudinal Analysis of Mathematics Achievement: Development of the Regensburg Mathematics Achievement Test for Grades 5-10). In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (83-100). Weinheim: Beltz.

Kuntze, S. (2006). *Themenstudienarbeit - Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren.* [Dissertation]. München: Verlag Dr. Hut.

Leder, G. C. & und Forgasz, H. J. (2002). Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (95-113). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Lipowsky, F., Thußbas, C., Klieme, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2003). Professionelles Lehrerwissen, selbstbezogene Kognitionen und wahrgenommene Schulumwelt - Ergebnisse einer kulturvergleichenden Studie deutscher und schweizerischer Mathematiklehrer. *Unterrichtswissenschaft,* 31(3), 206-237.

Möller, K., Hardy, I., Jonen, A., Kleickmann, T. & Blumberg, E. (2006). Natruwissenschaften in der Primarstufe. Zur Förderung konzeptuellen Verständnisses durch Unterricht und zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In Prenzel, M. & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (54-82). Münster u. a.: Waxmann.

OECD (2004). *Problem solving for tomorrow's world – First measures of cross – curricular skills from PISA 2003.* Paris: OECD Publications.

Pekrun, R. & vom Hofe, R. (2000). *PISA-Langsschnittstudie Mathematik: Entwicklungsverläufe, individuelle Voraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülern der Sekundarstufe I.* [Neuantrag an die Deutsche Forschnungsgemeinscahft]. Verfügbar unter: http://www.ipn.uni.kiel.de/projekte/biqua/biqua.htm. [Zugriff am 04.05.2005].

Pekrun, R., & Zirngibl, A. (2004). Schülermerkmale im Fach Mathematik (Student characteristics in the domain of mathematics). In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, H.-G. Rolff, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (191-210). Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolff, H.-G., Rost, J., & Schiefele, U. (2004), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* . Münster: Waxmann.

Reiss, K. (2002). *Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Projektserver SINUS.* Bayreuth: Universität.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (51-64). Weinheim: Beltz.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschulussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (194-208). Münster u. a.: Waxmann.

Rudolph, F. & Reiss, K. (2005). Charakteristika von Schülergruppen mit verschiedenen mathematikbezogenen Interessenprofilen. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (493-496). Hildesheim: Franzbecker.

Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematical learning and teaching* (334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1998).Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education,* 4(1), 1-94.

Spychinger, M., Mahler, F., Hascher, T. & Oser, F. (1998). Fehlerkultur aus der Sicht von Schülerinnen und Schüler. Schriftreihe des Pädagogischen Institutes der Universität Fribourg.

Törner, G. (2002). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (73-94). Dordrecht: Kluwer Acadamic Publishers.

Törner, G. (2000). Domain specific beliefs and calcalus. Some theoretical remarks and phenomenological observations. In E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics. Proceedings of the Workshop in Oberwolfach, Nov. 21-27, 1999*, (127-137). Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, No 457. Duisburg: Universität Duisburg.

Stern, E. & Staub, F. (2000). Mathematik lehren und verstehen: Anforderungen an den Unterricht. In E. Inckermann, J. Kahler & A. Speck-Hamdan, *Sich Lernen leisten* (90-100). Neuwied: Luchterhand.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 93, 144–155.

Weinert, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (17-31). Weinheim: Beltz .

Kapitel 9

Bortz, J. & Döring, N. (2005). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler.* Heidelberg: Springer.

Cronbach, L.J. (1951). Coefficent Alpha and the Internal Structure of Tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.

Heinze, A., Kessler, S., Kuntze, S., Lindmeier, A., Moormann, M., Reiss, K., Rudolph-Albert, F. & Zöttl, L. (2007). Kann Paul besser argumentieren als Marie? Betrachtungen zur Beweiskompetenz von Mädchen und Jungen aus differentieller Perspektive. Eine Reanalyse von vier empirischen Untersuchungen. *Journal für Mathematikdidaktik 28*(2), (148-167).

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effechts of Teachers' Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), (371-406).

Hyde, J. S. (2005). The Gender Similarities Hypothesis. *American Psychologist*, 60 (6), (581-592).

Lienert, G. A. & Raatz, U. (1998). *Testaufbau und Testanalyse.* Weinheim: Beltz.

Möller, K., Hardy, I., Jonen, A., Kleickmann, T. & Blumberg, E. (2006). Naturwissenschaften in der Primarstufe. Zur Förderung konzeptuellen Verständnisses durch Unterricht und zur Wirksamkeit von Lehrerfortbildungen. In Prenzel, M. & Allolio-Näcke, L. (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (54-82). Münster u. a.: Waxmann.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rolff, H.-G., Rost, J., & Schiefele, U. (2004), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland - Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* . Münster: Waxmann.

Zazkis, R & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education* Vol. 4. (497-504). Bergen, Norway. Einzusehen unter: http://www.sfu.ca/~zazkis/publications/RR082_Zazkis.pdf [Zugriff am 26.10.2006], oder http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR082_Zazkis.pdf [Zugriff am 26.10.2006].

Kapitel 10

Bass, H. & Ball, D.L. (2004): A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: The case of mathematical reasoning. In J. Wang & B. Xu (Eds.), Trends and challenges in mathematics education (295-313). Shanghaei: East China Normal Univerity Press.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. American Educational Research Journal, *47*, 133-180.

Ericsson, K. A., Krampe, R. Th., & Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review*, 100(3), 363-406.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (31-53). Münster u. a.: Waxmann.

Kapitel 11

Bohnsack, F. (2000). Staatliche Lehrerausbildung heute. In: Bohnsack, F./Leber, S. (Hrsg.): *Alternative Konzepte für die Lehrerbildung*. 1. Bd. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Czerwenka, K. & Nölle, K. (2001). Was wird im Lehrerstudium gelernt und was lässt sich davon in die zweite Phase übertragen? In N. Seibert (Hrsg.). *Probleme der Lehrerbildung* (113-130). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Flach, H., Lück, J. & Preuss, R. (1997). *Grifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft - Lehrerausbildung im Urteil ihrer Studenten*, (76-88). Frankfurt am Main u.a.: Lang.

Herzog, W. (2005). Müssen wir Standards wollen? *Zeitschrift für Pädagogik*, 51, (252-258).

Helsper, W. (2002). Wissen, Können, Nicht-Wissen-Können: Wissensformen des Lehrers und Konsequenzen für die Lehrerbildung. In Zentrum für Schulforschung und Fragen der Lehrerbildung (ZSL) der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Hrsg.), *Studien zur Schul-& Bildungsforschung* (65-86). Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Klippert, H. (2004). *Lehrerbildung – Unterrichtsentwicklung und Aufbau neuer Routinen*, (111-128). Weinheim u.a.: Beltz.

KMK. (2008). *Lehrerbildung in Deutschland -Standards und inhaltliche Anforderungen.* Verfügbar unter: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/Ohne_Datum/00_00_00-Lehrerbildung-in-Deutschland.pdf [Zugriff am 04.01.2011]

Kipper, H. (2002). Pädagogisches Wissen – orientiert an der Disziplin oder an der Profession?. In Zentrum für Schulforschung und Fragen der Lehrerbildung (ZSL) der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Hrsg.), *Studien zur Schul-& Bildungsforschung* (25-41). Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Kolbe, F.-U. (1997). Lehrerbildung ohne normative Vorgaben für das praktische Handlungswissen?. In M. Bayer, U. Carle & J. Wildt (Hrsg.), *Brennpunkt: Lehrerbildung*, (121-137).

Saterdag, H. (2003). Für Professionalität und Praxisbezug der Lehrerbildung – Das Duale Studien- und Ausbildungskonzept des Landes Rheinland-Pfalz. In: Merkens, H. (Hrsg.), *Lehrerbildung in der Diskussion* (59-97). Opladen: Leske und Budrich.

Terhart, Erhart (Hrsg).(2000). *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. (22-35, 66-73, 98-108, 152-157).* Weinheim u. a.: Beltz

Terhart, E. (2001). *Lehrerberuf und Lehrerbildung*, (46-49, 115- 129, 191-214, 239-244). Weinheim u. a.: Beltz.

Terhart, E. (2002). Was müssen Lehrer wissen und können? In: Zentrum für Schulforschung und Fragen der Lehrerbildung (ZSL) der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Hrsg.), *Studien zur Schul-& Bildungsforschung* (17-23). Weinheim: Deutscher Studienverlag.

Tenorth, H.-E. (2006). Vom “Schweigen der Fächer” zu ihrer Ausgrenzung. In C. Kaune, I. Schwank & J. Sjuts (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens* (123-137). Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg.

Wissenschaftsrat (Hrsg.), (2001). *Empfehlungen zur künftigen Struktur der Lehrerbildung* (11-42). Köln: Wissenschaftsrat.